

# **XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**

**1 a 3 de dezembro de 1993**

**Instituto de Pesquisas Tecnológicas  
do Estado de São Paulo S.A. - IPT**

**São Paulo-SP - Brasil**

---

**ANAIS**

**Volume II**

---

**AMC**

**Associação Latino-Americana  
para Métodos Computacionais em Engenharia**



**Instituto de Pesquisas Tecnológicas**

## **A Introdução de Condições de Contorno no Ajuste Polinomial**

Walter Arens IEE-USP São Paulo  
Hans G. Arens EESC-USP São Carlos

**Resumo:** O presente artigo apresenta uma metodologia que permite que se efetue o ajuste polinomial com o método dos mínimos quadrados, impondo-se aos polinômios uma ou duas condições de contorno pré-fixadas.

### **1. Introdução.**

O ajuste polinomial através do método dos mínimos quadrados, é uma metodologia muito utilizada para exprimir analiticamente, tabelas, curvas e outros diagramas, que constam nos livros e catálogos em geral.

Essas curvas e tabelas apresentam frequentemente alguns pontos particulares importantes, que caracterizam os parâmetros principais do fenômeno que representam.

As curvas obtidas com os polinômios calculados pelo método dos mínimos quadrados convencional, não são condicionadas a passar por qualquer ponto pré-fixado, mas geralmente se aproximam muito bem de quase todos, inclusive dos pontos particulares já mencionados.

Muitos usuários, porém, gostariam de forçá-las a passar pelo menos por um desses pontos e nesse caso pode-se, com a

devida adaptação, recorrer à metodologia que segue, que condiciona um polinômio otimizado pelo método dos mínimos quadrados, a assumir um determinado valor  $f(x_a)=y_a$  ou uma determinada derivada  $f'(x_b)=y_b'$ , ou ambas as condições, em dois pontos pré-fixados.

## 2. A metodologia.

No método dos mínimos quadrados convencional, os coeficientes do polinômio de ajuste

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

são obtidos a partir de uma amostra de  $p$  pontos  $(x_p, y_p)$ , através da condição

$$\sum_p \left[ \left( f(x_k=x_p) - y_p \right) \left( \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right)_{x=x_p} \right] = 0 \quad (2)$$

onde  $\{k=0, \dots, n\}$   $n < p$ . Como  $\frac{\partial f(x)}{\partial a_k} = x^k$ , obtém-se o sistema de  $(n+1)$  equações

$$a_n \sum_p x_p^n + \dots + a_0 p = \sum_p y_p \quad (3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n \sum_p x_p^{2n} + \dots + a_0 \sum_p x_p^n = \sum_p x_p^n y_p \quad (4)$$

tendo como incógnitas os  $(n+1)$  coeficientes  $a_0, \dots, a_n$ . Estes podem ser calculados através da equação

$$\begin{bmatrix} p & \dots & \sum_p x_p^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_p x_p^n & \dots & \sum_p x_p^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_p y_p \\ \vdots \\ \sum_p x_p^n y_p \end{bmatrix} \quad (5)$$

que assume a forma

$$|A| |x| = |B|$$

|             |         |
|-------------|---------|
| SYSNO       | 857924  |
| PROD        | 0000474 |
| ACERVO EESC |         |

(6)

e onde os termos das matrizes  $A$  e  $B$  e  $z$  seguem

$$a_{i,j} = \sum_p x_p^{i+j-2} \quad (7)$$

$$b_i = \sum_p x_p^{i-1} y_p \quad (8)$$

e

$$z_i = a_{i-1} \quad (9)$$

com  $i$  e  $j$  variando de 1 a  $(n+1)$

Uma única condição de contorno do tipo  $f(x_0)=y_0$  e/ou  $f'(x_0)=y_0'$  pode ser facilmente imposta ao polinômio  $f(x)$ , pelo simples uso de um eixo de coordenadas auxiliar  $u$ , com origem em  $x_0$ , tal que  $u=x-x_0$ .

Como  $f(x_0)=y_0$  e  $f'(x_0)=y_0'$  tem-se que  $a_0=y_0$  e  $a_1=y_0'$ . Os demais coeficientes  $a_2, \dots, a_n$  do polinômio

$$f(x-x_0)=f(u)=a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0$$

são então calculados pelo método convencional, a partir dos pontos  $(u_p, y_p)$ .

Condições de contorno adicionais do tipo

$$f(x_a)=a_n x_a^n + \dots + a_1 x_a + a_0 = y_a \quad (10)$$

e

$$f'(x_b)=n a_n x_b^{n-1} + \dots + a_1 = m_b \quad (11)$$

$x_a \neq x_0$   $x_b \neq x_0$ , também podem ser introduzidas através de uma nova lei de formação dos termos das matrizes  $A$  e  $B$ .

