

3165676

Universidade de São Paulo

ESCOLA POLITÉCNICA

Cadeira n° 9

Prof. Catedrático: TELEMAGO VAN LANGENDONCK

ESTUDO DAS DEFORMAÇÕES

Curso de "Resistência dos Materiais" redigido pelo assistente:

Jayme F. da Silva Junior

1 9 4 9

São Paulo - Brasil



## P R E F Á C I O

Publica-se nova edição das apostilas de Resistência dos Materiais e Estabilidade das Construções, cuidadosamente redigidas pelo Eng. Jayme Ferreira da Silva Junior, assistente da Cadeira n.º 9 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Embora não contenham elas reprodução exata das aulas dadas pelo professor catedrático, apresentam a matéria com a mesma orientação por ele seguida em suas preleções, com análogo desenvolvimento teórico, mas com maior abundância de exercícios e exemplos de aplicação. Corrige-se assim, parcialmente, um dos defeitos das "apostilas", aproximando-as dos "livros de texto" e afastando-as das simples "notas de aula".

Convém salientar, no entanto, que as boas apostilas, como também os bons livros, não dispensam o estudioso, que não queira ser autodidata, da frequência às aulas, pois é nelas - e com o contato diuturno com o professor - que se aprende a distinguir o essencial do secundário e que, com menor perda de tempo, se podem precisar os conceitos ainda novos para aqueles que ingressam no estudo de um campo científico especializado, mas, apesar disso, amplo e multiforme. Outrossim, os textos são estáticos, e as aulas são dinâmicas; estas podem alterar-se de ano para ano, aperfeiçoando-se os critérios de exposição e acompanhando o progresso da técnica; ao passo que aqueles só de tempos em tempos se refazem, quando as edições se esgotam e outras são feitas substituí-las.

O mérito das apostilas, como estas que ora se reeditam, é o de recordar ao estudante, em qualquer tempo, aquilo que lhe foi ensinado, sem obrigá-lo a tomar notas durante toda a aula, permitindo-lhe, portanto, prestar maior atenção ao que se lhe ensina nas preleções, com melhor e mais rápida assimilação do assunto. Essa finalidade preenchem perfeitamente as presentes apostilas, em vista do carinho e da meticulosidade com que foram escritas pelo seu competente redator.

São Paulo, Março de 1949.

Telemaco van Langendonck  
Professor Catedrático



# ESTUDO DAS DEFORMAÇÕES

## A - TRAÇÃO E COMPRESSÃO

1 - Generalidades:- Quando se submete um corpo a determinado sistema de esforços em equilíbrio observa-se que, além de ficar submetido a tensões, o corpo sofre, também, uma deformação. Adotaremos, por enquanto, o termo "deformação" para exprimir o fenômeno da variação de forma e dimensões sofridas por um corpo; mais tarde precisaremos melhor o que se deve designar por deformação, em "Resistência dos Materiais" ou na "Teoria da Elasticidade".

No dimensionamento das diversas partes de uma estrutura recorra, frequentemente, o engenheiro não só ao estudo das tensões como também ao estudo das deformações. Levando em conta só o estudo das tensões pode-se dimensionar uma estrutura com a condição de que sob a ação dos esforços aplicados não se verifique a ruptura em nenhuma de suas partes. Pode, todavia, acontecer que a estrutura assim dimensionada apresente, com a aplicação dos esforços previstos no dimensionamento, deformações exageradamente grandes, isto é, deformações que a tornem imprestável para o fim a que se destina. Neste caso, o problema do dimensionamento deveria ser resolvido não com o estudo exclusivo das tensões mas com a condição de que, além de estável, a estrutura não apresentasse deformações maiores que um mínimo préfixado.

Além desta aplicação prática do estudo das deformações, que a seguir se apresenta, outras há de grande importância. Muitas das estruturas, que se apresentam ao engenheiro, para dimensionar, não podem ser resolvidas apenas com as equações da estática; além dessas equações são necessárias outras, que se obtêm com o estudo das deformações. Nessas estruturas, que recebem o nome de "Estruturas hiperestáticas", a determinação dos esforços solicitantes e resistentes não é possível sem o estudo das deformações.

2 - Diagramas tensão-deformação:- Consideremos uma barra de aço (figura 1) de seção constante (de área  $S$ ) submetida a uma força axial de tração aplicada lenta e gradualmente desde o valor zero até o valor  $N$ . Designemos por  $l$  o comprimento inicial e por  $\sigma$  a tensão num ponto qualquer da barra, correspondente à força  $N$ ; ter-se-á:

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

A medida que a intensidade da força  $N$  cresce, o comprimento da barra aumenta; designemos por  $\Delta l$  o acréscimo de  $l$  devido à força  $N$ . A variação de comprimento da barra provocada pela força  $N$ , isto é, o comprimento  $\Delta l$ , recebe o nome de "alongamento total", ou "deformação total"; a relação:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

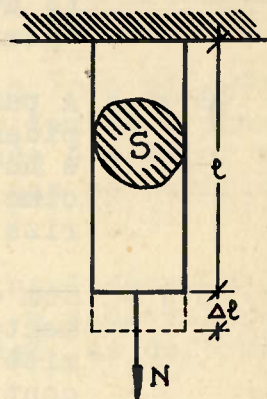


Figura 1



onde  $l$  é o comprimento inicial e  $\Delta l$  o alongamento devido a  $N$ , recebe o nome de "deformação" correspondente à força  $N$  (ou à tensão  $\sigma$ ).

Suponhamos, então, que numa experiência como a que se indica esquematicamente na figura 1 se determine, para cada valor de  $N$ , o valor correspondente de  $\Delta l$ ; conhecida a área  $S$  da secção transversal da barra e o seu comprimento inicial ( $l$ ) ter-se-á de terminada a função:

$$\varepsilon = f(\sigma)$$

A representação gráfica dessa função é feita adotando - se para eixo das abcissas o eixo dos  $\varepsilon$ , e para eixo das ordenadas o eixo dos  $\sigma$ . Um diagrama desse tipo tem o nome de "Diagrama tensão-deformação". Os aços apresentam diagramas tensão - deformação de um dos dois tipos que se vêm nas figuras 2 e 3.

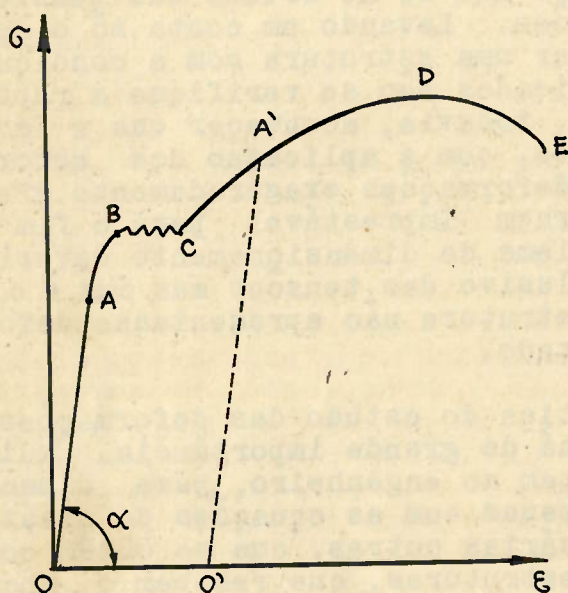


Figura 2

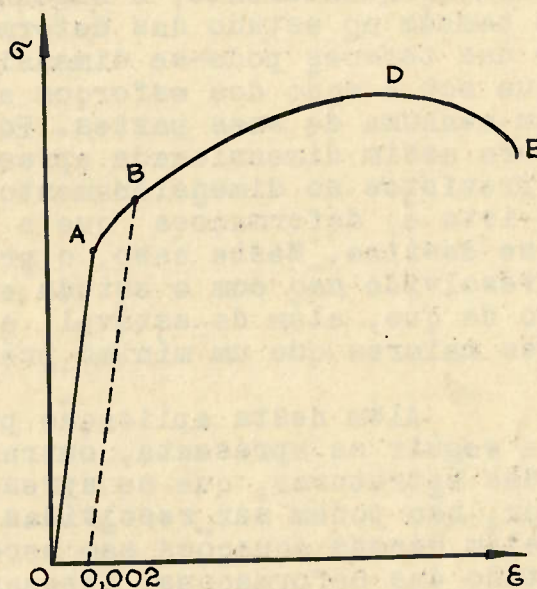


Figura 3

No primeiro tipo (figura 2) observa-se:

- 1º) - As deformações crescem proporcionalmente às cargas, até atingir um determinado ponto A, que caracteriza o "limite de proporcionalidade".
- 2º) - A partir daí as deformações crescem um pouco mais rapidamente, até atingir o ponto B, pouco distante de A e no qual se verifica, sem aumento de carga, um acréscimo notável de deformação, até C. O ponto B caracteriza o "limite de escoamento".
- 3º) - Com o aumento de cargas as deformações crescem rapidamente. Ao atingir, em D, um valor máximo, que é o "limite de resistência" a carga cai mas as deformações continuam aumentando até que se dê a ruptura do material (ponto E do diagrama).



Essa queda de carga não corresponde realmente a uma diminuição de tensão porquanto se dá nessa ocasião a "estricção" do material, isto é, uma notável diminuição da secção transversal na região em que se vai processar a ruptura. Observe-se que nos diagramas das figuras 2 e 3 o valor de  $\sigma$  é sempre calculado em relação à secção inicial da barra.

- 4º) - Descarregando-se o material, quando atingido um ponto qualquer A', que corresponde a uma tensão maior que a correspondente ao limite de escoamento, as deformações se processam segundo uma linha A'O' praticamente paralela ao trecho inicial AO, conservando-se afinal a "deformação permanente", ou "deformação plástica" OO'.

O diagrama da figura 2 é característico dos aços doces.

O diagrama da figura 3 é característico dos materiais "frágeis", isto é, que não apresentam deformações permanentes apreciáveis antes da ruptura. Tal é o caso do ferro fundido e dos aços temperados de alto teor em carbôno.

Os materiais "dúcteis", isto é, aqueles que apresentam grandes deformações permanentes antes da ruptura, têm diagramas tensão-deformação que se "assemelham" ao da figura 2. Isto porque nem todos os materiais dúcteis apresentam, em seus diagramas, o trecho característico do escoamento (BC).

O que distingue o material dúctil do frágil é, portanto, o fato de apresentar ou não deformações permanentes apreciáveis antes da ruptura, e não a existência nítida do "escoamento" que, de certo modo pode ser considerado como um fato de exceção entre os materiais dúcteis.

No segundo tipo de diagrama (figura 3) observam-se os mesmos fenômenos com ausência apenas do trecho BC. Não há então um limite de escoamento perfeitamente definido; costuma-se tomar, para substituí-lo, o ponto B ao qual corresponde, após descarga, uma determinada deformação permanente, como a de 0,002 representada na figura 3.

O comportamento dos aços, sob a ação de forças axiais de compressão, apresenta até o limite de resistência D, os mesmos características observados para a tração. Daí por diante, como se dá o fenômeno inverso ao da estrição (aumento notável da secção transversal), a curva do diagrama sobe rapidamente, verificando-se a ruptura em um ponto E bem acima de D.

Além dos pontos característicos (A, B, C, D e E) apresentados nos diagramas das figuras 2 e 3 define-se também o chamado "limite de elasticidade". Limite de elasticidade é o valor máximo da tensão para a qual, descarregada a barra, não se verifica deformação permanente.

Nessas condições, os limites de proporcionalidade e de elasticidade não são necessariamente coincidentes, e seus valores dependem essencialmente da precisão com que se medem as deformações.

O limite de proporcionalidade, de acordo com o processo de ensaio adotado no I.P.T., é a maior tensão até a qual para



acréscimos iguais de tensão as deformações permanecem iguais com a aproximação de  $\pm 0,000005$ . O limite de elasticidade, de acordo com o processo de ensaio adotado no I.P.T. é a maior tensão para a qual o material não apresenta deformações permanentes superiores a  $\pm 0,00003$ . Esses dois limites são, porém, bastante próximos para os aços doces, o que permite, em primeira aproximação considerá-los como coincidentes.

O concreto, material frágil, tem, na realidade, um diagrama tensão-deformação diferente do apresentado na figura 3. Quando submetida a uma força de compressão, uma peça de concreto encurta-se na direção paralela à da força. Esse encurtamento será tanto maior quanto maior for a tensão de compressão; a lei que relaciona as duas grandezas, quando representada graficamente, apresenta o aspecto indicado na figura 4.

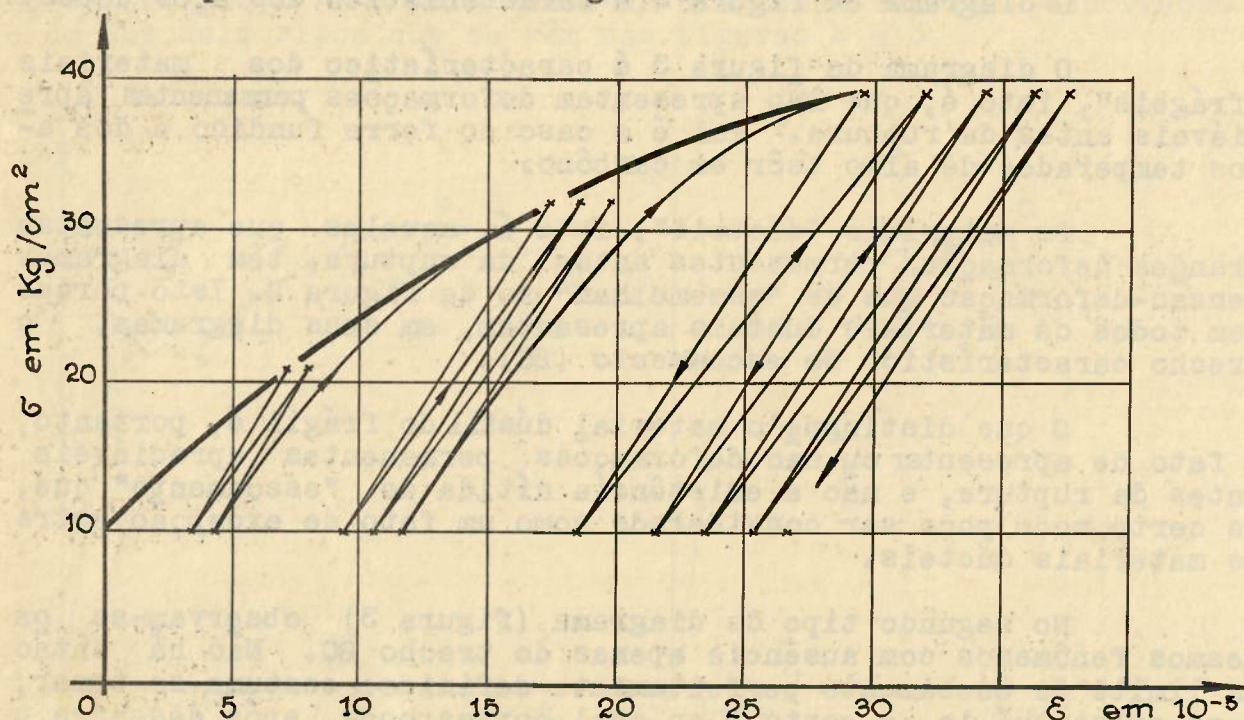


Figura 4

Aí se vê, em traço grosso, a marcha do fenômeno quando observado em concreto que pela primeira vez é submetido a uma tensão que cresce gradativamente. Os traços finos mostram as deformações longitudinais quando se diminui a tensão e depois se torna a aumentá-la. Verifica-se que, depois de carregado pela primeira vez, o concreto se comporta, para tensões não superiores às atingidas no primeiro carregamento, mais ou menos de acordo com a lei segundo a qual as deformações são praticamente proporcionais às tensões.

O mesmo, porém, não se observa para tensões que são atingidas pela primeira vez; as deformações crescem mais rapidamente que as tensões, a medida que estas aumentam, notando-se depois da descarga uma sensível deformação residual (deformação plástica). Nas repetições de carga e nas descargas subsequentes, o aumento da deformação residual vai-se tornando cada vez menor, passando a predominar francamente a "deformação elástica", isto é, aquela deformação que desaparece depois do descarregamento.

Em toda esta exposição supuzemos que o ensaio, para ob-



tenção da curva tensão-deformação, fôsse executado mais ou menos rapidamente, razão pela qual se diz, principalmente para o concreto, que a deformação considerada é a "deformação imediata". Se as cargas permanecem atuando por algum tempo sobre o concreto, este continuará se deformando, não sendo então aplicáveis as considerações feitas sobre a "deformação imediata". Este aumento de deformação, que constitui a "deformação lenta" é explicado, na teoria de Freyssinet, admitindo-se que o concreto não seja realmente um sólido e sim um pseudo-sólido, isto é, um corpo que, embora tendo a aparência exterior dos sólidos, possui uma rede de poros muito finos contendo água ou ar.

Exemplificando para o caso dos esforços de compressão tem-se o seguinte: Estes esforços dão lugar a uma diminuição do tamanho dos poros de concreto; a água que neles se achava, não podendo escoar de chofre, vai encher poros de maior dimensão, que estavam vazios, causando um aumento da umidade relativa do concreto e uma consequente diminuição das tensões capilares; observa-se então a "deformação imediata". Com o tempo, a água em excesso vai-se evaporando, as tensões capilares tornam a aumentar, originando esforços que equivalem a uma pressão aplicada de fora para dentro, sobre o esqueleto sólido do concreto, e que dá lugar a "deformação lenta". O problema é estudado com mais detalhes na Cadeira de "Concreto Simples e Armado".

3 - Lei de Hooke. Módulo de elasticidade:- Resumindo o que foi apresentado no item anterior, pode dizer-se que toda barra, submetida a uma força normal de tração ou de compressão, se deforma, alongando-se ou encurtando-se. Essa deformação é função da tensão  $\sigma$  que se manifesta nas secções transversais. Até um certo valor da tensão, porém, pode admitir-se, para os materiais usuais, que a deformação seja proporcional à tensão. É o que se denomina a "lei de Hooke", por ter sido pela primeira vez exposta por esse cientista inglês em 1678.

Ao coeficiente de proporcionalidade  $E$ , entre a tensão  $\sigma$  e a deformação  $\epsilon$ , dá-se o nome de "Módulo de elasticidade":

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

A deformação total da barra, considerada positiva, se a alongamento, e negativa, se encurtamento, será, se  $S$  e  $N$  forem, respectivamente, a área da secção transversal e a força normal, ambas constantes (figura 5):

$$\Delta l = \epsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{N l}{E S}$$

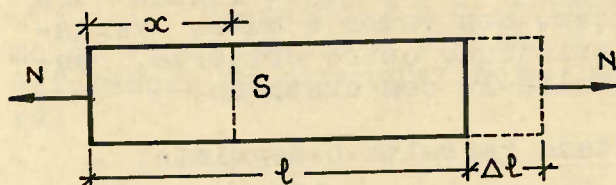


Figura 5

Se  $S$  ou  $N$ , ou ambas, variarem com  $x$ , ter-se-á:

$$\Delta l = \int_0^l \epsilon dx = \frac{1}{E} \int_0^l N \frac{dx}{S}$$

Assim, por exemplo, se a barra fôr um tronco de pirâmide com bases de área  $S_0$  e  $S_1 = a^2 \cdot S_0$ , tem-se (figura 6):

$$S = S_0 \cdot (\alpha - 1)^2 \cdot \frac{x^2}{l^2}$$



donde, para o caso de N constante:

$$\Delta l = \frac{Nl^2}{ES_0(\alpha-1)^2} \int \frac{\frac{\alpha l}{\alpha-1}}{\frac{dx}{x^2}} \frac{l}{\alpha-1}$$

$$\Delta l = \frac{Nl^2}{ES_0(\alpha-1)^2} \left( -\frac{\alpha-1}{\alpha l} + \frac{\alpha-1}{l} \right) = \frac{Nl}{\alpha ES_0} = \frac{Nl}{E\sqrt{S_0 S_l}}$$

De acôrdo com a definição apresentada o módulo de elasticidade é, para os materiais que obedecem à lei de Hooke, o valor da tensão que corresponde à deformação unitária. Seu valor é o da tangente trigonométrica do ângulo  $\alpha$  que a reta OA (figuras 2 e 3) forma com o eixo dos  $\epsilon$  no diagrama tensão-deformação.

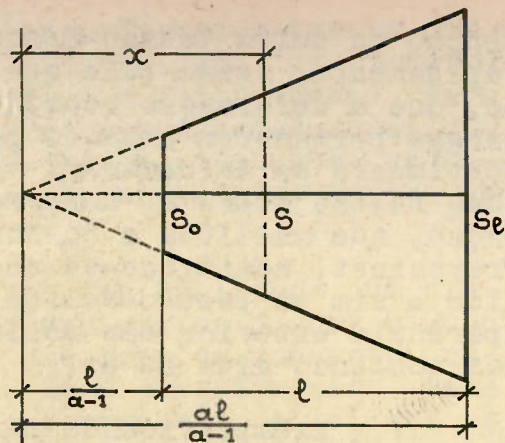


Figura 6

O módulo de elasticidade do concreto, que corresponde à inclinação da curva do diagrama tensão-deformação (figura 7) pode

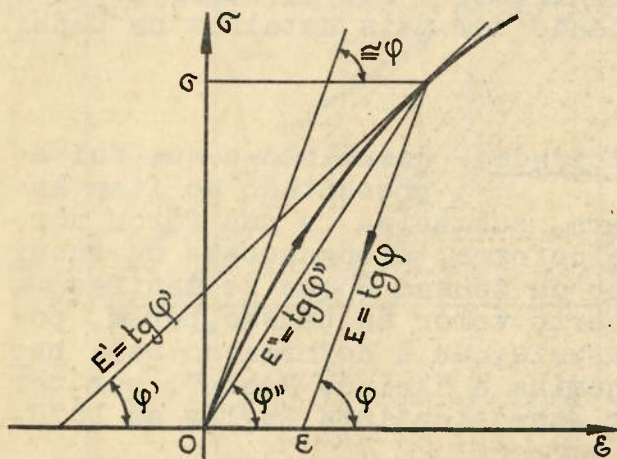


Figura 7

em vista) e da secante que une esse ponto à origem das coordenadas. Esses módulos são pouco usados nos cálculos. Note-se que os módulos  $E'$  e  $E''$  aproximam-se do módulo  $E$ , apresentado a seguir, quando  $\sigma$  tende para zero.

No último caso, o módulo  $E$  (que é o que se usa quando não há referências em contrário) se caracteriza pelas linhas de descarga do diagrama tensão-deformação. Seu valor é muito variável de concreto para concreto, não existindo outro critério, senão o experimental, para se poder avaliá-lo com exatidão.

De tudo o que foi apresentado ressalta o seguinte:

- 1º) - Os materiais usualmente empregados nas construções têm curvas tensão-deformação que, dentro da aproximação requerida pelos cálculos, e até um determinado limite, podem ser representadas pela reta:

$$\sigma = \epsilon \cdot E$$

- 2º) - A constante de proporcionalidade  $E$ , módulo de elasticidade, é função do material e do esforço normal (tra



ção ou compressão) considerado.

