

Nº 61

Imersões mínimas nos espaços hiperbólicos

Célia Gões e Plínio A.Q.Simões

Dezembro 1983

IMERSÕES MÍNIMAS NOS ESPAÇOS HIPERBÓLICOS

Célia Gões

Plínio A. Q. Simões

§0. Introdução

Neste artigo são obtidas fórmulas que relacionam as entidades geométricas induzidas, sobre uma variedade M , pelas métricas riemannianas do semi-espaço euclidiano superior, $\mathbb{R}_+^n = \{(x,t) / x \in \mathbb{R}^{n-1}, t > 0\}$, e do espaço hiperbólico H^n , através de uma imersão de M em \mathbb{R}_+^n .

Como consequência, mostra-se que a coordenada t de uma imersão em H^n é superharmônica e que não existem superfícies mínimas completas do tipo parabólico em H^n .

Sob a hipótese de que a fronteira ideal da imersão omite um ponto da fronteira ideal do espaço hiperbólico, mostra-se que não existem hipersuperfícies completas em H^{n+1} tendo, em cada ponto, uma curvatura seccional menor que $-2n$, ou tendo curvatura escalar menor que -2 .

§1. Fatos básicos

Seja H^n o conjunto $\{(x,t) = (x^1, \dots, x^{n-1}, t) \mid t > 0\}$, munido da métrica riemanniana $(\langle, \rangle)_{(x,t)} = \frac{1}{t^2} \langle, \rangle$ onde \langle, \rangle é a métrica riemanniana usual do \mathbb{R}^n .

Sejam $\chi(V)$ o conjunto dos campos de vetores tangentes a \mathbb{R}^n , diferenciáveis, definidos no subconjunto aberto V do \mathbb{R}_+^n ; ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões riemannianas de \mathbb{R}^n e H^n , respectivamente.

1.1. - Proposição - Para todo $X, Y \in \chi(V)$

$$(1.1.1.) \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{t} \langle X, U_n \rangle Y - \frac{1}{t} \langle Y, U_n \rangle X + \frac{1}{t} \langle X, Y \rangle U_n$$

onde U_n é o campo de vetores tangente a \mathbb{R}^n dado por

$$U_n(x,t) = (0, \dots, 0, 1)$$

Prova: - Se (e_A) é um referencial ortonormal de \mathbb{R}_+^n , então (\tilde{e}_A) , onde $\tilde{e}_A(x,t) = t e_A(x,t)$, é um referencial ortonormal tangente a H^n .

Sejam (θ^A) e $(\tilde{\theta}^A)$ os coreferenciais duais de (e_A) e de (\tilde{e}_A) em \mathbb{R}^n e H^n , respectivamente. Então,

$$\tilde{\theta}^A = \frac{1}{t} \theta^A$$

Derivando-se exteriormente, θ^A e sendo (θ_B^A) e $(\tilde{\theta}_B^A)$ as respectivas formas de conexão dos referenciais, obtemos com as primeiras fórmulas de estrutura:

$$\sum_B (\tilde{\theta}_B^A - \theta_B^A + \frac{\langle U_n, e_B \rangle}{t} \theta^A) \wedge \theta^B = 0$$

O lema de Cartan [3] nos dá, então

$$\tilde{\theta}_B^A - \theta_B^A + \frac{\langle U_n, e_B \rangle}{t} \theta^A = \sum_C \alpha_{BC}^A \theta^C$$

onde

$$\alpha_{BC}^A = \alpha_{CB}^A, \quad (\forall A, B, C)$$

A antissimetria de $\tilde{\theta}_B^A$ e θ_B^A traz como consequência,

$$\alpha_{BC}^A = 0 \quad \text{se} \quad C \neq A \quad \text{e} \quad C \neq B$$

$$e \quad \alpha_{AA}^B = \frac{\langle e_B, U_n \rangle}{t}$$

Então,

$$(1.1.2.) \quad \tilde{\theta}_B^A = \theta_B^A + \frac{1}{t} \{ \langle U_n, e_A \rangle \theta^B - \langle U_n, e_B \rangle \theta^A \}$$

E, uma vez que,

$$\nabla e_A = \sum_B \theta_A^B e_B \quad \text{e} \quad \tilde{\nabla} e_A = \sum_B \tilde{\theta}_A^B e_B \quad \text{segue a tese.}$$

1.2.: - Observações - Indicando-se por $\tilde{\phi}_B^A$ as 2-formas de curvatura do referencial (\tilde{e}_A) , tem-se

$$\tilde{\phi}_B^A = - \frac{1}{t^2} \theta^A \wedge \theta^B$$

e, portanto, as curvaturas seccionais de H^n são iguais a -1.

