Introdução à Análise Espectral de Séries Temporais

PEDRO A. MORETTIN

1. Introdução. O objetivo principal deste trabalho é apresentar certos conceitos e aspectos fundamentais sobre análise espectral de séries temporais e suas aplicações a diversos campos de atividades. A principal dificuldade na aplicação desta análise reside no fato que a teoria necessária requer um conhecimento razoável de Matemática, Probabilidade e Estatística, ao passo que o usuário, em geral, desconhece (ou não está preparado para assimilar) os conceitos básicos. Por outro lado, a ferramenta básica na análise de séries temporais é a Análise Harmônica, que normalmente não faz parte do currículo de formação de um Estatístico, mas seus rudimentos são ensinados ao Engenheiro, por exemplo.

A utilidade da Análise Espectral baseia-se no fato que estamos trabalhando no domínio de freqüência, onde as interpretações físicas dos fenômenos sob consideração são imediatas ou pelo menos mais fáceis de serem feitas. Basicamente, a análise espectral consiste em particionar a série em diversas componentes de freqüência. Uma série temporal é uma função aleatória de uma variável que pode ser o tempo, espaço, ou mesmo pode ser um vetor representando vários parâmetros, caso que temos uma série multidimensional. Genericamente, podemos pensar uma série temporal como sendo um vetor X(t), de ordem r, digamos, e t, por sua vez, pertence a $\mathbb{Z}^p$ ou $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{Z}$ sendo o conjunto dos inteiros e $\mathbb{R}$ o conjunto dos reais. Por exemplo, seja

$$\mathrm{X(t)} = \begin{bmatrix} X_1(\mathrm{t}) \\ X_2(\mathrm{t}) \\ X_3(\mathrm{t}) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

onde $X_1(\mathbf{t})$ é a altura, $X_2(\mathbf{t})$ é a temperatura e $X_3(\mathbf{t})$ é a pressão da superfície de uma parte do oceano e $\mathbf{t}$ representa a terna (tempo, latitude, longitude). Aqui $r = 3$ e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$.

Os problemas de aplicação da análise espectral, introduzida por volta de 1950 por Bartlett e Tukey, podem ser classificados em 3 categorias (Jenkins and Watts (1969)):

(a) Construção de Modelos;
(b) Planejamento de Experimentos;
(c) Estudos de Respostas de Freqüências.

Poços de Caldas

É no terceiro caso que encontramos as aplicações mais relevantes. Considere o sistema linear

$$(1.2) \qquad Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(u)X(t-u)du,$$

onde $X(t)$ é a entrada e $Y(t)$ a saída do sistema e $a(u)$ é a função de impulso. Então, o problema fundamental é o de estimar $a(u)$, ou sua transformada

$$(1.3) \qquad A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(u)\ e^{-i\lambda u}\ du,$$

chamada *função de transferência* ou *função resposta de freqüência*. Estimada $A(\lambda)$ dizemos que o sistema está *indentificado*. Pode-se provar que os espectros de $X(t)$ e $Y(t)$, $f_{XX}(\lambda)$ e $f_{YY}(\lambda)$, respectivamente, são relacionados pela fórmula

$$(1.4) \qquad f_{YY}(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_{XX}(\lambda),$$

ou, escrevendo-se $A(\lambda) = G(\lambda).\ e^{i\phi(\lambda)}$

$$(1.5) \qquad f_{YY}(\lambda) = |G(\lambda)|^2 \cdot f_{XX}(\lambda).$$

$G(\lambda)$ diz-se o *ganho* e $\phi(\lambda)$ a *fase* do sistema.

Portanto, podemos estimar $A(\lambda)$, conhecendo-se estimadores de $f_{XX}(\lambda)$ e $f_{YY}(\lambda)$.

Problemas de interesse nesta área incluem aqueles de planejar a construção de pistas de pouso e estruturas de aeronaves.

A principal metodologia matemática empregada na análise espectral de séries temporais é a Análise Harmônica. Isto porque a análise é feita para séries resultantes de experimentos invariantes sob translações do tempo. Isto significa que estamos considerando processos estocásticos estacionários, isto é, funções $\{X(t), t \in T\}$ tais que $\{X(t_1), \ldots, X(t_k)\}$ tem a mesma estrutura probabilística que $\{X(t_1+u), \ldots, X(t_k+u)\}$, para todo u, $t_1, \ldots, t_k$ em T.

