

3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC

UNESP - Campus Ilha Solteira - SP
31 de maio a 3 de junho - 2004

Aberturas (vídeos)

- ▶ Unesp - Apresentação
- ▶ Unesp - FEIS (Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira)

Prefácio

Temas (índices)

Mini Cursos

- ▶ Títulos
- ▶ Autores

Palestras

- ▶ Títulos
- ▶ Autores

Simpósios

- ▶ Títulos
- ▶ Autores

Trabalhos Adicionais

- ▶ Títulos
- ▶ Autores

[Imprimir](#)

[Sair](#)



Análise de Localização de Deformação em modelos constitutivos de Dano Contínuo: Introdução à Pós-Localização de Deformação

Antonio Roberto Balbo B173a

Depto. de Matemática, FC, UNESP,
Av. Eng. Luis E. C. Coube, s/n,
Bauru, Brasil, 17033-360
E-mail: arbalbo@fc.unesp.br

Sérgio Persival Baroncini Proença

Depto. de Engenharia de Estruturas, EESC, USP,
Av. Dr. Carlos Botelho, 1465
São Carlos, Brasil, 13560-250
E-mail: persival@sc.usp.br

Resumo

Neste trabalho pretende-se caracterizar a condição necessária de localização de deformação para modelos constitutivos de dano contínuo, através da análise das equações estática e dinâmica de equilíbrio do modelo, utilizando-se a condição fraca de propagação de Maxwell e a condição forte de propagação de Fresnel-Hadamard. A análise feita permitirá ligar o problema da localização de deformação com o de estacionariedade de ondas de aceleração e servirá para determinar uma condição necessária de perda de unicidade de solução, relativa à singularidade de tensores de localização de deformação ou tensores acústicos de dano, associados aos modelos constitutivos, elásticos ou elastoplásticos, com dano contínuo. A condição necessária de perda de unicidade de solução ou de elipticidade é feita via análise de bifurcação de solução. Finalmente, explorando tal condição de singularidade, uma introdução à análise pós-bifurcação, relativa à instabilidade da solução em deslocamentos, é feita para sistemas isotrópicos, associativos e conservativos em relação à forças, baseando-se em resultados encontrados na Teoria de Bifurcação.

de deformação não únicas. À existência de pontos singulares, que caracterizam a perda de unicidade, corresponde uma mudança da condição matemática de elipticidade da equação diferencial que exprime o equilíbrio estático local do meio, ou hiperbolicidade da equação que exprime, também em forma local, o equilíbrio dinâmico. Por outro lado, deve-se observar que as condições matemáticas para unicidade são tipicamente atendidas dentro dos limites do regime de resposta elástica do material e garantem, ainda, a estabilidade de resposta numérica. Neste trabalho pretende-se abordar a questão da bifurcação ou perda local de unicidade de resposta, caracterizando-se matematicamente as condições para a existência de uma nova solução estável em deformação, dita localizada, diferente daquela homogênea resultante da imposição de uma lei de encruamento negativa fixa. A partir da bifurcação a resposta homogênea passa a apresentar uma natureza instável. Assim, neste estudo, entende-se que as deformações localizadas se constituem numa bifurcação a partir de uma resposta inicial homogênea. A análise de localização aqui conduzida insere-se no âmbito das chamadas descontinuidades fracas, nas quais admite-se a existência de um salto das deformações incrementais em relação à uma superfície definida no volume ocupado pelo meio. Apresentam-se, inicialmente, algumas relações matemáticas que caracterizam a singularidade de uma função em relação a um plano. Com recurso aos sólidos lineares de comparação, discutem-se tais relações, ditas de compatibilidade de Maxwell e de propagação de Fresnel-Hadamard, baseando-se em [9] e [20], que também permitem estabelecer uma equivalência entre os problemas de localização e da estacionariedade da propagação de ondas de aceleração. Cabe observar que a análise aqui feita, consiste em um estudo da localização decorrente da resposta constitutiva do material num ponto de um meio contínuo e ilimitado, de modo que a influência de condições de contorno não é levada em consideração. Do ponto de vista físico, mesmo com essas limitações, tal análise pode fornecer informações úteis sobre as características dos mecanismos de ruptura dos materiais.

Palavras-chave: Localização de Deformação, Modelos de Dano Contínuo, Pós-Localização de Deformação, Teoria de Bifurcação.

1 Introdução

Os modelos constitutivos para materiais idealizados como meios elásticos com dano e elastoplásticos com dano, formulados em [1], [2], [16], [17] e [18], por apresentarem, a partir de um certo nível de deformação, um regime de encruamento negativo, onde o ganho de deformação se dá com decréscimo de tensão, sugerem um questionamento sobre a estabilidade e não-unicidade de resposta. De fato, nesses regimes, para uma dada taxa de tensão, podem existir taxas

1392788
230904

SYSNO 1392788
PROD 000527

ACERVO EESC



A condição de perda de unicidade, associada à análise de singularidade dos tensores constitutivos elástico ou elastoplástico com dano, pode ser também relacionada à análise espectral de tensores, denominados acústicos. Mas matematicamente tal singularidade é uma condição necessária de localização, não implicando, propriamente, que se tenha bifurcação de solução.

Em um campo de estudo similar, o da análise da estabilidade do equilíbrio, a condição de singularidade pode estar relacionada a um ponto limite, em que o equilíbrio passa a ser instável levando a estrutura a uma mudança na sua configuração geométrica e readquirindo estabilidade na nova configuração. Não há nesse caso a bifurcação. No outro caso, quando há instabilidade por bifurcação de equilíbrio, a propagação de defeitos pode caracterizar globalmente um estado limite último da estrutura, onde qualquer incremento positivo de carga aplicado pode levá-la ao colapso. Logo, a condição de singularidade pode estar relacionada não só a pontos de bifurcação, como também a pontos denominados limites (inflexão, máximos ou mínimos).

Ainda com relação aos modelos constitutivos em estudo, quando a singularidade apresenta-se no ponto de mudança do regime de encruamento positivo ("hardening") para o de encruamento negativo ("softening"), a consequente perda da condição de elipticidade implica em perda de unicidade de solução caracterizando então um ponto de bifurcação de solução. A partir desse ponto, o trecho de encruamento negativo da resposta do material, que implica em ganho de deformação com decréscimo de tensão, é instável. Desde que, a análise desses modelos é feita em taxas de tensão e deformação, a ocorrência de respostas instáveis do modelo está associada ao aparecimento de taxa em deformação não única relacionada a uma única taxa de tensão, o que implica na perda de unicidade de solução em deslocamentos ou em deformação para o modelo.

A figura 1 seguinte esboça, para o caso uniaxial, um modelo não-linear, o qual ilustra os regimes de elasticidade, "hardening" e "softening". Nessa figura observa-se a instabilidade de solução no trecho de encruamento negativo da resposta do material.

Pode-se admitir também que, a partir do ponto de bifurcação, dada à instabilidade do regime que segue, encontra-se um estado de dano que implica localmente em ruptura. Esse ponto passa a pertencer a um "plano de fratura" onde as deformações se localizam e as subsequentes taxas de deformação tornam-se descontínuas em relação

a pontos vizinhos que não tenham alcançado esse regime.

A localização caracteriza-se então por um salto da deformação no plano de fratura.

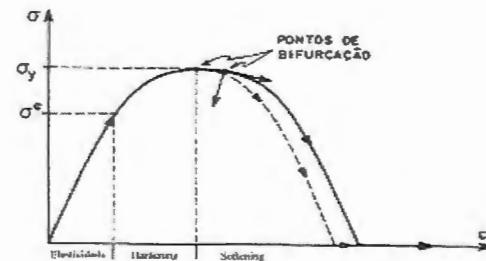


Figura 1 - Modelo uniaxial não-linear relativo à plastificação e dano.

A figura 2, ilustra as deformações, uniforme e localizada em um ponto.

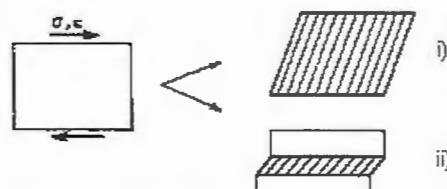


Figura 2 - Localização de deformação em um ponto:
i) Deformação Uniforme;
ii) Deformação Localizada.

A análise pós-singularidade (ou pós-bifurcação) do problema de localização, que serve matematicamente para se caracterizar a instabilidade de solução em pontos limite ou pontos de bifurcação, para sistemas isótropos, associativos e conservativos com relação à forças, é feita utilizando-se de resultados encontrados na Teoria de Bifurcação de acordo com [6], [10] e [11]. É importante ressaltar que a proposta de caracterização da instabilidade ao nível constitutivo aqui desenvolvida restringe-se ao âmbito matemático, não sendo ainda possível, no atual estágio de desenvolvimento, especular sobre o significado físico dos resultados obtidos.

No que segue, pretende-se fazer uma análise de bifurcação e pós-bifurcação para os modelos de dano contínuo, estudando a condição necessária de perda de estabilidade, denominada condição de perda de elipticidade ou condição de localização, para posteriormente investigar condições suficientes que caracterizam os pontos singulares como pontos de bifurcação ou pontos limite.

Inicialmente, na seção 2, faz-se uma análise da condição de localização para um meio homogêneo e



infinito, explorando-se a solução em deslocamentos da equação diferencial que rege o equilíbrio estático local. Em seguida, faz-se a mesma análise com a equação que rege o equilíbrio dinâmico e que permite ligar o problema da localização de deformação ao de estacionariedade de ondas de aceleração, de acordo com o proposto em [4], [5], [8], [9], [19] e [20]. Na seção 3, tendo-se em vista os modelos constitutivos enfocados neste trabalho, a condição de perda de unicidade é então associada à singularidade dos tensores de localização de deformação, ou acústicos, relacionados ao modelos, elástico e elastoplástico, com dano. A análise espectral destes tensores permite caracterizar a sua singularidade mediante o aparecimento de autovalores nulos no caso associativo, podendo ser não nulos no caso não-associativo, no qual pode ocorrer a existência de autovalores complexos. Determina-se uma condição para se calcular os autovetores associados aos autovalores determinados, baseando-se no proposto em [8], [19] e [3]. Os autovetores estão direcionados com a normal ao plano de localização na formulação que emprega a condição de equilíbrio estático ou, equivalentemente, com a direção de propagação da onda, para problemas formulados pela condição de equilíbrio dinâmico. Na seção 4, faz-se uma análise pós-singularidade relativa à instabilidade de solução, a qual é aplicada na seção 5 para sistemas isótropos, associativos e conservativos em relação à forças, baseando-se em resultados encontrados na Teoria de Bifurcação. Finalmente, na seção 6, para o tratamento numérico do modelo, faz-se um resumo da análise incremental do problema de localização e pós-localização de deformação para os modelos de dano contínuo.

2 Análise da condição necessária de perda de unicidade de solução

2.1 Superfícies singulares

Considere-se um corpo em um meio contínuo e infinito $\Omega \subset V$, onde V é o espaço vetorial euclídeo. Seja uma superfície regular num contorno comum entre duas regiões, simbolizadas por Ω^+ , $\Omega^- \subset \Omega$. Seja também $\psi(x)$ um campo de valor escalar, vetorial ou tensorial, contínuo no interior de Ω^+ e Ω^- e que se aproxima de valores limites ψ^+ e ψ^- quando o ponto x se aproxima de um ponto x_0 da superfície pelos seus lados positivo e negativo, respectivamente. Há, portanto, um salto de ψ em x_0 definido por: $[\psi] = \psi^+ - \psi^-$, admitido ainda como uma função do ponto na superfície; se

$[\psi](x_0) \neq 0$ a superfície é dita singular com relação a ψ no ponto.

Lema de Hadamard: seja ψ definida e continuamente diferenciável no interior de uma região Ω^+ de contorno definido por uma superfície regular $\partial\Omega$ e admita-se que ψ e $\nabla\psi$ se aproximem de valores limites ψ^+ e $\nabla\psi^+$ na medida em que se tenda ao contorno por um caminho contido no interior de Ω^+ . Considere-se o conjunto de pontos da superfície e admita-se que ψ seja diferenciável nesta superfície. Então:

$$\psi(x+dx) = \psi(x) + \nabla\psi|_x dx \quad p/x \in \partial\Omega \quad (1a)$$

$$d\psi^+ = \nabla\psi^+ dx \quad (1b)$$

Do lema decorre que o teorema da diferencial total vale para os valores limites quando a superfície é atingida por um de seus lados (a rigor ψ não precisa ser definida do outro lado). De maneira geral o lema pode ser aplicado para os dois lados da superfície, de modo que:

$$d\psi^- = \nabla\psi^- dx \quad (1.c)$$

Analogamente ao desenvolvimento anterior, devido a [20], pode-se mostrar que são válidas as relações que seguem.

Quando ψ for um campo escalar, isto é, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$, então,

$$\nabla[\psi] = [\nabla\psi]; \quad (2.a)$$

o que mostra que a derivada tangencial do salto é o salto da derivada tangencial; ou, em forma intrínseca, o gradiente do salto é o salto do gradiente.

Quando ao longo do contorno o valor do salto se mantiver constante então $[\psi] = k$, $k \in \mathbb{R}$, e, portanto:

$$[\psi]_j = [\nabla\psi]^T e_j = 0. \quad (2.b)$$

Assim, $[\nabla\psi]$ é ortogonal à superfície. Ainda, como nesse caso $[\nabla\psi]$ tem a dimensão de um vetor do espaço associado, ele pode ser representado na forma: $[\nabla\psi] = \alpha n$ onde α é um escalar e n é um versor normal à superfície.