1.3.: - Sejam M , uma variedade diferenciável, m -dimensional; $\phi: M \longrightarrow \mathbb{R}_+^n$ e $\tilde{\phi}: M \longrightarrow H^n$, imersões isométricas de M em \mathbb{R}_+^n e H^n , respectivamente, tais que

$$\phi(p) = \tilde{\phi}(p) = (x(p), t(p)) , (\forall p \in M)$$

Indicando-se por $()^N$ e $()^T$, respectivamente, as projeções ortogonais sobre os fibrados normais e tangentes, de um campo de vetores ao longo de ϕ e $\tilde{\phi}$, sejam

$$\tilde{A}^{\tilde{\nu}}(X) = - (\tilde{\nabla}_{\tilde{\phi}_*(X)} \tilde{\nu})^T , \quad A^{\nu}(X) = - (\nabla_{\phi_*(X)} \nu)^T ,$$

$$\tilde{B}(X, Y) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{\phi}_*(X)} \tilde{\phi}_*(Y))^N , \quad B(X, Y) = (\nabla_{\phi_*(X)} \phi_*(Y))^N$$

onde $\tilde{\nu}$ é uma secção do fibrado normal de $\tilde{\phi}$,

$\nu = \frac{1}{t} \tilde{\nu}$, $X, Y \in \chi(M)$. Isto é, \tilde{A} e \tilde{B} , A e B , são os operadores de Weingarten e as segundas formas fundamentais de $\tilde{\phi}$ e ϕ , respectivamente.

Os vetores curvatura média de $\tilde{\phi}$ e ϕ são, então

$$\tilde{H} = \frac{1}{m} \sum_i \tilde{B}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{m} \sum_i B(e_i, e_i),$$

onde (\tilde{e}_i) é um referencial ortonormal de M , relativamente à métrica $\tilde{\phi}^*(,)$ e (e_i) é um referencial ortonormal de M , relativamente à métrica $\phi^*(<, >)$.

1.4.: - Proposição - Se $\tilde{\nu}$ é uma secção do fibrado normal de $\tilde{\phi}$, $\nu = \frac{1}{t} \tilde{\nu}$ e $X, Y \in \chi(M)$, tem-se:

$$(1.4.1) \quad \tilde{A}^{\tilde{\nu}}(X) = t A^{\nu}(X) + \langle U_n, \nu \rangle \phi_*(X)$$

$$(1.4.2) \quad \tilde{B}(X, Y) = B(X, Y) + \frac{1}{t} \langle \phi_*(X), \phi_*(Y) \rangle (U_n)^N$$

$$(1.4.3) \quad \tilde{H} = t^2 H + t (U_n)^N$$

$$(1.4.4) \quad \tilde{\phi} \text{ é mínima se, e somente se, } H = -\frac{1}{t} (U_n)^N$$

Prova: - É consequência imediata das definições.

1.5.: - Proposição - Se $\text{grad}_{\tilde{M}}$ e $\text{grad}_M, \text{div}_{\tilde{M}}$ e $\text{div}_M, \Delta_{\tilde{M}}$ e Δ_M são respectivamente, os gradientes, divergentes e operadores de Laplace-Beltrami de M , relativos às métricas $\tilde{\phi}^*(,)$ e $\phi^*(<, >)$, e se $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \chi(M)$, temos

$$(1.5.1) \quad \text{grad}_{\tilde{M}} f = t^2 \text{grad}_M f$$

$$(1.5.2) \quad \text{div}_{\tilde{M}} X = \text{div}_M X - \frac{m}{t} \langle U_n, X \rangle$$

$$(1.5.3) \quad \Delta_{\tilde{M}} f = t^2 \Delta_M f - (m-2)t \langle U_n, \text{grad}_M f \rangle$$

Prova: - Observando que

$$(\tilde{\phi}_*(\text{grad}_{\tilde{M}} f), \tilde{\phi}_*(X)) = df(X) = \langle \phi_*(\text{grad}_M f), \phi_*(X) \rangle,$$

os resultados são imediatos, a partir das definições.