Historicamente, o uso da Análise Harmônica para a procura de periodicidades remota a Stokes (1879) e Schuster (1898). Este introduziu o periodograma, cujo uso foi aperfeiçoado por Slutsky (1934, 1937) e Wiener (1930). Veja-se também Tukey (1949), Bartlett (1946) e Blackman e Tukey (1959).

As aplicações da análise freqüêncial incluem campos como Física, Engenharia, Geofísica, Medicina, Economia, Biologia, Psicologia, Oceanografia.

Recentemente, a atenção está voltada para o uso de outros sistemas ortogonais de funções, na análise de séries temporais. É claro que as classes de processos para os quais tais análises serão aplicáveis serão outras. Outros sistemas propostos são os poliômios de Legrendre, polinômios de Bernoulli, as funções de Walsh. Este último tem sido bastante explorado, dadas suas crescentes aplicações em engenharia de comunicações. Ver, por exemplo, Harmuth (1969), Bass (1970) e Morettin (1972).

2. **Definições Básicas**. Seja $\{X(t),\ t \in T\}$ um processo estocástico, tal que para cada t, $X(t)$ é uma variável aleatória (v.a.) com valores complexos. O nome série temporal tem sido adotado para o caso em que t é tempo. Mas já salientamos que, para nós, t poderá ter outros significados. A série diz-se de *segunda ordem* se $E\{|X(t)|^2\} < \infty$, para todo $t \in T$. Definimos a *média* e a *função de covariância* da série como sendo

$$E\{X(t)\} = \mu(t), \tag{2.1}$$

$$E\{[X(t) - \mu(t)]\ [\overline{X(s) - \mu(s)}]\} = B(t, s), \tag{2.2}$$

onde a barra indica conjugado complexo. Sem perda de generalidade suporemos $\mu(t) = 0$, logo $B(t, s) = E\{X(t)\overline{X(s)}\}$. Toda função de covariânçia é não negativa definida, pois

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot \bar{a}_j\ B(t_i, t_j) = E\left|\sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i)\right|^2 \geq 0,$$

para qualquer coleção $t_1, \ldots, t_n$ de T e qualquer coleção de números complexos $a_1, \ldots, a_n$. Reciprocamente, se $B(t, s)$ é uma função não-negativa definida em $T \times T$, poderemos sempre encontrar uma série de segunda ordem $\{X(t)\ t \in T\}$, cuja função de covariância é $B(t, s)$.

Dizemos que um processo estocástico de 2.ª ordem $\{X(t),\ t \in T\}$ é *contínuo em média quadrática no ponto* t se

$$E\{|X(t+h) - X(t)|^2\} \to 0, \quad \text{quando } h \to 0. \tag{2.3}$$

$\{X(t),\ t \in T\}$ diz-se contínuo em média quadrática (m.q.) se ele for contínuo em m.q. para todo $t \in T$. A relação que existe entre continuidade em m.q.

de $X(t)$ e continuidade $B(t, s)$ é dada pela seguinte proposição:

(a) $\{X(t), t \in T\}$ é contínuo em m.q. no ponto t se e somente se $B(t, s)$ é contínua no ponto diagonal (t, t);

(b) se $B(t, s)$ é contínua em todo ponto diagonal $t = s$, então $B(t, s)$ é contínua em todo $T \times T$.

Para nossos propósitos definiremos integrais estocásticas de Riemann e Riemann-Stieltjes da forma

$$\int_a^b f(t)X(t)dt \tag{2.4}$$

ou

$$\int_a^b f(t)dX(t), \tag{2.5}$$

respectivamente, onde $[a, b]$ é um intervalo, finito ou infinito, $f(t)$ é uma função não aleatória e $X(t)$ tem média zero e função de covariância $B(t, s)$. Estas integrais são definidas como limites em m.q. de somas aproximantes (v.a.) por demais conhecidas para serem repetidas aqui. Condições suficientes para a existência de (2.4) e (2.5) são dadas em Cramér e Leadbetter, (1967).