Se ψ for uma função de valor vetorial, $\psi : V \rightarrow V$, então:

$$[\operatorname{div}\psi] = \operatorname{div}[\psi]; \quad (2.c)$$

portanto o salto do divergente é o divergente do salto.

2.2 Relações constitutivas para o modelo de dano contínuo

Para se fazer a análise da condição necessária de perda de unicidade de solução ou condição de localização de deformação é necessário relembrar as relações do modelo constitutivo encontradas em [1], [2], [16], [17] e [18]. A figura 3, vista a seguir esboça o comportamento unidimensional do modelo de dano para o caso elastoplástico com dano.

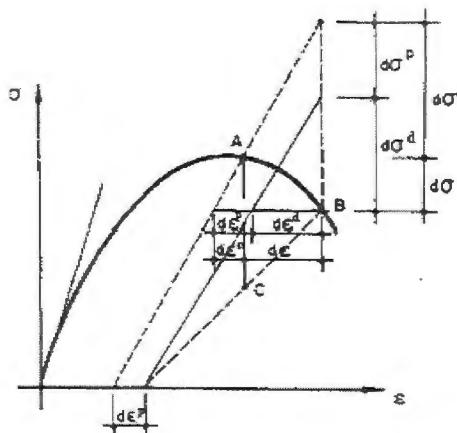


Figura 3 – Representação unidimensional do modelo elastoplástico com dano.

2.2.1 Leis constitutivas puntuais para o modelo elástico ou elastoplástico com dano.

De modo a considerar um processo evolutivo, a relação constitutiva válida para qualquer ponto $x \in \Omega$ pode ser expressa em taxas na forma:

$$\dot{\sigma} = E(w)\dot{\epsilon} + \dot{E}(w)\epsilon = \dot{\sigma}^e + \dot{\sigma}^d;$$

$$f(\epsilon, w) \leq 0;$$

$$w - \bar{w} \leq 0;$$

$$g(\alpha, w) = -\alpha - (w - \bar{w}) \leq 0, \alpha \geq 0;$$

$$g\alpha = 0 \text{ com } g \leq 0 \text{ e } \alpha \geq 0;$$

$$\dot{\sigma}^d = -\dot{\omega}h(\epsilon, w);$$

$$\dot{w} = -\dot{\omega}r(\epsilon, w);$$

$$f \leq 0, \dot{\omega} \geq 0, \dot{\omega}f = 0;$$

$$\text{se } f = 0 \text{ então } \dot{\omega}f = 0, \dot{f} \leq 0. \quad (8b)$$

Em particular, na relação (4), a função de valor escalar $f(\epsilon, w)$, define um critério para caracterizar a evolução do dano e a desigualdade (5a,b), a qual introduz uma variável de folga $\alpha \geq 0$, impõe uma limitação para a energia dissipada, além da qual o material perde completamente a resistência. A relação (5c) quantifica a dissipatividade através de uma relação de complementaridade. Em (6), o tensor $h(\epsilon, w) \geq 0$, o qual define o tensor de tensão $\dot{\sigma}^d$ (de ordem 2), é normal, por exemplo, à superfície representativa de um potencial de dissipação. Por sua vez, em (7), $r(\epsilon, w) \leq 0$ é uma função de valor escalar que contém, através da variável escalar w um registro da história prévia de

danificação. As condições de complementaridade e de consistência (8a) e (8b) são relacionadas às possibilidades de carregamento e de descarregamento, respectivamente, permitindo-se levar em conta, portanto, a irreversibilidade do processo. A variável escalar $\omega (\dot{\omega})$ é denominada de variável de dano contínuo, tal que, $\omega > 0 (\dot{\omega} > 0)$, implica na ocorrência de dano no processo de carregamento; $\omega = 0 (\dot{\omega} = 0)$, na não ocorrência do mesmo, podendo, de acordo com o modelo indicar elasticidade ou elastoplasticidade ou elastoplasticidade perfeita.

Alternativamente, a desigualdade expressa em (5b) implica que:

$$\begin{aligned} \text{se } g < 0 \Rightarrow w > \bar{w} \text{ e } \alpha = 0; \\ \text{se } g = 0 \Rightarrow w \leq \bar{w} \text{ e } \alpha = \bar{w} - w > 0. \end{aligned}$$

Adicionalmente, como $\dot{g} = -\dot{\alpha} - \dot{w}$ e $\dot{g} \leq 0$ então $\dot{w} \leq \dot{\alpha} \leq 0$. Em particular, se $\dot{g} = 0$, então, $\dot{\alpha} = -\dot{w}$.

Utilizando-se do fato que $\dot{\alpha} = -\dot{w}$ e considerando-se a relação (7), esta pode ser expressa de maneira equivalente através de:

$$\dot{\omega} = -r^{-1}(\epsilon, w)\dot{\alpha}; \quad (9)$$

O operador rigidez de dano contínuo é definido para o caso não associativo por:

$$H = H(w) = [E(w) - \frac{h \otimes f_s}{G}] \text{ se } \dot{\omega} > 0; \quad (10)$$

No caso associativo tem-se $h(\epsilon, w) = f_s$, assim, a relação (10) é expressa por:

$$H = H(w) = [E(w) - \frac{f_e \otimes f_e}{G}] \text{ se } \dot{\omega} > 0; \quad (11)$$

onde $E = E(w)$ é o operador rigidez tangente dos módulos elásticos, com G expresso a seguir:

$$G = f_w r(\epsilon, w) = f_w r. \quad (12)$$

Uma aplicação numérica do modelo visto nesta seção pode ser vista em [1], [16] e [17].

2.3 Condição de compatibilidade de Maxwell e o Tensor de Localização

Considere-se em Ω um meio contínuo homogêneo e homogeneamente deformado, submetido a um regime quase-estático de taxas de deformação.

A hipótese cinemática, que está associada à chamada forma fraca de localização, consiste em admitir que em determinado instante passe a existir um campo vetorial $\dot{u}(x, t)$ ¹ de velocidades, ou taxas de deslocamentos, contínuo no meio mas com gradientes descontínuos, representados pelo tensor de segunda ordem $[\nabla \dot{u}]$, em relação a uma superfície contida no seu interior. Tal campo, se existente, está relacionado a uma distribuição de deformações claramente diferente daquela homogênea

¹ O argumento t aparece por generalidade mesmo nas análises puramente estáticas.



em que os gradientes são contínuos em todo o meio relativos à localização. e que prevalecia até aquele instante.

A condição de compatibilidade de Maxwell estabelece uma representação admissível para $[\nabla \dot{u}]$, obedecidas determinadas condições.

No estudo em questão, considere-se, em primeiro lugar, que a superfície de singularidade seja plana.

Admita-se ainda que, a partir de um ponto daquela superfície, percorrendo-se qualquer direção nela contida, $[\dot{u}]$ se mantenha constante. Nessas condições, aplicando-se o Lema de Hadamard tem-se:

$$d[\dot{u}] = [d\dot{u}] = [\nabla \dot{u}] e_j = 0; \quad (13)$$

Sendo e_j um vedor contido no plano da descontinuidade, a condição anterior pode ser verificada se o tensor $[\nabla \dot{u}]$ tiver a seguinte forma geral :

$$[\nabla \dot{u}] = \gamma (m \otimes n); \quad (14)$$

onde γ é um escalar que quantifica o salto no gradiente, n um vedor ortogonal ao plano e m um vedor arbitrário, que define a direção de \dot{u} e a 'natureza' da descontinuidade, conforme se apresenta no que segue.

De fato, substituindo-se a (14) na (13), obtém-se :

$$\begin{aligned} [\nabla \dot{u}] e_j &= \gamma (m \otimes n) e_j \\ &= \gamma (n^T e_j) m = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

A forma geral proposta para o $[\nabla \dot{u}]$, explicitada na (14), constitui a condição de compatibilidade de Maxwell.

Um campo de taxas de deslocamento que atende às condições anteriores de Hadamard e de Maxwell, introduzidas pela singularidade, pode ser expresso na forma :

$$\dot{u}(x) = (g \otimes n)x = (n^T x)g \quad \text{se} \quad n^T x > 0 \quad (16)$$

$$\dot{u}(x) = 0 \quad \text{se} \quad n^T x \leq 0$$

onde, $g = \gamma m$ e x é o vetor posição do ponto genérico com relação ao plano de singularidade, também denominado plano de localização.

Nota-se que este campo de velocidades implica em continuidade de seu gradiente somente em cada lado do plano, mas não através dele, o que pode gerar uma interpretação sobre a natureza do campo de deslocamentos resultante.

Em primeiro lugar, se o vetor g for paralelo a n o modo de deslocamento introduzido pela localização é do tipo *separação*, por analogia com o modo I da Mecânica da Fratura. Na hipótese de g perpendicular a n , o modo de deslocamento introduzido é do tipo *cisalhamento puro* (modo II). Finalmente, para g e n formando um ângulo qualquer entre si, o modo de deslocamento resultante é do tipo *misto* (modo III).

A figura 4, ilustra os modos de deslocamento

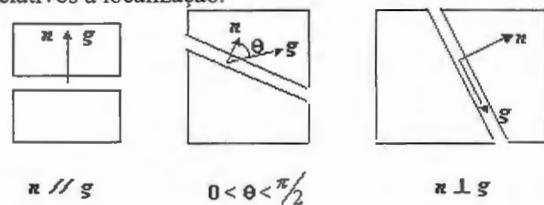


Figura 4 - i) modo I; ii) modo II; iii) modo III.

A identificação da superfície de singularidade, por meio da determinação do seu vedor normal n , resulta da imposição de uma outra condição : o equilíbrio estático entre as partes através do plano de localização.

Antes de analisar a condição de equilíbrio, é importante observar que num regime de pequenas deformações a relação de compatibilidade se escreve na forma :

$$\dot{\epsilon}(u) = \frac{1}{2}(\nabla \dot{u} + \nabla \dot{u}^T); \quad (17)$$

Então, na iminência da localização, admitida a descontinuidade para o campo dos gradientes de velocidades $\nabla \dot{u}$, caracteriza-se uma singularidade para o campo de taxas de deformação em relação à superfície.

Por conseguinte, tendo-se em vista a relação constitutiva em taxas : $\dot{\sigma} = H \dot{\epsilon}(u)$, onde H é o tensor constitutivo elástico com dano ou elastoplástico com dano, também o campo de taxas de tensão resulta descontínuo. É importante observar que na localização iminente o tensor constitutivo H permanece, por hipótese, contínuo através da superfície de descontinuidade, pois a idéia é que haja bifurcação a partir de um estado homogêneo; segue daí o conceito de sólido linear de comparação. Em resumo :

$$[\dot{\epsilon}(u)] = \dot{\epsilon}^+(u) - \dot{\epsilon}^-(u) = \frac{1}{2}[\nabla \dot{u} + \nabla \dot{u}^T] \neq 0 \quad (18)$$

$$[\dot{\sigma}] \neq 0$$

A condição de equilíbrio estático implica, por outro lado, em salto nulo, em relação ao plano de localização, do vetor taxa de tensão definido pela relação de Cauchy:

$$[\dot{t}] = [\dot{\sigma}] n = 0; \quad (19)$$

Levando-se em conta a relação constitutiva, tendo-se em vista uma situação de localização iminente:

$$[\dot{\sigma}] = H[\dot{\epsilon}] = H[\nabla \dot{u}], \quad (20)$$

e considerando-se a (14), a condição de equilíbrio torna-se:

$$\gamma H(m \otimes n)n = 0 \quad (21)$$

Explorando-se a simetria menor do tensor constitutivo ($H_{ijkl} = H_{jilk}$), uma vez que $[\dot{\sigma}]$ e $[\dot{\epsilon}]$ são simétricos, a relação anterior pode ser escrita na forma :

$$\gamma H(n \otimes n)m = 0. \quad (22)$$



O tensor $H(n \otimes n)$ é denominado tensor de localização e depende das propriedades do material, do nível de solicitação local e da direção da normal ao plano de localização.

Na hipótese de salto não nulo do gradiente de velocidade ($\gamma > 0$) a singularidade do tensor de localização garante a verificação da (22). Tal singularidade, por sua vez, implica na nulidade do seu determinante, o que fornece a relação para a determinação do versor normal. Admitir, portanto, equilíbrio através da superfície é essencial para a determinação de n .

2.4 Condição de propagação de Fresnel-Hadamard: relação entre o estacionamento de ondas planas e a localização de deformação

Há uma correlação entre a localização de deformação e a propagação de ondas planas em meios elásticos ou elastoplásticos com dano. De fato, é possível mostrar que a condição de singularidade do tensor de localização implica em estacionamento da frente de onda.

Imagine-se que uma perturbação local gere, num meio homogêneo que ocupa uma região Ω , uma frente de onda que se propaga com velocidade c segundo uma direção definida pelo versor n . Admita-se ainda, por simplicidade, que a frente de onda seja plana, isto é, a direção de propagação é a mesma em todos os seus pontos. Assim, a distância d de um ponto qualquer do meio à frente de onda é determinada pela relação :

$$d = x^T n - c(t - t_0);$$

onde x é o vetor posição do ponto em relação à origem de um sistema adotado como referência (usualmente coincidente com a fonte geradora da perturbação); t_0 é o instante de tempo em que se inicia a propagação, normalmente toma-se $t_0 = 0$.