1.6.: - Corolário - Se $U_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, U_n = (0, \dots, 0, 1)$

$$\text{e} \quad \phi = (x^1, \dots, x^{n-1}, t), \quad \text{temos}$$

$$(1.6.1) \quad \Delta_{\tilde{M}} x^A = t^2 m \langle H, U_A \rangle - (m-2)t \langle U_n, U_A^T \rangle,$$

$$\text{onde} \quad A = 1, \dots, n-1$$

$$(1.6.2) \quad \Delta_{\tilde{M}} t = t^2 m \langle H, U_n \rangle - (m-2)t \|U_n^T\|^2$$

Prova: - É consequência imediata da fórmula bem conhecida

$$(1.6.3) \quad \Delta_M \phi = mH$$

§2. Imersões M̃nimas

Das f̃ormulas (1.4.4), (1.6.1), (1.6.2) e (1.6.3) ,
temos o seguinte resultado:

2.1.: - Proposiçãõ - Se $\tilde{\phi}$ é uma imersãõ m̃nima, valem

$$(2.1.1) \quad \Delta_{\tilde{M}} x^A = 2t \langle U_n^T, U_A \rangle ,$$

$$(2.1.2) \quad \Delta_{\tilde{M}} x^A = - \frac{m}{t} \langle (U_n)^T, U_A \rangle ; \quad A = 1, \dots, n-1$$

$$(2.1.3) \quad \Delta_{\tilde{M}} t = - (m-2 |U_n^T|^2) t$$

$$(2.1.4) \quad \Delta_{\tilde{M}} t = - \frac{m}{t} |(U_n)^N|^2$$

Portanto, t é superharmônica relativamente às métricas induzidas sobre M pela imersãõ, para $m \geq 2$.

2.2.: - Observaçãõ - (2.1.4) implica que não existe imersãõ m̃nima de uma variedade m -dimensional compacta, em H^n .

2.3.: - Teorema - Não existe imersãõ m̃nima completa de uma superfície de Riemann parabõlica, em H^n .

Prova: - Sejam (u,v) parâmetros isotérmicos para M e

$$\lambda^2 = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle$$

Então,
$$\Delta_M = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \quad e,$$

portanto, (2.1.4) nos dá
$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} \leq 0$$

Supondo ϕ parabólica e passando eventualmente para o recobrimento universal, podemos supor que $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Então, $t(u,v)$ é uma função superharmônica positiva definida em \mathbb{R}^2 . Pelo princípio do máximo para funções superharmônicas [2], temos que t é constante, ou seja, $\phi(M)$ está contida em um hiperplano perpendicular a U_n , isto é, $U_n = (U_n)^N$.

Mas, de

$$\langle \Delta_M \phi, U_n \rangle \equiv 0, \quad 2H = \Delta_M \phi \quad e \quad H = -\frac{1}{t} (U_n)^N$$

concluimos que $|(U_n)^N|^2 \equiv 0$, o que contradiz $U_n = (U_n)^N$.

2.4.: - Corolário - Não existe imersão mínima completa, de uma superfície de Riemann, em H^N , tendo curvatura total finita.

Prova: - É uma consequência do teorema 15 de [1], o qual diz que uma imersão mínima completa tendo curvatura total finita tem que ser parabólica.

§3. Curvaturas

3.1.: - Proposição - Se (\tilde{e}_i) é um referencial ortonormal de M relativamente à métrica $\tilde{\phi}^*(,)$; $e_i = \frac{1}{t} \tilde{e}_i$ para $i=1, \dots, m$; $\tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$, a curvatura seccional de $(M, \tilde{\phi}^*(,))$ determinada por $(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$; $K(e_i, e_j)$, a curvatura seccional de $(M, \phi^*(,))$ determinada por (e_i, e_j) , temos para $i \neq j$:

$$(3.1.1) \quad \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = t^2 K(e_i, e_j) + \langle \tilde{H}, B(e_i, e_i) + B(e_j, e_j) \rangle - \\ - t^2 \langle H, B(e_i, e_i) + B(e_j, e_j) \rangle + \frac{1}{t^2} |\tilde{H}|^2 + t^2 |H|^2 - 2 \langle \tilde{H}, H \rangle - 1$$

Prova: - Seja $(\tilde{u}_A)_{1 \leq A \leq n}$ um referencial ortonormal adaptado à imersão $\tilde{\phi}$, que estende $(\tilde{\phi}_* \tilde{e}_i)$. Isto é, $(\tilde{u}_i)_{1 \leq i \leq m}$ quando restrito a $\tilde{\phi}(M)$ é tangente à imersão $\tilde{\phi}$.