Já definimos antes o que vem a ser um processo estritamente estacionário, isto é, um processo $\{X(t), t \in T\}$ tal que todas as suas distribuições de dimensão finitas são invariantes sob translações de t. Vamos definir agora uma outra classe de processos. Dizemos que um processo de segunda ordem $\{X(t), t \in T\}$ diz-se *estacionário em sentido amplo* ou *fracamente estacionário* se a função de covariância depende apenas de diferenças de tempo, isto é,

$$E\{X(t)\ X(s)\} = B(t - s) \tag{2.6}$$

(Estamos supondo $E\{X(t)\} = 0$). Em geral, se $X(t)$ é estritamente estacionário isto não implica que $X(t)$ seja fracamente estacionário. Todavia, se $E\{|X(t)|^2\} < \infty$ um processo estritamente estacionário é também fracamente estacionário, pois (2.6) então é válida; também, qualquer característica da função de distribuição conjunta de $X(t_1 + u), \ldots, X(t_n + u)$ será independente de u. Em particular, isto é valido para processos normais ou gaussianos, isto é, processo $X(t)$ tais que, para cada t, $X(t)$ seja uma v.a. gaussiana. Ainda mais, para processos gaussianos *reais* os dois conceitos são equivalentes.

Pelo que vimos anteriormente, $\{X(t),\ t \in T\}$ sendo estacionário fracamente, segue-se que $X(t)$ é contínuo em m.q. se e somente se $B(u)$ é contínua no ponto $t = 0$. Segue-se também que se $B(u)$ é contínua para $u = 0$ será contínua em tôda parte. De agora em diante sempre suporemos que o processo $X(t)$ seja contínuo em m.q..

3. Análise Espectral de Séries Estacionárias. Antes de enunciar os resultados fundamentais, que darão as representações espectrais de um processo estacionário (em sentido amplo, de agora em diante) $X(t)$ e de sua função de covariância $B(u)$, vamos começar com um exemplo simples. Considere $t \in R$ e $X(t)$ com média zero, real e gaussiano, (inclua eventualmente o caso em que a distribuição é singular) com funções de variância (que determinam o processo)

(3.1) $$B(t_i, t_j) = E\{X(t_i)X(t_j)\},\quad i, j = 1, \ldots, n,$$

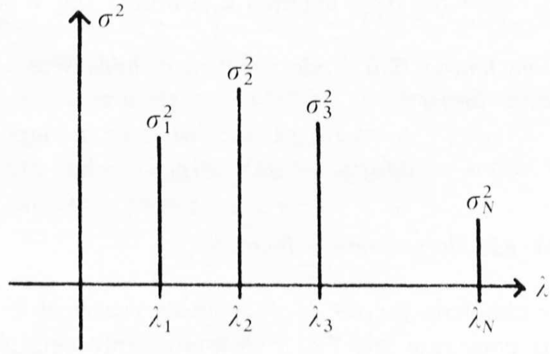
e, devido à estacionaridade,

(3.2) $$B(u) = E\{X(t)X(t+u)\}.$$

Suponha que $X(t)$ seja dado por

(3.3) $$X(t) = \sum_{j=1}^{N} [a_j \cos \lambda_j t + b_j \operatorname{sen} \lambda_j t]$$

onde $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N$ são constantes (freqüências) e a_j, b_j são v.a. independentes, normais, média 0 e variância $\sigma_j^2, j = 1, \ldots, N$. Dizemos que $\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2\}$ é o *espectro* de $X(t)$. Ver figura 1.



Obtemos o que se chama de um espetro de linhas. E fácil ver que $X(t)$ definido desta maneira é gaussiano, de média 0, estacionário e com função de covariância

$$(3.4) \qquad B(u) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2 \cos \lambda_j u.$$

A relação (3.4) é dita de Wiener-Khintchine e mostra o espectro e a função de covariância com pares de uma transformada de Fourier. No caso genérico de um processo gaussiano, de média zero, a fórmula (3.3) toma a forma

$$(3.5) \qquad X(t) = \int_0^{\infty} [\cos \lambda t \; dU(\lambda) + \operatorname{sen} \lambda t \; dV(\lambda)]$$

onde podemos pensar $dU(\lambda)$, $dV(\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq \infty$, como v.a. independentes, gaussianas, com média zero e variâncias

$$(3.6) \qquad E\{[dU(\lambda)]^2\} = E\{[dV(\lambda)]^2\} = dF(\lambda),$$

e $F(\lambda)$ numa função limitada, não decrescente, tal que a fórmula (3.4) torna-se

$$(3.7) \qquad B(u) = \int_0^{\infty} \cos \lambda u \; dF(\lambda).$$

Para o processo (3.3), $dU(\lambda_j) = a_j$, $dV(\lambda_j) = b_j$ $j = 1, \ldots, N$ e $dU(\lambda) = dV(\lambda) = 0$ para as demais freqüências e $E[dU(\lambda_j)]^2 = E[dV(\lambda_j)]^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, \ldots, N$.