De outro modo, pode-se pensar numa perturbação genérica formada pela superposição de um trem de ondas em número igual a q . Nesse caso, a distância medida passa a ser :

$$q d = x^T q n - c q t = x^T N - n t.$$

Voltando ao caso anterior, se o ponto x considerado localiza-se na frente de onda, verifica-se a condição : $n^T x = c t$. A partir dessa última condição, pode-se afirmar que num intervalo de tempo dt a frente de onda se desloca de uma distância dx determinada por :

$$n^T dx = c dt \quad \text{ou} \quad dx = c dt n. \quad (23)$$

Considere-se, então, $\dot{u}(x, t)$ o campo vetorial de taxas de deslocamentos induzido aos pontos do meio pela perturbação. Por hipótese, admite-se que

tal campo seja contínuo em Ω , porém com gradiente descontínuo através da frente de onda, isto é :

$$[\dot{u}] = 0 \quad p / \forall x \in \Omega; \quad (24a)$$

$$[\nabla \dot{u}] \neq 0 \quad p / \forall x / x^T n = c t. \quad (24b)$$

A diferencial total do campo de velocidades :

$$d \dot{u} = \nabla \dot{u} dx + \dot{u} dt; \quad (25)$$

pode ser reescrita numa forma mais conveniente para incluir acréscimos dx através da frente de onda. Assim sendo, considerando-se também da (24) que, $d[\dot{u}] = [\dot{u}] = 0$, segue que:

$$[d \dot{u}] = [\nabla \dot{u}] dx + \dot{u} dt = 0. \quad (26)$$

Da relação anterior, como $[\nabla \dot{u}] \neq 0$, conclui-se que \dot{u} deve ser descontínuo através da frente de onda: $[\dot{u}] \neq 0$. Considerando-se que x esteja contido na frente de onda e que dx esteja alinhado com a direção de propagação da mesma, substituindo-se a (23) na (26), obtém-se :

$$c[\nabla \dot{u}] n = -[\dot{u}]. \quad (27)$$

Por um lado, introduzindo-se um versor m tal que:

$$[\dot{u}] = -\alpha m, \quad (\alpha > 0), \quad (28)$$

a igualdade anterior se verifica se $[\nabla \dot{u}]$ tiver a seguinte forma :

$$[\nabla \dot{u}] = \gamma (m \otimes n) \quad c / \gamma = \frac{\alpha}{c} > 0; \quad (29)$$

recuperando-se a relação de compatibilidade de Maxwell, o que, aliás, evidencia a relação entre o problema de propagação de ondas e o de localização.

Por outro lado, uma forma geral para $[\nabla \dot{u}]$ que satisfaça a (27) é dada por :

$$c[\nabla \dot{u}] = -[\dot{u}] \otimes n. \quad (30)$$

Realizando-se a operação *traço* sobre os dois lados dessa igualdade e fazendo-se uso da (2c), resulta :

$$\operatorname{div}[\dot{u}] = -\frac{[\dot{u}]^T n}{c}. \quad (31)$$

Essa última relação pode ser generalizada para campos tensoriais de ordem superior. Por exemplo, se o campo causado pela perturbação é tensorial de segunda ordem, como o de tensões, a (31) assume a forma :

$$\operatorname{div}[\sigma] = -\frac{[\dot{\sigma}] n}{c}. \quad (32)$$

No caso dos meios contínuos, ondas que provocam um campo de deslocamentos com as características descritas pela (24), devem verificar, nos pontos do meio, a condição de equilíbrio dinâmico. A imposição dessa condição permite a determinação do versor n , garantindo, ainda, a existência de um tal tipo de onda. Em particular para pontos pertencentes à frente de onda aquela condição é dada por :

$$\operatorname{div}[\sigma] = \rho [\dot{u}]; \quad (33)$$

onde ρ representa a densidade de massa local.

Combinando-se as (30), (32) e (33) e levando-se em



conta a relação constitutiva e a simetria menor do tensor constitutivo, do mesmo modo como desenvolvido no item anterior, resulta que :

$$\{H(n \otimes n) - \rho c^2 II\}[\ddot{u}] = 0; \quad (34)$$

onde II é o tensor identidade de segunda ordem.

Escrevendo-se o salto da aceleração na forma $[\ddot{u}] = -\alpha m$, ($\alpha > 0$), resulta :

$$H(n \otimes n)m - \gamma^* m = 0, \quad (35)$$

onde $\gamma^* = \rho c^2$.

A (35) é denominada condição de propagação de Fresnel-Hadamard e representa um problema de autovalor ou problema espectral.

De uma forma geral são as propriedades espectrais do tensor acústico $H(n \otimes n)$ que definem os regimes de propagação de uma frente de onda, sendo ρc_i^2 os seus autovalores e m , os autovetores, correspondentes às chamadas direções de polarização.

Em particular, nota-se que a condição de localização expressa pela (22) é recuperada se c for igual a zero, isto é : a onda estaciona em algum instante t . Portanto, sob o ponto de vista da teoria de propagação de ondas, a existência de autovalor nulo do tensor acústico, ou o surgimento da singularidade, implica, pela (35), em *estacionamento* da frente de onda ($c=0$) e indica localização pela (22).

Entretanto, dependendo de suas características, pode-se verificar a singularidade do tensor acústico com autovalores não-nulos, do tipo complexo, por exemplo. Nesse caso, também se considera que há localização, pois por um lado a condição $\det[H(n \otimes n)] = 0$ equivale a atender à (22) e, por outro lado, ondas imaginárias, associadas à (35), não se propagam.

Pode-se, então, afirmar, que no problema dinâmico, sob um ponto de vista geral, o critério de localização associado à singularidade do tensor acústico identifica um limite para um regime estável de propagação de ondas de aceleração. Em outras palavras a singularidade pode ser entendida como um indicador da passagem para um regime de instabilidade do comportamento do material.

Naturalmente, se o tensor acústico é positivo definido, por exemplo, há estabilidade na propagação da perturbação segundo qualquer direção; portanto, a possibilidade de instabilidade existe quando o tensor não é positivo definido.

Quando o tensor acústico apresenta-se simétrico, todas as raízes (valores de c_i^2) são reais e a verificação da condição de localização resume-se à procura de autovalores nulos. É o caso dos modelos constitutivos elastoplásticos, por exemplo, nos quais em decorrência da hipótese de

associatividade o tensor constitutivo é simétrico e o tensor acústico, consequentemente, é também simétrico.

Por outro lado, se o tensor acústico não é simétrico, há a possibilidade de que, atendendo à condição de singularidade, apenas um dos autovalores seja real e positivo, enquanto que os outros dois resultem imaginários. Nesse caso, como já se afirmou, assume-se que a um autovalor complexo corresponde, também, a localização da perturbação.

Ainda com relação aos tensores não-simétricos, há algo mais a comentar. Admitindo-se conhecida a direção de polarização, da condição (35), realizando-se o produto interno por m , deriva-se a seguinte forma quadrática para a determinação da velocidade de propagação correspondente:

$$m^T H(n \otimes n)m - \gamma^* (m^T m) = 0; \quad (36)$$

Assim, o estacionamento da frente de onda implica em:

$$m^T H(n \otimes n)m = \gamma^* \|m\|^2 = 0. \quad (37)$$

Note-se também que

$$m^T H(n \otimes n)m = m^T [H(n \otimes n)]^s m; \quad (38)$$

de modo que em formas quadráticas envolvendo tensores não-simétricos são os autovalores de sua parte simétrica que definem as direções de polarização. Além disso, quando aos autovalores aplica-se a desigualdade de Bromwich, uma afirmação de que o menor autovalor da parte simétrica é menor ou igual ao menor autovalor do tensor original, pode levar a conclusões diferentes daquelas que seriam obtidas da análise com o tensor completo. De fato, o menor autovalor da parte simétrica do tensor acústico pode ser nulo, o que indica localização, enquanto que o menor autovalor do tensor completo apresenta-se positivo.

Como o tensor acústico e, portanto, a natureza e o sinal dos seus autovalores dependem dos regimes de solicitação, de deformação, dos desvios de normalidade e, sobretudo, das propriedades constitutivas, a localização, ou mesmo a instabilidade material, é favorecida por módulos de encruamento negativos nos casos de tensores acústicos com simetria, mas também pode ocorrer com módulos positivos nos casos não-simétricos. É o caso dos modelos elastoplásticos não-associativos, nos quais a localização pode ser detectada já no regime de encruamento positivo da resposta constitutiva.

Pode-se afirmar então que, $\gamma = \rho c_i^2 = 0$, é uma condição necessária mas não suficiente para se ter o problema de autovalor nulo dado na equação (35). Será visto na seção 3.3 que, para o caso não-associativo isotrópico, em que o tensor H é não-simétrico, podem ocorrer autovalores complexos conjugados que satisfaçam a condição de perda de elipticidade (35).

A conclusão que se chega então é:



“Em qualquer caso de existência de autovalor nulo, na análise das equações (22) e (35), tem-se localização, mas pode-se ter localização associada a autovalor não nulo, no caso do tensor H ser não-simétrico”.

Nos modelos elásticos com dano, valendo a hipótese de associatividade, a condição de localização é verificada para um nível de deformação correspondente ao ponto limite de encruamento nulo da resposta constitutiva. Porém, pode ocorrer que para certas trajetórias de tensões, os modos localizados não sejam ativados e a ruptura tenha lugar num regime de dano distribuído.

Uma observação importante é que na análise clássica de localização, com modelos constitutivos escritos em sua forma local, identifica-se um plano de descontinuidade das deformações que pode ser interpretado como uma zona de localização de largura nula.

Mas o comportamento real dos materiais granulares sugere a existência de localização numa banda de largura inicial finita que progressivamente degenera num plano. De fato, o processo de ruptura pode ser descrito pelas seguintes etapas :

- i) os primeiros estágios de carregamento, o crescimento de microfissuras se dá de modo distribuído sobre o volume ;
- ii) a partir de determinado nível, verificadas certas condições críticas, a danificação localizada numa faixa de largura finita prevalece ;
- iii) com a evolução do processo, a largura da faixa em que o dano evolui diminui progressivamente tendendo a um plano de fratura.

Particularmente, nos modelos com dano representativos de materiais granulares, as chamadas formas regularizadas por meio de gradientes da variável de dano, que são alternativas equivalentes a uma formulação não-local em deformações, incluem naturalmente um comprimento interno relacionado a uma largura inicial para a banda de localização, coincidente com o comprimento da correspondente onda estacionária do estudo de propagação de ondas. A análise de localização aplicada a esses modelos conduz à identificação da largura de tal banda.

3 Análise espectral do tensor acústico de dano

Nesta seção pretende-se fazer a análise espectral do tensor acústico para modelos associativos e não-associativos de dano contínuo.

Para conduzir uma investigação mais detalhada dos casos citados é necessário utilizar as relações do modelo constitutivo definido na seção 2.2 e resultados encontrados em [1], [3], [4], [5] e [8] e [19].

3.1 Análise Espectral para Lei de Fluxo Associativa

Voltando à análise espectral, o Tensor Acústico de Dano Contínuo é definido, considerando-se lei de fluxo associativa e a relação (11), por:

$$Q = H(n \otimes n) = [E(n \otimes n) - \frac{1}{G} (f_n \otimes f_n)] \text{ se } \dot{\omega} > 0. \quad (39)$$

No caso de modelos associativos de dano contínuo, caracterizados por apresentarem o tensor acústico Q simétrico, na investigação da (22) ou (35), os autovalores relativos ao problema espectral são reais e a verificação da condição de localização resume-se à procura de autovalores nulos. Uma maneira usual de se pesquisar a condição necessária da perda de unicidade de solução, consiste no estudo do sinal do determinante do tensor acústico de dano Q . Vários autores como [4], [5], [8] e [19], entre outros, fizeram tal análise. Nesse contexto, aqui será feita essa análise seguindo mais diretamente o encontrado em [19].

Afirma-se, para fazer a análise pretendida, que o problema em velocidade analisado nas seções anteriores, admite uma única solução homogênea se a condição $\det Q > 0$ está satisfeita para toda direção n . Nesse caso, as equações de equilíbrio são ditas elípticas. Se $\det Q < 0$, o problema se torna instável; então se investigará aqui a condição necessária crítica para a ocorrência da instabilidade, isto é, a condição necessária de perda de elipticidade ou condição de singularidade:

$$\det Q = 0. \quad (40)$$

Entretanto, dependendo de suas características, pode-se verificar a singularidade do tensor acústico Q , para autovalores não-nulos, do tipo complexo. Particularmente, nos mc exemplo. Nesse caso, também se considera que há localização, pois por um lado a condição $\det[H(n \otimes n)] = 0$ equivale a atender à (22) e, por outro lado, ondas imaginárias, associadas à (35), não se propagam. Este caso será analisado em seções posteriores.

A análise de (40) será feita de uma maneira geral, para tensores simétricos (com lei de fluxo de plastificação e dano associativa), considerando-se sempre o caso de isotropia. No que segue, o estudo se inicia por um problema de autovalor generalizado, explorado para se analisar a singularidade de Q .

3.1.1 Análise espectral para o problema generalizado associativo

Para se fazer a análise espectral de Q , considera-se a equação (35), agora escrita levando-se em conta a definição de Q em (39). Então, aquela equação é equivalente a:

$$Qm - \gamma^* m = 0, \quad (41)$$

que é equivalente ao problema de autovalor:

$$[Q - \gamma^* I_2] m = 0; \quad (42)$$



onde \mathbf{I}_2 é o tensor identidade de segunda ordem.