Seja $\tilde{\Omega}_j^i$ as 2-formas de curvatura do referencial (\tilde{e}_i) e

$$\tilde{B}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \sum_{\alpha=m+1}^n \tilde{h}_{ij}^\alpha \tilde{u}_\alpha$$

tem-se da equação de Gauss, que

$$\tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \tilde{\Omega}_j^i(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = -1 + \sum_{\alpha=m+1}^n \det \begin{pmatrix} \tilde{h}_{ii}^\alpha & \tilde{h}_{ij}^\alpha \\ \tilde{h}_{ji}^\alpha & \tilde{h}_{jj}^\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{sendo } u_\alpha = \frac{1}{t} \tilde{u}_\alpha \text{ e}$$

$$B(e_i, e_j) = \sum_{\alpha=m+1}^n h_{ij}^{\alpha} u_{\alpha} \quad , \text{ por (1.1.1) temos}$$

$$\tilde{h}_{ij}^{\alpha} = t h_{ij}^{\alpha} + \langle u_i, u_j \rangle \langle U_n, u_{\alpha} \rangle$$

Logo,

$$(3.1.2) \quad \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = t^2 K(e_i, e_j) + t \langle B(e_i, e_i) + B(e_j, e_j), U_n \rangle - |(U_n)^T|^2$$

Mas, (1.4.3) nos dá

$$|(U_n)^T|^2 = 1 - \frac{1}{t^2} |H|^2 - t^2 |H|^2 + 2 \langle H, \tilde{H} \rangle$$

de onde segue (3.1.1)

3.2.: - Corolário - Indicando-se por \tilde{K} e K , respectivamente, as curvaturas escalares de M , relativamente às métricas $\tilde{\phi}^*(,)$ e $\phi^*(,)$, tem-se

$$(3.2.1) \quad \tilde{K} = t^2 K + \frac{1}{t^2} |\tilde{H}|^2 - t^2 |H|^2 - 1$$

e, se $\tilde{H} = 0$,

$$(3.2.2) \quad \tilde{K} \leq -2 \implies K \leq 0$$

$$(3.2.3) \quad \tilde{K} < -2 \implies K < 0$$

Prova: - Dado $p \in M$, temos

$$\tilde{K}(p) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i,j=1}^m \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \quad \text{e} \quad K(p) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i,j=1}^m K(e_i, e_j)$$

onde (\tilde{e}_i) e (e_i) são referenciais ortonormais de $T_p M$ relativamente às métricas $\tilde{\phi}^*(,)$ e $\phi^* \langle , \rangle$

Então, (3.2.1) segue de (3.1.1) e as implicações (3.2.2) e (3.2.3) seguem de (3.2.1) e da desigualdade $|H|^2 \leq \frac{1}{t^2}$, consequência de (1.4.3).

3.3.: - Corolário - Seja $\tilde{H} \equiv 0$ e $h(p) = \langle \phi(p), U_n \rangle$, $p \in M$

Se $p_0 \in M$ é um ponto de máximo local da função h então as curvaturas seccionais de $\tilde{\phi}$ e ϕ em p_0 satisfazem

$$(3.3.1) \quad K(e_i, e_j) \leq \frac{1}{t^2} (K(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) + 2m)$$

onde e_i, e_j e \tilde{e}_i, \tilde{e}_j são vetores de $T_{p_0} M$ tais que

$$\langle \phi_{* p_0}(e_i), \phi_{* p_0}(e_j) \rangle = (\tilde{\phi}_{* p_0}(\tilde{e}_i), \tilde{\phi}_{* p_0}(\tilde{e}_j)) = \delta_{ij}$$