Vejamos, agora, o caso genérico de um processo estacionário $\{X(t),\ t \in T\}$, com valores complexos, média zero e função de covariância $B(u)$. As representações (3.5) e (3.7) são dadas por dois teoremas, cujas provas omitiremos e podem ser encontradas em Bochner (1933) e Cramér-Leadbetter (1967). Suponha $T = \mathbb{R}$.

Vimos que $B(u)$ é não negativa definida e contínua por hipótese.

TEOREMA 3.1. *Uma função $B(u)$ é não negativa definida se e somente se pode ser representada na forma*

$$(3.8) \qquad B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} \; dF(\lambda),$$

onde $F(\lambda)$ é real, não decrescente e limitada.

A função $F(\lambda)$ é chamada *função de distribuição espectral* de $X(t)$, definida a menos de uma constante. Se $F(\lambda)$ é absolutamente contínua, a derivada

$f(\lambda) = F'(\lambda)$ é a *função densidade espectral de* $X(t)$. O problema fundamental da análise espectral é estimar $f(\lambda)$, a partir de observações do processo $X(t)$ num intervalo de tempo.

O teorema que segue é chamado o teorema espectral ou Representação de Cramér do processo estacionário $X(t)$. Dizemos que $Y(t)$ tem *incrementos ortogonais* se, para quaisquer $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$,

$$E\{[Y(t_4) - Y(t_3)]\ [Y(t_2) - Y(t_1)]\} = 0. \tag{3.9}$$

Em particular, se $E\{Y(t)\} = 0$ e $Y(t)$ tem incrementos independentes, então $Y(t)$ terá incrementos ortogonais.

TEOREMA 3.2. *Se $X(t)$ é um processo estacionário, então*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dY(\lambda), \tag{3.10}$$

onde $Y(\lambda)$ é um processo com incrementos ortogonais, a integral estocástica sendo entendida em m.q.. O processo $Y(\lambda)$ é definido a menos de uma v.a. aditiva e, se $Y(-\infty) = 0$, temos

$$E\{Y(\lambda)\} = 0,\ E\{|Y(\lambda)|^2\} = F(\lambda),\ E\{|dY(\lambda)|^2\} = dF(\lambda). \tag{3.11}$$

O processo $Y(\lambda)$ é o processo espectral associado com $X(t)$. A representação (3.10) dá $X(t)$ como uma "soma" de oscilações harmônicas elementares $e^{it\lambda}dY(\lambda)$. Se $T=\mathbb{Z}$, os limites de integração nas fórmulas (3.8) e (3.10) são substituidas por $-\pi$ e π, respectivamente.

Em particular, para $u=0$, a relação (3.8) nos dá

$$B(0) = E\{|X(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) = F(+\infty) - F(-\infty). \tag{3.12}$$

Um outro enfoque que pode ser dotado é o seguinte. Suponhamos que o processo $X(t)$ seja tal que, valores do processo separados no tempo, são aproximadamente independentes. Então, podemos supor que a seguinte condição seja satisfeita, para $t \in Z$,

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |B(u)| < \infty. \tag{3.13}$$

(Esta é uma forma de uma condição "mixing").

Então, definimos o espectro de $X(t)$ como

$$(3.14) \qquad f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u=-\infty}^{\infty} e^{-iu\lambda} B(u),$$

$-\infty < \lambda < \infty$; se $t \in \mathbb{R}$, basta substituir as somas por integrais. Vemos, então, que estamos definindo o espectro como a transformada de Fourier de $B(u)$, se esta é somável. Segue-se que $f(\lambda)$, definido por (3.14) é limitado, de período 2π e uniformemente contínuo. A relação inversa de (3.14) é

$$(3.15) \qquad B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

4. Estimação do Espectro. Seja $\{X(t),\ t \in T\}$ um processo estacionário e consideremos observações $X(0), X(1), \ldots, X(T-1)$ do processo. O objetivo é estimar $f(\lambda)$ a partir destas observações. Para tal fim, construímos a *transformada de Fourier finita*

$$(4.1) \qquad d(\lambda) = (2\pi T)^{-1/2} \sum_{t=0}^{T-1} X(t)\, e^{-i\lambda t}$$

