

Descrição de Frozen Waves ultrassônicas estruturadas não-difrativas em espalhamento acústico

Autor: Felipe de Alcântara Tomé

Orientador: Leonardo André Ambrosio

Universidade de São Paulo - USP

E-mail: felipe0@mit.edu

Objetivos

No estudo de espalhamento de ondas acústicas é possível representar, através do teorema da superposição, os potenciais de velocidade acústicas em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) de acordo com a série [1-4]:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \psi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_n^m P_n^m(\cos \theta) j_n(kr) e^{im\phi} \quad (1)$$

$$g_n^m$$

Dentre os componentes da Eq. 1 são chamados Beam Shape Coefficients (BSCs), seguindo o padrão estabelecido pela teoria generalizada de Lorenz-Mie [5], são polinômios associados de Legendre segundo a convenção de Robin [2,5-7] e são funções esféricas de Bessel [2].

Ademais, é possível estruturar feixes de Bessel não-difrativos superpostos a fim de representar Funções Morfológicas $F(z)$ [8]:

$$\psi_{FW}(\rho, z) = \sum_{q=-N}^N A_q J_0(k_{pq} \rho) e^{ik_{qz} z} \quad (2)$$

A formação de padrões é baseada na semelhança da Eq. 2 com uma série truncada de Fourier, tendo como coeficientes:

$$A_q = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{i \frac{2\pi q}{L} z} dz \quad (3)$$

Destarte, o objetivo desta pesquisa é definir Frozen Waves acústicas e os feixes de Bessel utilizados através da expansão em ondas parciais, assim como realizar simulações que confirmem a validade da teoria, apoando assim as aplicações que podem ramificar desta técnica, como a manipulação de partículas e a construção de displays volumétricos [9].

Métodos e Procedimentos

Como a construção de FWs se faz através da composição de feixes de Bessel de ordem nula, dados em sua forma ideal pela equação nas coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) :

$$\psi_{Bessel}(\rho, \phi, z) = \psi_0 J_v(k_\rho \rho) e^{iv\phi} e^{ik_z z} \quad (4)$$

buscou-se a descrição deste feixe de acordo com as Eq. (1). A Eq. (4) possui convenção temporal da forma $e^{-i\omega t}$, omitida em sua representação, e apresenta a função de Bessel cilíndrica J_v de ordem v e o módulo das projeções do vetor de propagação do feixe k_z e k_ρ . Inicialmente, foi utilizado o método da quadratura, explorando as relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

e das funções exponenciais [2], com o objetivo de determinar os BSCs para os feixes de Bessel centralizados na posição (x_0, y_0, z_0) , espalhados por uma partícula esférica localizada na origem de um sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z) , resultando em:

$$g_n^m = i^{n-m} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} J_{m-v}(k_p \rho_0) P_n^m(\cos \alpha_q) e^{-i(m-v)\phi_0} e^{-ik_z z_0}, \quad (5)$$

onde ϕ_0 e ρ_0 são as transformações em coordenadas cilíndricas da posição cartesiana do feixe de Bessel e α_q é o ângulo de axicon do feixe espalhado.

Desta forma, como podemos definir os coeficientes necessários para o cálculo dos coeficientes das Eqs. 1 e 2 através das Eqs. 3 e 5 respectivamente é possível realizar as necessárias substituições e o cálculo das Frozen Waves se faz através da relação:

$$\psi = \sum_{q=-N}^N \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=-n}^n A_q g_{n,q}^m j(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (6)$$

O truncamento da série vista na Eq.1 realizada na Eq. 6 se faz necessária para a realização das simulações a serem apresentadas e é justificada matematicamente por Wiscombe [10].

Para a realização das simulações foi utilizada a linguagem de programação Julia devido a sua alta performance (semelhante a C++) e sua agilidade na produção de protótipos e simulações [11, 12]. Além disso o autor auxiliou na construção e manutenção de bibliotecas para Computação de Alto Desempenho quando exerceu um estágio de pesquisa no Massachusetts Institute of Technology, orientado por grandes nomes da computação, em específico o criador da linguagem supracitada, como apoiado pelas publicações [13] e [14] realizadas pelo autor e demais participantes. A fim de simular com maior

eficiência, cada termo da Eq. 6 foi abstraído como uma tarefa a ser realizada por uma unidade de processamento e a distribuição da carga de trabalho foi feita dinamicamente pela biblioteca *Dagger.jl*, da qual o autor é co-mantenedor, além disso foi utilizado o super-computador Satori com 80 núcleos de processamento a fim de alavancar as adaptações supracitadas.

Resultados

Como pode ser visto na Fig. 1, o método de construção de Frozen Waves associado à expansão em ondas parciais apresenta grande precisão, visto que os únicos erros associados no plano de interesse ($y=0$), considerando sua propagação em Z , se dá exclusivamente pelo aparecimento de artefatos ondulatórios, inerentes à aplicação da série de Fourier e conhecido como Fenômeno de Gibbs.