Se a equação (42) admitir um autovalor nulo $\gamma_i^* = 0$, então essa equação espectral pode ser escrita, nesse caso por:

$$\mathbf{Q} \mathbf{m} = 0, \quad (43)$$

a qual, tem solução diferente da trivial (nula) se a condição (43) está satisfeita, para $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|\mathbf{n}\| = 1$.

Para se analisar (41), a melhor estratégia não é explorar diretamente a equação (43), mas sim a seguinte equação:

$$\mathbf{Q} \mathbf{m} - \Upsilon \mathbf{Q}_E \mathbf{m} = 0; \quad (44)$$

com \mathbf{Q}_E definida por,

$$\mathbf{Q}_E = \mathbf{E}(\mathbf{w})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}); \quad (45)$$

ou ainda, para o caso de materiais isótropos,

$$\mathbf{Q}_E = (\lambda + \mu) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu \mathbf{I}_2; \quad (46)$$

onde λ, μ são as constantes de Lamé, com $\mathbf{E}(\mathbf{w})$ definida por,

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}) = 2\mu(\mathbf{w}) \mathbf{I}_4 + \lambda(\mathbf{w}) \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2. \quad (47)$$

A análise da equação (44) é equivalente ao seguinte problema de autovalor generalizado:

$$[\mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q} - \Upsilon \mathbf{I}_2] \mathbf{m} = 0; \quad (48)$$

e o estudo de (48), não fornece diretamente os autovalores do tensor acústico \mathbf{Q} , mas é útil para determinar-se a condição de singularidade desse tensor.

A equivalência das equações (42) e (48) para a existência de autovalores nulos é justificada a seguir, para o caso simétrico.

Para o caso do tensor \mathbf{Q} simétrico, é conhecido da Álgebra Linear que existe uma base ortonormal gerada pelos autoversores $\{\mathbf{m}_j, j = 1, 2, 3\}$, associados aos autovalores γ_j^* , tal que o tensor \mathbf{Q} pode ser representado nessa base. Além disso, \mathbf{Q} é semelhante a uma matriz diagonal Λ , ou seja,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}^T \Lambda \mathbf{M}; \quad (49)$$

onde \mathbf{M} é um tensor cujas colunas são formadas pelo autoversores \mathbf{m}_j^T e Λ é um tensor diagonal, ou seja, $\Lambda = \text{diag}[\gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^*]$.

Se o tensor \mathbf{Q} é simétrico, tem-se também que os autovalores γ_j^* são reais e independente da simetria ou não de \mathbf{Q} , seu determinante pode ser calculado por:

$$\det \mathbf{Q} = \gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^*. \quad (50)$$

De uma maneira análoga à (61) o determinante do tensor $\mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q}$ é determinado pelo produto dos seus autovalores associados, da seguinte forma:

$$\det \mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q} = \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3. \quad (51)$$

Com os resultados (50) e (51) tem-se que, pesquisar autovalores nulos para a equação (42) é equivalente à mesma análise feita em (48), desde que:

$$\det \mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q} = \frac{\det \mathbf{Q}}{\det \mathbf{Q}_E} = \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3 \Rightarrow$$

$$\det \mathbf{Q} = \det \mathbf{Q}_E \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3, \quad (52)$$

ou seja,

$$\det \mathbf{Q} = \gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^* = \det \mathbf{Q}_E \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3, \quad (53)$$

o que implica em $\det \mathbf{Q} = 0$ para o caso da existência de autovalor nulo $\Upsilon_j = 0$ em (48).

Para o caso de \mathbf{Q} ser não-simétrico (lei de fluxo não-associativa), ele pode não ser diagonalizável, o que invalida o resultado (49), mas não invalida as relações (50), (51), (52) e (53), relativas à singularidade de \mathbf{Q} . A não simetria de \mathbf{Q} , pode implicar na existência de autovalores complexos na análise espectral. Assim, uma interessante estratégia encontrada em [19], a ser vista na seção 3.3, é definida para se fazer a análise espectral de tensores não-simétricos.

Será visto, no decorrer desta seção, que os tensores \mathbf{Q} e $\mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q}$ podem ser escritos como modificações de posto no máximo 2 do tensor identidade. Seus autovalores e autovetores serão caracterizados explorando-se essa característica peculiar, seguindo resultados encontrados em [15].

Considere-se o tensor acústico com dano, dado em (39), escrito da maneira simplificada abaixo:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_E - \frac{1}{G} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}; \quad (54)$$

onde $\mathbf{a} = \mathbf{f}_\varepsilon \mathbf{n}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{g}_\varepsilon \mathbf{n}$. Lembre-se que, no caso associativo, de acordo com a equação (44), tem-se:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{f}_\varepsilon \mathbf{n}.$$

Utilizando-se (54), o tensor do autopropriedade generalizado (48) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q} = \mathbf{I}_2 - \frac{1}{G} \mathbf{Q}_E^{-1} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}). \quad (55)$$

Observe que, no caso de elasticidade isótropa, utilizando-se a fórmula de Sherman e Morrison, o tensor \mathbf{Q}_E pode ser invertido da seguinte maneira:

$$\mathbf{Q}_E^{-1} = \mu^{-1} \mathbf{I}_2 - (\lambda + \mu) [\mu (\lambda + 2\mu)]^{-1} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (56)$$

A resolução de $\det \mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q} = \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3 = 0$ é feita notando-se que em (55) o tensor $\mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q}$ é uma modificação de posto 1 do tensor identidade \mathbf{I}_2 .

Baseando-se neste fato considera-se que o autovalor $\Upsilon_j = 1$ tem multiplicidade dois para o tensor $\mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q}$. Sem perda de generalidade, assumindo-se que $\Upsilon_1 = \Upsilon_2 = 1$, resta somente determinar o valor de Υ_3 para se fazer a análise desejada.

O cálculo do autovalor Υ_3 é então feito da seguinte forma:

$$\det \mathbf{Q}_E^{-1} \mathbf{Q} = \frac{\det \mathbf{Q}}{\det \mathbf{Q}_E} = \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3 = \Upsilon_3, \quad (57)$$

então, desde que,

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1 + \mathbf{b}^T \mathbf{a}, \quad (58)$$

tem-se que:



$$\det Q_E^{-1}Q = 1 - \frac{1}{G} (\mathbf{b}^T Q_E^{-1} \mathbf{a}). \quad (59)$$

De (57) e (59) conclui-se que:

$$\Upsilon_3 = 1 - \frac{1}{G} (\mathbf{b}^T Q_E^{-1} \mathbf{a}). \quad (60)$$

A condição necessária de localização de deformação se reduz a impor que:

$$\det Q_E^{-1}Q = \Upsilon_3 = 0, \quad (61)$$

ou seja,

$$\frac{1}{G} (\mathbf{b}^T Q_E^{-1} \mathbf{a}) = 1 \Leftrightarrow (\mathbf{b}^T Q_E^{-1} \mathbf{a}) = G. \quad (62)$$

Considerando-se e substituindo-se o valor de G , visto em (12), a condição de localização para os modelos associativos com dano contínuo assume a forma:

$$\mathbf{r}^{-1} (\mathbf{b}^T Q_E^{-1} \mathbf{a}) = \mathbf{f}_w. \quad (63)$$

Substituindo-se a relação vista em (9) na (63), tem-se a seguinte equação para os modelos associativos com dano contínuo:

$$\alpha \mathbf{f}_w - \dot{\omega} (\mathbf{b}^T Q_E^{-1} \mathbf{a}) = 0. \quad (64)$$

O valor máximo para n que satisfaça a equação (64) e tal que $\|n\| = 1$, assinala um indício da deformação localizada, onde n é a correspondente direção de localização.

Esse problema, pode ser formulado da seguinte forma:

$$\underset{\mathbf{e}^T n}{\text{Maximizar}} \{ \alpha \mathbf{f}_w \mathbf{r} - \mathbf{b}^T Q_E^{-1} \mathbf{a} = 0; \|n\| = 1 \} \quad (65)$$

onde $\mathbf{a}(n)$, $\mathbf{b}(n)$ estão definidos em (54) e $\mathbf{e}^T = (1, 1, 1)$.

Se a restrição (64) está satisfeita, então a determinação do versor n é feita resolvendo-se (65).

3.2 Análise dos autovalores de Q para materiais isótropos

Considerando-se materiais isótropos, tem-se que Q_E é definida de acordo com (46), com,

$$\lambda = \lambda(\mathbf{w}) \text{ e } \mu = \mu(\mathbf{w}); \quad (66)$$

tal que, Q é definida de acordo com (39) e a sua substituição em (42) resulta em:

$$[(\mu - \gamma^*) \mathbf{I}_2 + (\lambda + \mu) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] \mathbf{m} = 0. \quad (67)$$

Nota-se que o tensor de (67) é uma modificação de posto 2 do tensor identidade \mathbf{I}_2 , então, tem-se que $\gamma_1^* = \mu$ é um dos autovalores para (67). Os dois autovalores restantes são obtidos da equação (52) por:

$$\begin{aligned} \det Q &= \det Q_E \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3 \Leftrightarrow \gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^* = \\ &\det Q_E \Upsilon_1 \Upsilon_2 \Upsilon_3 \Leftrightarrow \mu \gamma_2^* \gamma_3^* = \mu \mu (\lambda + 2\mu) \Upsilon_3, \end{aligned}$$

que fornece:

$$\gamma_2^* \gamma_3^* = \mu (\lambda + 2\mu) \Upsilon_3 = \beta, \quad (68)$$

cujo valor é zero para $\Upsilon_3 = 0$.

Precisa-se de mais uma equação para se determinar γ_2^* e γ_3^* . A operação traço de Q define tal relação:

$$\text{tr}(Q) = \text{tr}(Q_E) - \frac{1}{G} \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \gamma_3^* \Rightarrow$$

$$2\mu + \lambda + 2\mu - \frac{1}{G} \mathbf{b}^T \mathbf{a} = \mu + \gamma_2^* + \gamma_3^* \Rightarrow$$

$$\gamma_2^* + \gamma_3^* = 3\mu + \lambda - \frac{1}{G} \mathbf{b}^T \mathbf{a} = \alpha. \quad (69)$$

Então, (68) e (69) definem duas equações para se determinar γ_2^* e γ_3^* :

$$\begin{cases} \gamma_2^* + \gamma_3^* = \alpha \\ \gamma_2^* \gamma_3^* = \beta \end{cases} \quad (70)$$

e as soluções de (70), são as raízes de uma equação do segundo grau em γ , ou seja, satisfazem:

$$(\gamma)^2 - \alpha \gamma + \beta = 0. \quad (71)$$

Resolvendo-se (71), chega-se aos autovalores procurados, γ_2^* e γ_3^* .

Observações 3.1:

i) Em [14], demonstra-se que em geral $\gamma_2^* > \gamma_3^*$ e $\gamma_3^* = 0$ se $\Upsilon_3 = 0$. Além disso, se existir algum $\Upsilon_3 < 0$, então, em correspondência, $\gamma_3^* < 0$, com correspondente velocidade de propagação imaginária, pois $\gamma_3^* = pc_3^2$. Devido a simetria de Q , não existem autovalores complexos para (42); eles só poderão ocorrer para tensores não-simétricos (seção 3.3);

ii) Considerando-se $\mathbf{m}^T \mathbf{m} = 1$, então, a equação $\mathbf{m}^T Q \mathbf{m} = \gamma^* \mathbf{m}^T \mathbf{m} = \gamma^*$, vista em (36), é uma equação algébrica quadrática em \mathbf{m} , dependente diretamente dos autovalores γ^* obtidos no estudo de (42). Então, os valores de γ^* servem diretamente para especificar, o comportamento dessa equação:

- se $\gamma^* > 0$, então tem-se que $\det Q > 0$, Q é definida positiva e a equação representa um elipsóide em \mathbb{R}^3 (note que se $Q = \mathbf{I}_2$, a eq. $\mathbf{m}^T \mathbf{I}_2 \mathbf{m} = \gamma^*$ é a equação de uma esfera, se $\gamma^* > 0$). Desde que um elipsóide (ou elipse em \mathbb{R}^2) é estritamente convexo, tem-se $\mathbf{m}^T Q (\mathbf{m}^* - \mathbf{m}) < 0, \forall \mathbf{m}^* \in \mathbb{R}^3$, não colinear com \mathbf{m} (ver a figura 5) e uma condição de perda de elipticidade ocorre se $\mathbf{m}^T Q (\mathbf{m}^* - \mathbf{m}) > 0$, condição que é satisfeita se $\gamma^* \leq 0$, como será visto a seguir. $Q \mathbf{m}$ pode ser visto como o gradiente da função $f(\mathbf{m}) = \mathbf{m}^T Q \mathbf{m}$ e é tangente a cada ponto do contorno da elipse vista na figura 5;

- se existir algum $\gamma^* = 0$, então tem-se a perda da elipticidade da equação, que se degenera agora em planos ou retas no \mathbb{R}^3 , já que $\mathbf{m}^T Q \mathbf{m} = 0$ implica na singularidade de Q , para se ter soluções diferentes da trivial nessa equação e consequentemente $\text{posto}(Q) < 3$, o que degenera a equação da cônica no espaço de representação. Por isso essa equação é chamada de equação de uma cônica degenerada;

- se $\gamma^* < 0$, então, tem-se que $\det Q < 0$, Q é, portanto, definida negativa e a equação representa um hiperbolóide



em \mathbb{R}^3 (ou hipérbole em \mathbb{R}^2).