Pode-se escolher dois coeficientes  $a_r$  e  $a_s$  para introduzir essas duas condições e colocá-los em função dos  $(n-1)$  coeficientes restantes através de

$$a_r x_a^r = f(x_a) - [a_n x_a^n + \dots + a_s x_a^s + \dots + a_0] \quad (12)$$

$$s a_s x_b^{s-1} = f'(x_b) - [n a_n x_b^{n-1} + \dots + r a_r x_b^r + \dots + a_1] \quad (13)$$

e dessa forma

$$\frac{\partial a_r}{\partial a_k} x_a^r = - \left[ x_a^k + x_a^s \frac{\partial a_s}{\partial a_k} \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial a_s}{\partial a_k} s x_b^{s-1} = - \left[ k x_b^{k-1} + r x_b^{r-1} \frac{\partial a_r}{\partial a_k} \right] \quad (15)$$

o que acarreta

$$\frac{\partial a_r}{\partial a_k} = - \frac{\left[ x_a^k - \frac{k x_a^s x_b^{k-1}}{s x_b^{s-1}} \right]}{C_r} \quad (16)$$

$$\frac{\partial a_s}{\partial a_k} = - \frac{\left[ k x_b^{k-1} - \frac{r x_a^k x_b^{r-1}}{x_a^r} \right]}{C_s} \quad (17)$$

onde

$$C_r = x_a^r - \frac{r x_a^s x_b^{r-s}}{s} \quad (18)$$

$$C_s = s x_b^{s-1} - r x_a^{s-r} x_b^{r-1} \quad (19)$$

Como

$$\frac{\partial f(x)}{\partial a_k} = x^k + \frac{\partial a_r}{\partial a_k} x^r + \frac{\partial a_s}{\partial a_k} x^s \quad (20)$$

a condição de mínimos quadrados

$$\sum_p \left[ \left( f(x)_{x=x_p} - y_p \right) \left( \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right)_{x=x_p} \right] = 0$$

se transforma em

$$\sum_p \left[ \left( f(x)_{x=x_p} - y_p \right) \left( x_p^k + \frac{\partial a_r}{\partial a_k} x_p^r + \frac{\partial a_s}{\partial a_k} x_p^s \right) \right] = 0 \quad (21)$$

onde  $\{k=0, \dots, n\}$  com  $k \neq r$  e  $k \neq s$ , gerando então  $(n-1)$  equações lineares.

Como  $k=i-1$  tem-se

$$\frac{\partial a_r}{\partial a_{i-1}} = \frac{1}{c_r} \left[ \frac{x_a}{s} (i-1) x_b^{i-s-i} - x_a^{i-1} \right] \quad (22)$$

e

$$\frac{\partial a_s}{\partial a_{i-1}} = \frac{1}{c_s} \left[ r x_a^{i-r-1} x_b^{r-i} - (i-1) x_b^{i-2} \right] \quad (23)$$

que transformam os termos das matrizes A e B em

$$a_{i,j} = \sum_p \left[ x_p^{i+j-2} \left( x_p^{i-1} + x_p^r \frac{\partial a_r}{\partial a_{i-1}} + x_p^s \frac{\partial a_s}{\partial a_{i-1}} \right) \right] \quad (24)$$

$$b_i = \sum_p \left[ y_p \left( x_p^{i-1} + x_p^r \frac{\partial a_r}{\partial a_{i-1}} - x_p^s \frac{\partial a_s}{\partial a_{i-1}} \right) \right] \quad (25)$$

$\{i=1, \dots, n+1\}$  onde  $i \neq r+1$  e  $i \neq s-1$ .

As linhas  $i=r+1$  e  $i=s-1$  referentes aos termos dependentes  $a_r$  e  $a_s$  são substituídas pelas condições impostas por (9) e (10) e dessa forma

$$a_{r+1,j} = x_a^{j-1} \quad (26)$$

$$b_{r+1} = f(x_a) \quad (27)$$

$$a_{s+1,j} = (j-1) x_b^{j-2} \quad (28)$$

$$b_{s+1} = f'(x_b) \quad (29)$$

Os coeficientes do polinômio são finalmente calculados através da equação (6) com os termos definidos pelas expressões (24)...(29).

Os valores de  $r$  e  $s$  são optativos e podem ser livremente escolhidos no intervalo  $\{1, \dots, n\}$ .

### 3. Um exemplo.

A figura 1 mostra uma aplicação da presente metodologia no traçado de um hidrograma unitário, a partir de 12 pontos obtidos da bibliografia específica.

O hidrograma foi traçado através de dois polinômios ( $n=6$  e  $n=8$ ), interligados no ponto ( $x=1, y=1$ ).