Em particular, se $n=m+1$,

$$(3.3.2) \quad \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \geq -2m$$

Prova: - Como o resultado é local, podemos identificar $\phi(p)$ e p . Então, se X é um campo de vetores, tangente a M , definido em uma vizinhança de p_0 , temos

$$(X[h])(p_0) = \langle X(p_0), U_n \rangle = 0 \implies U_n(p_0) = (U_n)^N(p_0)$$

e

$$(X[X[h]])(p_0) = \langle \nabla_{X(p_0)} X, U_n \rangle = \langle B(X(p_0), X(p_0)), U_n \rangle \leq 0$$

$$\text{De } H(p_0) = - \frac{(U_n)^N(p_0)}{t} = - \frac{U_n(p_0)}{t}$$

$$\text{temos } - \sum_{i=1}^m \langle B(e_i, e_i), U_n \rangle = -m \langle H(p_0), U_n(p_0) \rangle = \frac{m}{t}$$

e $-\langle B(e_i, e_i), U_n \rangle \geq 0$, para todo i , onde (e_i) é uma base ortonormal de $T_{p_0} M$. Portanto,

$$-\langle B(e_i, e_i), U_n \rangle \leq \frac{m}{t}, \text{ para todo } i,$$

e (3.3.1) segue de (3.1.2).

Se $n = m+1$, temos

$$(3.3.3) \quad K(e_i, e_j) = \det \begin{pmatrix} h_{ii} & h_{ij} \\ h_{ij} & h_{jj} \end{pmatrix} \geq 0$$

e, portanto, $K(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \geq -2m$

3.4.: - A fronteira ideal de H^n é o compactificado por um ponto de $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n / t=0\}$. Ela será indicada por $\partial_\infty(H^n)$ e o ponto adicionado a \mathbb{R}^{n-1} para se obter $\partial_\infty(H^n)$ será indicado por ∞ .

Dado $S \subset H^n$, a fronteira assintótica de S é o conjunto $\bar{S} \cap \partial_\infty(H^n)$, onde o fecho de S é considerado em $H^n \cup \partial_\infty(H^n)$.

3.5.: - Teorema - Seja M uma variedade m -dimensional, não compacta. Então não existe uma imersão mínima, completa, de M em H^{m+1} , tendo curvatura escalar \tilde{K} sempre menor que -2 e tal que a fronteira assintótica de sua imagem omite um ponto de $\partial_\infty(H^{m+1})$.

Prova: - Seja $\tilde{\phi}: M \rightarrow H^{m+1}$ uma imersão tendo as propriedades acima. Seja $a \in \partial_\infty(H^{m+1})$ um ponto omitido pela fronteira assintótica de $\tilde{\phi}(M)$.

Seja então F , uma aplicação conforme de $\partial_\infty(H^{m+1})$ que transforma a em ∞ . A aplicação F se estende naturalmente a um difeomorfismo conforme de $H^{m+1} \cup \partial_\infty(H^{m+1})$ de tal modo que sua restrição f a H^{m+1} é uma isometria. A fronteira assintótica de $f(\tilde{\phi}(M))$ não contém ∞ . Tem-se, portanto, que a função $h(p) = \langle f(\tilde{\phi}(p)), U_n \rangle$ tem um máximo $c > 0$ em M . Seja $q \in M$ tal que $h(q) = c$. O plano $t \equiv c$ é o plano tangente a $f(\tilde{\phi}(M))$ em $f(\tilde{\phi}(q))$.

Seja ψ a imersão de M em \mathbb{R}_+^n tal que $\psi(p) = f(\tilde{\phi}(p))$, ($\forall p \in M$). Seja K a curvatura escalar de M relativamente à métrica $\psi^*\langle, \rangle$. Uma vez que o plano tangente a M em $\psi(q)$ é o plano $t \equiv c$, e $h(p) = \langle \psi(p), U_n \rangle \leq c$, tem-se por (3.3.3) que $K(q) \geq 0$. Mas, $\tilde{K}(q) < -2$ onde \tilde{K} é a curvatura escalar relativamente à métrica $(f\tilde{\phi})^*(\cdot, \cdot)$. Isto nos dá, então, uma contradição com (3.2.3).

3.6.: - Teorema - Seja M uma variedade m -dimensional, não compacta. Então não existe uma imersão isométrica, mínima, completa, em H^{m+1} , tendo em todos os pontos de M pelo menos uma curvatura seccional menor que $-2m$ e tal que a fronteira assintótica de sua imagem omita um ponto de $\partial_{\infty}(H^{m+1})$.