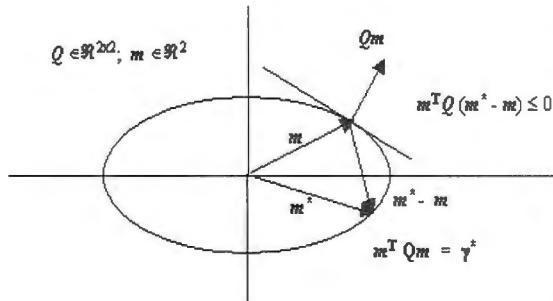


Figura 5 - Condição elíptica em \mathbb{R}^2 .

iii) considerando-se o modelo escalar de dano de Mazars, as definições de λ e μ , bem como, do tensor elástico E^0 para materiais isótropos, recaem em:

$$\lambda = (1 - D)\lambda_0; \mu = (1 - D)\mu_0;$$

$$E^0 = (1 - D)[2\mu_0 \mathbf{I}_2 + \lambda_0 \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2]; \quad (72)$$

onde D é a variável de dano de Mazars, tal que, $0 \leq D \leq 1$.

Assim, na análise efetuada para materiais isótropos, Q_E , vista em (36), pode ser substituída por Q^0 tal que:

$$Q^0 = (1 - D)[\mu_0 \mathbf{I}_2 + (\lambda_0 + 2\mu_0) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \quad (73)$$

e resultados análogos àqueles obtidos para Q_E , vistos nesta seção, podem também ser obtidos considerando-se Q^0 como em (73).

3.3 Análise espectral do tensor simétrico Q_s

O estudo indicado aqui é importante para a análise de materiais não-associativos nos quais Q é um tensor não-simétrico.

Considere o tensor acústico elastoplástico com dano Q , escrito de maneira explícita por:

$$Q = H(w)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = E(w)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{1}{G} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \text{ ou}$$

seja,

$$Q = Q_E - \frac{1}{G} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}; \quad (74)$$

onde $\mathbf{a} = \mathbf{f}_\varepsilon \mathbf{n}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{g}_\varepsilon \mathbf{n}$ ($\mathbf{f}_\varepsilon = \mathbf{g}_\varepsilon$ para o caso associativo).

É possível definir o tensor Q como a soma de uma parte simétrica Q_s com a parte anti-simétrica Q_a , ou seja, $Q = Q_s + Q_a$, onde:

$$Q_s = \frac{1}{2}(Q + (Q)^T) = Q_E - \frac{1}{2G}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}). \quad (75)$$

Então, é possível fazer a análise do problema espectral (48) considerando Q_s definida em (75).

Uma interessante aplicação desta estátua é a análise do modelo constitutivo considerando-se materiais não-associativos, nos

quais o tensor Q é não-simétrico, pois, nesse caso, Q_s não coincide com Q . Esta análise, não realizada aqui, é encontrada em [1].

3.4 Determinação de autovalores e autovetores de Q para materiais isótropos

No caso de elasticidade isótropa, o tensor de localização de deformação Q é expresso através de uma modificação de posto 2 do tensor identidade:

$$Q = \mu \mathbf{I}_2 + (\lambda + \mu) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}); \quad (76a)$$

então, Q pode ser escrita como uma modificação de posto 2 do tensor identidade:

$$Q = \mu \mathbf{I}_2 + \mathbf{U}_2; \quad (76b)$$

onde, $\mathbf{U}_2 = (\lambda + \mu) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$.

Seja agora o problema:

$$[\mathbf{U}_2 - \tau \mathbf{I}_2] \mathbf{n} = 0. \quad (77)$$

Os autovalores associados à equação (77), seguindo resultado da Álgebra Linear encontrado em [15], tem a forma:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} [\mathbf{a}_1^T \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2^T \mathbf{d}_2] + G_1; \quad (78a)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2} [\mathbf{a}_1^T \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2^T \mathbf{d}_2] - G_1; \quad (78b)$$

onde,

$$G_1 = \sqrt{(\mathbf{a}_1^T \mathbf{d}_1 - \mathbf{a}_2^T \mathbf{d}_2)^2 + 4(\mathbf{a}_1^T \mathbf{d}_2)(\mathbf{a}_2^T \mathbf{d}_1)}; \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{n};$$

$$\mathbf{d}_1 = (\lambda + \mu) \mathbf{n}; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}; \quad \mathbf{d}_2 = -\frac{1}{G} \mathbf{b}; \quad (78c)$$

Assim, de (78a,b), os autovalores de Q para a equação (77) são dados por:

$$\gamma_1^* = \mu + \tau_1; \quad \gamma_2^* = \mu + \tau_2 \quad \text{e} \quad \gamma_3^* = \mu. \quad (79)$$

Note que, se $G \rightarrow \infty$, então, as equações (78) e (79) recuperam os autovalores para a análise de problemas puramente elásticos, ou seja,

$$\gamma_2^* = \gamma_3^* = \mu \quad \text{e} \quad \gamma_1^* = \lambda_1 + 2\mu. \quad (80)$$

Utilizando-se mais uma vez os resultados vistos em [15], tem-se que, os autovetores associados a τ , no problema (96), tem a forma:

$$\mathbf{m} = \alpha_1 \mathbf{n} + \alpha_2 \mathbf{a}; \quad (81)$$

onde os α_i 's são calculados por:

$$\sum_{j=1}^2 (\mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_j - \tau \delta_{ij}) \alpha_j = 0, \quad (82)$$

para $i = 1, 2$; $\tau = \tau_1$ ou $\tau = \tau_2$; \mathbf{d}_i , \mathbf{a}_j ($i, j = 1, 2$), expressos em (78c). Substituindo-se (78c) em (82) obtém-se o seguinte sistema para determinar os α_i 's:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - \tau) \alpha_1 + (\lambda + \mu) (\mathbf{n}^T \mathbf{a}) \alpha_2 = 0 \\ (-\frac{1}{G}) (\mathbf{b}^T \mathbf{n}) \alpha_1 + ((-\frac{1}{G}) (\mathbf{b}^T \mathbf{a}) - \tau) \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (83)$$



Então, com os α_i 's calculados em (83), tem-se, com relação ao autovalor τ , os seus autovetores relativos.

3.4.1 A condição de localização

A condição de localização para materiais isótropos, dada por $\det Q = 0$, é obtida quando o autovalor γ_2^* definido em (79), expresso utilizando-se τ_2 em (78b), se anula. Isso acontece quando em (79):

$$\tau_2 = -\mu. \quad (84)$$

Por sua vez, a relação (84) só é válida se, em (78a,b), valer a condição $G_1 \geq 0$, com G_1 definido explicitamente a partir de (78c) por:

$$G_1 = (\lambda + \mu + \frac{1}{G} \mathbf{a}^T \mathbf{b})^2 - 4(\frac{\lambda + \mu}{G}) (\mathbf{n}^T \mathbf{a}) (\mathbf{n}^T \mathbf{b}). \quad (85)$$

Isto implica, se o problema for associativo, no tensor Q ser simétrico e então, na existência de autovalores reais para Q .

Supondo-se que (85) esteja satisfeita, então, a resolução de uma equação do segundo grau com respeito a G em (78a,b), determina a seguinte condição de localização:

$$G = \frac{(\lambda + 2\mu)(\mathbf{a}^T \mathbf{b}) - (\lambda + \mu)(\mathbf{n}^T \mathbf{a})(\mathbf{n}^T \mathbf{b})}{\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad (86)$$

a qual coincide com a substituição em (56) de Q_E^{-1} expresso por:

$$Q_E^{-1} = \mu^{-1} \mathbf{I}_2 - (\lambda + \mu) [\mu(\lambda + 2\mu)^{-1} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] \quad (87)$$

3.4.1 Determinação dos autovetores de Q .

Supondo-se que os autovalores foram calculados em (78) e (79), então é possível resolver (83) e determinar os autovetores associados, definidos na equação (81).

Uma relação possível para α_1 e α_2 , considerando-se a primeira equação em (83) é:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{(\lambda + \mu)}{\gamma_2^* - (\lambda + 2\mu)} (\mathbf{n}^T \mathbf{a}). \quad (88)$$

Considerando-se, na condição de localização, que $\tau_2 = -\mu$, então, $\gamma_2^* = 0$ e substituindo-o em (88) resulta:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} (\mathbf{n}^T \mathbf{a}). \quad (89)$$

Utilizando a (89), tem-se em (81) que:

$$\mathbf{m} = \alpha_2 \left[- \left(\frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} (\mathbf{n}^T \mathbf{a}) \right) \mathbf{n} + \mathbf{a} \right]. \quad (90)$$

Com o valor de \mathbf{m} expresso em (90) é possível agora caracterizar os seguintes modos de bifurcação (ver figura 4):

- se \mathbf{m} está alinhado com \mathbf{n} e \mathbf{a} está alinhado com \mathbf{n} , então a bifurcação é do modo de abertura (modo I);

- se \mathbf{m} é perpendicular a \mathbf{n} e \mathbf{a} é perpendicular a \mathbf{n} , então a bifurcação é do modo de cisalhamento puro (modo II);

- se \mathbf{m} não está alinhado com \mathbf{n} , nem com uma direção perpendicular a essa, a localização é do modo misto (modo III).

Na análise da condição de perda de elipticidade feita aqui, optou-se por estudar a singularidade do tensor acústico Q , mas a mesma análise pode ser feita explorando-se diretamente a singularidade do tensor elástico ou elastoplástico com dano H , analisando-se a condição necessária de localização, $\det(H) = 0$.

Aplicando-se os resultados aqui obtidos, relações análogas seriam tiradas.

Essa análise pode ser encontrada em [19].

Na próxima seção, seguindo resultados obtidos até aqui, faz-se uma introdução à análise pós-bifurcação ou pós-singularidade do problema da localização, utilizando-se resultados encontrados em [6], [10] e [11], os quais podem ser vistos no Apêndice E de [1].

4 Introdução à análise pós-bifurcação relativa à instabilidade de solução

Nas seções anteriores, um amplo estudo da condição necessária de localização ou de perda de elipticidade foi efetuado sem se preocupar em analisar o que ocorreria após tal condição estar satisfeita. Essa seção se relaciona à caracterização do tipo de instabilidade de solução, numa análise pós-singularidade da equação de equilíbrio, para sistemas isótropos, associativos e conservativos com relação à forças, explorando a singularidade do tensor acústico de dano visto na seção anterior. Se tentará dar condições de caracterizar as soluções pós-singularidade, objetivando detectar se essas soluções representam instabilidade por bifurcação de equilíbrio ou instabilidade associada a pontos limites (inflexão, mínimo ou máximo) baseando-se em resultados da Teoria de Bifurcação encontrados em [6], [10] e [11].

Antes de se iniciar a análise de pós-bifurcação para os modelos constitutivos com dano, serão revistos alguns conceitos relativos à instabilidade das estruturas,



que auxiliarão no entendimento dessa seção, baseados no proposto em [12] e [21].

4.1 A Definição de Estabilidade e Instabilidade de Solução

O conceito de estabilidade: (no sentido de Liapunov)

Considere uma configuração de equilíbrio de um sistema mecânico em relação a um dado referencial. Diz-se que a configuração está em *equilíbrio estável* se, dadas pequenas perturbações arbitrárias no sistema, através de modificações de posição e da imposição de velocidades iniciais, os movimentos resultantes permanecem pouco afastados da configuração de equilíbrio e tão mais próximos dessa quanto menores forem as perturbações dadas. Diz-se ainda que a configuração está em equilíbrio assintoticamente estável se para o tempo tendendo ao infinito a configuração do sistema perturbado tender, em termos de posição e velocidade, à configuração de equilíbrio.

O conceito de instabilidade:

A configuração está em equilíbrio instável se, dadas pequenas perturbações arbitrárias ao sistema, os movimentos resultantes tenderem a se afastar progressivamente da configuração de equilíbrio, embora esse não seja propriamente o caso geral.

Esses tipos de configurações serão importantes para se caracterizar em uma análise estrutural estática para sistemas conservativos com relação à forças, mas não-conservativos com relação à dissipação de energia (por plastificação, dano, plastificação e dano), se a configuração encontrada em uma análise pós-bifurcação está relacionada à instabilidade do equilíbrio por bifurcação ou associada a pontos limites.

Vários exemplos encontrados na literatura, os quais podem ser vistos em [12] e [21], servem para ilustrar o aparecimento de instabilidade por bifurcação de equilíbrio e de instabilidade associada a ponto limite, em problemas de análise estrutural estática (sistemas conservativos).

Observa-se por outro lado nesses mesmos referências, que considerando-se sistemas não-conservativos com relação à forças (tais como, ações de vento, forças variando no tempo, fluxo de fluidos, entre outros), existem exemplos em que não se consegue classificar a instabilidade como associada a ponto de bifurcação ou a ponto limite.

Nesse tipo de sistema é possível ocorrer

instabilidade por *múltiplos pontos de bifurcação* ou por *bifurcação em pontos limites múltiplos*. Essa análise será objeto de pesquisa futura e não será desenvolvida aqui.

4.2 Classificação geral da instabilidade de solução

Antes de se fazer uma análise pós-bifurcação de solução, que é a proposta dessa seção, é interessante relembrar algumas características relativas ao problema de instabilidade das estruturas e obter uma classificação dos tipos de instabilidade que ocorrem na prática. Essa classificação segue a proposta de [21] e evidencia a complexidade dos problemas gerais ligados à instabilidade.

A instabilidade pode ser de dois tipos: *divergente* e *oscilatória*.