Para os aços o módulo de elasticidade à tração é praticamente igual ao módulo à compressão; difere muito pouco com o tipo e a resistência à ruptura do aço considerado. Seu valor médio é  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ .

Para os concretos, o valor de  $E$ , na deformação imediata, é variável entre 200 e 400  $\text{t/cm}^2$ . Para levar em conta o efeito da deformação lenta, pode-se adotar, nos cálculos, um valor da ordem de 150, 100 e até 75  $\text{t/cm}^2$ .

Para as madeiras, o módulo de elasticidade é da ordem de 100  $\text{t/cm}^2$ .

Outros valores são encontrados nos manuais de Engenharia.

4 - Elasticidade:- O termo elasticidade, em seu sentido mais amplo, é empregado para caracterizar a propriedade de certos corpos que, depois de terem sido deformados retomam a forma e as dimensões iniciais, quando se anulam as causas que deram origem à deformação.

Esta propriedade não depende da equação da curva tensão-deformação, existindo materiais, como por exemplo a borracha, que não satisfazem à lei de Hooke e que, apesar disso, são considerados elásticos.

Em "Teoria da Elasticidade" e em "Resistência dos Materiais", consideram-se "elásticos" os materiais que, além de retomarem as formas e as dimensões iniciais, quando descarregados, satisfazem também a lei de Hooke, segundo a qual as deformações são proporcionais às tensões.

A maior parte dos materiais de construção, como os aços, ferro fundido, madeira, concreto, etc., satisfazem à lei de Hooke e podem, até certo limite dos esforços aplicados ser considerados elásticos.

5 - Exercícios:- 1) O tubo de aço da figura 8, com raio  $r = 30 \text{ cm}$  e espessura  $e = 0,3 \text{ cm}$  será submetido à pressão interna  $p = 10 \text{ kg/cm}^2$ . Sabendo que o módulo de elasticidade do aço é  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  pede-se o aumento de diâmetro do tubo.

Chamando  $\Delta r$  o acréscimo do raio, devido à pressão  $p$ , a deformação da circunferência será:

$$\epsilon_c = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

De acordo com a lei de Hooke:

$$\sigma = \epsilon_c \cdot E$$

mas:

$$\sigma = \frac{pr}{e}$$

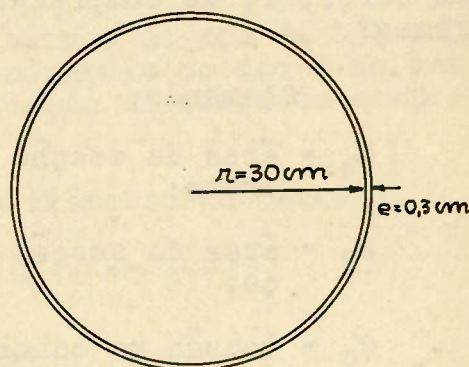


Figura 8



donde:

$$\epsilon_c = \frac{\sigma}{E} = \frac{p\pi}{eE} = \frac{10 \times 30}{0,3 \times 2100000} = 0,00048$$

O acréscimo do diâmetro é, então:

$$\Delta d = 2\Delta r = 2\pi\epsilon_c = 2 \times 30 \times 0,00048 \cong 0,03 \text{ cm}$$

2) Na figura 9 é apresentado um esquema da alavanca de um sinal ferroviário. Os braços da alavanca, AB e AC, estão na relação 5:1. Admitindo que da extremidade inferior (C) da alavanca, até o sinal, o fio que o prende seja de 5 mm de diâmetro e 140 m de comprimento, a força aplicada em B igual a 18 kg, o deslocamento produzido no ponto D (extremidade do fio) 5 cm, pergunta-se qual o deslocamento que se dará em B?

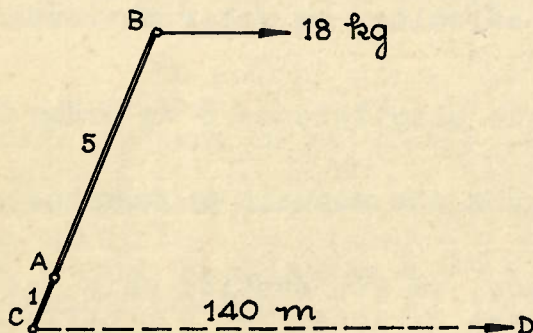


Figura 9

Chamando  $d'$  o deslocamento em B, e  $d$  o deslocamento em C, ter-se-á:

$$d' = 5d = 5(5 + \Delta l)$$

pois o deslocamento do ponto C é igual a 5 cm mais o alongamento total do fio CD.

De acordo com a lei de Hooke:

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}$$

onde:  $N = 5 \times 18 = 90 \text{ kg}$ , e admitindo:

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

vem:

$$\Delta l = \frac{90 \times 14000 \times 4}{2100000 \times \pi \times 0,5 \times 0,5} \cong 3 \text{ cm}$$

Finalmente:

$$d' = 5(5 + 3) = 40 \text{ cm}$$

Se o fio CD fôsse indeformável ter-se-ia:

$$d' = 25 \text{ cm}$$

3) Na figura 10 é apresentado um pilar de concreto, com 4 barras de aço. Quais as tensões no concreto e no aço quando da aplicação de uma força, P, de compressão, nas faces extremas?

Chamando:

$S_c$  = área da secção transversal do concreto;

$S_f$  = área da secção transversal de aço;

$\sigma_c$  = tensão no concreto devida a P;

$\sigma_f$  = tensão no aço devida a P,

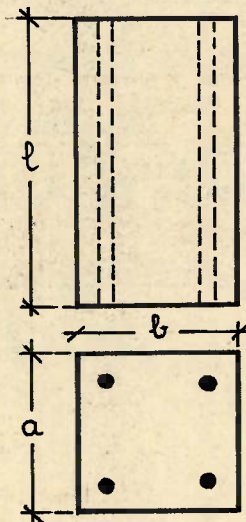


Figura 10

deve-se ter:



1) Condição de equilíbrio numa secção transversal:

$$P = \sigma_c S_c + \sigma_f S_f$$

2) Os dois materiais, aço e concreto devem apresentar a mesma deformação total:

$$\Delta l = l \varepsilon_c = l \varepsilon_f$$

onde  $\varepsilon_f$  e  $\varepsilon_c$  são, respectivamente, as deformações no aço e no concreto.

Portanto:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

ou:

$$\sigma_f = \frac{E_f}{E_c} \sigma_c = n \sigma_c$$

onde  $n$  é a relação entre os módulos de elasticidade do ferro ( $E_f$ ) e do concreto ( $E_c$ ).

Substituindo na primeira equação vem:

$$P = \sigma_c S_c + n \sigma_c S_f = \sigma_c (S_c + n S_f)$$

Finalmente:

$$\sigma_c = \frac{P}{S_c + n S_f}$$

$$\sigma_f = \frac{n P}{S_c + n S_f}$$

isto é, a tensão no concreto é a mesma que se daria numa barra de material homogêneo com área da secção transversal (secção ideal) igual a:

$$S_i = S_c + n S_f$$

Admitindo, por exemplo, que a secção transversal do pilar seja um quadrado de lado (figura 10):

$$a = b = 30 \text{ cm}$$

e que a armadura seja formada de quatro barras de aço de  $3/4$  de polegada pergunta-se quais as tensões produzidas no aço e no concreto, respectivamente, logo após a aplicação da força de compressão  $P = 48 \text{ t}$ .

No caso em questão tem-se ( $d$  = diâmetro da barra):

$$S_f = 4 \times \frac{\pi d^2}{4} \cong 3,14 \times 1,9^2 \cong 11,40 \text{ cm}^2$$

$$S_c = 30 \times 30 - 11,40 = 888,60 \text{ cm}^2$$

$$\text{Adotando-se: } n = \frac{E_f}{E_c} = 15, \text{ vem:}$$

$$S_i = 888,60 + 15 \times 11,40 = 1059,60 \text{ cm}^2$$



$$\sigma_c = \frac{48000}{1059,60} = 45,3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_f = n\sigma_c = 679,5 \text{ kg/cm}^2$$

4) As três barras (de mesmo material), AB, CB e DB, da figura 11 estão situadas no mesmo plano. Pede-se determinar a força em cada uma das barras quando se aplica no nó B (ponto comum às três barras) a força P, sabendo que a área da secção transversal da barra BC é  $S_{BC} = 3 \text{ cm}^2$  e que a área da secção transversal das barras inclinadas é:  $S_{AB} = S_{BD} = 2 \text{ cm}^2$ .

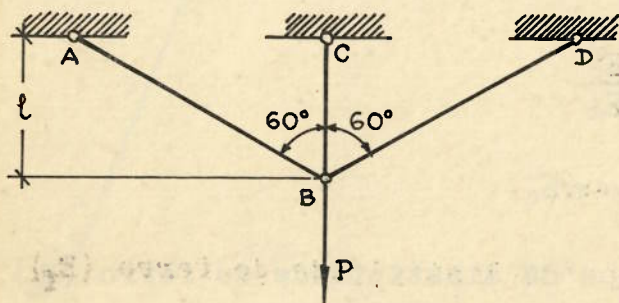


Figura 11

Como as barras são articuladas nas extremidades o esforço que aparece em cada uma delas será exclusivamente uma força normal. Seja X a força que age em BC e Y a força nas barras inclinadas (devido à simetria, o esforço nas duas barras, AB e BD é o mesmo).

A única equação que a estática fornece é:

$$P = X + 2Y \cdot \cos 60^\circ = X + Y$$

Para resolver o problema é necessário estabelecer mais uma equação, que se obtém igualando as componentes, segundo BC, dos alongamentos das três barras (figura 12).

Admitindo que os alongamentos  $\Delta l$  (da barra BC) e  $\Delta s$  (das barras inclinadas) sejam suficientemente pequenos de modo a poder admitir-se (figura 12):

$$\alpha = 60^\circ$$

vem:

$$\Delta l \cdot \cos 60^\circ = \Delta s$$

equação esta que, juntamente com a fornecida pela estática, permite determinar X e Y.

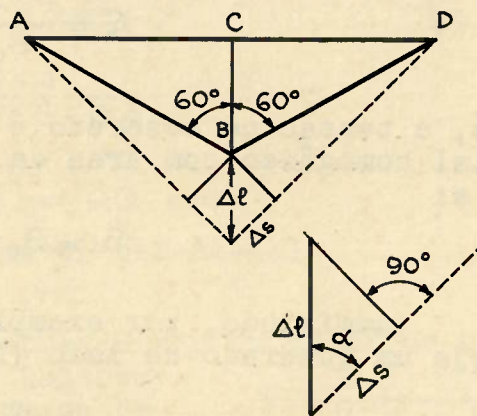


Figura 12

Aplicando a lei de Hooke, vem:

$$\Delta l = \frac{X l_{BC}}{E S_{BC}}$$

$$\Delta s = \frac{Y l_{BD}}{E S_{BD}}$$

onde  $l_{BC}$  e  $l_{BD}$  são, respectivamente, os comprimentos das barras BC e BD e E o módulo de elasticidade do material.

Como:

$$l = l_{BC} = l_{BD} \cos 60^\circ$$



a equação acima se escreve:

$$\Delta l \cos 60^\circ = \Delta s = \frac{Yl}{\cos 60^\circ E S_{BD}} = \frac{Xl \cos 60^\circ}{E S_{BC}}$$

isto é:

$$\frac{2Y}{S_{BD}} = \frac{X}{2 S_{BC}}$$

ou:

$$X = 4Y \cdot \frac{S_{BC}}{S_{BD}} = \frac{4 \times 3}{2} Y = 6Y$$

Substituindo em:

$$P = X + Y$$

vem:

$$P = X + \frac{X}{6} = \frac{7}{6} X$$

Finalmente:

$$Y = \frac{P}{7}$$

$$X = \frac{6}{7} P$$

6 - Deformação transversal: - A deformação longitudinal que se acaba de estudar não é a única que se dá numa barra sob a ação de uma força normal; há também uma deformação transversal, que se verifica em todas as direções perpendiculares à direção da força e que é proporcional à deformação longitudinal  $\epsilon$ , e de sinal contrário:

$$\epsilon_t = - \nu \epsilon = - \frac{1}{m} \epsilon$$

O coeficiente de proporcionalidade  $\nu$ , denominado "coeficiente de Poisson", é variável com a natureza do material. Nos cálculos é, também, comum empregar-se o "inverso do coeficiente de Poisson":

$$m = \frac{1}{\nu}$$

O valor de  $\nu$ , para os metais, varia entre 0,3 e 0,4: para o concreto  $\nu$  varia entre  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{2}{25}$ .

A variação de volume de uma barra, não é pois proporcional à sua deformação longitudinal; assim, a barra de seção transversal quadrada (de lado  $a$ ) da figura 13 terá seu comprimento aumentado de  $l$  para

$$l + \Delta l = l(1 + \epsilon)$$

a sua seção transversal reduzida de  $a^2$  para:

$$a^2(1 - \nu \epsilon)^2$$

e seu volume variando de  $V = l a^2$  para

$$V + \Delta V = l(1 + \epsilon) a^2(1 - \nu \epsilon)^2$$

ou:

$$V + \Delta V = V(1 + \epsilon)(1 - \nu \epsilon)^2$$

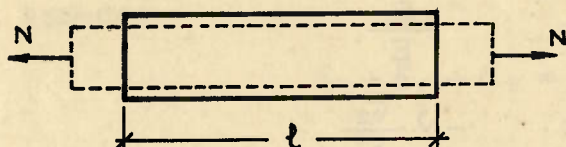


Figura 13



$$V + \Delta V = V(1 + \epsilon)(1 - 2\nu\epsilon + \nu^2\epsilon^2)$$

Desprezando os termos que contêm o quadrado de  $\epsilon$  por ser essa quantidade muito pequena (para os materiais utilizados nas construções) vem:

$$V + \Delta V \cong V(1 - 2\nu\epsilon + \epsilon)$$

$$V + \Delta V \cong V + V\epsilon(1 - 2\nu)$$

donde:

$$\frac{\Delta V}{V} \cong \epsilon(1 - 2\nu)$$

Como por hipótese  $\epsilon$  é positivo (caso da tração e  $\nu$  é em geral positivo e menor que 0,5 conclui-se que o volume da barra tracionada aumenta. No caso da compressão haverá uma diminuição do volume da barra ( $\epsilon$  é negativo).

7 - Solicitação tripla: - Podemos agora estudar o caso mais geral de um corpo solicitado por forças normais em três direções ortogonais. É o caso, por exemplo, do elemento cúbico de um corpo qualquer submetido a esforços, cortado de modo

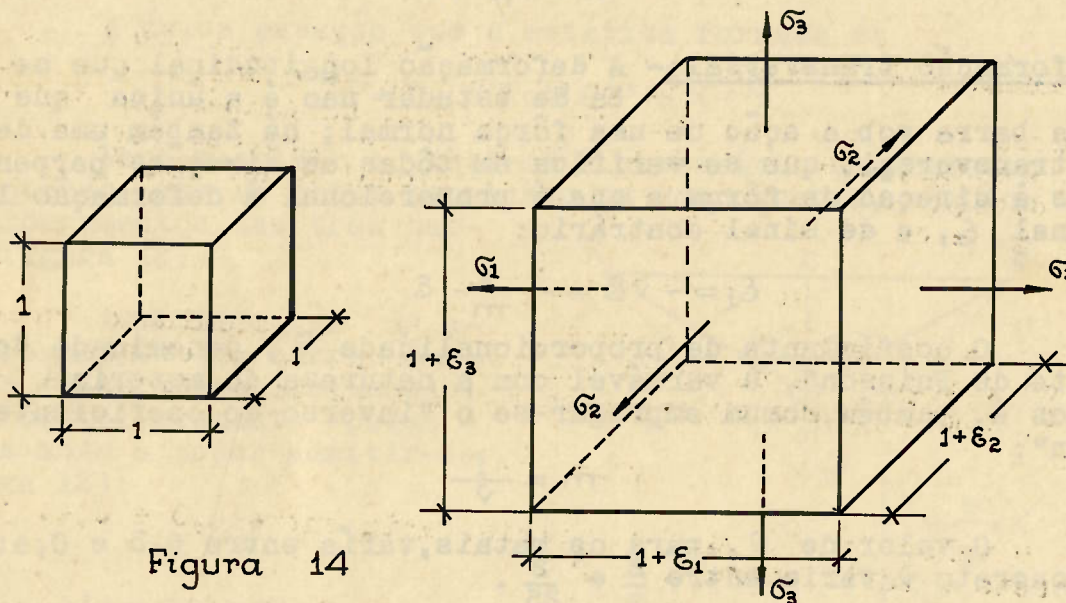


Figura 14

que suas faces sejam paralelas aos planos em que agem somente as tensões normais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  (tensões principais). Neste caso (figura 14), se o cubo tiver arestas de comprimento unitário, a deformação  $\epsilon_1$  na direção de  $\sigma_1$  será:

$$\text{oriunda de } \sigma_1 : \frac{\sigma_1}{E}$$

$$\text{oriunda de } \sigma_2 : -\nu \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\text{oriunda de } \sigma_3 : -\nu \frac{\sigma_3}{E}$$

Então

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$



e análogamente, nas direções de  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  respectivamente:

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)]$$

A alteração de volume causada por essas deformações é:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) - 1$$

ou seja, desprezando os produtos de duas quantidades muito pequenas, como são os  $\epsilon$ :

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

que se pode escrever, em função das tensões principais:

$$\epsilon_v = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\epsilon_v = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

ou:

$$\left( \nu = \frac{1}{m} \right) \quad \epsilon_v = \frac{m-2}{mE} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Quando  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ , caso de pressão ou de depressão uniforme, tem-se:

$$\epsilon_v = \frac{1-2\nu}{E} \cdot 3p = \frac{m-2}{mE} \cdot 3p$$

A quantidade, análoga ao módulo de elasticidade  $E$ , definida por:

$$K = \frac{p}{\epsilon_v} = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

dá-se o nome de "módulo de elasticidade volumétrico" do material.

Partindo das fórmulas:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)]$$

tem-se:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_v = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$a) \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{E \cdot \epsilon_v}{1-2\nu}$$

Da primeira fórmula tira-se:

$$E \epsilon_1 = \sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)$$



$$b) \quad \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{\sigma_1 - E \epsilon_1}{\nu}$$

Subtraindo (b) de (a) resulta:

$$\sigma_1 = \frac{E \epsilon_v}{1-2\nu} + \frac{E \epsilon_1}{\nu} - \frac{\sigma_1}{\nu}$$

$$\sigma_1 \left( \frac{1+\nu}{\nu} \right) = E \left( \frac{\epsilon_v}{1-2\nu} + \frac{\epsilon_1}{\nu} \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_1 + \frac{\nu \epsilon_v}{1-2\nu} \right)$$

ou:

$$\sigma_1 = \frac{mE}{m+1} \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_v}{m-2} \right)$$

Analogamente se obtêm:

$$\sigma_2 = \frac{mE}{m+1} \left( \epsilon_2 + \frac{\epsilon_v}{m-2} \right)$$

$$\sigma_3 = \frac{mE}{m+1} \left( \epsilon_3 + \frac{\epsilon_v}{m-2} \right)$$

Essas fórmulas determinam as tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  em função de  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$  (note-se que  $\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ ).

**8 - Exercício:-** Na figura 15 é apresentado um tubo de caldeira, com os topos fechados, submetido à pressão interna  $p = 5 \text{ kg/cm}^2$ . O diâmetro do tubo é  $d = 2\text{m}$  e a espessura  $e = 0,4 \text{ cm}$ . Sabendo-se que o módulo de elasticidade do material e o coeficiente de Poisson, são respectivamente  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ ,  $\nu = 0,3$  pede-se calcular o aumento de comprimento, o aumento do diâmetro e o aumento da espessura do tubo.

De acordo com o que se apresenta na figura 15, as tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  num elemento do tubo são:

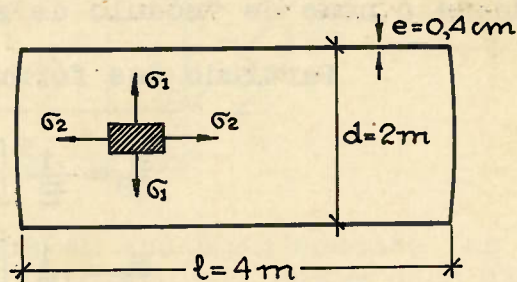


Figura 15

$$\sigma_1 = \frac{pd}{2e} = \frac{5 \times 200}{0,8} = 1250 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = p \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi d e} = \frac{pd}{4e} = \frac{\sigma_1}{2} = 625 \text{ kg/cm}^2$$

No elemento representado na figura tem-se, na realidade, um estado triplo de tensão; a tensão  $\sigma_3$  (normal ao plano de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) estará compreendida entre zero (face externa) e  $p = 5 \text{ kg/cm}^2$  (face interna). Como seu valor é muito pequeno quando comparado com os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , adotaremos  $\sigma_3 = 0$ .

Calculemos as deformações nas direções dessas tensões:



$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{1250 - 0,3 \times 625}{2100000} = 0,00051$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) = \frac{625 - 0,3 \times 1250}{2100000} = 0,00012$$

$$\epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{0,3(1250 + 625)}{2100000} = -0,00027$$

O aumento do diâmetro é:

$$\Delta d = \epsilon_1 d = 0,00051 \times 2000 = 1,02 \text{ mm}$$

O aumento do comprimento é:

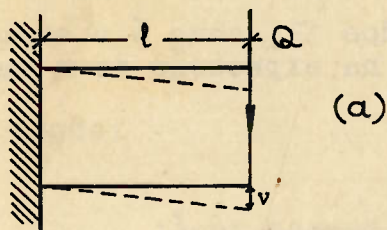
$$\Delta l = \epsilon_2 l = 0,00012 \times 4000 = 0,48 \text{ mm}$$

O aumento da espessura é:

$$\Delta e = \epsilon_3 e = -0,00027 \times 4 = -0,00108 \text{ mm}$$

## B - CISALHAMENTO E TORÇÃO

9 - Deformação por cisalhamento: - Considere-se a barra prismática (de secção transversal de área  $S$ ) de comprimento  $l$  suficientemente pequeno para que, sob a ação da força cortante  $Q$ , se possa desprezar o efeito do momento fletor na distribuição dos  $\tau$  devidos a  $Q$ .



De acordo com o que se apresenta na figura 16b duas secções distantes entre si,  $\Delta x$ , deslocam-se, uma em relação à outra de  $\Delta v$ .