$-\infty < \lambda < \infty$. Se $E\{|X(t)|^k\} < \infty$, designamos por

$$(4.2) \qquad c_{X\ldots X}(t_1, \ldots, t_k) = cum\ \{X(t_1), \ldots, X(t_k)\}$$

o *cumulante de ordem* k do processo, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Para $k = 1$, $c_X(t) = E\{X(t)\}$ e para $k = 2$, $c_{XX}(t_1, t_2) = cov\ \{X(t_1),\ X(t_2)\}$. Devido ao fato do processo ser estacionário, (4.2) pode ser escrita

$$c_{X\ldots X}(t_1, \ldots, t_{k-1}) = c_{X\ldots X}(t_1, \ldots, t_{k-1}, 0).$$

Vamos introduzir mais notação. Seja **X** uma v.a. vetorial com r componentes, as quais são v.a. com valores complexos. Dizemos que **X** tem uma *distribuição normal complexa multivariada* com média μ_X e matriz de covariância Σ_{XX} se o vetor $[Re\ \mathbf{X},\ Im\ \mathbf{X}]'$, com $2r$ componentes reais tem distribuição normal multivariada $N_{2r}\ (\mu,\ \Sigma)$, onde

$$(4.3) \qquad \mu = \begin{bmatrix} Re\ \mu_X \\ Im\ \mu_X \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Re\ \Sigma_{XX} & -Im\ \Sigma_{XX} \\ Im\ \Sigma_{XX} & Re\ \Sigma_{XX} \end{bmatrix},$$

onde μ_X é de ordem $r \times 1$ e Σ_{XX} é uma matriz $r \times r$ Hermitiana, não negativa definida. Escrevemos X é $N_r^c(\mu_X,\ \Sigma_{XX})$.

O seguinte teorema é fundamental.

TEOREMA 4.1. *Seja* $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ *uma série temporal satisfazendo*

$$(4.4) \qquad \sum_{u_1, \ldots, u_{k-1}} |c_{X \ldots X}(u_1, \ldots, u_{h-1})| < \infty,$$

para $u_1, \ldots, u_{k-1} \in \mathbb{Z}$, $k = 2, 3, \ldots$ *Seja* $s_j(T)$ *um inteiro tal que*

$$\lambda_j(T) = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \longrightarrow \lambda_j \text{ quando } T \longrightarrow \infty,\ j = 1, \ldots, m.$$

Suponha que $\lambda_j(T) \pm \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $j, k = 1, \ldots, m$. *Então,* $d(\lambda_j(T))$, $j = 1, \ldots, m$, *são assintoticamente independentes, cada uma com distribuição* $N_1^c\ (0, f(\lambda_j))$, *se* $\lambda_j \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. *Se* $\lambda = 0,\ \pm 2\pi, \ldots, d(\lambda)$ *será assintoticamente* $N_1(E(X(t)),\ f(\lambda))$ *e se* $\lambda = \pm\pi,\ \pm 3\pi, \ldots, d(\lambda)$ *será assintoticamente normal* $N_1(0, f(\lambda))$.

Para a demonstração ver Brillinger (1973), Capítulo 4. Para $\lambda = 0$, obtemos um teorema de limite central para a série $X(t)$.

O ponto de partida para estimar $f(\lambda)$ é considerar o *periodograma*.

$$(4.5) \qquad I(\lambda) = |d(\lambda)|^2 = (2\pi T)^{-1} \left| \sum_{t=0}^{T-1} X(t)\ e^{-i\lambda t} \right|^2,$$

que, sob certas condições de regularidade, é assintoticamente não viciado. Infelizmente, o periodograma é um estimador bastante instável, pois

$$(4.6) \qquad Var\{I(\lambda)\} = f^2(\lambda) + O(T^{-1}),$$

para todo T. Esta instabilidade é óbvia se considerarmos a distribuição assintótica de $I(\lambda)$. Usando o teorema 4.1, pode-se demonstrar que $I(\lambda_j(T))$, $j = 1, \ldots, m$, são assintoticamente independentes, cada uma com distribuição $f(\lambda_j)\chi_2^2/2$, sob as condições do teorema 4.1., χ_2^2 indicando uma v.a. com distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Este fato nos sugere que podemos formar $(2m + 1)$ estimadores de $f(\lambda)$, aproximadamente independentes, e considerar

$$(4.7) \qquad f^{(T)}(\lambda) = (2m + 1)^{-1} \sum_{j=-m}^{m} (2\pi[s(T) + j]/T),$$

para $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, isto é, uma média de ordenadas do periodograma na vizinhança de λ. Agora este estimador será mais preciso, porque sua distribuição assintótica será proporcional a uma χ^2_{4m+2}.