Instabilidade divergente:

A instabilidade divergente se caracteriza pelo sistema estrutural abandonar sua configuração inicial de forma definitiva, buscando novos e eventualmente inexistentes estados equilibrados.

Instabilidade oscilatória:

A instabilidade oscilatória se caracteriza pelo sistema estrutural oscilar em torno de uma configuração de equilíbrio, em períodos maiores, devido à crescente absorção de energia mecânica, típica do processo.

Classificação da instabilidade divergente:

A instabilidade divergente pode ser de dois tipos: *estática* e *dinâmica*.

i) *Instabilidade divergente estática:*

É o tipo de instabilidade divergente que pode ser estudada através de análise estática, se manifesta pelo aparecimento de pontos limites ou pontos de bifurcação, sendo típica de sistemas estruturais sujeitos a forças conservativas. Ela aparece, entre outras, em estruturas reticuladas planas ou espaciais, estruturas laminares, estruturas compostas e na forma de instabilidade local de barras isoladas ou por instabilidade global, sem que as barras isoladas percam a estabilidade.

ii) *Instabilidade divergente dinâmica:*

É típica de sistemas estruturais sujeitos a forças não conservativas, entre as quais se destacam as produzidas pelo vento, forças variáveis no tempo ou forças decorrentes de fluxo de fluido, devendo ser estudada por processos dinâmicos de análise.



Classificação da instabilidade oscilatória:

A instabilidade oscilatória manifesta-se de diferentes modos, por ressonância e flutter, entre outros.

i) instabilidade oscilatória por ressonância

Manifesta-se quando forças não-estacionárias e periódicas agem sobre o sistema estrutural de modo que a sua frequência se iguala a uma das frequências próprias da estrutura, levando a velocidade de propagação e a amplitude de ondas a uma quase constância.

ii) instabilidade oscilatória por flutter

É o tipo de instabilidade oscilatória provocada por forças não conservativas sobre as estruturas. Pela ação dessas forças, passam a existir movimentos cílicos rápidos, sendo que em cada ciclo, o sistema estrutural absorve energia mecânica do meio e por consequência as amplitudes de ondas e velocidades de propagação se tornam crescentes com o tempo.

Outros tipos de instabilidade oscilatória podem se caracterizadas pela interação da instabilidade por ressonância e por flutter.

De acordo com o estudo feito até aqui e do proposto em [21], uma classificação geral da instabilidade é representada a seguir na figura 6, relativa a seu gênero e espécie.



Figura 6 - Classificação geral da instabilidade de solução.

4.3 Classificação da instabilidade explorando os autovalores do tensor acústico

Ao nível de modelo constitutivo, a caracterização dos tipos de instabilidade que podem acontecer pode ser feita, matematicamente, explorando-se os autovalores do tensor acústico Q ou do tensor rígidez tangente H .

Em princípio é possível também propor uma classificação para a “instabilidade material por

localização” como sendo do tipo divergente ou oscilatória.

Considerando-se o problema espectral (42), relativo ao problema de equilíbrio dinâmico, dado por:

$$[Q - \gamma^* I_2] m = 0; \quad (91)$$

e impondo-se a hipótese de que o modelo analisado é o modelo isótropo e associativo, então, os resultados obtidos na seção 3, podem ser utilizados para se caracterizar o tipo de instabilidade ocorrida. Daquele estudo, tem-se que um dos autovalores de (91) é positivo, $\gamma^* = \mu > 0$, logo restam apenas dois autovalores a serem analisados.

Esse estudo será desenvolvido nas seções 5.1 e 5.2. O caso do modelo geral, não-isótropo, não-conservativo e não-associativo é tratado na seção 5.3.

A classificação será feita explorando-se dois tipos de sistemas de equilíbrio do problema de análise estrutural: o equilíbrio estático e o equilíbrio dinâmico, tratados a seguir.

Considere a hipótese do corpo Ω se constituir num meio homogêneo e infinito, sujeito no infinito a carregamentos uniformes com variação contínua no instante t , que dão origem às soluções homogêneas, em deslocamento u , em velocidade \dot{u} , em aceleração \ddot{u} , em taxa de aceleração \ddot{v} , em tensão σ , em taxa de tensão $\dot{\sigma}$, em carregamento p e em taxa de carregamento \dot{p} . Com essa hipótese a equação de equilíbrio dinâmico pode ser dada por:

$$\operatorname{div} \sigma + p = \rho \ddot{u}; \quad (92)$$

onde ρ é a densidade de massa do contínuo.

Denotando-se $v = \dot{u}$, tem-se que a relação (92) implica na seguinte relação em taxas,

$$\operatorname{div} \dot{\sigma} + \dot{p} = \rho \ddot{v}. \quad (93)$$

Se a taxa em deslocamento \dot{u} é constante, então, a relação (92) é equivalente à relação de equilíbrio estático,

$$\operatorname{div} \sigma + p = 0 \quad (94)$$

e (93) é equivalente à relação de equilíbrio estático em taxas:

$$\operatorname{div} \dot{\sigma} + \dot{p} = 0. \quad (95)$$

A relação (93) pode ser expressa considerando-se,

$$\dot{\sigma} = H(w) \dot{e}(u), \quad (96)$$

por:

$$\operatorname{div}(H(w) \dot{e}(u)) + \dot{p} = \rho \ddot{v}; \quad (97)$$

4.4 Classificação para Modelos Isótropos, Associativos e Conservativos

Consideram-se as hipóteses do modelo ser isótropo, associativo e conservativo (em força). A hipótese de associatividade é considerada para se ter o tensor Q simétrico e garantir a existência de autovalores reais, somente. A hipótese de isotropia é feita para utilizar-se os resultados obtidos na seção 3. A hipótese de sistema na



existência de uma zona de localização e de um ponto crítico, a partir do qual pode-se sujeito a forças conservativas é feita para se poder caracterizar pontos limite ou pontos de bifurcação, de acordo com o descrito na figura 6.

Isto não impede que a análise dos autovalores de Q seja feita através da equação (92) relacionado ao equilíbrio dinâmico. Lembre-se que a equação de equilíbrio estático em taxas é equivalente à equação de equilíbrio dinâmico se a velocidade de propagação c é nula (equações (94) e (95)), de acordo com a análise feita na seção 2.4. Nesse caso ocorre o aparecimento de pontos críticos de carga e investiga-se a ocorrência de um dos autovalores γ_2^* ou γ_3^* ser nulo.

Sem perda de generalidade, considere-se $\gamma_1^* = \mu > 0$:

- se $\gamma_3^* = 0$ então, utilizando-se do resultado demonstrado em [14], que $\gamma_2^* > \gamma_3^*$, então, $\gamma_2^* > 0$ e a instabilidade ocorrida é do tipo divergente estática. Essa afirmação é verdadeira pois, $\gamma_i^* = \rho c_i^2$, ou seja, $\gamma_i^* \geq 0$, para $i = 1, 2, 3$; o que exclui a ocorrência de velocidade de propagação imaginária e portanto de instabilidade divergente dinâmica.

Nesse caso, $\gamma_3^* = 0$ implica na singularidade de Q e consequentemente ter instabilidade por bifurcação ou instabilidade associada a ponto limite.

É válido ressaltar que, o sistema é conservativo com relação às forças, mas é não-conservativo com relação à dissipação de energia (nos regimes de encontro), podendo-se ter a ocorrência de autovalor negativo.

Admitindo-se $\gamma_3^* < 0$, então, de (79), $\gamma_2^* > 0$ e $\gamma_1^* = \mu > 0$. Nesse caso tem-se a ocorrência de velocidade de propagação imaginária, pois $\gamma_3^* = \rho c_3^2 < 0$ e a instabilidade é do tipo divergente dinâmica.

No estudo a ser feito na seção 5, somente será considerado o caso de instabilidade divergente estática ($\gamma_3^* = 0$) para se fazer a análise de singularidade do tensor Q . Mas é importante dizer que no tratamento numérico do problema, a ocorrência de autovalor negativo ($\gamma_3^* < 0$) implica em um ponto crítico e em uma zona de localização já terem sido alcançados. Note que, se $\gamma_3^* < 0$ então $\det Q < 0$, o que implica em encontro negativo e na solução obtida ser um ponto de bifurcação (não caracterizado pela análise de singularidade).

4.5 Classificação para Modelos Isótropos, Não-Associativos e Não-Conservativos

As hipóteses de isotropia, de não associatividade e de sistema não-conservativo, implicam:

- no tensor Q ser não-simétrico, o que possibilita a ocorrência de autovalores complexos;
- na possibilidade de ocorrer instabilidade divergente dinâmica ou instabilidade oscilatória.

A hipótese de isotropia garante que, um dos autovalores é positivo, ou seja, $\gamma_1^* = \mu > 0$ e utilizando-se de resultados de [14], vistos na seção 3.2 (observações 3.1), tem-se:

- se o autovalor γ_3^* é negativo então γ_2^* é positivo;
- se o autovalor γ_3^* for complexo então γ_2^* é complexo e conjugado em relação a γ_3^* .

Com essas considerações chega-se a conclusão que, só é possível caracterizar a instabilidade através de uma análise dinâmica do problema. Nesse caso as seguintes situações podem ocorrer:

- se $\gamma_3^* < 0$, então, $\gamma_2^* > 0$ e a instabilidade ocorrida é do tipo divergente dinâmica, com correspondente velocidade de propagação imaginária (pois $\gamma_3^* = \rho c_3^2$);
- se γ_3^* é um autovalor complexo, então a instabilidade é do tipo oscilatório existindo duas possibilidades:
 - se $\operatorname{Re}(\gamma_3^*) \neq 0$, a instabilidade é do tipo oscilatório por "flutter";
 - se $\operatorname{Re}(\gamma_3^*) = 0$, a instabilidade é do tipo oscilatório por ressonância.

4.6 Classificação para Modelos Gerais: Não-Isótropos, Não-Associativos e Não-Conservativos

Nesse caso a análise é mais complicada pois podem aparecer os chamados fenômenos acoplados ou interativos. Por exemplo:

- se $\gamma_3^* < 0$ e γ_2^* é imaginário puro, tem-se instabilidade divergente dinâmica acoplada à instabilidade oscilatória ressonante;
- se $\gamma_3^* < 0$ e γ_2^* é complexo com parte real não nula, então, tem-se instabilidade divergente dinâmica acoplada a instabilidade oscilatória por "flutter";
- se γ_3^* é imaginário puro e γ_2^* é complexo com parte real não nula, então, tem-se instabilidade oscilatória ressonante acoplada à instabilidade oscilatória por "flutter";

Na próxima seção, exploram-se as hipóteses e os resultados da seção 4.4 e resultados encontrados na Teoria de Bifurcação para se definir, em uma análise estática, condições que caracterizem instabilidade por bifurcação ou instabilidade associada a ponto limite.

Essa análise será feita explorando a condição de existência de autovalores nulos para o Tensor Q , ou seja, admitindo-se que a velocidade de propagação c se anule em uma determinada região do meio considerado, denominada de "banda de localização".

Justifica-se a análise estática porque, conforme visto no início da seção 2, se a velocidade de propagação é nula, o problema de equilíbrio dinâmico se torna



equivalente ao problema de equilíbrio estático. Explorando a condição de equilíbrio estático da estrutura, ou seja, desprezando-se forças de inércia, faz-se uma análise estática do problema, a nível local, relativa às propriedades físicas do material. A análise a nível global, relativa às propriedades geométricas da estrutura pode ser vista no Apêndice F de [1].

5 Análise pós-singularidade envolvendo propriedades físicas do material

Considere-se o corpo em um meio contínuo e infinito $\Omega \subset V$ e uma superfície regular num contorno comum entre duas regiões, simbolizadas por Ω^+ , $\Omega^- \subset \Omega$, tais que, a função taxa de deslocamento $\dot{u} \in \Omega$ é singular ao percorrer as regiões Ω^+ e Ω^- do corpo. Isto implica pelo Lema de Hadamard que, \dot{u} pode ser expressa através da equação de salto:

$[\dot{u}] = \dot{u}^+ - \dot{u}^-; \quad \dot{u}^+ \in \Omega^+, \quad \dot{u}^- \in \Omega^-; \quad (98)$

a qual implica na ocorrência de um salto de deformação para $\dot{\epsilon}$, definido em (18) por $[\dot{\epsilon}]$, caracterizando assim uma região dita localizada no corpo considerado.

Supondo-se que, nas superfícies Ω^+ e Ω^- consideradas, a condição de equilíbrio estático é garantida, pretende-se fazer a análise pós-bifurcação explorando-se as equações em taxas de equilíbrio estático e constitutiva, combinadas na seguinte forma:

$$Div[\dot{\sigma}] + \dot{f} = div[H(\dot{w})\dot{\epsilon}(\dot{u})] + \dot{f} = 0. \quad (99)$$

Denotando-se,

$$K(\dot{w}, \dot{u}) = div[H(\dot{w})\dot{\epsilon}(\dot{u})],$$

então,

$$K(\dot{w}, \dot{u}) = div[H(\dot{w})[\dot{\epsilon}(\dot{u})]] = div[H[\dot{\epsilon}]]. \quad (100)$$

Assim, tem-se a equivalência de (99) com a seguinte equação:

$$f(\dot{u}, \dot{w}, \delta) = K(\dot{w}, \dot{u}) + \dot{f} = 0. \quad (101)$$

A função vetorial K definida em (99), relaciona deformações $\dot{\epsilon}$ (em função de deslocamentos \dot{u}) e dissipação de energia \dot{w} , com forças \dot{f} e está associada às propriedades físicas do material.