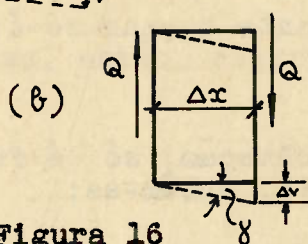


Figura 16

Suponhamos, então, que para valores crescentes de  $Q$  (a partir de zero) se determinem os valores correspondentes de  $\Delta v$  (figura 16b). Ter-se-á de terminado, numa experiência desse tipo, a função:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = f\left(\frac{Q}{S}\right)$$

a qual, para os materiais usualmente empregados nas construções é uma linha reta (até um determinado valor de  $\frac{Q}{S}$  função do material considerado).

Em outras palavras, as tensões de cisalhamento

$$\tau = \frac{Q}{S}$$

são proporcionais às deformações:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Pelo fato de ser  $\gamma$  (figura 16b) um ângulo muito pequeno, ao qual se dá o nome de "distorção", pode tomar-se:



$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

e a lei de Hooke, no caso das tensões de cisalhamento se escreve:

$$\gamma = \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

onde  $\frac{1}{G}$  é o coeficiente de proporcionalidade.

À constante  $G$ , relação constante entre a tensão  $\tau$  e a distorção  $\gamma$ , dá-se o nome de "Módulo de Elasticidade Transversal"; seu valor é função do material considerado.

Tem-se ainda:

$$\Delta v = \gamma \Delta x = \frac{\tau}{G} \Delta x = \frac{Q \Delta x}{G S}$$

Para obter o deslocamento total  $v$  (figura 16a) basta considerarmos, nas fórmulas anteriores,  $\Delta x$  como infinitamente pequeno e integramos a expressão acima. Virá:

$$v = \int_0^l \frac{Q dx}{G S}$$

e no caso da barra de secção constante submetida à força  $Q$  resulta:

$$v = \frac{Q l}{G S}$$

fórmula análoga à que obtivemos no caso da deformação por tração ou compressão:

$$\Delta l = \frac{N l}{E S}$$

Não sendo uniforme a distribuição dos  $\tau$ , como é o caso das barras fletidas, ter-se-á que introduzir na expressão de  $v$  um fator de correção  $\kappa$ :

$$v = \int_0^l \frac{\kappa Q}{G S} dx$$

expressão que, quando a secção fôr constante tornar-se-á:

$$v = \frac{\kappa}{G S} \int_0^l Q dx$$

visto que  $\kappa$ , para um mesmo tipo de solicitação, só é função da forma da secção; se  $Q$  também fôr constante, obtém-se:

$$v = \frac{\kappa Q \cdot l}{G S}$$

O fator  $\kappa$ , no caso das vigas fletidas pode ser tomado igual a  $\frac{\tau_0}{\tau_m}$  onde  $\tau_0$  é a tensão de cisalhamento no centro de gravidade e  $\tau_m = \frac{Q}{S}$  é a tensão média.

Tal asserção justifica-se do seguinte modo: pelo fato de não ser uniforme a distribuição das tensões de cisalhamento na secção transversal, nem todos os pontos desta têm o mesmo deslocamento; por isso a secção transversal se deforma deixando de ser plana (figura 17). Junto às bordas, por serem aí nulas as tensões de cisalhamento, a secção permanece normal ao eixo (deformado); ao ponto em que a tensão é máxima, corresponde uma inflexão da secção. Quando esta é simétrica em relação ao eixo, o plano tangente à secção no seu centro de gravidade, por simetria coincide com o



plano primitivo da secção e, portanto, o deslocamento da barra, corresponderá ao deslocamento de seu centro de gravidade.

Admite-se que: se no centro de gravidade a tensão  $\tau_0$  é  $\kappa$  vezes a tensão média, isto é:

$$\tau_0 = \kappa \tau_m$$

então, a deformação também será  $\kappa$  vezes maior que a que se daria se a tensão de cisalhamento fosse constante em toda a secção.

Em resumo:

$$dv = \frac{\kappa Q}{GS} dx$$

onde:

$$\kappa = \frac{\tau_0}{\tau_m}$$

Mas:

$$\tau_0 = \frac{Q}{b_0 z}$$

$$\tau_m = \frac{Q}{S}$$

donde:

$$\kappa = \frac{S}{b_0 z}$$

podendo-se, então, escrever:

$$v = \int_0^l \frac{\kappa Q}{GS} dx = \int_0^l \frac{Q}{G b_0 z} dx$$

No caso do retângulo tem-se  $\kappa = 1,5$  e no caso do círculo,  $\kappa = \frac{4}{3}$ . Ao tratarmos da "Energia de Deformação" veremos outro processo para determinação da constante  $\kappa$ .

10 - Distorção. Relação entre G e E:- Voltando a considerar um elemento de barra, submetido a uma tensão de cisalhamento uniforme  $\tau$ , verifica-se que esta origina uma deformação sem no entanto acarretar uma alteração de volume, pois como se vê na figura 16, o volume que era igual a  $S \cdot \Delta x$  permanece o mesmo depois da deformação.

Há, pois, apenas uma "distorção" caracterizada pelo ângulo  $\gamma$ . O elemento de lado unitário ABCD, representado na figura 18, deforma-se sob a ação de  $\tau$  tomando o aspecto de um losango A'B'C'D.

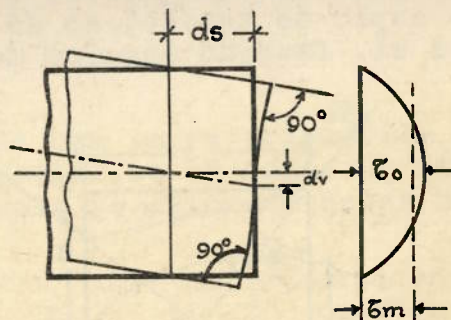


Figura 17



O efeito daquela tensão deve ser equivalente, como se viu no estado duplo de tensão, ao de duas tensões normais, perpendiculares entre si, fazendo ângulos de  $45^\circ$  com a direção de  $\tau$  e iguais a:

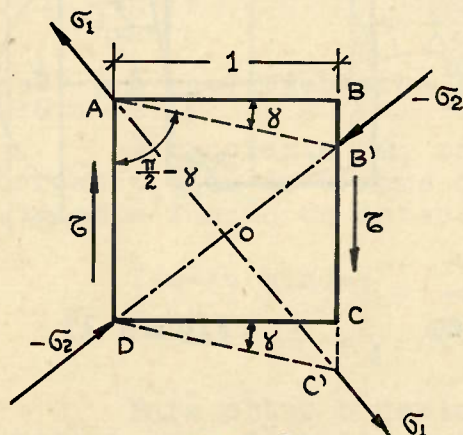


Figura 18

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = -\tau$$

Dai, como,  $\sigma_3 = 0$ , por não haver forças perpendiculares ao plano da figura, ter-se:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

e conseqüentemente:

$$\epsilon_v = 0$$

O alongamento  $\epsilon_1$  causado por  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  na direção de  $\sigma_1$  deve corresponder à diferença de comprimento entre a maior diagonal do losango  $AC'$  e a diagonal do quadrado  $AC = \sqrt{2}$ , isto é:

$$\epsilon_1 = \frac{AC' - AC}{AC} \quad \text{ou} \quad AC' = AC(1 + \epsilon_1) = \sqrt{2}(1 + \epsilon_1)$$

e análogamente:

$$-\epsilon_2 = \frac{BD - B'D}{BD} \quad \text{ou} \quad B'D = \sqrt{2}(1 + \epsilon_2)$$

Como  $\sigma_3 = 0$  tem-se ( $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ ):

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = -\frac{\tau}{E}(1 + \nu) = -\epsilon_1$$

e da consideração do triângulo  $AOB'$  da figura 18:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{OB'}{OA} = \frac{B'D}{AC'} = \frac{1 + \epsilon_2}{1 + \epsilon_1} = \frac{1 - \epsilon_1}{1 + \epsilon_1}$$

Mas, como  $\gamma$  é, por hipótese, muito pequeno, vem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma/2}{1 + \operatorname{tg} \gamma/2} \approx \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2}$$

donde:

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G}$$

Substituindo em:

$$\epsilon_1 = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

vem:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{mE}{2(1 + m)}$$

No caso do aço, tem-se:

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$



donde:

$$G = \frac{2100}{2,6} \cong 800 \text{ kg/cm}^2$$

11 - Deformação por torção:- A torção de uma barra prismática de secção circular, ou em corôa de círculo, faz-se sem que as secções transversais se deformem; elas mantêm sua forma primitiva mas deslocam-se angularmente, umas em relação às outras. Assim (figura 19), duas secções afastadas de  $ds$  deslocam-se de um ângulo  $d\theta$  de modo que um ponto  $A'$  da segunda secção, que correspondia a um ponto  $A$  da primeira, passa para  $B'$ , ponto que corresponde a  $B$ ; tem-se, pois:

$$\widehat{AB} = r d\theta = A'B' = \gamma ds$$

donde:

$$d\theta = \frac{\gamma}{r} \cdot ds$$

Mas:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p}$$

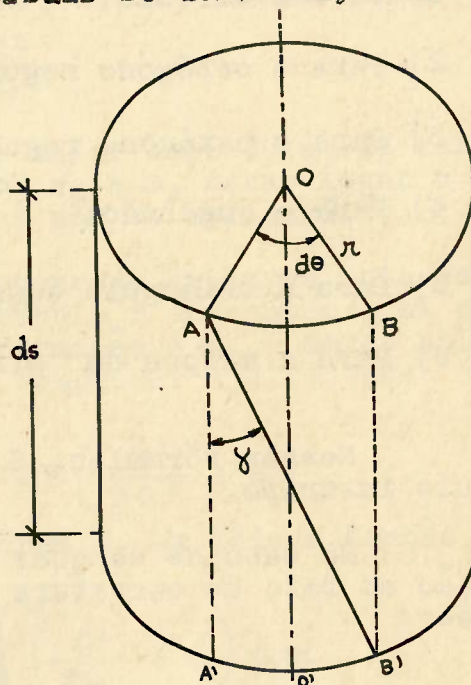


Figura 19

Portanto:

$$d\theta = \frac{M_t \cdot ds}{G \cdot J_p}$$

e, para deformação angular total da barra de comprimento  $l$ , submetida a um momento de torção variável  $M_t$ :

$$\theta = \int_0^l \frac{M_t}{G J_p} ds$$

Se além de  $G$ , também  $M_t$  e  $J_p$  forem constantes, tem-se:

$$\theta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_p}$$

A quantidade  $GJ_p$  chama-se "produto de rigidez transversal" da barra.

12 - Secção não circular:- O problema da deformação de barras torcidas de secção não circular foi resolvido por Saint Venant. Na tabela VI do livro "Cálculo de Concreto Armado" - Telemaco van Langendonck, encontram-se os valores de  $J_t$ , quantidade análoga ao momento polar de inércia, e que multiplicada por  $G$ , dá o produto de rigidez transversal da secção, com o qual se obtém a deformação angular total da barra de comprimento  $l$ :

$$\theta = \int_0^l \frac{M_t}{G J_t} ds$$



ou, se além de  $G$ , também  $M_t$  e  $J_t$  forem constantes:

$$\Theta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_t}$$

Alguns dos valores de  $J_t$  que se encontram na tabela citada são os seguintes:

- 1) Para o círculo:  $J_t = J_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0,125 S d^2$
- 2) Para o octógono regular:  $J_t = 0,130 S d^2$
- 3) Para o hexágono regular:  $J_t = 0,133 S d^2$
- 4) Para o quadrado:  $J_t = 0,1406 S d^2$
- 5) Para o triângulo equilátero (lado  $b$ ):  $J_t = \frac{\sqrt{3} \cdot b^4}{80} = 0,15 S d^2$
- 6) Para a elipse de eixos  $b$  e  $h$  ( $b > h$ ):  $J_t = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}$

Nessas fórmulas,  $S$  é a área da secção e  $d$  o diâmetro do círculo inscrito.

No caso de secções com espessura uniforme,  $e$ , pequena em relação ao raio de curvatura do eixo longitudinal (figs. 20 e 21), tem-se:

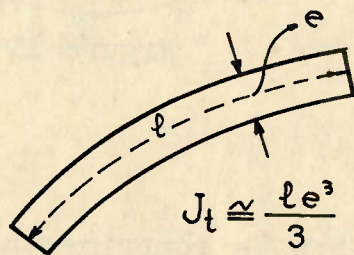


Figura 20

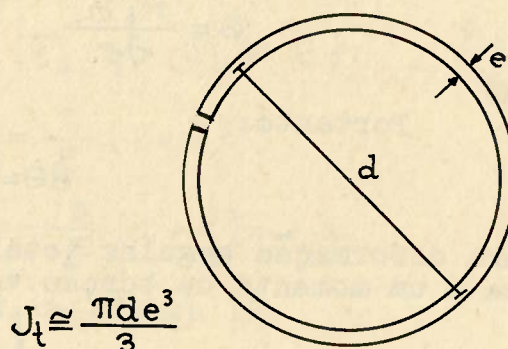


Figura 21

13 - Deformação longitudinal: - Além da deformação angular, a barra torcida também sofre um encurtamento longitudinal. Vejamos, por exemplo, o caso da barra de secção constante, em corôa de círculo, solicitada por um momento de torção também constante; com a passagem do ponto  $A'$  para  $B'$  (figura 19), a fibra  $AA'$  tomando a posição  $AB'$  faz com que as duas sec

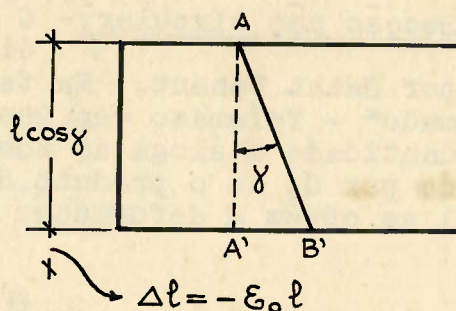
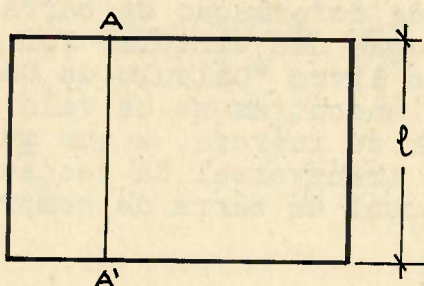


Figura 22



ções transversais afastadas de  $ds$  (figura 19) se aproximem, tornando-se a distância entre elas igual a  $ds \cos \gamma$ . Se a secção da barra fosse uma corôa de círculo extremamente delgada de raio  $r$ , o seu comprimento passaria de  $l$  para:

$$l - \Delta l = l \cos \gamma \cong l \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) = l \left(1 - \frac{\tau^2}{2G^2}\right)$$

donde o valor da deformação:

$$-\epsilon_0 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\tau^2}{2G^2}$$

Se a corôa de círculo tiver maior espessura, os raios de seus diversos elementos variando entre  $r_i$  e  $r_e$  darão lugar a valores diversos de  $\tau$  e a fórmula anterior não se aplicará.

Se  $-\epsilon$  fôr o encurtamento procurado da barra, note-se que tôdas suas fibras situadas a uma distância  $r$  do centro - as quais se fossem isoladas, sofreriam uma deformação  $-\epsilon_0$  - serão solici- tadas por uma tensão normal capaz de compensar a diferença entre  $-\epsilon_0$  e  $-\epsilon$ , ou seja:

$$\sigma = E(-\epsilon_0 + \epsilon) = E\left(\frac{\tau^2}{2G^2} + \epsilon\right)$$

A resultante das tensões normais, em tôda a secção trans- versal deve ser nula, logo:

$$\int_{r_i}^{r_e} 2\pi r \sigma dr = 0 = 2\pi E \int_{r_i}^{r_e} \left(\frac{\tau^2}{2G^2} + \epsilon\right) r dr$$

Mas:

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r$$

donde:

$$\pi E \int_{r_i}^{r_e} \left[ \left(\frac{M_t}{G J_p}\right)^2 r^3 + 2\epsilon r \right] dr = 0$$

ou:

$$\left(\frac{M_t}{G \cdot J_p}\right)^2 \frac{r_e^4 - r_i^4}{4} + \epsilon (r_e^2 - r_i^2) = 0$$

Finalmente:

$$-\epsilon = \left(\frac{M_t}{G J_p}\right)^2 \frac{r_e^4 + r_i^4}{4} = \frac{\tau_e^2 + \tau_i^2}{4G^2}$$

designando por  $\tau_e$  e  $\tau_i$  as tensões de cisalhamento, respectiva- mente, nas fibras externa e interna da barra.

Se sua secção transversal fôr um círculo, virá  $r_i = 0$ , don- de  $\tau_i = 0$  e:

$$-\epsilon = \frac{\tau_e^2}{4G^2}$$

As tensões normais  $\sigma$  atingem seus valores extremos para  $r = r_i$  e  $r = r_e$  e são, respectivamente:



$$\sigma_i = E \frac{\tau_i^2 - \tau_e^2}{4G^2}$$

$$\sigma_e = E \frac{\tau_e^2 - \tau_i^2}{4G^2}$$

Se a barra fôr engastada nas extremidades de modo que se obrigue a condição  $\xi = 0$  virá:

$$\sigma = \frac{E \tau^2}{2G^2}$$

e a fôrça normal que o engastamento exercerá sôbre a barra será:

$$N = \int_{r_i}^{r_e} 2\pi r \sigma dr = \int_{r_i}^{r_e} \pi E \left( \frac{M_t}{GJ_p} \right)^2 r^3 dr = \pi E \left( \frac{M_t}{GJ_p} \right)^2 \frac{r_e^4 - r_i^4}{4}$$

ou, como  $\pi (r_e^4 - r_i^4) = 2J_p$

$$N = \frac{EM_t^2}{2J_p G^2} = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{M_t^2}{GJ_p}$$

onde  $m$  é o inverso do coeficiente de Poisson.

14 - Aplicações:- 1) O tubo de parede fina de comprimento  $l$ , da figura 23 está submetido ao momento de torção  $M_t$ . De quanto aumentará a deformação angular  $\theta$  se praticarmos uma ranhura segundo uma geratriz?

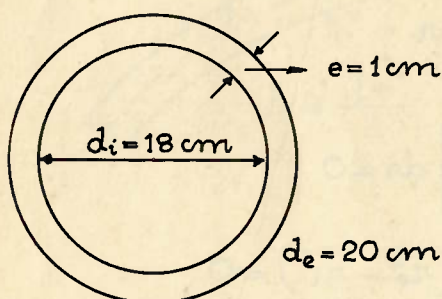


Figura 23

mação é: Antes da ranhura a deformação é:

$$\theta_1 = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_t}$$

Depois da ranhura ter-se-á:

$$\theta_2 = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J_t'}$$

Portanto, a relação entre as deformações é:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{J_t}{J_t'}$$

Mas, no primeiro caso:

$$J_t = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi}{32} (20^4 - 18^4)$$

e no segundo caso:

$$J_t' = \frac{\pi d \cdot e^3}{3} = \frac{\pi (d_e + d_i) \cdot e^3}{6} = \frac{\pi \times 19}{3}$$

Finalmente:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{(20^4 - 18^4) 3}{32 \times 19} = 270$$

donde se conclui que por efeito da ranhura a deformação:

$$\theta_2 = 270 \theta_1$$



2) Determinar o alongamento  $\Delta l$  (figura 24) produzido pela força  $P$  em uma mola helicoidal (a seção transversal do fio da mola é circular) de espiras muito próximas de modo a poderem ser consideradas horizontais.

Um elemento  $ds$  da mola sofre, por efeito da força  $P$  a deformação:

$$d\theta = \frac{M_t \cdot ds}{G \cdot J_p}$$

à qual corresponde em  $B$ , o deslocamento vertical  $d\Delta l$ .

De acordo com a figura 24 tem-se:

$$\frac{BB'}{BM} = \frac{R}{c} = \frac{d\Delta l}{cd\theta}$$

ou:

$$d\Delta l = R \cdot d\theta$$

Chamando  $d\alpha$  o ângulo segundo o qual se projeta no plano horizontal, o elemento  $ds$ , tem-se:

$$ds \cong R d\alpha$$

Portanto:

$$d\Delta l = R d\theta = \frac{R \cdot M_t \cdot R \cdot d\alpha}{G \cdot J_p}$$

mas  $M_t = P \cdot R$ ; então:

$$d\Delta l = \frac{P \cdot R^3}{G \cdot J_p} \cdot d\alpha$$

Finalmente ( $n$  é o número de espiras):

$$\Delta l = \int_0^{2\pi n} \frac{P}{G \cdot J_p} \cdot R^3 d\alpha$$

No caso de  $R$  constante (figura 24):

$$\Delta l = \frac{P R^3}{G \cdot J_p} \cdot 2\pi n$$

Substituindo:  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  vem:

$$\Delta l = \frac{64 \cdot n \cdot P \cdot R^3}{G \cdot d^4} = \frac{8nPD^3}{G \cdot d^4}$$

$$\Delta l = 8n \frac{P}{Gd} \left( \frac{D}{d} \right)^3$$

Vejamos a influência da força cortante. A deformação total produzida pela força cortante  $Q = P$  é:

$$v = \frac{Pl}{GS}$$

mas:  $l = n 2\pi R = n\pi D$

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

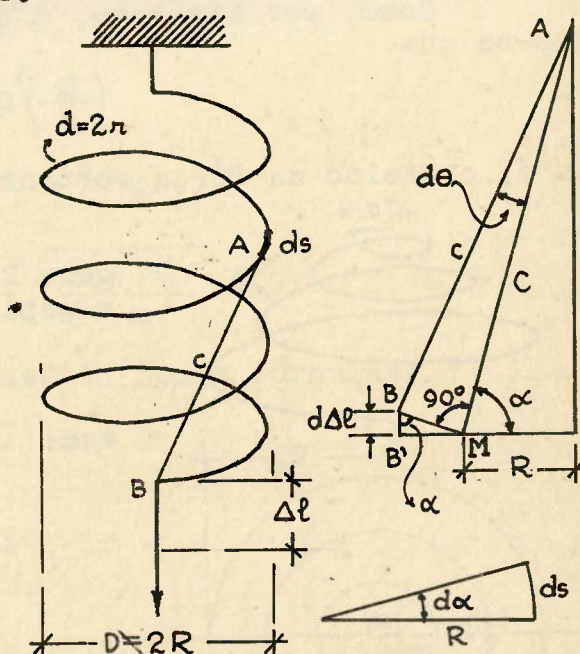


Figura 24



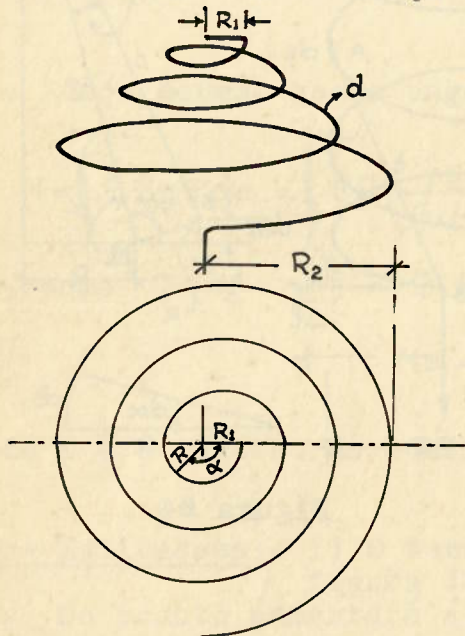
donde:

$$v = \frac{4Pn\pi D}{G\pi d^2} = 8n \frac{P}{Gd} \left( \frac{D}{2d} \right)$$

Como, por hipótese, o diâmetro  $D$  é muito maior que  $d$ , segue-se que

$$\left( \frac{D}{d} \right)^3 \gg \left( \frac{D}{2d} \right)$$

isto é, o efeito da força cortante é desprezível.