Podemos pensar numa classe de estimadores da qual (4.1) seja caso particular. Basta considerar uma seqüência de pesos $W_j, j = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, com $\sum W_j = 1$ e formar o estimador

$$f^{(T)}(\lambda) = \sum_{j=-m}^{m} W_j \; I \; (2\pi[s(T) + j]/T), \tag{4.8}$$

que tem propriedades análogas a (4.1). Uma classe de estimadores consistentes (em média quadrática) é considerada por Brillinger (1973).

Estimadores de forma (4.1) ou (4.8) são rapidamente obtidos com o auxílio de uma transformada rápida de Fourier, que reduz consideravelmente o tempo de cálculo e que possibilita o alisamento ("smoothing") no domínio de freqüências. Para se ter uma idéia, se T é uma potência de 2, normalmente teríamos que realizar T^2 multiplicações complexas para se obter a transformada discreta

$$d\left(\frac{2\pi s}{T}\right) = (2\pi T)^{-1/2} \sum_{t=0}^{T-1} X(t) \; e^{-\frac{i2\pi st}{T}}, \tag{4.9}$$

diretamente de sua definição. Com o uso do algoritmo, este número cai para $2T \; log_2 T$. A referência básica aqui é Cooley e Tukey (1965).

5. **A Estrutura Geral.** Seja G um grupo abeliano, localmente compacto. Um *caráter* é uma função contínua χ com valores complexos tal que

$$\text{(i) } \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \; \chi(g_2), \; g_1, \; g_2 \in G \tag{5.1}$$

$$\text{(ii) } |\chi(g)| = 1, \; g \in G \tag{5.2}$$

Por exemplo, no grupo $(R, +)$, $\chi(t) = e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $f \in L_1(G)$, sua *transformada de Fourier* é

$$f(\chi) = \int_G f(g) \; \overline{\chi(g)} \; d\mu(g), \tag{5.3}$$

μ sendo a medida de Haar sobre G.

Seja $\{X(t), \; t \in \mathscr{T}\}$ um processo estocástico e suponha que existe um grupo de transformações G sobre $\mathscr{T}$, isto é, $gt \in \mathscr{T}$, para $g \in G$, $t \in \mathscr{T}$. Suponha que

G seja transitivo, isto é, dados t_0, $t \in \mathscr{T}$ existe g tal que $gt_0 = t$. Se $B(t_1, t_2) = Cov\{X(t_1), X(t_2)\}$, então

(5.4) $$B(t_1, t_2) = B(g_1 t_0, g_2 t_0) = \phi(g_1, g_2).$$

Dizemos que o processo é *homogêneo* se

(5.5) $$B(gt_1, gt_2) = B(t_1, t_2)$$

Então,

(5.6) $$B(t_1, t_2) = B(g_2^{-1} g_1 \ t_0, t_0) = B(g_2^{-1} g_1),$$

ou

(5.7) $$Cov\{X(g_1 t_0), X(g_2 t_0)\} = Cov\{X(g_2^{-1} g_1 \ t_0), X(t_0)\}.$$

Seja K o subgrupo de elementos de G deixando t_0 fixo (geralmente K consiste da identidade). Então $\mathscr{T}$ é isomorfo a $G|K$. Yaglon (1961) mostrou que existe uma medida aleatória $Z(d\lambda)$ tal que

(5.8) $$X(gt_0) = \int_{\overline{G|K}} \chi^{(\lambda)}(g) \ Z(d\lambda),$$

onde $\overline{G|K}$ denota o conjunto dos caracteres $\chi^{(\lambda)}$ de $G|K$, tal que

(5.9) $$Cov\{Z(\Delta_1), Z(\Delta_2)\} = F(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

para alguma medida $F(\cdot)$. Então,

(5.10) $$B(gt_0, t_0) = \int_{\overline{G|K}} \chi^{(\lambda)}(g) \ F(d\lambda).$$