Para se fazer a análise pós-bifurcação de (99), considera-se na definição dessa um parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$, pré-multiplicando \dot{f} , cuja função será auxiliar a descrever o tipo de trajetória provocada por incrementos de carga, após a condição de singularidade estar satisfeita.

Em outras palavras, cada uma das soluções analisadas dependem do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$ e, então, esse parâmetro define uma família de configurações de equilíbrio, denominada trajetória de equilíbrio. A equação (100), então se torna:

$$f(\dot{u}, \dot{w}, \delta) = K(\dot{w}, \dot{u}) + \delta \dot{f} = 0. \quad (102)$$

5.1 Condição de existência de pontos singulares

A condição de existência de pontos singulares para (102), implica em que o tensor de segunda ordem $\nabla \dot{u} f$, relativo a f , seja singular, caso contrário o teorema da função implícita garantiria a existência e unicidade de solução. Então, a condição de singularidade para (102) é equivalente a se pesquisar para um versor $\phi \in \mathbb{R}^3$, $\phi \neq 0$, a seguinte equação homogênea:

$$(\nabla \dot{u} f)\phi = 0 \Leftrightarrow (\nabla \dot{u} K + \delta \nabla \dot{u} \dot{f})\phi = 0. \quad (103)$$

Pela (103), a condição de singularidade para $\nabla \dot{u} f$ é equivalente a se mostrar a singularidade para $\nabla \dot{u} K$ e $\nabla \dot{u} \dot{f}$.

Antes de se enunciar a proposição abaixo, que utiliza a hipótese do sistema considerado ser conservativo, é válida a seguinte colocação: “para sistema conservativo, ao nível do material, \dot{f} é o vetor taxa de força por unidade de volume; $\dot{f} = 0$ implica que não há variação da densidade do material e $\nabla \dot{f} = 0$, que a distribuição de densidade é homogênea”.

Proposição 5.1:

Considere-se a equação (102). Então, na hipótese de carregamento conservativo, a condição de singularidade vista em (22) é também a condição de singularidade para (102).

Justificativa:

Inicialmente observa-se que, devido à hipótese de carregamento conservativo, $\nabla \dot{u} \dot{f} \equiv 0$, então,

$$(\nabla \dot{u} \dot{f})\phi = 0, \quad \forall \phi. \quad (104)$$

Logo, resta somente analisar a singularidade de $\nabla \dot{u} K$ para obter a condição de singularidade para (102).

Por simplicidade de notação será considerado $\nabla \dot{u} \equiv \nabla$ nos resultados que seguem.

Levando-se em conta a simetria de $\dot{\epsilon}$, a simetria menor de H , as equações (2a) e (2c), bem como resultados da Análise Tensorial, encontrados em [7], tem-se que:

$$\begin{aligned} \nabla \dot{u} K &= \nabla \dot{u} \{div((H(\dot{w})[\dot{\epsilon}(\dot{u})]))\} = \\ &= \nabla \{div(H[\nabla \dot{u}])\} = \nabla \{div(H)[\nabla \dot{u}] + H \nabla [\nabla \dot{u}]\} = \\ &= \nabla \{H \nabla [\nabla \dot{u}]\}. \end{aligned} \quad (105)$$



Considerando-se de (14) que, $[\nabla \dot{u}] = \gamma(m \otimes n)$ e que $[\dot{u}]$ pode ser definido, de acordo com [4], por,

$$[\dot{u}] = e^{i(n^T x)} m = \beta m \quad (106)$$

então,

$$\begin{aligned} H \nabla [\nabla \dot{u}] &= \frac{\gamma}{\beta} H \nabla ([\dot{u}] \otimes n) = \\ \frac{\gamma}{\beta} H ([\nabla \dot{u}] \otimes n) &= \frac{\gamma^2}{\beta} H (m \otimes n \otimes n) \\ &= \frac{\gamma^2}{\beta} H (n \otimes n) m = \frac{\gamma^2}{\beta} Q m. \end{aligned}$$

Voltando-se em (105),

$$\begin{aligned} \nabla \{ H \nabla [\nabla \dot{u}] \} &= \frac{\gamma^2}{\beta^2} \nabla (Q m) = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \nabla (Q [\dot{u}]) = \\ &= \frac{\gamma^2}{\beta^2} (Q [\nabla \dot{u}]) = \frac{\gamma^2}{\beta^2} Q (m \otimes n) = \\ &= \frac{\gamma^2}{\beta^2} (Q m \otimes n). \end{aligned}$$

Logo,

$$(\nabla \dot{u} K) \phi = \frac{\gamma^2}{\beta^2} (Q m \otimes n) \phi = \frac{\gamma^2}{\beta^2} (n^T \phi) (Q m).$$

Assim, considerando-se $\gamma \neq 0$ e $\beta \neq 0$, se existir n satisfazendo a equação (65), então,

$$\begin{aligned} (\nabla \dot{u} K) \phi = 0 &\Leftrightarrow (n^T \phi) (Q m) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Q m = 0, \end{aligned} \quad (107)$$

a qual implica em Q ser singular.

Logo, a singularidade de Q é uma condição necessária para que $[\nabla \dot{u} K]$ seja singular.

De (104) e (107) conclui-se que, se Q for singular, então, $[\nabla \dot{u} f] \phi = 0$.

Portanto a condição de singularidade vista em (22) é também a condição de singularidade de $\nabla \dot{u} f$ e a proposição fica demonstrada.

Devido a (104) e (107), a análise de (102) e (103) é equivalente a se pesquisar soluções para o seguinte sistema estendido:

$$\hat{f}(\dot{u}, \dot{w}, \delta) = \begin{cases} f(\dot{u}, \dot{w}, \delta) \\ \nabla_{\dot{u}} f(\dot{u}, \dot{w}, \delta) g \\ \|g\| = 1 \end{cases} = 0, \quad (108)$$

Devido à equivalência de (107) com (43) e da proposição 5.1, então, a análise de singularidade de (102) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{u}} f(\dot{u}, \dot{w}, \delta) = 0 &\Leftrightarrow Q m = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \det Q = 0; \end{aligned} \quad (109)$$

Então, devido aos resultados encontrados na seção 3.1.1, a condição necessária de singularidade, dada em (109), é equivalente a se analisar autovalores nulos do problema espectral

(91), ou seja, determinar autoversores m associados a autovalores nulos $\gamma^* = 0$, em (91).

Considerando que m é um autoversor associado a autovalor nulo, a (107) pode ser expressa, equivalentemente, por:

$$Q m = 0, \|m\| = 1. \quad (110)$$

então, das equações (109) e (110), a (108) é equivalente ao seguinte sistema estendido simplificado:

$$\hat{f}(\dot{u}, \dot{w}, \delta) = \begin{cases} f(\dot{u}, \dot{w}, \delta) \\ \det Q \end{cases} = 0, \quad (111)$$

A análise pós-bifurcação agora é feita explorando-se o estudo de problemas de bifurcação para um parâmetro, adaptado ao caso de dois parâmetros (\dot{w} e δ), para o sistema estendido (111), de maneira análoga àquela encontrada na Teoria de Bifurcação, nas referências citadas ([6], [10] e [11]).

Viu-se que, na análise de instabilidade divergente estática (figura 6, da seção 4), tem-se instabilidade por bifurcação ou instabilidade por ponto limite. Isso implica, de acordo com resultados encontrados na Teoria de Bifurcação, que o núcleo de $\nabla_{\dot{u}} f$, denotado por $N(\nabla_{\dot{u}} f)$, é gerado por um único vetor $\phi \in \mathbb{R}^3$, ou seja,

$$N(\nabla_{\dot{u}} f) = \text{span}\{\phi\} \text{ tal que, } \dim N(\nabla_{\dot{u}} f) = 1. \quad (112)$$

Esta hipótese, descarta a possibilidade de se ter bifurcação em ponto limite ou múltiplos pontos de bifurcação relacionada a uma mesma variável, já que, esse tipo de bifurcação ocorre se e somente se $\dim N(\nabla_{\dot{u}} f) > 1$, de acordo com [6], [10] e [11].

Esse resultado ($\dim N(\nabla_{\dot{u}} f) = 1$) é sempre verificado nas hipóteses assumidas do modelo ser isótropo e associativo, o que garante que o tensor é simétrico e possui três autovalores distintos. Logo, a cada autovalor está associado um único autovetor.

Portanto, o autovalor nulo gera um único autovetor $\phi \in \mathbb{R}^3$, ou seja, $N(\nabla_{\dot{u}} f) = \text{span}\{\phi\}$ e $\dim N(\nabla_{\dot{u}} f) = 1$.

Nesse caso uma possibilidade exclui a outra, ou seja, ou se tem instabilidade divergente estática por bifurcação ou instabilidade divergente estática por ponto limite.

5.2 Análise pós-singularidade ou pós-bifurcação

A análise pós-bifurcação relacionada às propriedades físicas do material, explora diretamente as equações de equilíbrio (99), (100), (101) e (102).

Foi visto na seção anterior que, a condição de singularidade para (102), era equivalente a se ter,

$$\det Q = \det [H(\dot{w})(n \otimes n)] = 0. \quad (113)$$



Se a (113) é verificada, o primeiro passo para se iniciar a análise de pós-bifurcação, consiste em determinar um autovetor \mathbf{m} associado a autovalor nulo $\gamma^* = 0$, solução da equação (110). Vale lembrar que, para se determinar o autovetor \mathbf{m} é necessário antes determinar o vetor \mathbf{n} , o qual, pode ser obtido para modelo associativo e isótropo, resolvendo-se o problema de maximização (65), visto na seção 3.1.1.

Após o vetor \mathbf{n} ser determinado, o autovetor \mathbf{m} é calculado pela expressão (81) e é dado por:

$$\mathbf{m} = \alpha_1 \mathbf{n} + \alpha_2 \mathbf{a}; \mathbf{a} = \mathbf{f}_g \mathbf{n}; \quad (114)$$

onde α_1 e α_2 são determinados resolvendo-se o sistema (83). O autovetor \mathbf{m} definido em (114) é equivalente àquele visto em (90) se o modelo considerado é o modelo isótropo e associativo.

Com o autovetor \mathbf{m} calculado, pode-se iniciar a análise pós-bifurcação. Para isso, considera-se uma solução ramificada $(\dot{\mathbf{u}}(\xi), \dot{\mathbf{w}}(\xi), \delta(\xi))$ relacionada ao ponto de singularidade obtido, que satisfaz a (111) e (112), o qual é expresso por:

$$(\dot{\mathbf{u}}(\xi_0), \dot{\mathbf{w}}(\xi_0), \delta(\xi_0)) = (\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{w}}_0, \delta_0).$$

Todos os resultados obtidos a partir de agora são aplicações diretas daqueles encontrados em [6], [10] e [11].

A análise pós-bifurcação se inicia efetuando-se os cálculos de,

$$(\psi^*)^T \mathbf{f}_\delta^0 \in (\psi^*)^T \mathbf{f}_w^0; \quad (115)$$

tal que, $\psi^* \in N([\mathbf{f}_u^0]^T)$.

Considerando-se,

$$\mathbf{f}_\delta^0 = \mathbf{f}_\delta(\dot{\mathbf{u}}(\xi_0), \dot{\mathbf{w}}(\xi_0), \delta(\xi_0)) = \mathbf{f}_\delta(\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{w}}_0, \delta_0),$$

então,

$$\mathbf{f}_\delta^0 = \dot{\mathbf{f}}; \quad (116)$$

ou seja, \mathbf{f}_δ^0 é equivalente ao vetor taxa de forças $\dot{\mathbf{f}}$, considerado para o ponto de singularidade $(\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{w}}_0, \delta_0)$.

Da mesma forma,

$\mathbf{f}_w^0 = \mathbf{f}_w(\dot{\mathbf{u}}(\xi_0), \dot{\mathbf{w}}(\xi_0), \delta(\xi_0)) = \mathbf{f}_w(\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{w}}_0, \delta_0)$, é determinado calculando-se $\mathbf{K}_w(\dot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{u}})$ por:

$$\mathbf{K}_w = \frac{d}{dw} (\operatorname{div}(\mathbf{H}(\dot{\mathbf{w}}))[\nabla \dot{\mathbf{u}}]) = \operatorname{div}(\mathbf{H}_w[\nabla \dot{\mathbf{u}}]),$$

para em seguida considerar este aplicado no ponto singular $(\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{w}}_0, \delta_0)$, ou seja,

$$\mathbf{f}_w^0 = \operatorname{div}(\mathbf{H}_w(\dot{\mathbf{w}}_0)[\nabla \dot{\mathbf{u}}_0]); \quad (117)$$

onde, $[\nabla \dot{\mathbf{u}}_0] = \gamma(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})$

No que segue são caracterizadas as condições de ponto limite e ponto de bifurcação, considerando-se os valores de \mathbf{f}_δ^0 e \mathbf{f}_w^0 determinados em (116) e (117).

De acordo com as referências citadas, ψ^* é determinado resolvendo-se:

$$[\mathbf{f}_u^0]^T \psi^* = 0. \quad (118)$$

Considere-se $\mathbf{f}_u^0 = \mathbf{f}_u(\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{w}}_0, \delta_0)$, tal que, $\mathbf{f}_u = \nabla \dot{\mathbf{u}} \mathbf{f}$ é expresso por,

$$\mathbf{f}_u(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{w}}, \delta) = \theta \mathbf{Q}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}); \quad (119)$$

onde $\theta = \gamma^* / \beta$.