No caso da hélice cônica (figura 25), em que a projeção da mola é a espiral:

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1) \cdot \alpha}{2\pi n}$$

vem:

$$\Delta l = \frac{P}{GJ_p} \int_0^{2\pi n} R^3 d\alpha = \frac{32P}{\pi d^4 G} \int_0^{2\pi n} R^3 d\alpha$$

$$\Delta l = \frac{16Pn}{d^4 G} (R_1^2 + R_2^2) (R_1 + R_2)$$

Quando  $R_1 = 0$  resulta ( $D_2 = R_2$ ):

$$\Delta l = \frac{16Pn}{d^4 G} R_2^3 = 2n \frac{P}{Gd} \left( \frac{D_2}{d} \right)^3$$

Figura 25

3) O eixo de transmissão da figura 26 trabalha com 100 rotações por minuto; na polia A são fornecidos 70 H.P.; na polia B são retirados 30 H.P. e na polia C são retirados 40 H.P. Calcular os diâmetros  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente nos trechos AB e BC, com a condição de que a deformação angular, por unidade de comprimento,  $\theta/l$ , seja no máximo  $0,25^\circ/m$ , sem que se ultrapasse a tensão admissível  $\bar{\sigma} = 600 \text{ kg/cm}^2$ . Admitte-se  $G = 1000 \text{ t/cm}^2$ .

O problema se resolve, por tentativas, procurando determinar o diâmetro  $d$  que satisfaz ao mesmo tempo às duas condições:

$$\tau \leq \bar{\tau}$$

$$\frac{\theta}{l} \leq \alpha^\circ/m$$

A primeira condição conduz a ( $M_t$  é o momen

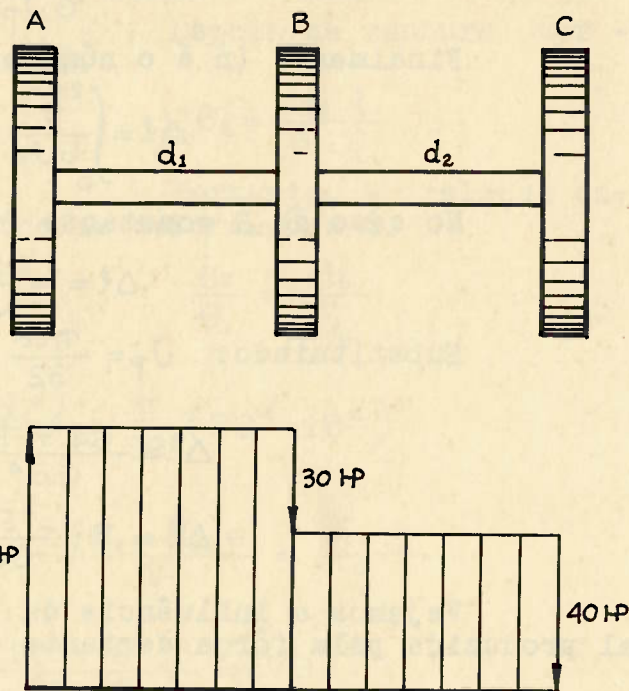


Figura 26



to de torção):

$$\tau = \frac{16 M_t}{\pi d^3} \leq \bar{\tau}$$

isto é:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \bar{\tau}}}$$

A segunda condição conduz a:

$$\frac{\theta}{l} = \frac{32 M_t}{\pi d^4 G} \cdot \frac{180}{\pi} \leq \alpha \% m$$

isto é:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_t}{\pi^3 G \alpha}} = \sqrt[4]{\frac{584 M_t}{\pi^2 G \alpha}}$$

O maior valor de  $d$ , fornecido pelas fórmulas:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \bar{\tau}}}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{584 M_t}{G \alpha}}$$

é, desde que se fixe, também, a condição de construir o eixo de me nor diâmetro possível, a solução procurada.

Aplicamos, então, para resolver o problema proposto, u ma qualquer das fórmulas acima, por exemplo:

$$d = \sqrt[4]{\frac{584 M_t}{G \alpha}}$$

No primeiro trecho tem-se:

$$M_t = 71620 \frac{N}{V} = 716,2 \times 70 \text{ kg} \times \text{cm}$$

donde:

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{584 \times 4 \times M_t}{G}} \cong 6,95 \sqrt[4]{\frac{M_t}{G}}$$

$$d_1 = 6,95 \sqrt[4]{\frac{716,2 \times 70}{1000 \ 000}} \cong 10 \text{ cm}$$

No segundo trecho tem-se:

$$M_t = 716,2 \times 40 \text{ kg} \times \text{cm}$$

donde:

$$d_2 = 6,95 \sqrt[4]{\frac{716,2 \times 40}{1000 \ 000}} \cong 9 \text{ cm}$$

Vejamos se os diâmetros assim calculados satisfazem à con dição:

$$\tau \leq \bar{\tau}$$



No primeiro caso tem-se:

$$\tau = \frac{16 M_t}{\pi d_1^3} = \frac{16 \times 716,2 \times 70}{3,14 \times 1000} = 255,4 < 600 \text{ kg/cm}^2$$

No segundo caso tem-se:

$$\tau = \frac{16 M_t}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \times 716,2 \times 40}{3,14 \times 729} = 200,2 < 600 \text{ kg/cm}^2$$

A solução do problema é, então:

$$d_1 = 10 \text{ cm}$$

$$d_2 = 9 \text{ cm}$$

### C - FLEXÃO NORMAL

15 - Deformação angular: - Consideremos (figura 27) um trecho de barra solicitado por um momento fletor  $M$  e estudemos a deformação que nele se dá. Para isso partiremos da hipótese de que o material obedeça à lei de Hooke e de que as

seções transversais permaneçam planas depois da deformação (hipótese de Navier). Tais suposições levam (no caso de barras retas ou de raio de curvatura grande em relação às dimensões das seções transversais) a admitir a distribuição linear das tensões (hipótese de Bernoulli).

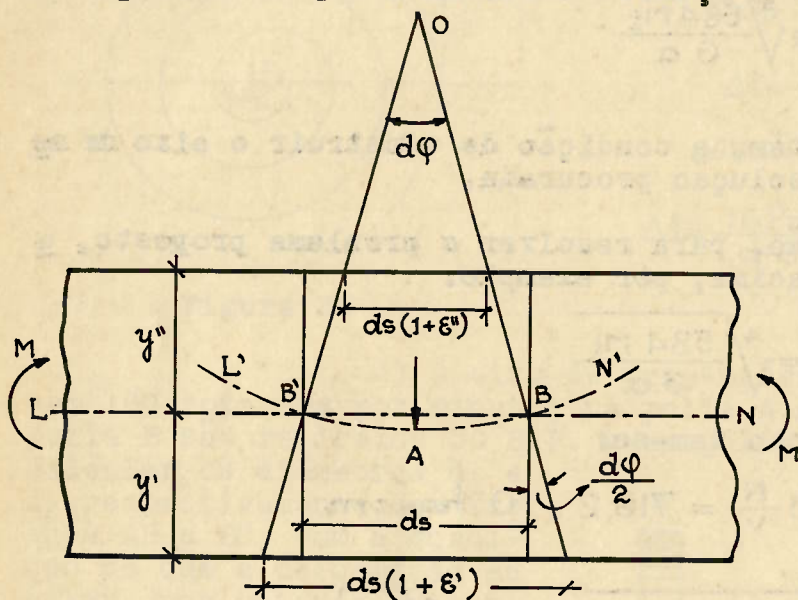


Figura 27

Assim sendo, um elemento da barra, limitado por duas seções transversais afastadas de  $ds$ , sofrerá uma deformação caracterizada pela rotação das referidas seções, em

torno da linha neutra, de modo que as fibras extremas da barra, solicitadas pelas tensões normais de tração e compressão  $\sigma'$  e  $\sigma''$ , alongar-se-ão de um lado e encurtar-se-ão do outro, de modo a ficarem com comprimentos  $ds(1 + \epsilon')$  e  $ds(1 + \epsilon'')$ , onde:

$$\epsilon' = \frac{\sigma'}{E} > 0$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma''}{E} < 0$$

O ângulo  $d\varphi$  ocasionado por essa deformação entre as seções transversais é:

$$d\varphi \cong \tan d\varphi$$

Da figura tem-se:



$$\frac{d\varphi}{2} \approx \operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2} [ds(1+\varepsilon') - ds] \frac{1}{y'} = -\frac{1}{2} [ds(1+\varepsilon'') - ds] \frac{1}{y''}$$

Portanto:

$$d\varphi \approx \operatorname{tg} d\varphi = \frac{\varepsilon'}{y'} ds = -\frac{\varepsilon''}{y''} ds$$

Substituindo:

$$\varepsilon' = \frac{\sigma'}{E} = \frac{M}{EJ} \cdot y'$$

$$-\varepsilon'' = -\frac{\sigma''}{E} = \frac{M}{EJ} \cdot y''$$

tem-se:

$$d\varphi = \frac{M}{EJ} \cdot ds$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ}$$

equação diferencial da deformação angular provocada pelo momento fletor.

16 - Equação da linha elástica: - Por efeito da deformação, o eixo da barra (L.N. na figura 27) passa a ocupar nova posição (L'.N'. na figura 27) no espaço. A curva L'.N' eixo da barra deformada denomina-se "linha elástica".

De acôrdo com o que se apresenta na figura 27, OA é o raio de curvatura da linha elástica no ponto A; além disso, como na linha neutra não aparecem tensões normais devidas à flexão, o arco BB' é:

$$BB' = ds = OA \cdot d\varphi$$

Chamando  $\rho$  o raio de curvatura no ponto A ( $\rho = OA$ ) vem:

$$OA = \rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

Portanto:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ}$$

A expressão do raio de curvatura de uma curva referida a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais é, a menos do sinal:

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

O numerador dessa expressão, no caso de vigas retas (antes da deformação), pode ser admitido como sendo igual à unidade, para a maior parte dos problemas da prática; isto é possível porque, em geral, nas vigas fletidas o valor de  $\frac{dy}{dx}$  é muito menor do que a unidade, e, portanto, pode desprezar-se, sem erro apreciável, o seu quadrado em face da unidade.



Ter-se-á, então, na maioria dos problemas da prática:

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

e, finalmente, a "equação diferencial da linha elástica":

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}$$

Nessa equação  $M$  é o momento fletor na secção de abscissa  $x$  e  $y$  a flecha ou ordenada da linha elástica nessa secção.

O sinal a ser escolhido para o segundo membro da equação diferencial depende da orientação que se fixar inicialmente para os eixos de coordenadas; é o que passamos a discutir.

O "produto de rigidez" da barra, isto é, o produto  $EJ$ , é sempre positivo; o momento fletor  $M$ , no caso de uma viga reta horizontal, é positivo quando produz tração nas fibras inferiores, isto é, quando o centro de curvatura da linha elástica está acima da viga (e negativo em caso contrário).

O sinal de  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  depende, porém, da escolha dos eixos coordenados:  $Ox$  e  $Oy$ .

Considere-se, por exemplo, o caso da figura 28a, de uma viga reta submetida a momento fletor positivo.

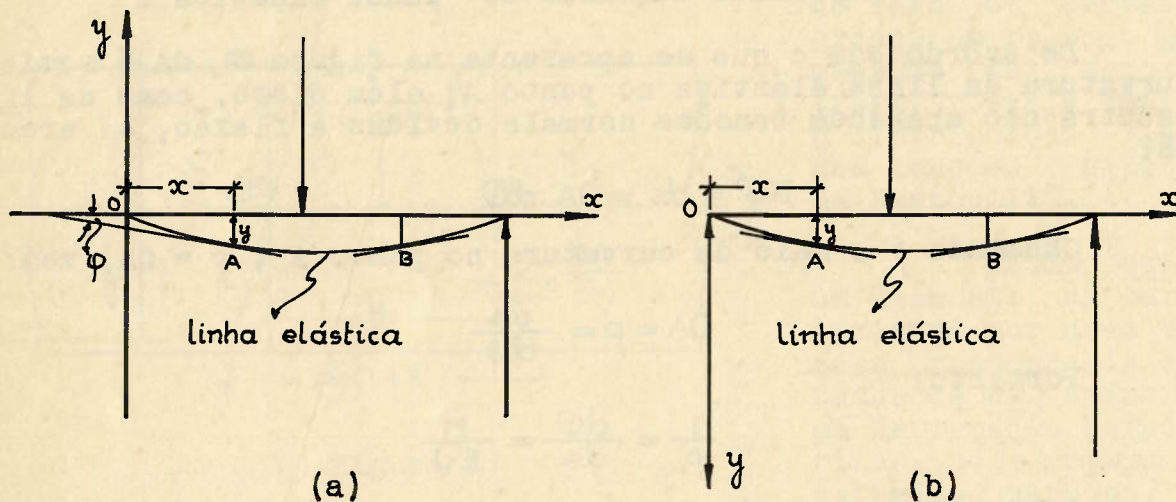


Figura 28

No ponto A (figura 28a) o valor de  $\frac{dy}{dx}$  é negativo, e no ponto B  $\frac{dy}{dx}$  é positivo; portanto, quando  $x$  aumenta  $\frac{dy}{dx}$  aumenta.

Mas:  $\varphi \approx \text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx}$ , portanto, quando  $x$  aumenta  $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EJ}$  (no caso  $ds = dx$ ) é positivo e, desde que, por hipótese,  $\frac{M}{EJ}$  é positivo, a equação a adotar é:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = + \frac{M}{EJ}$$

No caso da figura 28b (onde se considerou o eixo dos  $y$  dirigido para baixo) o valor de  $\varphi$  é positivo no ponto A e diminui quando  $x$  aumenta; portanto, quando  $x$  aumenta  $\frac{d\varphi}{dx}$  é negativo. Como  $\frac{M}{EJ}$  é positivo a equação a adotar é:



$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}$$

A equação diferencial da linha elástica (orientação dos eixos da figura 28b):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}$$

é uma equação linear de segunda ordem, onde o segundo membro só é função de  $x$ . Integrando-se essa equação obtêm-se:

$$\varphi = \int - \frac{M}{EJ} dx + c_1$$

$$y = \int \varphi dx + c_2$$

As duas constantes de integração,  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas pelas condições do problema; os exemplos que seguem esclarecem essa determinação.

Veremos mais tarde que a equação diferencial da linha elástica, a adotar na maioria dos problemas de flexão simples, que se apresentam na prática, é a mesma deduzida neste item para o caso da flexão pura. Isto porque, nesses casos, a influência da força cortante é pequena e pode ser desprezada sem grande erro.

**17 - Exercícios:-** 1º) Determinar a equação da linha elástica, e a rotação  $\varphi$  numa secção qualquer, de abscissa  $x$ , da viga da figura 29 ( $EJ = \text{const.}$ ).

O momento fletor numa secção qualquer, à distância  $x$  do engastamento, é:

$$M = -P(l-x)$$

A equação diferencial da linha elástica toma, então, a forma:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = +P(l-x)$$

Integrando vem:

$$EJ \frac{dy}{dx} = EJ\varphi = P\left(lx - \frac{x^2}{2} + c_1\right)$$

Integrando outra vez:

$$EJy = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2\right)$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas com as condições do problema:

1º) Para  $x = 0$ ,  $y = 0$  logo  $c_2 = 0$

2º) Para  $x = 0$ ,  $\varphi = 0$  logo  $c_1 = 0$

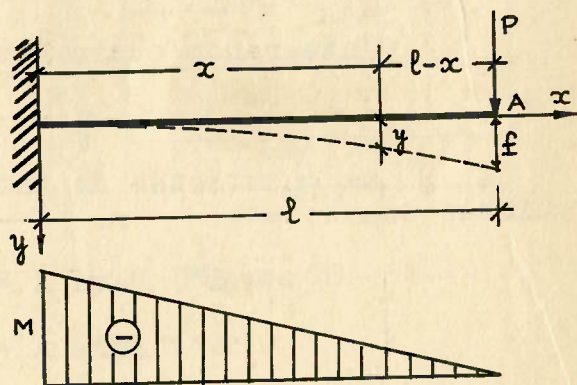


Figura 29



Finalmente:

$$\varphi = \frac{P}{EJ} \cdot \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{Px}{2EJ} \cdot (2l - x)$$

$$y = \frac{P}{EJ} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{Px^2}{6EJ} \cdot (3l - x)$$

Na secção A, de aplicação da carga P, a rotação e a flecha são, respectivamente:

$$\varphi_A = (\varphi)_{x=l} = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

$$f_A = (y)_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

2º) Determinar a equação da linha elástica, e a rotação  $\varphi$  numa secção qualquer de abcissa x, da viga da figura 30 ( $EJ = \text{const.}$ ).

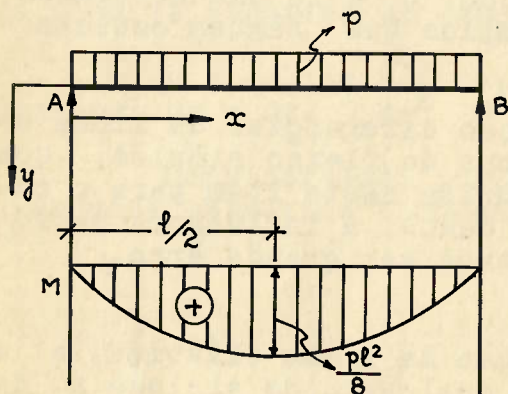


Figura 30

Neste caso o diagrama dos momentos fletores é a parábola:

$$M = \frac{p}{2} x (l - x)$$

A equação diferencial da linha elástica se escreve:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{p}{2} x (l - x)$$

Integrando vem:

$$EJ \frac{dy}{dx} = EJ \varphi = - \frac{p}{2} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c_1 \right)$$

Integrando outra vez:

$$EJ y = - \frac{p}{2} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \right)$$

As constantes de integração são determinadas com as seguintes condições:

1º) Para  $x = 0$ ,  $y = 0$  logo  $c_2 = 0$

2º) Para  $x = l$ ,  $y = 0$

logo:

$$0 = - \frac{p}{2} \left( \frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} + c_1 l \right) = - \frac{p}{2} \left( \frac{l^4}{12} + c_1 l \right)$$

ou:

$$\frac{l^4}{12} + c_1 l = 0$$

$$c_1 = - \frac{l^3}{12}$$



Portanto:

$$\varphi = -\frac{p}{2EJ} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12} \right)$$

ou:

$$\varphi = \frac{p}{24EJ} (l^3 + 4x^3 - 6lx^2)$$

As rotações nas secções de apoio,  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  são:

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{pl^3}{24EJ}$$

A equação da linha elástica é:

$$y = -\frac{p}{2EJ} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3x}{12} \right)$$

ou:

$$y = \frac{p}{24EJ} (l^3x - 2lx^3 + x^4)$$

O valor máximo de  $y$ , se obtém para  $x = \frac{l}{2}$  e é igual a:

$$f = \frac{pl^4}{24EJ} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right)$$

$$f = \frac{5pl^4}{384EJ}$$

3º) Determinar a equação da linha elástica e a rotação  $\varphi$  numa secção qualquer de abscissa  $x$  da viga da figura 31 ( $EJ = \text{const.}$ ).

Neste caso, tem-se  $M = \text{constante}$ , donde:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = \text{const.}$$

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{EJ} (x + c_1)$$

$$y = -\frac{M}{EJ} \left( \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 \right)$$

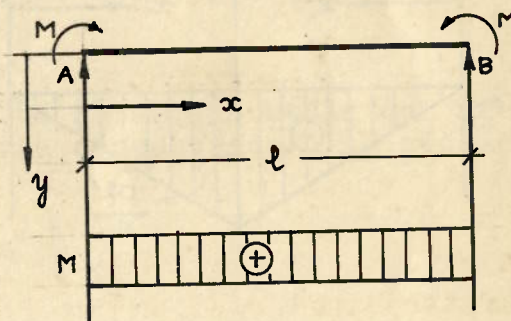


Figura 31

As condições do problema:

$$1^\circ) y = 0 \text{ para } x = 0$$

$$2^\circ) y = 0 \text{ para } x = l$$

conduzem a

$$c_2 = 0$$

$$\frac{l^2}{2} + c_1l = 0$$

isto é:

$$c_1 = -\frac{l}{2}$$



Portanto:

$$\varphi = -\frac{M}{EJ} \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)$$

donde as rotações nos apoios:

$$\varphi_A = -\varphi_B = +\frac{Ml}{2EJ}$$

A equação da linha elástica é:

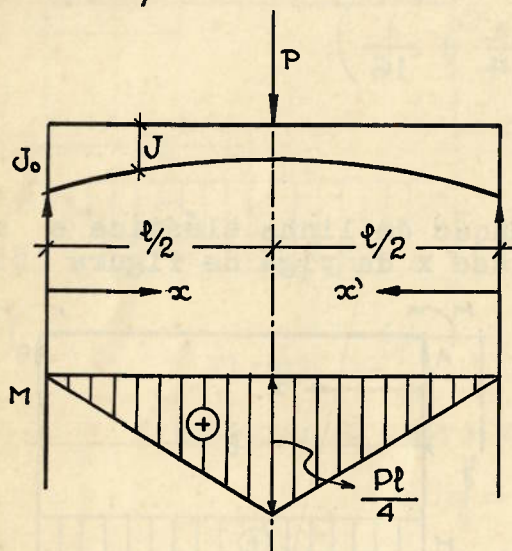
$$y = -\frac{M}{EJ} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l}{2}x\right)$$

$$y = \frac{M}{2EJ} x(l-x)$$

Esta é a equação de uma parábola de flecha:

$$f = \frac{Ml^2}{8EJ} \quad (\text{valor da flecha } y \text{ para } x = \frac{l}{2})$$

4º) Determinar a equação da linha elástica e a rotação  $\varphi$  numa secção qualquer de abcissa  $x$  da viga de momento de inércia variável da figura 32 ( $E = \text{const.}$ ). Admite-se como lei de variação do momento de inércia, a seguinte:



$$J = \frac{J_0}{1 + 2\frac{x}{l}} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$J = \frac{J_0}{1 + 2\frac{x'}{l}} \quad 0 \leq x' \leq \frac{l}{2}$$

A viga é, portanto, simétrica, tendo nos apoios o momento de inércia  $J_0$  e no centro:

$$(J)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{J_0}{2}$$

Figura 32

Como o carregamento também é simétrico, consideremos apenas a equação da linha elástica (que também será simétrica) no trecho  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ . Nesse trecho tem-se:

$$M = \frac{P}{2}x \quad \frac{1}{J} = \frac{1}{J_0} \cdot \left(1 + 2\frac{x}{l}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{Px}{2EJ} = -\frac{P}{2E} \cdot \frac{x}{J_0} \cdot \left(1 + 2\frac{x}{l}\right)$$

ou:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{2EJ_0l} \cdot (l + 2x)x$$

Integrando vem:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2EJ_0l} \cdot \left(\frac{lx^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + c_1\right)$$



Por simetria deve-se ter  $\varphi = 0$  para  $x = \frac{l}{2}$ , donde:

$$\varphi = 0 = -\frac{P}{2EJ_0 l} \left( \frac{l^3}{8} + \frac{2l^3}{24} + c_1 \right)$$

$$c_1 = -\frac{5l^3}{24}$$

Portanto:

$$\varphi = -\frac{P}{2EJ_0 l} \left( \frac{lx^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5l^3}{24} \right)$$

$$\varphi = \frac{P}{48EJ_0 l} (5l^3 - 16x^3 - 12lx^2) = \frac{dy}{dx}$$

Integrando vem:

$$y = \frac{P}{48EJ_0 l} \left( 5l^3 x - 16 \frac{x^4}{4} - 12l \frac{x^3}{3} + c_2 \right)$$

onde  $c_2 = 0$  porque  $y = 0$  para  $x = 0$ .