Prova: - Análoga à do teorema 3.5. usando-se (3.3.3) e (3.3.2).

o0o

Bibliografia

- [1] Huber, A. - On subharmonic functions and differential geometry in the large.
Comment. Math. Helv. 32 (1957) 13-72.
- [2] Protter, M.H. and Weinberger, H. - Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall (1967).
- [3] Warner, F.W. - Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Company (1971).

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Cidade Universitária "Armando Salles de Oliveira"
Caixa Postal nº 20570 (Agência Iguatemi)
SÃO PAULO - BRASIL

- 8001 - PLETCH, A. Local freeness of profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8002 - PLETCH, A. Strong completeness in profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- 8003 - CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Transfinite induction on ordinal configurations. São Paulo, IME-USP, 1980. 22p.
- 8004 - JONES RODRIGUES, A.R. Integral representations of cyclic p-groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 13p.
- 8005 - CORRADA, M. & ALCANTARA, L.P. de. Notes on many-sorted systems. São Paulo, IME-USP, 1980. /25/p.
- 8006 - POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. FC-elements in a group ring. São Paulo, IME-USP, 1980. /10/p.
- 8007 - CHEN, C.C. On the Ricci condition and minimal surfaces with constantly curved Gauss map. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8008 - CHEN, C.C. Total curvature and topological structure of complete minimal surfaces. São Paulo, IME-USP, 1980. 21p.
- 8009 - CHEN, C.C. On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in R^4 . São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- 8110 - JONES RODRIGUES, A.R. Units of ZCp^n . São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- 8111 - KOTAS, J. & COSTA, N.C.A. da. Problems of modal and discussive logics. São Paulo, IME-USP, 1981. 35p.

- .8112 - BRITO, F.B. & GONÇALVES, D.L. Algebras não associativas, sistemas diferenciais polinomiais homogêneos e classes características. São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- .8113 - POLCINO MILIES, F.C. Group rings whose torsion units form a subgroup II. São Paulo, IME-USP, 1981. 1v. (não paginado)
- .8114 - CHEN, C.C. An elementary proof of Calabi's theorems on holomorphic curves. São Paulo, IME-USP, 1981. 5p.
- .8115 - COSTA, N.C.A. da & ALVES, E.H. Relations between paraconsistent logic and many-valued logic. São Paulo, IME-USP, 1981. 3p.
- .8116 - CASTILHA, M.S.A.C. On Przymusiński's theorem. São Paulo, IME-USP, 1981. 6p.
- .8117 - CHEN, C.C. & GOFS, C.C. Decerate minimal surfaces in \mathbb{R}^4 . São Paulo, IME-USP, 1981. 21p.
- .8118 - CASTILHA, M.S.A.C. Imagens inversas de algumas aplicações fechadas. São Paulo, IME-USP, 1981. 11p.
- .8119 - ARAGONA VALEJO, A.J. & EXEL FILHO, R. An infinite dimensional version of Hartogs' extension theorem. São Paulo, IME-USP, 1981. 9p.
- .8120 - GONÇALVES, J.Z. Groups rings with solvable unit groups. São Paulo, IME-USP, 1981. 15p.
- .8121 - CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Paraconsistent algebras. São Paulo, IME-USP, 1981. 16p.
- .8122 - GONÇALVES, D.L. Nilpotent actions. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8123 - COELHO, S.P. Group rings with units of bounded exponent over the center. São Paulo, IME-USP, 1981. 25p.

- .8124 - PARMENTER, H.M. & POLCINO MILIES, F.C. A note on isomorphic group rings. São Paulo, IME-USP, 1981. 4p.
- .8125 - MERKLEN, H.A. Hereditary algebras with maximum spectra are of finite type. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8126 - POLCINO MILIES, F.C. Units of group rings: a short survey. São Paulo, IME-USP, 1981. 32p.
- .8127 - CHEN, C.C. & GACKSTATTER, F. Elliptic and hyperelliptic functions and complete minimal surfaces with handles. São Paulo, IME-USP, 1981. 14p.
- .8128 - POLCINO MILIES, F.C. A glance at the early history of group rings. São Paulo, IME-USP, 1981. 22p.
- .8129 - FERRER SANTOS, W.R. Reductive actions of algebraic groups on affine varieties. São Paulo, IME-USP, 1981. 52p.
- .8130 - COSTA, N.C.A. da. The philosophical import of paraconsistent logic. São Paulo, IME-USP, 1981. 26p.
- .8131 - GONÇALVES, D.L. Generalized classes of groups, spaces c-nilpotent and "the Hurewicz theorem". São Paulo, IME-USP, 1981. 30p.
- .8132' - COSTA, N.C.A. da & MORTENSEN, Chris. Notes on the theory of variable binding term operators. São Paulo, IME-USP, 1981. 18p.
- .8133 - MERKLEN, H.A. Homogenous λ -hereditary algebras with maximum spectra. São Paulo, IME-USP, 1981. 32p.
- .8134 - PERESI, L.A. A note on semiprime generalized alternative algebras. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8135 - MIRAGLIA NETO, F. On the preservation of elementary equivalence and embedding by filtered powers and structures of stable continuous functions. São Paulo, IME-USP, 1981. 9p.