Por exemplo, de $\{X(\lambda), 0 \leq \lambda \leq 2\pi\}$ é um processo no círculo, $Cov\{X(\lambda_1), X(\lambda_2)\} = B(\lambda_1 - \lambda_2)$ e

(5.11) $$X(\lambda) = \sum_n Z_n \ e^{i\lambda n},$$

onde $E(Z_n) = 0$, $E|Z_n|^2 = f_n$, $Cov\{Z_n, Z_m\} = 0$, $n \neq m$ e o teorema de Bochner nos dá

(5.12) $$B(\lambda) = \sum_n f_n \ e^{i\lambda n},$$

o espectro sendo

$$f_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} B(\lambda)\ e^{-in\lambda}\ d\lambda. \tag{5.13}$$

Se G é o grupo diádico, isto é, o conjunto de todas as seqüências $\bar{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ onde cada x_i é 0 ou 1, e a operação é $\dot{+}$, adição módulo 2 em cada componente, então os caracteres de G podem ser identificados com as funções de Walsh $\{\psi_n(x)\}$, que são funções com os valores $+1$ e -1 apenas, definidas como produtos de funções de Rademacher. Aqui,

$$X_n = \int_0^1 \psi_n(\lambda)\ dZ(\lambda), \tag{5.14}$$

e

$$B(u) = Cov\{X_n, X_{n \dot{+} u}\} = \int_0^1 \psi_n(\lambda)\ dF(\lambda), \tag{5.15}$$

onde $Z(\lambda)$ é um processo com incrementos ortogonais tal que

$$Cov\{dZ(\lambda), dZ(\mu)\} = \delta(\lambda \dot{+} \mu)\ dF(\lambda)\ d\mu, \tag{5.16}$$

$\delta(\lambda)$ é a função delta de Dirac e $F(\lambda)$ é absolutamente contínua.

REFERÊNCIAS

[1] Bartlett., *On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time series*, JRSS, supp. **8**, (1946), 27-41, 85-97.

[2] Bass, C. A. (Editor), Proceedings of 1970 Symposium on Applications of Walsh functions. National Technical Information Service, Springfield, Virginia.

[3] Blackman, R. B. and Tukey, J. W., The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communication Engineering, Dover, N. Y., 1959

[4] Bochner, S., *Monotone Funktiones Stieltjenche Integrale and Harmonich Analyse*, Math. Ann, **108** (1933), p. 378.

[5] Brillinger, D. R., The Frequency Analysis of Vector-Valued Time Series, Holt, 1973.

[6] COOLEY, J. W. and TUKEY, J. W., *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Math. of Computation 19, 90, p. 229 (1965).

[7] CRAMER, H. and LEADBETTER, M. R., Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley, 1967.

[8] GOODMAN, N. R., *Some Comments on Spectral Analysis of Time Series*, Technometrics, Vol. **3**, n.º 2, (1962), p. 221.

[9] HARMUTH, H., Transmission of Information By Orthogonal Functions, Springer-Verlag, 1969.

[10] JENKINS, G. and WATTS, D.G., Spectral Analysis, Holden Day, 1969.

[11] MORETTIN, P.A., *Walsh-Fourier Analysis of Time Series*, Ph. D. Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1972.

[12] SCHUSTER, A., *On the Investigation of Hidden Periodicities*, Terr. Mag. (1898), 3 : 13.

[13] SLUTSKY, E. E., *Alcune Applicazioni dei coefficiente di Fourier all' analisi delle funzione aleatorie stazionarie*, Gion. Ist. Ital. Attuari, **5** (1934), $1-50$.

[14] SLUTSKY, E. E., *The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes*, Econometrika, **5**, 105, (1937).

[15] STOKES, G. C., *Note on Searching for Periodicities*, Proc. Royal Soc. Vol. **29** (1879), p. 122.

[16] TUKEY, J. W., *The Sampling Theory of Power Spectrum Estimates*, Symp. on Appl. of Autocorrelation Analysis to Physical Problems, Woods Hole 13, 1949.

[17] YAGLOM, A. M., *Second-Order Homogeneous Random Fields*, Proc. 4th. Berkeley Symp., **2** (1961), 593-620.

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de S. Paulo
São Paulo — BRASIL