Portanto:

$$y = \frac{P}{48EJ_0 l} (5l^3 x - 4x^4 - 4lx^3)$$

A flecha máxima se obtém para  $x = \frac{l}{2}$  e é igual a:

$$f = \frac{P}{48EJ_0 l} \left( \frac{5l^4}{2} - \frac{4l^4}{16} - \frac{4l^4}{8} \right)$$

$$f = \frac{7Pl^3}{192EJ_0}$$

5º) Determinar a flecha na secção média de uma viga de  $EJ = \text{const.}$  submetida a uma carga concentrada na secção média (figura 32).

Nesse caso tem-se  $(0 \leq x \leq \frac{l}{2})$ :

$$M = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{Px}{2EJ}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{4EJ} (x^2 + c_1)$$

Por simetria deve-se ter:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{para} \quad x = \frac{l}{2}$$

isto é:

$$-\frac{P}{4EJ} \left( \frac{l^2}{4} + c_1 \right) = 0$$

donde:

$$c_1 = -\frac{l^2}{4}$$



Portanto:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = - \frac{P}{4EJ} \cdot \left( x^2 - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{dy}{dx}$$

Integrando vem:

$$y = - \frac{P}{4EJ} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{l^2}{4} x + c_2 \right)$$

onde  $c_2 = 0$  porque  $y = 0$  para  $x = 0$ .

Finalmente, a equação da linha elástica se escreve:

$$y = \frac{Px}{48EJ} (3l^2 - 4x^2)$$

A flecha na secção média ( $x = \frac{l}{2}$ ) é:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

18 - Influência da força cortante: - Ao deduzirmos a equação da linha elástica das barras retas não levamos em conta o efeito da força cortante. Vejamos que influência tem, na linha elástica, essa força.

No estudo da deformação produzida pela força cortante vimos que o deslocamento vertical  $dv$ , entre duas secções (distantes  $dx$ ) de uma viga horizontal, proveniente da força cortante  $Q$ , é (item 9):

$$dv = \frac{\pi Q}{GS} dx$$

Portanto:

$$\frac{dv}{dx} = \pi \frac{Q}{GS}$$

e se a viga é de secção constante e  $Q(x)$  é função contínua e derivável:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \pi \frac{1}{GS} \cdot \frac{dQ}{dx}$$

Mas:

$$\frac{dQ}{dx} = -p$$

onde  $p$  é a carga distribuída sobre a viga.

Portanto:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{\pi}{GS} p$$

é a equação da linha elástica produzida somente pelas forças cortantes.

Suponhamos, então, que a linha elástica  $v = v(x)$  produzida pelas forças cortantes seja a mesma que se verificaria na viga quando submetida à ação de um momento fletor ideal  $M_Q = f(x)$ .

No caso do momento fletor  $M_Q$ , a linha elástica correspondente é:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = - \frac{M_Q}{EJ}$$



Das igualdades:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M_Q}{EJ} = - \frac{\pi}{GS} \cdot p$$

e:

$$y_1 = v$$

conclui-se que a hipótese formulada é válida desde que se atribua a  $M_Q$  o valor:

$$M_Q = \pi \cdot \frac{J}{S} \cdot \frac{E}{G} \cdot p$$

Nessas condições, a equação diferencial da linha elástica, de uma viga reta submetida ao momento fletor  $M = M(x)$  é a força cortante  $Q$ , cujo efeito (para a determinação da linha elástica) é equivalente ao do momento fletor  $M_Q = f(x)$ , se escreve:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{(M + M_Q)}{EJ}$$

No caso da viga da figura 30, suposta de seção retangular ( $b \times h$ ), a flecha máxima produzida por  $M$  é ( $x = \frac{l}{2}$  na figura 30):

$$f_1 = \frac{5pl^4}{384EJ}$$

O efeito da força cortante se obtém considerando que:

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = bh$$

$$\pi = 1,5$$

Admitindo  $\nu = 0,25$  vem:

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu) = 2,5$$

donde:

$$M_Q = 1,5 \cdot \frac{h^2}{12} \times 2,5 \cdot p = \frac{10}{32} ph^2$$

isto é,  $M_Q$  é constante, pois  $p$  e  $h$  são, por hipótese, constantes.

A flecha máxima produzida por  $M_Q$  se dá, também, para  $x = l/2$  (figura 31) e é igual a:

$$f_2 = \frac{M_Q \cdot l^2}{8EJ}$$

Portanto:

$$f_2 = \frac{10ph^2l^2}{32 \cdot 8EJ}$$

A flecha máxima, devida a  $M$  e a  $M_Q$  é:

$$f = f_1 + f_2 = f_1 \left( 1 + \frac{f_2}{f_1} \right)$$

onde:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{10ph^2l^2}{32 \cdot 8EJ} \cdot \frac{384EJ}{5pl^4} = 3 \left( \frac{h}{l} \right)^2$$

Admitindo-se, por exemplo;

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$$



vem:

$$\frac{f_2}{f_1} = 3(0,1)^2 = 0,003$$

donde:

$$f = 1,003 f_1$$

o que mostra ser pequena a influência da força cortante, de modo a, na maioria dos casos da prática, poder ser desprezada. Exceções a essa afirmativa ocorrem, por exemplo, nos casos de secções transversais de pequena área e elevado momento de inércia - como nas vigas metálicas em duplo T de alma fina e altura grande - pois então o fator  $\frac{\pi J}{S}$  cresce, aumentando o valor de  $M_Q$ .

No exemplo da figura 29, onde a força cortante é constante:

$$Q = P$$

a flecha na extremidade livre, produzida por Q é:

$$f_2 = v = \frac{\pi Q}{G S} l$$

Admitindo que se trate de secção retangular, com:

$$J = \frac{bh^3}{12} \quad S = bh \quad v = 0,25 \quad \pi = 1,5$$

resulta:

$$\frac{E}{G} = 2,5$$

$$f_2 = \frac{1,5 Pl \cdot 2,5}{bhE}$$

A flecha produzida na extremidade livre, pelo momento fletor, é:

$$f_1 = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

Levando em conta os dois efeitos, a flecha total nesse ponto se escreve:

$$f = f_1 \left( 1 + \frac{f_2}{f_1} \right)$$

onde:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1,5 Pl \cdot 2,5 \cdot 3 E b h^3}{b h E P l^3 12} = \frac{15}{16} \left( \frac{h}{l} \right)^2$$

Para  $h = 0,1 l$  vem:

$$f = f_1 \left( 1 + \frac{15}{16} \cdot 0,001 \right)$$

o que mostra ser pequena a influência da força cortante.

19 - Teorema de Mohr:- Confrontando as equações:

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -p$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ}$$



que ligam entre si os esforços agentes numa viga reta:

$M$  = momento fletor

$Q$  = força cortante

$p$  = carga distribuída,

e os deslocamentos correspondentes à flexão:

$y$  = flecha

$\varphi$  = rotação

provenientes do momento fletor  $M$ , na secção de abscissa  $x$ , onde o produto de rigidez é designado por  $EJ$ , conclui-se, por semelhança formal, entre as equações diferenciais dessas funções de  $x$ , haver analogia entre  $M$  e  $y$ ,  $Q$  e  $\varphi$  e entre  $p$  e  $\frac{M}{EJ}$ .

Pode-se dizer, então: se para um determinado sistema de esforços aplicados a uma viga reta, se determina o correspondente diagrama de momentos fletores  $M$  e o valor de  $\frac{M}{EJ}$  em cada secção da viga; se se carrega a mesma viga com o diagrama  $\frac{M}{EJ}$  considerado como carga, o diagrama de momentos fletores,  $M'$ , e o diagrama de forças cortantes,  $Q'$ , correspondentes a êsse mesmo carregamento fictício, permitem determinar, respectivamente, a linha elástica  $y = f(x)$  e o diagrama de rotações  $\varphi = \varphi(x)$ , correspondentes ao carregamento real da viga, com as equações:

$$\begin{aligned} y &= M' + m_1 x + m_2 \\ \varphi &= Q' + m_3 \end{aligned}$$

onde  $m_1$  são constantes, determinadas em cada caso particular pelas condições do problema.

Ter-se-á:

$$m_3 = m_1$$

pois:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{dM'}{dx} + m_1 = Q' + m_3 = Q' + m_1$$

Para exemplificar a determinação de  $y$  e  $\varphi$  a partir do diagrama de  $\frac{M}{EJ}$ , de acordo com o que foi apresentado, considere-se a viga de  $EJ$  constante da figura 33a.

Determinemos, inicialmente, os diagramas de momentos fletores e de forças cortantes correspondentes ao carregamento dado. Tem-se, evidentemente:



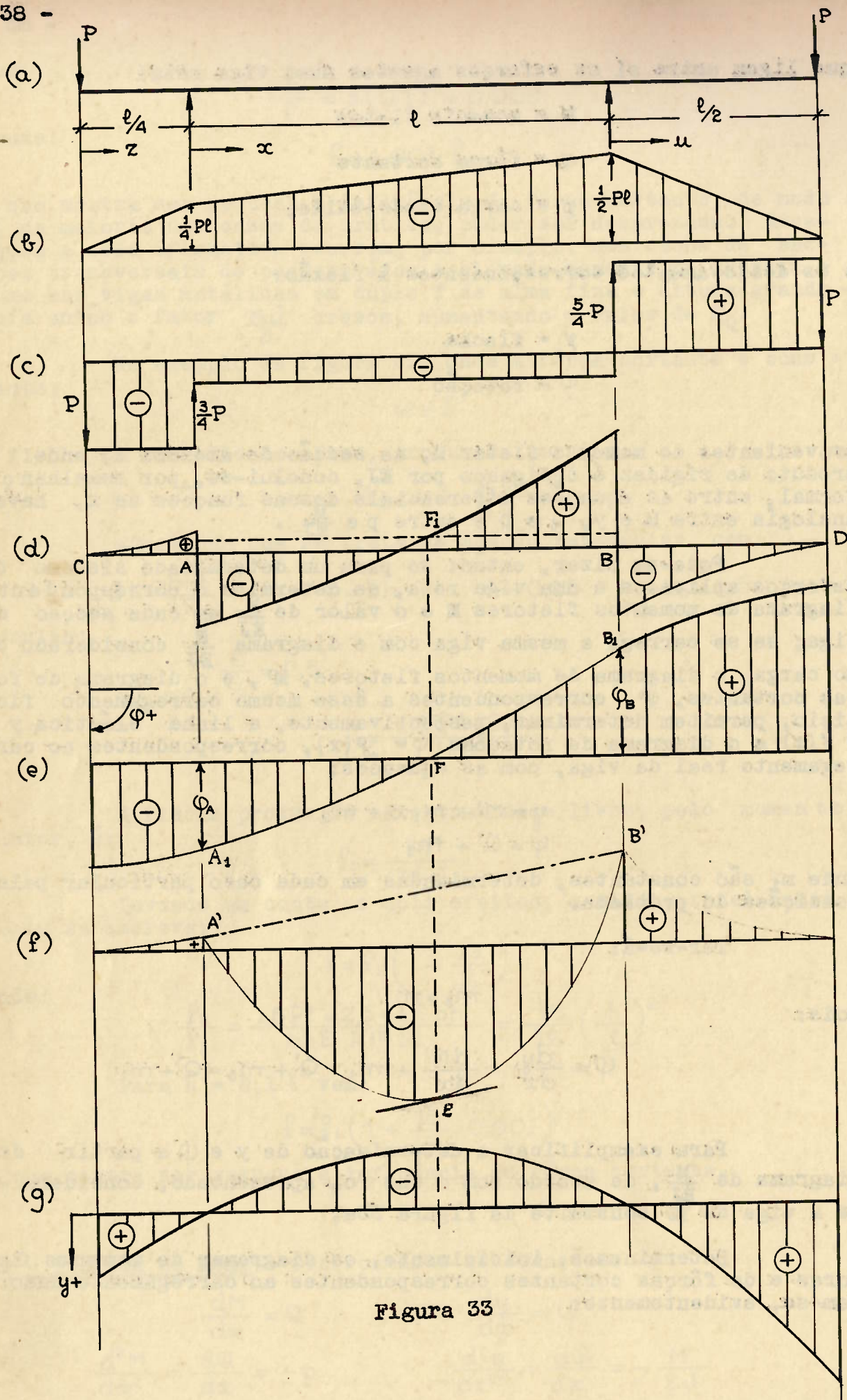


Figura 33



$$\begin{aligned}
 M_z &= -Pz & 0 \leq z \leq \frac{\ell}{4} \\
 M_x &= -\frac{P}{4}(\ell + x) & 0 \leq x \leq \ell \\
 M_u &= -P\left(\frac{\ell}{2} - u\right) & 0 \leq u \leq \frac{\ell}{2} \\
 Q_z &= -P & 0 \leq z \leq \frac{\ell}{4} \\
 Q_x &= -\frac{P}{4} & 0 < x < \ell \\
 Q_u &= +P & 0 < u \leq \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

donde os diagramas correspondentes das figuras 33b e 33c.

Suponhamos, então, que se carregue a viga dada com o diagrama  $\frac{M}{EI}$  considerado como carga aplicada; determinemos os diagramas correspondentes de  $M'$  e  $Q'$ .

Ter-se-á:

$$\begin{aligned}
 Q'_z &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{Pz^2}{2} & 0 \leq z < \frac{\ell}{4} \\
 Q'_x &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{P}{4} \cdot x \left( \ell + \frac{x}{2} \right) - \frac{19Pl^2}{128} \right] & 0 < x < \ell \\
 Q'_u &= \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{P}{2} \left( \frac{\ell}{2} - u \right)^2 \right] & 0 < u \leq \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

donde o diagrama correspondente apresentado na figura 33d.

Para o traçado do diagrama de  $M'$  ter-se-á:

$$\begin{aligned}
 M'_z &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{Pz^3}{6} & 0 \leq z \leq \frac{\ell}{4} \\
 M'_x &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Pl^3}{384} - \frac{19Pl^2}{128} \cdot x + \frac{Px^2}{8} \left( \ell + \frac{x}{3} \right) \right] & 0 \leq x \leq \ell \\
 M'_u &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{P}{6} \left( \frac{\ell}{2} - u \right)^3 & 0 \leq u \leq \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

donde o diagrama correspondente da figura 33f.

Para obter o diagrama das rotações ao longo de toda a viga, e a sua linha elástica, ter-se-á, de acordo com o que se a apresentou inicialmente:

$$\begin{aligned}
 \varphi_z &= \frac{Pz^2}{2EJ} + \frac{c_1}{EJ} & 0 \leq z \leq \frac{\ell}{4} \\
 \varphi_x &= \frac{P}{4EJ} x \left( \ell + \frac{x}{2} \right) - \frac{19Pl^2}{128EJ} + \frac{c_2}{EJ} & 0 \leq x \leq \ell \\
 \varphi_u &= -\frac{P}{2EJ} \left( \frac{\ell}{2} - u \right)^2 + \frac{c_3}{EJ} & 0 \leq u \leq \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$



$$y_z = \frac{Pz^3}{6EJ} + \frac{c_1}{EJ} z + \frac{d_1}{EJ} \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

$$y_x = \frac{Pl^3}{384EJ} + \frac{P}{8EJ} x^2 \left( l + \frac{x}{3} \right) - \frac{19Pl^2}{128EJ} x + \frac{c_2}{EJ} x + \frac{d_2}{EJ} \quad 0 \leq x \leq l$$

$$y_u = \frac{P}{6EJ} \left( \frac{l}{2} - u \right)^3 + \frac{c_3}{EJ} u + \frac{d_3}{EJ} \quad 0 \leq u \leq \frac{l}{2}$$

onde as constantes  $c_1$  e  $d_1$  são determinadas pelas condições do problema como se expõe a seguir.

Para  $x = 0$  deve-se ter  $y_x = 0$ ; logo:

$$d_2 = - \frac{Pl^3}{384}$$

Para  $x = l$  deve-se ter, também,  $y_x = 0$ ; logo:

$$0 = \frac{Pl^2}{8} \left( l + \frac{l}{3} \right) - \frac{19Pl^3}{128} + c_2 l$$

donde:

$$c_2 = - \frac{7Pl^2}{384}$$

As rotações nos apoios A e B se obtêm imediatamente; de fato:

$$\varphi_A = (\varphi_x)_{x=0} = - \frac{19Pl^2}{128EJ} - \frac{7Pl^2}{384EJ} = - \frac{64Pl^2}{384EJ} = - \frac{Pl^2}{6EJ}$$

$$\varphi_B = (\varphi_x)_{x=l} = \frac{3Pl^2}{8EJ} - \frac{19Pl^2}{128EJ} - \frac{7Pl^2}{384EJ} = + \frac{80Pl^2}{384EJ} = + \frac{5Pl^2}{24EJ}$$

Para  $z = \frac{l}{4}$  deve-se ter:

$$(\varphi_z)_{z=\frac{l}{4}} = \varphi_A$$

Portanto:

$$\frac{Pl^2}{32EJ} + \frac{c_1}{EJ} = - \frac{Pl^2}{6EJ}$$

donde:

$$c_1 = - \frac{76Pl^2}{384} = - \frac{19Pl^2}{96}$$

Para  $u = 0$  deve-se ter:

$$(\varphi_u)_{u=0} = \varphi_B$$

Portanto:

$$- \frac{Pl^2}{8EJ} + \frac{c_3}{EJ} = \frac{5Pl^2}{24EJ}$$

donde:

$$c_3 = + \frac{Pl^2}{3}$$



Para  $z = \frac{l}{4}$  deve-se ter  $y_z = 0$ ; logo:

$$0 = \frac{Pl^3}{384} - \frac{19Pl^3}{384} + d_1$$

donde:

$$d_1 = \frac{18Pl^3}{384} = \frac{3Pl^3}{64}$$

Finalmente, para  $\mu = 0$  deve-se ter  $y_\mu = 0$ ; logo:

$$0 = \frac{Pl^3}{48} + d_3$$

donde:

$$d_3 = -\frac{Pl^3}{48}$$

Resumindo, as funções  $\varphi$  e  $y$ , para a viga dada, são:

$$\varphi_z = \frac{Pz^2}{2EJ} - \frac{19Pl^2}{96EJ} \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

$$\varphi_x = \frac{P}{4EJ} \cdot x \left( l + \frac{x}{2} \right) - \frac{19Pl^2}{128EJ} - \frac{7Pl^2}{384EJ} \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\varphi_\mu = -\frac{P}{2EJ} \cdot \left( \frac{l}{2} - \mu \right)^2 + \frac{Pl^2}{3EJ} \quad 0 \leq \mu \leq \frac{l}{2}$$

$$y_z = \frac{Pz^3}{6EJ} - \frac{19Pl^2}{96EJ} \cdot z + \frac{3Pl^3}{64EJ} \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{4}$$

$$y_x = \frac{P}{8EJ} \cdot x^2 \left( l + \frac{x}{3} \right) - \frac{Pl^2}{6EJ} \cdot x \quad 0 \leq x \leq l$$

$$y_\mu = \frac{P}{6EJ} \cdot \left( \frac{l}{2} - \mu \right)^3 + \frac{Pl^2}{3EJ} \cdot \mu - \frac{Pl^3}{48EJ} \quad 0 \leq \mu \leq \frac{l}{2}$$

Essas curvas são apresentadas, respectivamente, nas figuras 33e e 33g.

No caso em questão as funções  $\varphi$  e  $y$  foram determinadas analiticamente. Quando se determinam graficamente os diagramas de  $Q'$  (figura 33d) e de  $M'$  (figura 33f) pode-se obter imediatamente os diagramas de  $\varphi$  e de  $y$ ; basta traçar sobre os diagramas de  $Q'$  e de  $M'$ , respectivamente, retas para as quais esses diagramas se transformem nos de  $\varphi$  e de  $y$ .

Para isso é interessante observar o seguinte: desde que se tenha

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} \quad \varphi = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -p \quad Q = \frac{dM}{dx}$$

nas secções onde  $\varphi = 0$  tem-se um máximo ou um mínimo de  $y$ ; nas secções onde  $M = 0$  e  $\varphi$  é máximo ou mínimo, tem-se um ponto de inflexão na linha elástica; para  $M$  positivo o centro de curvatura da linha elástica está situado acima da viga e para  $M$  negativo o centro de curvatura está situado abaixo da viga.

As retas que permitem transformar os diagramas de  $Q'$  e  $M'$  em diagramas de  $\varphi$  e de  $y$ , podem ser traçadas, com relativa facilidade.



dade em alguns casos, com as considerações acima; isto é vantajoso porque dispensa a determinação analítica das constantes efetuada no exemplo anterior.

Reportando-nos à figura 33, suponhamos que se tenham traçado os diagramas de  $Q'$  (figura 33d) e de  $M'$  (figura 33f); os diagramas de  $y$  e  $\varphi$  (figuras 33e e 33g) obtêm-se imediatamente considerando o seguinte:

- a) As retas que transformam  $Q'$  em  $\varphi$  são horizontais.
- b) A linha elástica tem, no apoio A, uma tangente comum (mesma rotação  $\varphi_A$ ) e analogamente para o apoio B.
- c) As flechas nos apoios são nulas; daí se conclui que a rotação se anula no ponto F pois que a flecha máxima se dá nessa secção (correspondente ao ponto E na figura 33f).

Portanto, no trecho AB o diagrama de  $\varphi$  obtém-se como se apresenta na figura 33: as rotações entre os pontos A e B são as ordenadas do diagrama  $Q'$  contadas a partir da horizontal que passa por  $F_1$  (secção onde  $\varphi = 0$ ); daí o diagrama (curva  $A_1FB_1$ ) da figura 33e. Nos trechos AC e BD os valores de  $\varphi$  se obtêm deslocando as curvas correspondentes a  $Q'$  (nêsses trechos) de modo que não haja descontinuidade nos apoios (onde os valores das rotações são, respectivamente,  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ ).