O primeiro polinômio  $f_1(x)$ , válido no intervalo  $[0,1]$ , foi condicionado a satisfazer  $f_1(0)=0$ ,  $f_1'(0)=0$ ,  $f_1(1)=1$  e  $f_1'(1)=0$  e o segundo  $f_2(x)$ , válido no intervalo  $[1,5]$ , a  $f_2(1)=1$ ,  $f_2'(1)=0$ ,  $f_2(5)=0$  e  $f_2'(5)=0$  resultando respectivamente em

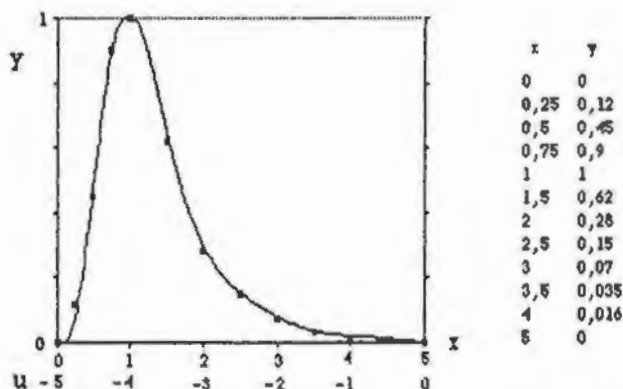


Fig. 1 O Hidrograma unitário expresso por dois polinômios

$$f_1(x) = -0,010824x^2 + 9,28387x^3 - 13,5353x^4 + 5,26222x^5$$

$$f_2(x) = -0,141894(x-5)^2 - 0,574404(x-5)^3 - 0,807325(x-5)^4 - 0,56284(x-5)^5 - 0,207173(x-5)^6 - 0,038612(x-5)^7 - 2,85655 \cdot 10^{-3}(x-5)^8$$

ambos calculados com  $r=2$  e  $s=3$ .

#### 4. Bibliografia.

Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, 6th Ed, New York, 1988, p.1294.  
Stark Peter, A Introdução aos Métodos Numéricos, Editora Interciência Ltda. 1979.  
Wolfram S., Mathematica, 2ª Ed., Addison-Wesley Publishing Comp., 1991.

#### 5.0 Programa computacional utilizado no exemplo (Mathematica 2.1 Wolfram Research)

Os polinômios  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  foram obtidos com o programa listado a seguir. A diferença entre os dois consiste apenas no conjunto de pontos de entrada  $(x,y)$  e na ordem  $n$  atribuída.

```
x={0,.25,.5,.75,1}          x={-4,-3.5,-3,-2.5,-2,-1.5,-1,0}
y = {0,.12,.45,.9,1}        y={1,.62,.28,.15,.07,.035,.016,0}
{n,r,s,xa,xb,ya,mb}={5,2,3,1,1,1,0}  {n,r,s,xa,xb,ya,mb}={8,2,3,-4,-4,1,0}
```

```
p=Dimensions[x][[1]]
cr=xa^r-r xa^s xb^(r-s)/s
cs=s xb^(s-1)-r xa^(s-r) xb^(r-1)
F1[i_] := (xa^s (i-1) xb^(i-s-1)/s-xa^(i-1))/cr
F2[i_] := (r xb^(r-1) xa^(i-1-r)-(i-1) xb^(i-2))/cs
```

```
Fa[i_,j_] :=
Which[
i==1 && j==1 ,Sum[1+x[[k]]^r F1[i]+x[[k]]^s F2[i],{k,1,p}],
i==r+1,xa^(j-1),
i==s+1,(j-1) xb^(j-2),
i==1 && j>1 ,Sum[x[[k]]^(j-1) (1+x[[k]]^r F1[i]+x[[k]]^s
F2[i]),{k,1,p}],
i>1 && j==1 ,Sum[x[[k]]^(i-1)+x[[k]]^r F1[i]+x[[k]]^s F2[i],{k,1,p}],
i>1 && j>1,Sum[x[[k]]^(j-1)(x[[k]]^(i-1)+x[[k]]^r F1[i]+x[[k]]^s
F2[i]),{k,1,p}]]
```

```
Fb[i_] :=Which[
i==1,Sum[y[[k]] (1+x[[k]]^r F1[i]+x[[k]]^s F2[i]),{k,1,p}],
i==r+1,ya,
i==s+1,mb,
i!=r+1 && i!=s+1,Sum[y[[k]](x[[k]]^(i-1)+x[[k]]^r F1[i]+x[[k]]^s
F2[i]),{k,1,p}]]
```

```
A=Table[Fa[i,j],{i,n+1},{j,n+1}]
B=Table[Fb[i],{i,1,n+1}]
Do [A[[i,j]]=0,{j,1,n+1},{i,1,2}]
{A[[1,1]],A[[2,2]],B[[1]],B[[2]]}={1,1,0,0}
Z = LinearSolve[ A , B ];
Z
```

Abstract:—"Polynomial Fit with Boundary Conditions"- This paper presents a methodology for polynomial fit with least squares method, so that polynomials are submitted to one or two boundary condition.