Então, a partir de (119) e de resultados encontrados em [7], é feita a análise da equação (118):

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_u^0]^T \psi^* = 0 &\Leftrightarrow [\mathbf{Q} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}]^T \psi^* = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\mathbf{n} \otimes \mathbf{Q} \mathbf{m}] \psi^* = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}] (\mathbf{Q}^T \psi^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow [\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}] (\mathbf{Q} \psi^*) = 0, \end{aligned}$$

pois da lei associativa e isotropia tem-se que \mathbf{Q} é simétrica (ver equação (39)).

Logo,

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_u^0]^T \psi^* = 0 &\Leftrightarrow [\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}] (\mathbf{Q} \psi^*) = 0; \\ \mathbf{Q} \psi^* = 0, & \quad (120) \end{aligned}$$

a qual é equivalente à equação (107).

Então, por resultados análogos àqueles obtidos na proposição 5.1, a análise da equação (118) é equivalente, pela (120), em ψ^* ser um autovetor associado a autovalor nulo de \mathbf{Q} . Esta afirmação permite considerar ψ^* tal que:

$$\psi^* = \mathbf{m}; \quad (121)$$

ou, como visto em [1], para o caso dinâmico por,

$$\psi^* = \xi(x, t) \mathbf{m} = e^{i(n^T x - \omega t)} \mathbf{m}; \quad (122)$$

ou ainda, como o definido em (106), de tal forma que, a análise de (115) é equivalente a:

$$\mathbf{m}^T \mathbf{f}_\delta^0 \in \mathbf{m}^T \mathbf{f}_w^0 \quad (123)$$

Observação 5.1:

Na análise de (107) e (118) aparecem respectivamente os tensores $[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}]$ e $[\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}]$. Note que, esse tensores são singulares se \mathbf{m} for paralelo a \mathbf{n} (modo I) ou \mathbf{m} for perpendicular a \mathbf{n} (modo II) ou ainda se \mathbf{m} não é paralelo nem perpendicular a \mathbf{n} , mas \mathbf{Q} é singular. Desde que, a recíproca é verdadeira, ou seja, \mathbf{Q} é singular se \mathbf{m} for paralelo a \mathbf{n} (modo I) ou \mathbf{m} for perpendicular a \mathbf{n} (modo II), então, a singularidade de $[\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}]$ e $[\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}]$ implica sempre em que \mathbf{Q} ser singular.

Portanto, a singularidade de \mathbf{Q} é uma condição suficiente para a análise de singularidade de (107) e (118).



5.3 Condição de Ponto Limite Simples

Baseando-se nos resultados da Teoria de Bifurcação, para problemas com um parâmetro (\dot{w}), devido aos autores citados, para se ter no problema de dois parâmetros (111) somente a ocorrência de pontos limites em ambas as variáveis δ e \dot{w} , deve-se ter:

$$\mathbf{m}^T \mathbf{f}_\delta^0 \neq 0 \text{ e } \mathbf{m}^T \mathbf{f}_{\dot{w}}^0 \neq 0, \quad (124)$$

com \mathbf{m} calculado em (114); \mathbf{f}_δ^0 e $\mathbf{f}_{\dot{w}}^0$ determinados em (116) e (117), respectivamente.

5.4 Condição de Ponto de Bifurcação

Para se ter ocorrência de pontos de bifurcação para a equação (102) é necessário que se verifique uma das situações:

$$\mathbf{m}^T \mathbf{f}_\delta^0 = 0 \text{ ou } \mathbf{m}^T \mathbf{f}_{\dot{w}}^0 = 0, \quad (125)$$

ou seja, basta que uma ou outra se verifique.

Levando-se em conta a (125) e resultados extraídos da Teoria de Bifurcação vistos em [6], [10] e [11], relacionados à ocorrência de pontos de bifurcação, a caracterização dos pontos de bifurcação pode ser dada como segue.

Sobre determinadas condições, vistas naquelas referências:

- o ponto singular $(\dot{u}_0, \dot{w}_0, \delta_0)$ implica em bifurcação simples ou bifurcação perturbada transcritica e a curva que passa pelo ponto, em uma vizinhança $V(\dot{u}_0, \dot{w}_0, \delta_0)$, é uma quadrática simples, nesse caso hiperbólica;
- o ponto $(\dot{u}_0, \dot{w}_0, \delta_0)$ implica em bifurcação em garfo e a curva passando pelo ponto, em $V(\dot{u}_0, \dot{w}_0, \delta_0)$ é cúbica, em forma de cúspide;
- o ponto $(\dot{u}_0, \dot{w}_0, \delta_0)$ exibe bifurcação em ilha e a curva passando pelo ponto, em uma vizinhança $V(\dot{u}_0, \dot{w}_0, \delta_0)$, é uma quadrática simples, nesse caso elíptica.

As figuras ilustrativas dos itens i), ii) e iii) podem ser vistas em ([1], Apêndice E).

Observação 5.2:

A consideração feita em (124) é importante pois, pode-se fazer a análise pós-bifurcação de solução, considerando-se um dos parâmetros como parâmetro de controle ou continuação, por exemplo o parâmetro δ , enquanto que o outro parâmetro é

associado à bifurcação. Para isso, basta definir-se δ_0 tal que, $\mathbf{m}^T \mathbf{f}_\delta^0 \neq 0$ e, assim, uma condição de não degeneração definida pelos autores citados está satisfeita. Isso simplifica os cálculos efetuados já que, a análise de bifurcação propriamente dita recai apenas no parâmetro \dot{w} , associado à dissipação de energia no processo.

Observação 5.3:

Uma análise pós-singularidade análoga à feita nesta seção para equações envolvendo propriedades físicas do material pode ser feita explorando-se as propriedades geométricas da estrutura com procedimentos análogos aos efetuados aqui, a qual pode ser vista no Apêndice F de [1].

6 Análise incremental

Para o tratamento numérico do modelo constitutivo analisado, faz-se a Análise Incremental do problema de localização de deformação em modelos de dano contínuo, considerando-se as relações locais em taxas vistas em (22) e (35), exploradas na equação de localização de deformação, expressa em (64), a qual é equivalente à (65). Para a análise incremental de pós-localização devem ser incluídas na primeira análise, as equações em taxas vistas nesta seção.

O tratamento numérico possibilita uma integração numérica exata e regime de softening linear, se o incremento de deslocamento não viola o limite imposto em (5a,b), para a energia de dissipação. As relações locais de dano são equivalentes a um problema de complementaridade linear, vistas em (8a,b), enquanto que, o problema incremental relativo à (65), trata-se de um problema de maximização. Assim, a análise incremental pode ser feita explorando-se métodos de otimização associados ao método dos elementos finitos.

Conclusão

Neste trabalho, em virtude dos modelos constitutivos de dano contínuo perderem a unicidade de solução no regime de encruamento negativo, realizou-se um estudo detalhado da condição de localização e de pós-localização de deformação para esses modelos. O tensor acústico, característico deste estudo, foi obtido a partir de abordagens locais estática e dinâmica do equilíbrio. Em particular, na abordagem dinâmica, mostrou-se que a localização está também relacionada ao problema da estacionariedade de ondas de aceleração. A condição necessária de localização de deformação ou de ocorrência da instabilidade, analisada nas seções 2 e 3, foi relacionada à singularidade do tensor acústico. No caso do tensor ser simétrico, a análise espectral relacionou a



condição de localização diretamente à existência de autovalores nulos para o mesmo e sua aplicação aos modelos associativos com dano contínuo, caracterizou a singularidade do tensor acústico a partir da existência de um autovalor nulo para um problema modificado.

Viu-se ainda, na seção 3, que pode ocorrer a existência de autovalores não nulos, no caso dinâmico, para tensores não-simétricos, relacionados aos modelos isótropos não-associativos. Utilizando-se da relação de semelhança do tensor acústico com tensores obtidos como modificações de posto um ou posto dois do tensor identidade, conseguiu-se expressões para se calcular os autovalores e autovetores decorrentes da singularidade desse tensor. Na seção 4, utilizando-se de resultados obtidos nas seções anteriores, foram estudados os vários tipos de instabilidade de solução que podem ocorrer, através de uma análise pós-singularidade dos autovalores associados ao tensor acústico. Assim, a condição de suficiência foi investigada a partir da análise de pós-bifurcação do modelo. Fez-se uma classificação da instabilidade de acordo com os modelos assumirem ou não, isotropia e associatividade, bem como, carregamentos conservativos ou não. De acordo com cada caso, uma classificação foi proposta explorando-se os autovalores do tensor acústico.

Na seção 5, analisou-se o modelo isótropo, associativo e conservativo em que o tensor é simétrico e os autovalores reais, caracterizando matematicamente a solução em dois casos excludentes: ponto limite ou ponto de bifurcação de solução. Os outros casos não foram analisados neste trabalho e são objetos de pesquisa futura.

Uma idealização do tratamento numérico do modelo analisado através da análise incremental foi resumida na seção 6.

É importante ressaltar mais uma vez que, a proposta de caracterização da instabilidade ao nível constitutivo desenvolvida restringiu-se ao âmbito puramente matemático, não sendo possível no estágio de desenvolvimento efetuado, especular sobre o significado físico dos resultados obtidos.

Referências Bibliográficas

- [1] A.R Balbo, "Contribuição à Formulação Matemática de Modelos Constitutivos para Materiais com Dano Contínuo", Tese de Doutorado, EESC-USP, S. Carlos, 1998.
- [2] A.R Balbo, S.P.B. Proença, On a regularising convex potential related to a variational formulation of an elastoplastic-damage constitutive model, "Seleta do XXIV CNMAC" (J.M. Balthazar, S.M. Gomes e A. Sri Ranga, eds.), Série TEMA, Vol. 2, pp. 25-35, SBMAC, 2002.
- [3] A.R Balbo e S.P.B. Proença, Análise de Localização de Deformação em modelos constitutivos de dano contínuo, "Seleta do XXV CNMAC" (J.M. Balthazar, S.M. Gomes e A. Sri Ranga, eds.), Série TEMA, pp. 149–158, SBMAC, 2003.
- [4] A. Benallal, Localisation Phenomena in Thermoelastoplasticity, *Arch. Mechanics*, 44 , (1992), 15-29.
- [5] R. Billardon, Etude de la Rupture par la Mecanique de L'endommagement, Lab. Mec. Tech., E.N.S. Cachan/ C.N.R.S./ Un. Paris 6, 1989.
- [6] D.W. Decker e H.B. Keller, Multiple Limit Point Bifurcation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 75, (1980), 417-430.
- [7] E.M. Gurtin, "An Introduction to Continuum Mechanics", Academic Press Inc., New York, 1981.
- [8] M. Hachich, "Conditions de Bifurcation dans les Solides", These de Doctorat, Lab. Mech. Tech., E.N.S. Cachan/C.N.R.S./Un. Paris 6, 1994.
- [9] R. Hill, Acceleration Waves in Solids, *Journal Mech. Phys. Solids*, 10, (1962), 1-16.
- [10] A.D. Jepson e W. Decker, Convergence Cones near Bifurcation, *SIAM J. NUM. ANAL.*, 23-5, (1986), 959-975.
- [11] A.D. Jepson e A. Spence, Folds in the Solution of two Parameter Systems and their Calculation, *SIAM J. NUM.*, ANAL., 22-2, (1985), 347-368. 1985.
- [12] A.F. Loula, A.C. Galeão, Dinâmica e Estabilidade em Cascas - Sobre o Conceito de Estabilidade, em "Curso de Mecânica Teórica e Aplicada", ch. 3, 371-408, LNCC, Rio de Janeiro, 1983.
- [13] J. Mandel, Ondes Plastiques dans un Millieu Indefini à Trois Dimensions, *Journal de Mechanique*, 1, (1962), 3-30.
- [14] N.S. Ottosen, K. Runesson, Acceleration Waves in Elasto-Plasticity, *Int. Journal of Solids and Structures*, 28-2, (1991), 135-159.



Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC

31-maio a 3-junho-2004

UNESP – Campus de Ilha Solteira

- [15] J.D. Pearson, Variable metric methods of minimisation, *The Computer Journal*, 12, (1969), 171-178.
- [16] S.P.B. Proença e A.R Balbo, On a Variational Formulation of an Elastic-Damage Model, em “Computational Plasticity: Fundamentals and Applications” (D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton eds.), 489-492, part1, CIMNE, Barcelona, 1997.
- [17] S.P.B. Proença e A.R Balbo, Formulation of an Elastic-damage Constitutive Model Including Fracture Work Limitation, Anais do XVIII CILAMCE, 1145-1152, Brasilia, Brasil, 1997.
- [18] S.P.B. Proença, A.R Balbo, On a Variational Formulation of an Elastoplastic-damage Constitutive Model, em “Computational Mechanics, New trends and Applications” (E. Oñate and S.R. Idelsohn eds.), in CD, CIMNE, Buenos Ayres, Argentina, 1998.
- [19] E. Rizzi, “Sulla localizzazione delle deformazioni in materiali e strutture”, Tesi di Dottorato, Dip. Ing. Strutture, Politecnico di Milano, 1995.
- [20] C. Truesdell, R.A. Toupin, “The Classical Field Theories”, Handbuch der Physik, vol.III/1, Springer-Verlag, 1960.
- [21] D. Zagottis, “Introdução à Teoria das Estruturas - Estabilidade e Instabilidade do Equilíbrio”, chap. 10, 1-81, Edusp, São Paulo, 1980.