A linha elástica no trecho AB obtém-se traçando a reta  $A'B'$  (figura 33f) pois que nos apoios as flechas são nulas; as distâncias, medidas na vertical, entre a curva  $A'EB'$  e a reta  $A'B'$  fornecem a linha elástica nêsse trecho (figura 33g desenhada em escala diferente da empregada no diagrama anterior).

Nos trechos CA e BD o diagrama de  $M'$  pode ser transformado em diagrama de  $y$ , gráficamente, impondo-se a condição de que nos apoios A e B a linha elástica tenha uma tangente comum, quer se considere o trecho à esquerda ou o trecho à direita do apoio em questão.

Obter-se-iam, assim, por processo inteiramente gráfico os diagramas das figuras 33e e 33g.

Observe-se, porém, que o processo descrito (quer por via analítica, quer por via gráfica) é relativamente trabalhoso; esta dificuldade é devida à necessidade de determinar as constantes que permitam transformar os diagramas de  $M'$  e  $Q'$ , respectivamente, em diagramas de  $y$  e de  $\varphi$ .

Nas aplicações práticas é, às vezes, mais simples carregar-se com a carga fictícia  $\frac{M}{EJ}$  não a viga em estudo, mas outra viga, que denominaremos "viga auxiliar", cujos diagramas de momentos,  $\bar{M}$ , e de forças cortantes,  $\bar{Q}$ , forneçam imediatamente

$$y = \bar{M}$$

$$\varphi = \bar{Q}$$



onde:  $y$  = linha elástica da viga dada

$\phi$  = rotação na viga dada

$\bar{M}$  = diagrama de momentos, devidos a  $\frac{M}{EJ}$ , na viga auxiliar.

$\bar{Q}$  = diagrama de forças cortantes, devidas a  $\frac{M}{EJ}$ , na viga auxiliar.

Nessas condições, estabeleceremos as seguintes proposições:

- 1) A linha elástica  $y = y(x)$  de uma viga reta coincide com o diagrama de momentos fletores  $\bar{M}$  de uma viga (denominada "viga auxiliar") carregada com a carga fictícia:

$$\bar{p} = \frac{M}{EJ}$$

- 2) O diagrama de rotações  $\phi = \phi(x)$  de uma viga reta coincide com o diagrama de forças cortantes  $\bar{Q}$  de uma viga (denominada "viga auxiliar") carregada com a carga fictícia:

$$\bar{p} = \frac{M}{EJ}$$

Essas duas proposições constituem o chamado "Teorema de Mohr", o qual permite determinar-se, em alguns casos, com relativa facilidade, tanto a linha elástica como o diagrama de rotações de uma viga reta submetida a determinado sistema de esforços.

No item 22 trataremos da determinação da viga auxiliar e exemplificaremos a aplicação do teorema de Mohr.

## 20 - Processos analíticos de integração - A integração da equação diferencial da linha elástica:

lástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}$$

é realizada, nos casos da prática, por diversos processos. A integração analítica, quando a função  $\frac{M}{EJ}$  é uma função facilmente integrável pelos processos usuais de cálculo, pode ser obtida com relativa facilidade, como se apresenta nos exercícios do item 17 e, principalmente, nos dois primeiros exercícios do item 21.

Quando a função  $\frac{M}{EJ}$  é tal que não permite a integração rápida pelos processos usuais em cálculo, pode adotar-se o processo de integração aproximada. Este processo, que a seguir se descreve, pode ser realizado por via inteiramente analítica, com relativa facilidade. Trata-se de um processo geral, aplicável tanto às vigas de momento de inércia constante, como às vigas de momento de inércia variável.

O processo consiste no seguinte: integrando-se a equação diferencial da linha elástica tem-se:



$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \int_0^x -\frac{M}{EJ} dx + \varphi_0$$

onde  $\varphi_0$  é a constante de integração.

Integrando outra vez tem-se:

$$y = \int_0^x dx \int_0^x -\frac{M}{EJ} dx + \varphi_0 x + y_0$$

onde  $y_0$  é a outra constante de integração.

Das fórmulas acima vem:

$$\int_0^x -\frac{M}{EJ} dx = \frac{dy}{dx} - \varphi_0$$

$$\int_0^x dx \int_0^x -\frac{M}{EJ} dx = y - \varphi_0 x - y_0$$

e, como frequentemente o módulo de elasticidade é constante ao longo de toda a viga, tem-se:

$$\int_0^x -\frac{M}{J} dx = E \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_x - \varphi_0 \right]$$

$$\int_0^x dx \int_0^x -\frac{M}{J} dx = E \left[ (y)_x - \varphi_0 x - y_0 \right]$$

As constantes  $\varphi_0$  e  $y_0$  são, respectivamente, a rotação e a flecha na secção de abscissa  $x_0 = 0$  a partir da qual se realiza a integração.

Trata-se, então, de calcular as integrais (funções de  $x$ ) dos primeiros membros das equações acima pelos processos aproximados de integração. Adota-se frequentemente, para o cálculo dessas integrais, a "fórmula dos trapézios".

Supõe-se, evidentemente, conhecida a função

$$\Theta = \Theta(x) = -\frac{M}{J}$$

isto é, a lei de variação do momento de inércia e o diagrama de momentos fletores, da viga em estudo.

Nessas condições, determina-se, de início, para diversas secções, distantes entre si  $\Delta x_i$  (fixados de início), o valor correspondente de  $\Theta = -\frac{M}{J}$  (figura 34).

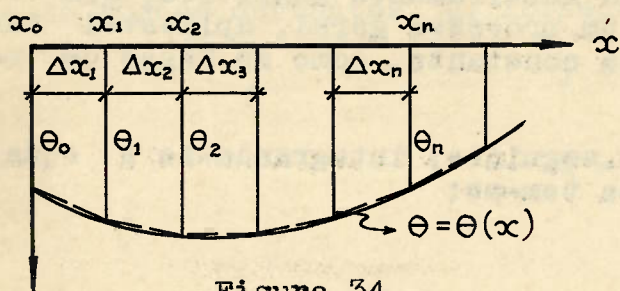


Figura 34

Um valor aproximado da integral:

$$\int_{x_0=0}^x \Theta(x) dx = \int_{x_0=0}^x -\frac{M}{J} dx$$

obtem-se substituindo a curva representativa da função  $\Theta$  pela poligonal indicada em pontilhado na figura 34.



Tem-se então:

$$\int_{x_0=0}^{x=x_n} \theta(x) dx \cong (\theta_0 + \theta_1) \frac{\Delta x_1}{2} + (\theta_1 + \theta_2) \frac{\Delta x_2}{2} + (\theta_2 + \theta_3) \frac{\Delta x_3}{2} + \dots + (\theta_{n-1} + \theta_n) \frac{\Delta x_n}{2}$$

ou, para  $\Delta x_1$  constante:

$$\int_{x_0=0}^{x=x_n} \theta(x) dx \cong \left[ \theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \dots + 2\theta_{n-1} + \theta_n \right] \frac{\Delta x}{2}$$

$$= \left[ \frac{\theta_0}{2} + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_{n-1} + \frac{\theta_n}{2} \right] \Delta x$$

$$= \psi_n \frac{\Delta x}{2}$$

sendo

$$\psi_n = \theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + \dots + 2\theta_{n-1} + \theta_n$$

Isto permite escrever:

$$\psi_n = \left[ \theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + \dots + 2\theta_{n-1} + \theta_n \right] = \frac{2E}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_n} - \varphi_0 \right]$$

desde que se escolha para  $\Delta x$  um valor suficientemente pequeno.

Observe-se que a integral:

$$\int_{x_0=0}^x \theta(x) dx = \psi(x) \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

calculada pelo processo indicado define uma nova função de  $x$ :

$$\psi \times \frac{\Delta x}{2}$$

Aplicando o mesmo processo para a integração de  $\psi(x)$ , ter-se-á:

$$\left[ \psi_0 + 2\psi_1 + 2\psi_2 + \dots + 2\psi_{n-1} + \psi_n \right] = \frac{4E}{\Delta x^2} \left[ (y)_{x=x_n} - \varphi_0 \cdot x_n - y_0 \right]$$

Esta fórmula e a anterior determinam, com relativa facilidade, a equação da linha elástica; as constantes de integração,  $\varphi_0$  e  $y_0$ , são determinadas pelas condições do problema, como se apresenta nos exemplos que daremos a seguir.

É evidente que o processo indicado fornece resultados tanto mais exatos quanto menor o valor atribuído a  $\Delta x$ . Para exemplificar considere-se a viga de  $EJ = \text{const}$  com uma carga concentrada  $P$  à distância  $\frac{l}{2}$  dos apoios (figura 35).

Aplicando-se o processo descrito, para  $\Delta x = 0,25 l$ , os



momentos fletores nos pontos de divisão (indicados na figura 35) são:

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = \frac{P}{2} \Delta x = 0,5 P \Delta x$$

$$M_2 = P \Delta x = 1,0 P \Delta x$$

$$M_3 = M_1 = 0,5 P \Delta x$$

$$M_4 = 0$$

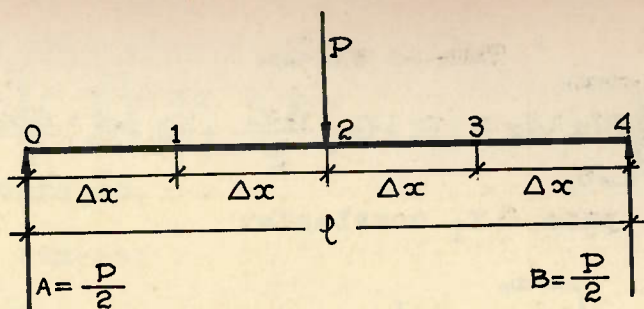


Figura 35

donde:  $\theta_0 = \left( -\frac{M}{J} \right)_{x=0} = 0 = \psi_0$

$$\theta_0 + \theta_1 = -\frac{0,5 P \Delta x}{J} = \psi_1$$

$$\theta_0 + 2\theta_1 + \theta_2 = -\left( 0 + 2 \times 0,5 + 1 \right) \frac{P \Delta x}{J} = -2,0 \frac{P \Delta x}{J} = \psi_2$$

$$\theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 = \psi_2 + \theta_2 + \theta_3 = -(2,0 + 0,5 + 1,0) \frac{P \Delta x}{J} = -3,5 \frac{P \Delta x}{J} = \psi_3$$

$$\theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \theta_4 = \psi_3 + \theta_3 + \theta_4 = -(3,5 + 0,5 + 0) \frac{P \Delta x}{J} = -4,0 \frac{P \Delta x}{J} = \psi_4$$

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_0 + \psi_1 = -(0 + 0,5) \frac{P \Delta x}{J} = -0,5 \frac{P \Delta x}{J}$$

$$\psi_0 + 2\psi_1 + \psi_2 = -(0,5 + 0,5 + 2,0) \frac{P \Delta x}{J} = -3,0 \frac{P \Delta x}{J}$$

$$\psi_0 + 2\psi_1 + 2\psi_2 + \psi_3 = -(3,0 + 2,0 + 3,5) \frac{P \Delta x}{J} = -8,5 \frac{P \Delta x}{J}$$

$$\psi_0 + 2\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3 + \psi_4 = -(8,5 + 3,5 + 4,0) \frac{P \Delta x}{J} = -16,0 \frac{P \Delta x}{J}$$

Na tabela da figura 36 são apresentados os cálculos obtidos.



$x$	$\frac{EJ}{P\Delta x} \left( \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)$	$\frac{EJ2}{P\Delta x^2} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} - \varphi_0 \right)$	$\frac{EJ4}{P\Delta x^3} (y - \varphi_0 x - y_0)$
0 $\Delta x$	0	0	0
1 $\Delta x$	-0,5	-0,5	-0,5
2 $\Delta x$	-1,0	-2,0	-3,0
3 $\Delta x$	-0,5	-3,5	-8,5
4 $\Delta x$	0	-4,0	-16,0

Figura 36

O cálculo da tabela se faz rapidamente pois, para passar de uma coluna para outra, observe-se que:

1º) O primeiro termo é nulo.

2º) O segundo termo é a soma dos dois primeiros da coluna anterior.

3º) Um termo qualquer se obtém somando ao anterior (da mesma coluna) os que lhe são correspondentes na coluna anterior; por exemplo:

$$-8,5 = -3,0 + (-2,0 - 3,5)$$

As constantes de integração se obtêm considerando que:

1º) Para  $x = 0 \times \Delta x = 0$  tem-se  $y = 0$  logo:

$$\frac{EJ4}{P\Delta x^3} (0 - 0 - y_0) = 0$$

donde:  $y_0 = 0$ .

2º) Para  $x = 4 \times \Delta x$  tem-se  $y = 0$  logo:

$$\frac{EJ4}{P\Delta x^3} (-\varphi_0 \cdot 4\Delta x) = -16,0$$

donde:

$$\varphi_0 = \frac{P\Delta x^2}{EJ}$$

Conhecidas as constantes  $y_0$  e  $\varphi_0$ , os valores das duas últimas colunas da tabela da figura 36 determinam as rotações:

$$\varphi \cong \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$



e as flechas  $y$ , para os diversos pontos de divisão considerados.

Assim, para  $x = \Delta x$  vem:

$$\frac{2EJ}{P\Delta x^2}(\varphi_1 - \varphi_0) = -0,5 = \frac{2EJ}{P\Delta x^2}\varphi_1 - \frac{2EJ}{P\Delta x^2} \cdot \frac{P\Delta x^2}{EJ}$$

$$\varphi_1 = \frac{1,5 P\Delta x^2}{EJ} = \frac{1,5 Pl^2}{16 EJ}$$

$$\frac{4EJ}{P\Delta x^3}(y_1 - \varphi_0 \Delta x - y_0) = -0,5$$

$$y_1 - \frac{P\Delta x^3}{EJ} = -\frac{P\Delta x^3}{8EJ}$$

$$y_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{P\Delta x^3}{EJ} = \frac{7Pl^3}{512 EJ}$$

Para  $x = 2 \cdot \Delta x$  vem:

$$\frac{2EJ}{P\Delta x^2}(\varphi_2 - \varphi_0) = -2,0 = \frac{2EJ}{P\Delta x^2}\varphi_2 - \frac{2EJ}{P\Delta x^2} \cdot \frac{P\Delta x^2}{EJ}$$

$$\underline{\varphi_2 = 0}$$

$$\frac{4EJ}{P\Delta x^3}(y_2 - \varphi_0 \cdot 2\Delta x - y_0) = -3,0$$

$$y_2 - \frac{2P\Delta x^3}{EJ} = -\frac{3P\Delta x^3}{4EJ}$$

$$y_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{P\Delta x^3}{EJ} = \frac{5Pl^3}{256 EJ}$$

Tal é o valor da flecha na secção média da viga.

O cálculo exato fornece, para êsse caso:



$$f' = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{5Pl^3}{240EJ}$$

donde:

$$f' = \frac{256}{240} y_2 = 1,07 y_2$$

isto é, o resultado obtido apresenta um erro  $\varepsilon = 7 \%$ .

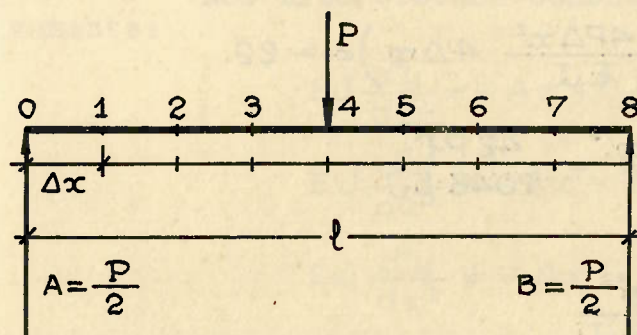


Figura 37

Resolvamos o mesmo problema com  $\Delta x = \frac{1}{8} l$  (figura 37).

Nesse caso:

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 & M_5 &= 1,5 P \Delta x \\ M_1 &= 0,5 P \Delta x & M_6 &= 1,0 P \Delta x \\ M_2 &= 1,0 P \Delta x & M_7 &= 0,5 P \Delta x \\ M_3 &= 1,5 P \Delta x & M_8 &= 0 \\ M_4 &= 2 P \Delta x \end{aligned}$$

Realizados os cálculos que se apresentam na tabela da figura 38 determinemos as constantes de integração.

$x$	$\frac{EJ}{P\Delta x} \left( \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)$	$\frac{EJ2}{P\Delta x^2} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} - \varphi \right)$	$\frac{EJ4}{P\Delta x^3} (y - \varphi x - y_0)$
0 $\Delta x$	0	0	0
1 $\Delta x$	-0,5	-0,5	-0,5
2 $\Delta x$	-1,0	-2,0	-3,0
3 $\Delta x$	-1,5	-4,5	-9,5
4 $\Delta x$	-2,0	-8,0	-22,0
5 $\Delta x$	-1,5	-11,5	-41,5
6 $\Delta x$	-1,0	-14,0	-67,0
7 $\Delta x$	-0,5	-15,5	-96,5
8 $\Delta x$	0	-16,0	-128,0

Figura 38



Nêsse caso tem-se, também,  $y_0 = 0$  e o valor de  $\varphi_0$  se obtém de:

$$\frac{4EJ}{P\Delta x^3}(-\varphi_0 8\Delta x) = -128$$

isto é:

$$\varphi_0 = \frac{128 P\Delta x^2}{32 EJ} = \frac{4P\Delta x^2}{EJ}$$

A flecha  $f$  no meio do vão se obtém de:

$$\frac{4EJ}{P\Delta x^3}\left(f - \frac{4P\Delta x^2}{EJ} \cdot 4\Delta x\right) = -22$$

isto é:

$$f = \frac{42 P\Delta x^3}{4EJ} = \frac{42 Pl^3}{2048 EJ}$$

O valor exato sendo:

$$f' = \frac{42 Pl^3}{2016 EJ}$$

tem-se:

$$f' = \frac{2048}{2016} f = 1,016 f$$

isto é, o êrro cometido foi de 1,6 %.

**21.- Exercícios:-** 1º) Determinar o diagrama das rotações e a linha elástica da viga simples, de  $EJ$  constante, da figura 39.

A reação de apôio A é:

$$A = 1 + 4 \frac{2}{8} = 2t$$

O momento fletor numa secção qualquer C de abscissa  $x$  tal que:

$$6 m \leq x \leq 8 m$$

é:

$$M = Ax - P_1(x-4) - P_2(x-6)$$

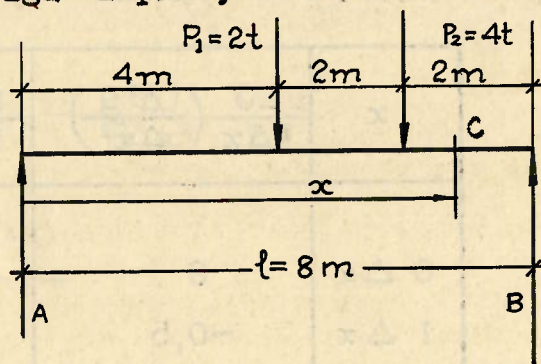


Figura 39

Para o trecho considerado, a equação diferencial da linha elástica se escreve:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Ax + P_1(x-4) + P_2(x-6)$$

Integrando vem:

$$EJ \varphi = EJ \frac{dy}{dx} = -A \frac{x^2}{2} + P_1 \frac{(x-4)^2}{2} + P_2 \frac{(x-6)^2}{2} + C_1$$

Integrando outra vez tem-se:

$$EJ y = -\frac{Ax^3}{6} + \frac{P_1(x-4)^3}{6} + \frac{P_2(x-6)^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Observe-se que a expressão de  $M$ , aplicável ao trecho em que



$$6\text{ m} \leq x \leq 8\text{ m}$$

também é válida para o trecho:

$$4\text{ m} \leq x \leq 6\text{ m}$$

desde que, nessa expressão, se abandone o último termo. Abandonando os dois últimos termos tem-se a expressão de M para:

$$0 \leq x \leq 4\text{ m}$$

Nos três trechos considerados ter-se-á, então, respectivamente:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Ax + P_1(x-4) + P_2(x-6)$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Ax + P_1(x-4)$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Ax$$

Integrando essas equações obtêm-se, respectivamente:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -A \frac{x^2}{2} + P_1 \frac{(x-4)^2}{2} + \frac{P_2(x-6)^2}{2} + C_1$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -A \frac{x^2}{2} + \frac{P_1(x-4)^2}{2} + C'_1$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{Ax^2}{2} + C''_1$$

onde  $C_1$ ,  $C'_1$  e  $C''_1$  são as constantes de integração.

Todavia, para  $x = 6\text{ m}$  as rotações, fornecidas pelas duas primeiras equações acima, devem ser iguais, logo:

$$C_1 = C'_1$$

Para  $x = 4\text{ m}$  as rotações fornecidas pelas duas últimas equações, devem ser iguais, logo:

$$C'_1 = C''_1$$

Podemos, portanto, empregar para qualquer secção da viga, a equação:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{Ax^2}{2} + \frac{P_1(x-4)^2}{2} + \frac{P_2(x-6)^2}{2} + C_1$$

desde que se convençione desprezar:

1) o termo  $\frac{P_2(x-6)^2}{2}$  para  $4\text{ m} \leq x \leq 6\text{ m}$

2) o termo anterior e  $\frac{P_1(x-4)^2}{2}$  para  $0 \leq x \leq 4\text{ m}$

Com convenção análoga à anterior pode dizer-se que é válida, para toda a viga, a equação:

$$EJy = -\frac{Ax^3}{6} + \frac{P_1(x-4)^3}{6} + \frac{P_2(x-6)^3}{6} + C_1x + C_2$$



e o problema se resolve com a determinação de duas constantes apenas ( $C_1$  e  $C_2$ ), em lugar de seis.