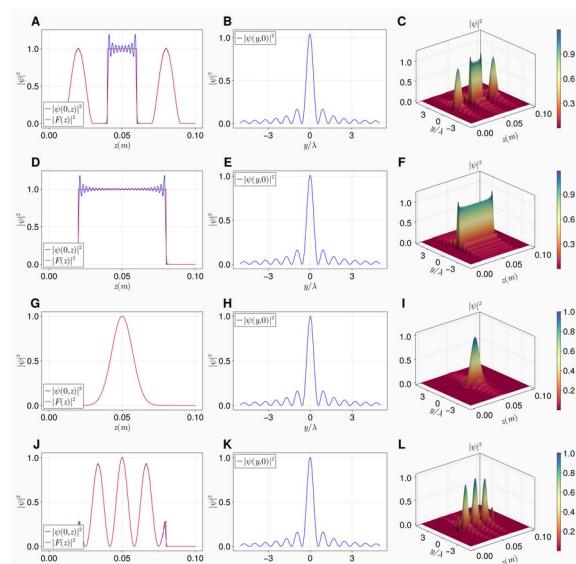


Figura 1: Perfil de intensidade de Frozen Waves (em vermelho), sobrepostas de suas funções morfológicas (em azul) para o plano ($y=0$) [(A), (D), (G), (J)]. Confinamento longitudinal do perfil de intensidade das Frozen Waves no plano ($z=0$) [B, E, H, K]. Perfil de intensidade em representação tridimensional [C, F, I, L]. Os conjuntos [A-C], [D-F], [G-I] e [J-L] dizem respeito às mesmas funções alvo (morfológicas) mas se diferenciam entre si. Fonte: Autor.

Além de uma boa precisão no plano de interesse, a técnica apresenta bom confinamento longitudinal a este plano, como visto também na Fig. 1.

Conclusões

Tendo em vista as simulações realizadas, o método algorítmico demonstra sucesso em suas aplicações, com exceção de erros de natureza oscilatória ao representar funções morfológicas não-oscilatórias.

Posteriormente, seria analisado pelo autor a possibilidade da aplicação de técnicas de emissores e receptores e álgebra linear em acústica para que sejam evitadas essas anomalias oscilatórias na representação de padrões, como realizado por Miller [15] em eletromagnetismo em conjunto com participantes do grupo coordenado pelo orientador desta pesquisa em Harvard.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos pesquisadores do grupo de pesquisa JuliaLab (responsáveis pela criação da linguagem utilizada) do Massachusetts Institute of Technology (MIT), em especial a Julian Samarlo, Evelyne Ringoot e Rabab Alomairy, os quais ampliaram meus conhecimentos da linguagem durante a pesquisa e me auxiliaram constantemente. Também gostaria de agradecer a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) por financiar esse projeto através do processo nº 2022/07810-7.

Referências

- [1] Kinsler, L. E. (2000). *Fundamentals of Acoustics*. Wiley.
- [2] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2001). *Mathematical Methods for Physicists*. Burlington, MA, USA: Harcourt/Academic Press.
- [3] Baresch, D., Thomas, J., & Marchiano, R. (2013). Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(1), 25–36. doi:10.1121/1.477025.
- [4] Silva, G. T. (2011). An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront (L). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(6), 3541–3544. doi:10.1121/1.3652894.
- [5] Gouesbet, G., & Gréhan, G. (2017). *Generalized Lorenz-Mie Theories* (2nd ed.). Springer International Publishing.
- [6] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (2013). *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publ.
- [7] Robin, L. (09 1959). Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales Louis Robin (Tome I 1957, 201 pp. + xxxv 4,000 FF. Tome II 1958, 384 pp. + viii 5,000 FF. Gauthier-Villars, Paris). *Geophysical Journal International*, 2(3), 259–260. doi:10.1093/gji/2.3.259.
- [8] L. A. Ambrosio, F de A. Tomé. (2024). Exact partial wave expansion and beam shape coefficients of acoustic (ultrasonic) frozen waves. *To Be Published (Journal of the Acoustical Society of America)*.
- [9] Hirayama, R., M. Plasencia, D., & Masuda et al., N. (2019). A volumetric display for visual, tactile and audio presentation using acoustic trapping. *Nature*, 575, 320–323.
- [10] Wiscombe, W. J. (1980). Improved Mie scattering algorithms. *Appl. Opt.*, 19(9), 1505–1509. doi:10.1364/AO.19.001505.
- [11] Bezanson, J., Edelman, A., Karpinski, S., & Shah, V. B. (2017). Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM Review*, 59(1), 65–98. doi:10.1137/141000671.
- [12] Song, R., Song, X., Zhang, Y., & Ma, Y. (2020). Experiment in parallel computing for the julia programming language. *2020 3rd International Conference on Algorithms, Computing and Artificial Intelligence*. Doi:10.1145/3446132.3446166.
- [13] Alomairy, R., Tome, F., Samarlo, J., & Edelman, A. (2024) Dynamic task scheduling with data dependency awareness using Julia. IEEE High Performance Extreme Computing Conference.
- [14] Xuan, S., Alomairy, R., Ringoot, E., Tome, F., Samarlo, J., & Edelman, A. (2024) Synthesizing Numerical Linear Algebra using

Julia. IEEE High Performance Extreme Computing Conference.

[15] Miller, D. A. B. (2019). Waves, modes, communications, and optics: A tutorial. *Advances in Optics and Photonics*, 11(3), 679.
<https://doi.org/10.1364/aop.11.000679>