- 8136 - FIGUEIREDO, G.V.R. Catastrophe theory: some global theory a full proof. São Paulo, IME-USP, 1981. 91p.
- 8237 - COSTA, R.C.F. On the derivations of gametic algebras. São Paulo, IME-USP, 1982. 17p.
- 8238 - FIGUEIREDO, G.V.R. de. A shorter proof of the Thom-Zeeman global theorem for catastrophes of cod ≤ 5 . São Paulo, IME-USP, 1982. 7p.
- 8239 - VELOSO, J.M.M. Lie equations and Lie algebras: the intransitive case. São Paulo, IME-USP, 1982. 97p.
- 8240 - GOES, C.C. Some results about minimal immersions having flat normal bundle. São Paulo, IME-USP, 1982. 37p.
- 8241 - FERRER SANTOS, W.R. Cohomology of comodules II. São Paulo, IME-USP, 1982. 15p.
- 8242 - SOUZA, V.H.G. Classification of closed sets and diffeos of one-dimensional manifolds. São Paulo, IME-USP, 1982. 15p.
- 8243 - GOES, C.C. The stability of minimal cones of codimension greater than one in R^n . São Paulo, IME-USP, 1982. 27p.
- 8244 - PERESI, L.A. On automorphisms of gametic algebras. São Paulo, IME-USP, 1982. 27p.
- 8245 - POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. Torsion units in integral group rings of metacyclic groups. São Paulo, IME-USP, 1982. 18p.
- 8246 - GONÇALVES, J.Z. Free subgroups of units in group rings. São Paulo, IME-USP, 1982. 8p.
- 8247 - VELOSO, J.M.M. New classes of intransitive simple Lie pseudo-groups. São Paulo, IME-USP, 1982. 8p.

- 8248 - CHEN, C.C. The generalized curvature ellipses and minimal surfaces. São Paulo, IME-USP, 1982. 10p.
- 8249 - COSTA, R.C.F. On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles. São Paulo, IME-USP, 1982. 24p.
- 8350 - GONÇALVES, J.Z. Free subgroups in the group of units of group rings over algebraic integers. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.
- 8351 - MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Free k-triples in linear groups. São Paulo, IME-USP, 1983. 7p.
- 8352 - BRITO, F.G.B. A remark on closed minimal hypersurfaces of S^4 with second fundamental form of constant length. São Paulo, IME-USP, 1983. 12p.
- 8353 - KIIHL, J.C.S. U-structures and sphere bundles. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.
- 8354 - COSTA, R.C.F. On genetic algebras with prescribed derivations. São Paulo, IME-USP, 1983. 23p.
- 8355 - SALVITTI, R. Integrabilidade das distribuições dadas por subálgebras de Lie de codimensão finita no $gh(n, C)$. São Paulo, IME-USP, 1983. 4p.
- 8356 - MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Construction of open sets of free k-Tuples of matrices. São Paulo, IME-USP, 1983. 18p.
- 8357 - BRITO, F.G.B. A remark on minimal foliations of codimension two. São Paulo, IME-USP, 1983. 24p.
- 8358 - GONÇALVES, J.Z. Free groups in subnormal subgroups and the residual nilpotence of the group of units of group rings. São Paulo, IME-USP, 1983. 9p.

8359 - BELOQUI, J.A. Modulus of stability for vector fields on 3-manifolds. São Paulo, IME-USP, 1983. 40p.

8360 - GONÇALVES, J.Z. Some groups not subnormal in the group of units of its integral group ring. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.