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas com as condições do problema:

1°) para  $x = 0$ ,  $y = 0$  logo  $C_2 = 0$

2°) para  $x = l$ ,  $y = 0$  logo:

$$0 = -\frac{Al^3}{6} + \frac{P_1(l-4)^3}{6} + \frac{P_2(l-6)^3}{6} + C_1 l$$

$$C_1 = \frac{1}{6l} [Al^3 - P_1(l-4)^3 - P_2(l-6)^3]$$

Substituindo os valores dados, vem:

$$C_1 = \frac{1}{6 \times 8} (2 \times 8^3 - 2 \times 4^3 - 4 \times 2^3) = 18$$

donde o resultado final:

Para  $0 \leq x \leq 4m$

$$EJ\varphi = -\frac{Ax^2}{2} + C_1 = -x^2 + 18$$

$$EJy = -\frac{Ax^3}{6} + C_1 x = -\frac{1}{3}x^3 + 18x$$

Para  $4m \leq x \leq 6m$

$$EJ\varphi = -x^2 + (x-4)^2 + 18$$

$$EJy = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}(x-4)^3 + 18x$$

Para  $6m \leq x \leq 8m$

$$EJ\varphi = -x^2 + (x-4)^2 + 2(x-6)^2 + 18$$

$$EJy = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}(x-4)^3 + \frac{2}{3}(x-6)^3 + 18x$$

Admitindo que se trate de viga de aço, com:

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$J = 7379 \text{ cm}^4$$

vem:

$$EJ = 15495900 \text{ t} \cdot \text{cm}^2 = 1549,59 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

A flecha no meio da viga ( $x = \frac{l}{2}$ ) se obtém de:

$$f = \frac{1}{EJ} (18x - \frac{1}{3}x^3) = \frac{1}{1549,59} (18 \times 4 - \frac{1}{3}4^3) \text{ m}$$

isto é:

$$f = \frac{100 \times 50,7}{1549,59} = 3,3 \text{ cm}$$



Se a viga estivesse submetida apenas à força  $P_1$ , teria-  
mos:

$$C_1 = \frac{1}{6\ell} \left[ \frac{P_1 \ell^3}{2} - P_1 \left( \ell - \frac{\ell}{2} \right)^3 \right]$$

$$C_1 = \frac{3 P_1 \ell^2}{48}$$

A flecha no meio da viga ( $x = \frac{\ell}{2}$ ) seria:

$$f = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{P_1}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{3 P_1 \ell^2}{48} x \right]$$

$$f = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3 P_1 \ell^3}{2 \times 48} - \frac{P_1 \ell^3}{2 \times 48} \right] = \frac{P_1 \ell^3}{48 EJ} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$f = \frac{P_1 \ell^3}{48 EJ}$$

e a equação da linha elástica ( $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$ ):

$$y = \frac{1}{EJ} \left[ C_1 x - \frac{A x^3}{6} \right] = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3 P_1 \ell^2}{48} x - \frac{P_1 x^3}{2 \times 6} \right]$$

$$y = \frac{P_1 x}{48 EJ} (3 \ell^2 - 4 x^2)$$

2º) Determinar a linha elástica da viga de  $EJ$  constante da figura 40.

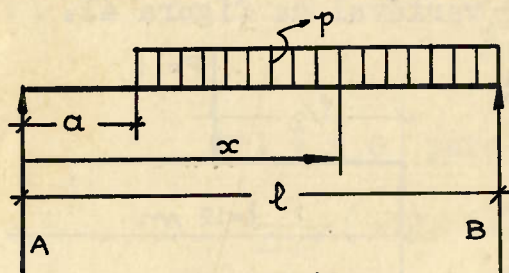


Figura 40

O momento fletor numa  
secção qualquer de abscissa  $x \geq a$  é:

$$M = Ax - \frac{p(x-a)^2}{2}$$

Essa expressão é váli-  
da para  $x < a$  desde que se conven-  
cione, nesse caso, desprezar o se-  
gundo termo. Integrando a equação:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EJ} \left[ Ax - \frac{p(x-a)^2}{2} \right]$$

vem:

$$EJ y = -\frac{Ax^2}{2} + \frac{p(x-a)^3}{6} + C_1$$

Integrando de novo tem-se:

$$EJ y = -\frac{Ax^3}{6} + \frac{p(x-a)^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Essas equações são válidas para qualquer valor de  $x$ , des-  
de que para  $x \leq a$  se desprezem os termos:

$$\frac{p(x-a)^3}{6} \quad \text{e} \quad \frac{p(x-a)^4}{24}$$

As constantes de integração se determinam com as condi-  
ções:



1)  $y = 0$  para  $x = 0$  logo  $C_2 = 0$

2)  $y = 0$  para  $x = l$  logo:

$$-\frac{Al^3}{6} + \frac{p(l-a)^4}{24} + C_1 l = 0$$

$$C_1 = \frac{Al^2}{6} - \frac{p(l-a)^4}{24l}$$

Finalmente:

$a \leq x \leq l$

$$EJ\varphi = -\frac{Ax^2}{2} + \frac{p(x-a)^3}{6} + \frac{Al^2}{6} - \frac{p(l-a)^4}{24l}$$

$$EJy = -\frac{Ax^3}{6} + \frac{p(x-a)^4}{24} + \left[ \frac{Al^2}{6} - \frac{p(l-a)^4}{24l} \right] x$$

$0 \leq x \leq a$

$$EJ\varphi = -\frac{Ax^2}{2} + \frac{Al^2}{6} - \frac{p(l-a)^4}{24l}$$

$$EJy = -\frac{Ax^3}{6} + \left[ \frac{Al^2}{6} - \frac{p(l-a)^4}{24l} \right] x$$

3º) Determinar a linha elástica, pelo processo de integração aproximada, da viga de  $J$  variável da figura 41.

Admite-se que a lei de variação do momento de inércia seja:

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_0} \left( 1 + 2 \frac{x}{l} \right) \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

onde  $J_0 = 0,0002 \text{ m}^4$ . O módulo de elasticidade é constante e igual a  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ .

Tem-se, então:

$$\frac{1}{EJ} = \frac{1}{3EJ_0} \cdot 3 \left( 1 + 2 \cdot \frac{x}{l} \right)$$

Admitindo  $\Delta x = 2\text{m}$  tem-se ( $l = 6 \Delta x$ ):

$$x_0 = 0 \cdot \Delta x$$

$$M_0 = 0$$

$$x_1 = 1 \cdot \Delta x$$

$$M_1 = 1 \text{ t} \times \text{m}$$

$$x_2 = 2 \cdot \Delta x$$

$$M_2 = 2 \text{ t} \times \text{m}$$

$$x_3 = 3 \Delta x$$

$$M_3 = 3 \text{ t} \times \text{m}$$

$$x_4 = 4 \Delta x$$

$$M_4 = 2 \text{ t} \times \text{m}$$

$$x_5 = 5 \Delta x$$

$$M_5 = 1 \text{ t} \times \text{m}$$

$$x_6 = 6 \Delta x$$

$$M_6 = 0$$

$$\frac{1}{EJ} = 3 \cdot \frac{1}{3EJ_0}$$

$$\frac{1}{EJ} = 4 \cdot \frac{1}{3EJ_0}$$

$$\frac{1}{EJ} = 5 \cdot \frac{1}{3EJ_0}$$

$$\frac{1}{EJ} = 6 \cdot \frac{1}{3EJ_0}$$

$$\frac{1}{EJ} = 5 \cdot \frac{1}{3EJ_0}$$

$$\frac{1}{EJ} = 4 \cdot \frac{1}{3EJ_0}$$

$$\frac{1}{EJ} = 3 \cdot \frac{1}{3EJ_0}$$

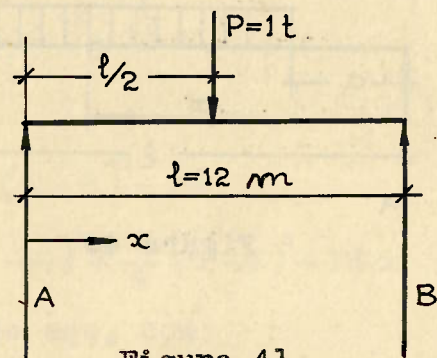


Figura 41



Com êsses dados calculam-se, imediatamente, os valores da tabela da figura 42, onde, para simplificar, fizemos  $a = \frac{1}{3EJ_0}$

$x$ (m)	M (t×m)	$\frac{1}{EJ}$	$-\frac{M}{EJ}$	$\frac{2}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} - \varphi_0 \right)$	$\frac{4}{\Delta x^2} (y - \varphi_0 x - y_0)$
0	0	3 a	0	0	0
2	1	4 a	-4 a	-4 a	-4 a
4	2	5 a	-10 a	-18 a	-26 a
6	3	6 a	-18 a	-46 a	-90 a
8	2	5 a	-10 a	-74 a	-210 a
10	1	4 a	-4 a	-88 a	-372 a
12	0	3 a	0	-92 a	-552 a

Figura 42

As condições do problema fixam:

1º)  $y = 0$  para  $x = 0$  donde:

$$\frac{4}{\Delta x^2} (-y_0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

2º)  $y = 0$  para  $x = l = 6 \cdot \Delta x$ , donde:

$$\frac{4}{\Delta x^2} (-\varphi_0 \cdot 6 \Delta x) = -552 a$$

$$\varphi_0 = \frac{552 a \Delta x}{24} = 23 a \Delta x$$

Calculadas as constantes  $y_0$  e  $\varphi_0$ , os valores das duas últimas colunas determinam, imediatamente, a rotação  $\varphi \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$  e a flecha  $y$ .

Assim, para  $x = \frac{l}{2} = 3 \Delta x = 6m$  tem-se:

$$\frac{2}{\Delta x} (\varphi - \varphi_0) = -46 a$$

$$\varphi = \varphi_0 - 23 a \Delta x = 0$$

e a flecha ( $y = f$ ):

$$\frac{4}{\Delta x^2} (f - \varphi_0 \cdot 3 \Delta x) = -90 a$$

$$f - \varphi_0 \cdot 3 \Delta x = -\frac{90 a \Delta x^2}{4}$$



$$f = \varphi_0 \cdot 3\Delta x - \frac{90\alpha \Delta x^2}{4} = 69\alpha \Delta x^2 - 22,5\alpha \Delta x^2$$

$$f = 46,5\alpha \Delta x^2$$

Aplicando os dados do problema, vem:

$$f = 46,5\alpha \Delta x^2 = 46,5 \frac{1}{3EJ_0} \cdot 4$$

$$f = \frac{46,5 \times 4}{3 \times 21 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-4}} \text{ m} = 1,48 \text{ cm}$$

O valor exato, calculado como se apresenta no quarto exercício do item 17 é:

$$f = \frac{7Pl^3}{192EJ_0} = \frac{7 \times 1 \times 12 \times 144}{192 \times 21 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-4}} \text{ m} = 1,50 \text{ cm}$$

22.- Processo da "viga auxiliar":- Ainda para a determinação analítica da linha elástica e, mais particularmente, nos problemas em que interessa determinar apenas alguns valores da flecha, ou da rotação, pode-se recorrer ao teorema de Mohr segundo o qual é suficiente, para determinar  $\varphi$  e  $y$ , calcular-se a força cortante  $Q$  e o momento fletor  $M$  de uma "viga auxiliar" carregada com  $\bar{p} = \frac{M}{EJ}$ .

Desde que a rotação  $\varphi$  e a flecha  $y$  na viga em estudo (em que numa secção qualquer de produto de rigidez  $EJ$ , o momento fletor produzido pelas cargas é  $M$ ) correspondem, respectivamente, à força cortante  $Q$  e ao momento fletor  $M$  na viga-auxiliar, isto é:

$$\varphi = \bar{Q}$$

$$y = \bar{M}$$

as condições de apoio da viga-auxiliar são fixadas pelas condições que o problema, a ser resolvido, exige para  $\varphi$  e  $y$ .

Assim, por exemplo, se a viga dada fôr simplesmente apoiada ou engastada (em uma ou nas duas extremidades) de tal forma que se deva ter nos apoios (A e B):

$$y_A = y_B = 0$$

isto é, flechas nulas nos apoios, deve-se ter na viga auxiliar, também:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_B = 0$$

donde se conclui que se pode tomar como viga-auxiliar uma viga simples sobre dois apoios.

Se a viga dada é uma viga em balanço (figura 42a), livre em A e engastada em B, deve-se ter:

$$y_B = \varphi_B = 0$$

Na viga-auxiliar deve-se ter, então:

$$\bar{M}_B = \bar{Q}_B = 0$$



Dai se conclui que a viga-auxiliar deve ser livre em B e engastada em A (figura 42b).

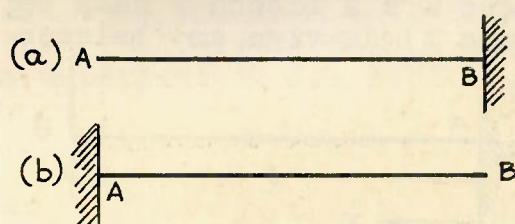


Figura 42

No caso de uma viga simples com balanços (figura 43a) deve-se ter:

$$y_B = y_C = 0$$

Portanto, na viga-auxiliar:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_C = 0$$

sendo, no caso geral:

$$\bar{Q}_B \neq 0 \quad \text{porque} \quad \varphi_B \neq 0$$

$$\bar{Q}_C \neq 0 \quad \text{porque} \quad \varphi_C \neq 0$$

Dai se conclui que na viga auxiliar os pontos B e C são duas articulações (nessas secções o momento é necessariamente nulo sem que se anule necessariamente a força cortante).

Além disso, tanto em A como em D, deve-se ter, no caso mais geral:

$$y_A = \bar{M}_A \neq 0$$

$$y_D = \bar{M}_D \neq 0$$

$$\varphi_A = \bar{Q}_A \neq 0$$

$$\varphi_D = \bar{Q}_D \neq 0$$

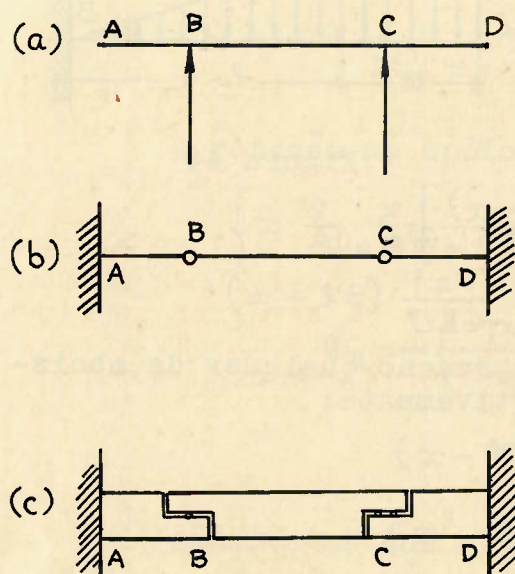


Figura 43

isto é, os pontos A e D da viga-auxiliar são engastados (figura 43b).

A viga-auxiliar da viga da figura 43a é a que se apresenta esquematicamente na figura 43b; trata-se de uma estrutura i sostática porque pode ser resolvida unicamente com as equações da estática. A esse tipo particular de viga, sobre dois ou mais apoios, com articulações, dá-se o nome de "Viga-Gerber".

A viga da figura 43b é, na realidade, um conjunto de três vigas:

a) viga em balanço AB

b) viga simples BC

c) viga em balanço CD

dispostas como se apresenta na figura 43c. A determinação dos esforços solicitantes (momentos fletores, forças cortantes, reações



de apoio) pode ser obtida facilmente como se verá no terceiro exercício do item 23.

**23 - Exercícios:-** 1º) Determinar a rotação  $\varphi$  e a flecha  $y$  numa secção qualquer (de abscissa  $x$ ) da viga em balanço da figura 44a ( $EJ = \text{const.}$ ).

Carregando-se a viga auxiliar (figura 44b) com a carga fictícia:

$$\bar{p} = \frac{M}{EJ} = - \frac{P(\ell - x)}{EJ}$$

o diagrama de forças cortantes é:

$$\bar{Q} = - \left[ - \frac{P\ell}{EJ} - \frac{P(\ell - x)}{EJ} \right] \frac{x}{2}$$

$$\bar{Q} = \frac{Px}{2EJ} (2\ell - x)$$

e o diagrama de momentos fletores é:

$$\bar{M} = - \left\{ \frac{-P(\ell - x)}{EJ} \cdot \frac{x^2}{2} + \left[ \frac{-P\ell}{EJ} - \frac{-P(\ell - x)}{EJ} \right] \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x \right\}$$

$$\bar{M} = \frac{Px^2}{6EJ} [3(\ell - x) + 2x] = \frac{Px^2}{6EJ} (3\ell - x)$$

A rotação  $\varphi$  e a flecha  $y$  numa secção qualquer de abscissa  $x$ , da viga da figura 44a, são respectivamente:

$$\varphi = \bar{Q} = \frac{Px}{2EJ} (2\ell - x)$$

$$y = \bar{M} = \frac{Px^2}{6EJ} (3\ell - x)$$

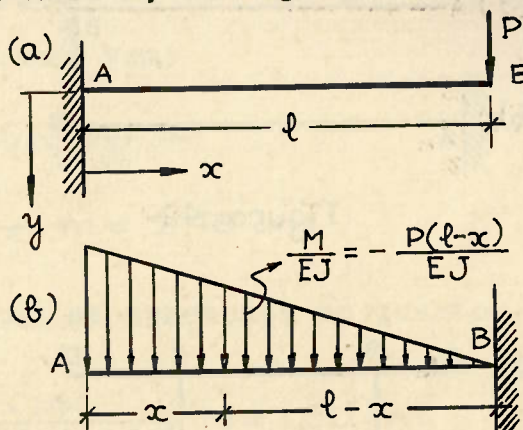


Figura 44

2º) Determinar o momento fletor  $M_{AB}$ , que se deve aplicar no apoio A da viga prismática da figura 45, afim de que resulte nula a rotação na secção do apoio A. Calcular, também, a rotação  $\varphi_B$  no apoio B.

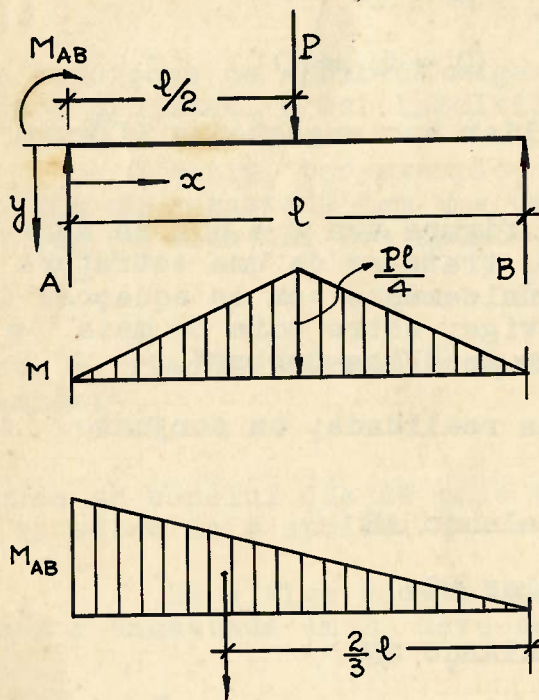


Figura 45

Calculemos, de início, as rotações  $\Theta_A$  e  $\Theta_B$  produzidas pela carga  $P$ , respectivamente, nos apoios A e B.

De acordo com o teorema de Mohr tem-se, devido à simetria:

$$\Theta_A = -\Theta_B = \frac{P\ell}{4EJ} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Theta_A = -\Theta_B = \frac{P\ell^2}{16EJ}$$

Ainda de acordo com o teorema de Mohr, as rotações  $\Theta'_A$  e  $\Theta'_B$  devidas ao momento  $M_{AB}$  são:

$$\Theta'_A = \frac{M_{AB}}{EJ} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} = M_{AB} \frac{\ell}{3EJ}$$



$$\Theta'_B = - \frac{M_{AB}}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} = - M_{AB} \frac{l}{6EJ}$$

O valor de  $M_{AB}$  que anula a rotação  $\Theta_A$  é, pelo princípio da superposição dos efeitos, a solução de:

$$\Theta_A + \Theta'_A = 0$$

ou:

$$\frac{Pl^2}{16EJ} + \frac{M_{AB}l}{3EJ} = 0$$

Finalmente:

$$M_{AB} = - \frac{3Pl}{16} = - \frac{3}{4} \cdot \frac{Pl}{4}$$

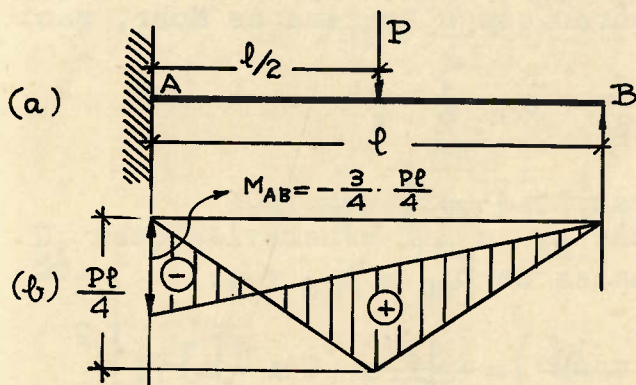
A rotação no apoio B é:

$$\varphi_B = \Theta_B + \Theta'_B = - \left( \frac{Pl^2}{16EJ} + \frac{M_{AB} \cdot l}{6EJ} \right)$$

$$\varphi_B = - \left( \frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{3Pl^2}{16 \cdot 6EJ} \right) = - \frac{Pl^2}{32EJ}$$

$$-\varphi_B = \frac{Pl^2}{32EJ}$$

Observe-se que o problema resolvido corresponde exatamente à determinação do momento de engastamento e da rotação em B da viga prismática da figura 46a.



De acordo com a solução apresentada, o diagrama de momentos fletores dessa viga hiperestática é o que se apresenta na figura 46b.

Figura 46

3º) Determinar as rotações nos apoios e nas extremidades livres, assim como as flechas nos pontos de aplicação das cargas P, na viga prismática da figura 47a.

Na figura 47b é apresentado o diagrama de momentos fletores da viga da figura 47a. Na figura 47c é apresentada a viga auxiliar da viga dada.

Consideremos, inicialmente, o trecho BC da viga-auxiliar e carreguemo-lo com a carga correspondente:



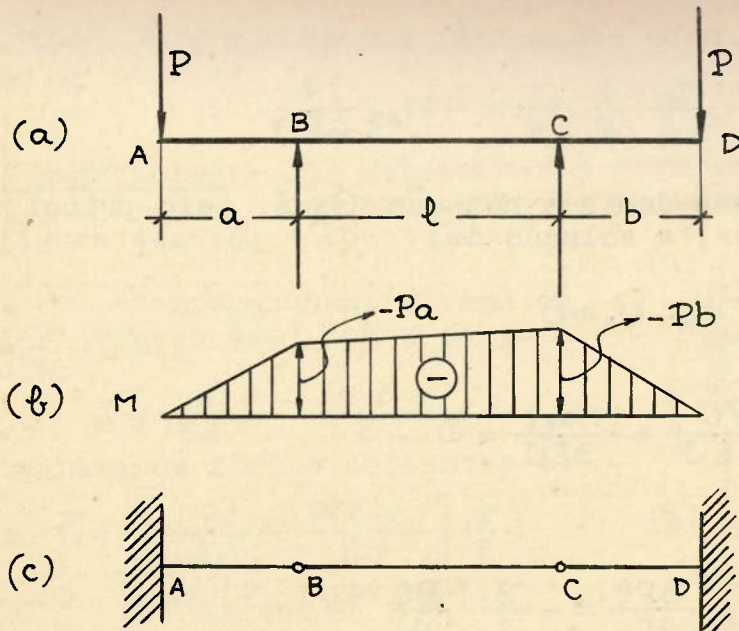


Figura 47

$$\bar{p} = \frac{M}{EJ}$$

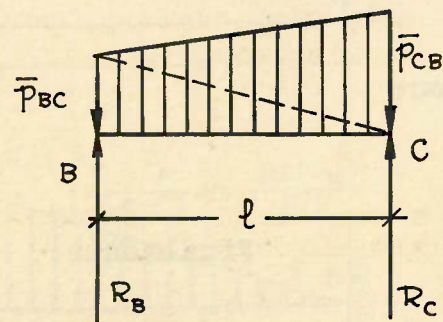


Figura 48

Ter-se-á a viga representada na figura 48, com carga distribuída, sendo:

$$\bar{p}_{BC} = -Pa \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\bar{p}_{CB} = -Pb \cdot \frac{1}{EJ}$$

As rotações nos apoios,  $\varphi_B$  e  $\varphi_C$  (respectivamente em B e C na viga da figura 47a) de acordo com o teorema de Mohr, são:

$$\varphi_B = \bar{Q}_B = \bar{p}_{BC} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} + \bar{p}_{CB} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\varphi_C = \bar{Q}_C = -\bar{p}_{BC} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} - \bar{p}_{CB} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

Substituindo as expressões de  $\bar{p}_{BC}$  e  $\bar{p}_{CB}$  vem:

$$\varphi_B = -\frac{P}{EJ} \left( \frac{2al}{6} + \frac{bl}{6} \right) = -\frac{Pl}{6EJ} (2a + b)$$

$$\varphi_C = +\frac{P}{EJ} \left( \frac{al}{6} + \frac{2bl}{6} \right) = +\frac{Pl}{6EJ} (a + 2b)$$

Na viga da figura 48 as reações de apoio são:

$$R_B = \bar{Q}_B = \varphi_B = -\frac{Pl}{6EJ} (2a + b)$$

$$R_C = -\bar{Q}_C = -\varphi_C = -\frac{Pl}{6EJ} (2b + a)$$

Para determinar a rotação  $\varphi_A$  e a flecha  $y_A$  na extremidade livre A da viga da figura 47a consideremos o trecho AB da viga auxiliar e carreguemo-lo com a carga correspondente:



$$\bar{p} = \frac{M}{EJ}$$

Observe-se que o carregamento a ser considerado é o que se indica na figura 49 porque a parte central (viga BC) apoia-se livremente em B e em C (figura 47c); tem-se, portanto, uma carga distribuída variando triangularmente de zero até:

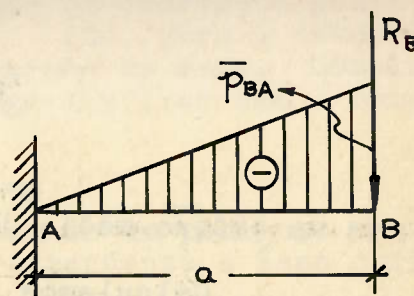


Figura 49

$$\bar{p}_{BA} = \bar{p}_{BC}$$

e uma carga concentrada  $R_B$  aplicada na extremidade livre.

De acordo com o teorema de Mohr tem-se:

$$\varphi_A = \bar{Q}_A = R_B + \bar{p}_{BA} \cdot \frac{a}{2}$$

$$y_A = \bar{M}_A = -R_B \cdot a - \bar{p}_{BA} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a$$

Substituindo os valores já determinados vem:

$$\varphi_A = -\frac{Pl}{6EJ} (2a + b) - \frac{Pa}{EJ} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{3}$$

$$\varphi_A = -\frac{P}{6EJ} [a(2l + 3a) + bl]$$

$$y_A = \frac{Pal}{6EJ} (2a + b) + \frac{Pa}{6EJ} \cdot 2a^2$$

$$y_A = \frac{Pa}{6EJ} [2a(a + l) + bl]$$

Analogamente, para determinar a rotação e a flecha em D, respectivamente  $\varphi_D$  e  $y_D$  basta considerar-se a viga da figura 50.

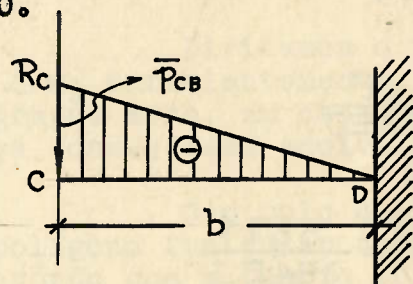


Figura 50

De acordo com o teorema de Mohr tem-se:

$$\varphi_D = \bar{Q}_D = -R_C - \bar{p}_{CB} \cdot \frac{b}{2}$$

$$y_D = \bar{M}_D = -R_C b - \bar{p}_{CB} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} b$$

Substituindo os valores já determinados vem:

$$\varphi_D = \frac{Pl}{6EJ} (2b + a) + \frac{Pb}{EJ} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{3}{3}$$

$$\varphi_D = +\frac{P}{6EJ} [b(2l + 3b) + al]$$



$$y_D = \frac{Pb\ell}{6EJ} \cdot (2b+a) + \frac{Pb}{6EJ} \cdot 2b^2$$

$$y_D = \frac{Pb}{6EJ} \left[ 2b(b+\ell) + a\ell \right]$$

4º) Determinar as rotações nos apoios e a flecha na secção média da viga de  $EJ$  const da figura 51a.

Calculemos separadamente os deslocamentos produzidos pela carga  $P$  e pela carga distribuída  $q$ .

Considerando só o efeito de  $P$  as rotações nos apoios são:

$$\theta_A = -\theta_B = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{P\ell}{4} \cdot \frac{\ell}{4} = \frac{P\ell^2}{16EJ}$$

e a flecha no ponto de aplicação de  $P$ :

$$f_P = \frac{F_1}{EJ} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{F_1}{EJ} \cdot \frac{\ell}{6}$$

onde  $F_1$  é a área hachurada na figura 51b.

Substituindo:

$$F_1 = \frac{P\ell^2}{16}$$

vem:

$$f_P = \frac{P\ell^2}{16EJ} \cdot \left( \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{6} \right) = \frac{P\ell^3}{48EJ}$$

Considerando só o efeito da carga uniformemente distribuída  $q$  à qual corresponde o diagrama de momentos fletores da figura 51c onde:

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} h\ell \right) = \frac{q\ell^3}{24}$$

as rotações nos apoios são:

$$\theta'_A = -\theta'_B = \frac{F_2}{EJ} = \frac{q\ell^3}{24EJ}$$

e a flecha no ponto de aplicação de  $P$  é:

$$f_q = \frac{q\ell^3}{24EJ} \cdot \left( \frac{\ell}{2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{\ell}{2} \right) = \frac{5q\ell^4}{384EJ}$$

Finalmente:

$$\varphi_A = -\varphi_B = \theta_A + \theta'_A = \frac{P\ell^2}{16EJ} + \frac{q\ell^3}{24EJ}$$

$$f = f_P + f_q = \frac{P\ell^3}{48EJ} + \frac{5q\ell^4}{384EJ}$$

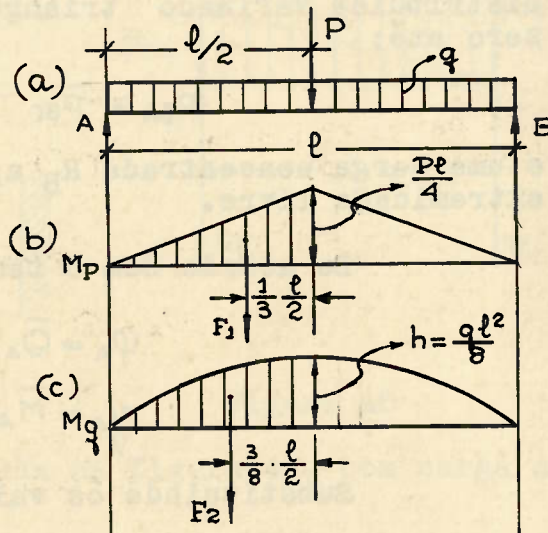


Figura 51



24 - Determinação gráfica da linha elástica:- Os processos gráficos, para a determinação da linha elástica, são baseados no teorema de Mohr. Consistem, em última análise, em carregar-se a viga-auxiliar com a carga:

$$\bar{p} = \frac{M}{EJ}$$

e determinar-se, graficamente, por intermédio de um polígono funicular, o diagrama de momentos fletores correspondente a esse carregamento fictício.

Consideremos, inicialmente, o caso de uma viga de  $EJ$  constante submetida à carga que se apresenta na figura 52a.

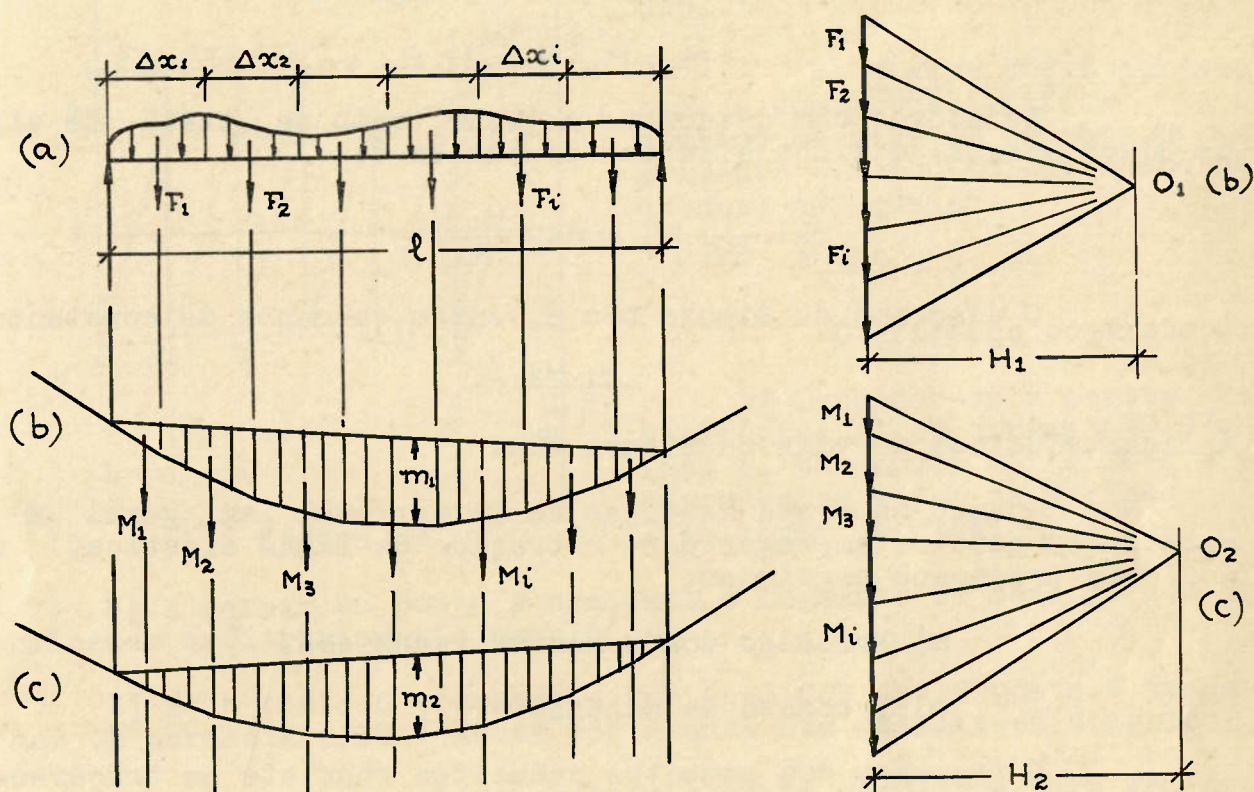


Figura 52

Dividamos o vão  $l$  em diversos trechos de comprimentos  $\Delta x_i$  suficientemente pequenos para que se possa substituir, sem grande erro, em cada um deles, o carregamento dado, por uma força concentrada equivalente,  $F_i$  (figura 52a).

Com polo qualquer  $O_1$  tracemos o polígono das forças e o polígono funicular correspondente apresentado na figura 52b; de acordo com a teoria dos polígonos funiculares o diagrama hachurado (da figura 52b) é, a menos da escala, o diagrama de momentos fletores da viga dada. Mais precisamente, o momento fletor  $M_1$ , numa secção da viga onde se lê  $m_1$  no diagrama da figura 52b é:

$$M_1 = H_1 \cdot m_1$$

Suponhamos, então, que se carregue a viga dada com o diagrama de figura 52b suposto como carga; determinemos, por processo análogo ao anteriormente descrito, o polígono funicular desse carregamento fictício, tal como se apresenta na figura 52c



(polígono funicular de polo  $O_2$  e distância polar  $H_2$ ); de acordo com a teoria dos polígonos funiculares, lendo-se  $m_2$  no polígono da figura 52c ter-se-á o momento  $M_2$  que a carga fictícia:

$$m_1 = \frac{M_1}{H_1}$$

produz na viga, com a fórmula:

$$M_2 = H_2 \cdot m_2$$

Dai se conclui que para obter-se o momento  $M_3$  produzido não pela carga  $m_1$  e sim pela carga fictícia  $M_1$ , basta multiplicar  $M_2$  por  $H_1$ . Em outras palavras, quando se carrega a viga com o diagrama dos momentos fletores  $M_1$  (correspondentes à carga aplicada) o momento fletor numa secção qualquer da viga é:

$$M_3 = M_2 \cdot H_1 = H_1 H_2 \cdot m_2$$

De acordo com o teorema de Mohr, como se trata de viga de  $EJ$  constante, a linha elástica procurada é:

$$y = \frac{1}{EJ} \cdot M_3 = m_2 \cdot \frac{H_1 \cdot H_2}{EJ}$$

O diagrama de figura 52c é, então, a menos da constante:

$$\frac{H_1 \cdot H_2}{EJ}$$

a linha elástica da viga da figura 52a.

Quando se trata de vigas de  $EJ$  variável (em geral  $E$  é constante) pode-se empregar para o traçado da linha elástica, um dos dois processos seguintes:

a) Processo dos momentos reduzidos.

b) Processo de Schönhöfer.

O processo dos momentos reduzidos consiste em traçar-se de início, o diagrama de momentos fletores  $M$  da viga em estudo, e, em seguida, o diagrama de:

$$\frac{M}{EJ} E_0 J_0$$

sendo  $E_0 J_0$  o produto de duas constantes quaisquer arbitrariamente fixadas; para maior facilidade escolhe-se para  $E_0 J_0$  o menor valor que assume na viga o produto de rigidez  $EJ$ .

Feito isso traça-se o polígono funicular, de distância polar  $H = E_0 J_0$ , das forças fictícias correspondentes ao carregamento da viga com a carga:

$$p = \frac{M}{EJ} E_0 J_0$$

Esse polígono funicular, diagrama de momentos da carga fictícia  $p$ , é a linha elástica procurada.

Para aplicação prática dos dois processos descritos é comum dividir-se a viga em trechos com  $\Delta x_1$  constante (figura 52).



O processo de Schönöhöfer consiste em dividir-se inicialmente, a viga, em diversos trechos com a condição de conservar constante, para cada trecho, a relação  $\frac{\Delta x}{EJ}$ , onde  $EJ$  é o valor médio do produto de rigidez no trecho considerado. O caso mais comum, porém, é aquele em que  $E$  é constante, sendo variável, no produto de rigidez, apenas o momento de inércia.

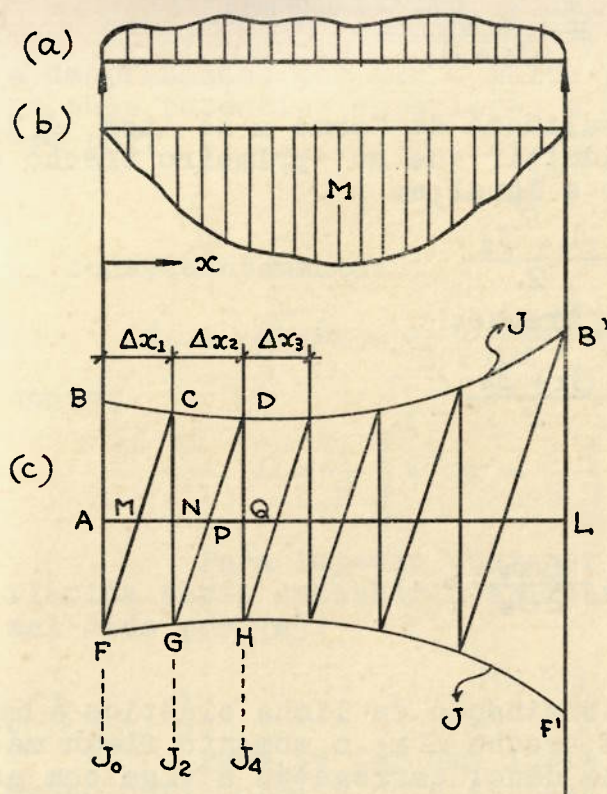


Figura 53

Considere-se, então, para exemplificar, a viga de  $J$  variável da figura 53a. O diagrama de momentos fletores dessa viga é o que se apresenta na figura 53b.

Na figura 53c é apresentada a construção gráfica para divisão da viga em trechos de comprimento  $\Delta x$  (suficientemente pequenos) nos quais:

$$\frac{\Delta x}{J} = \text{const}$$

O processo consiste em:

1) Desenhar-se a partir da horizontal  $AL$  as curvas  $y = \pm J(x)$ , isto é, as curvas  $BB'$  e  $FF'$  que representam a lei de variação de  $J$  ao longo da viga.

2) A partir do ponto  $F$  traçamos o segmento de reta  $FC$  com inclinação arbitrariamente escolhida.

3) Pelo ponto  $C$  traçamos a vertical  $CG$ ; pelo ponto  $G$  traçamos  $GD$  paralela a  $FC$  e assim por diante até atingir-se o ponto  $B'$ .

Se com a inclinação inicialmente escolhida para  $FC$  não se atingir o ponto  $B'$  escolhe-se nova inclinação para  $FC$  até que, por tentativas, se consiga atingir o ponto  $B'$ .

Obtido isso, a viga está dividida em trechos para os quais  $\frac{\Delta x}{J} = \text{const}$ . De fato, pela construção efetuada:

$$\frac{AM}{AF} = \frac{MN}{NC} = \frac{NP}{NG} = \frac{PQ}{QD} = \dots$$

Portanto:

$$\frac{AM + MN}{AF + NC} = \frac{NP + PQ}{NG + QD} = \dots$$

ou:

$$\frac{\Delta x_1}{AF + NC} = \frac{\Delta x_2}{NG + QD} = \dots$$

Mas por construção:

$$AF = J_0 = \text{momento de inércia no ponto A}$$



$NC = J_2 =$  momento de inércia no ponto N

.....

Portanto:

$$\frac{\Delta x_1}{J_0 + J_2} = \frac{\Delta x_2}{J_2 + J_4} = \dots\dots$$

e se a construção efetuada foi realizada de forma a se ter  $\Delta x_1$  suficientemente pequeno podemos admitir que no primeiro trecho o momento de inércia seja constante e igual a:

$$J_1 = \frac{J_0 + J_2}{2}$$

Analogamente no segundo trecho:

$$J_3 = \frac{J_2 + J_4}{2}$$

e assim por diante.

Tem-se, então:

$$\frac{\Delta x_1}{2 J_1} = \frac{\Delta x_2}{2 J_3} = \dots\dots$$

como se queria demonstrar.

Nessas condições, a determinação da linha elástica é bastante simples; calcula-se em cada trecho  $\Delta x_1$  o momento fletor médio  $M_1$  produzido pelo carregamento dado; carrega-se a viga com as forças fictícias  $M_1$  (em vez de  $\frac{M_1}{EJ_1} \Delta x_1$ , pois  $\frac{\Delta x}{EJ} =$  constante) e determina-se graficamente o diagrama de momentos fletores.

Se  $m_i$  forem os segmentos compreendidos entre o funicular e a linha de fêcho, e  $H$  a distância polar, tem-se:

$$y_i = m_i \cdot H \cdot \frac{\Delta x}{EJ}$$

Se se escolher  $H = \frac{EJ}{\Delta x}$ , resultará:

$$y_i = m_i$$

e, portanto, o diagrama dos momentos fletores da viga carregada com as forças fictícias  $M_1$  fornece diretamente a linha elástica da viga em questão.

**25 - Deslocamento longitudinal:-** Quando uma barra fletida tem uma de suas extremidades fixa e a outra livre para mover-se longitudinalmente, o encurtamento proveniente da flexão dá lugar a um deslocamento longitudinal da extremidade livre, cuja ordem de grandeza é menor que a do deslocamento transversal, mas que em alguns casos pode ter certa importância.

A projeção horizontal de um elemento  $dx$  da barra reta de comprimento  $l$  (suposta colocada inicialmente em posição horizontal, figura 54), encurta-se de  $du$ , como consequência do deslocamento angular  $\phi$ , de tal modo que:



$$du = dx - dx \cdot \cos \varphi = dx (1 - \cos \varphi)$$

Desenvolvendo  $\cos \varphi$  em série vem:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

e desprezando, por ser  $\varphi$  muito pequeno, as suas potências superiores a 2, pode-se pôr:

$$\cos \varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

e, conseqüentemente:

$$du = \frac{\varphi^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

donde:

$$\mu = \frac{1}{2} \int_0^l \varphi^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

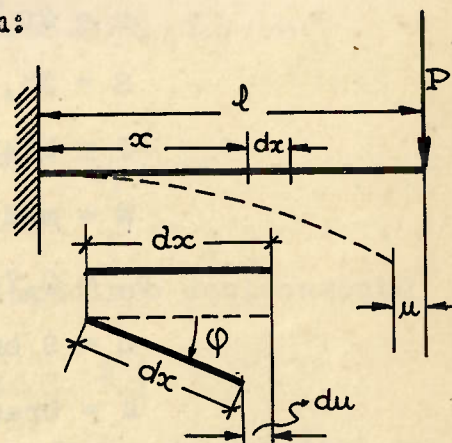


Figura 54

Para impedir qualquer movimento longitudinal da barra fletida seria necessário aplicar-lhe na extremidade uma força normal dada por (x):

$$N = ES \cdot \frac{\Delta l}{l} = ES \frac{\mu}{l}$$

Para se ter uma idéia da ordem de grandeza do deslocamento horizontal  $\mu$  considere-se o caso em que na viga prismática em balanço (figura 54) age na extremidade livre a força concentrada P.

Ter-se-á:

$$M = -P(l - x)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} = \frac{P}{EJ} (l - x)$$

$$\varphi = \frac{P}{EJ} \left( lx - \frac{x^2}{2} + C_1 \right)$$

onde  $C_1 = 0$  porque  $\varphi = 0$  para  $x = 0$ .

Portanto:

$$\varphi = \frac{P}{EJ} \cdot \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{Px}{2EJ} (2l - x)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \int_0^l \varphi^2 dx = \frac{P^2}{8E^2J^2} \int_0^l x^2 (2l - x)^2 dx = \frac{P^2 l^5}{15 E^2 J^2}$$

Se este movimento longitudinal for impedido, o esforço normal N que o impede é:

(x) Desprezando o efeito da flexão composta trazido por essa mesma força; a esse assunto voltaremos mais tarde.



$$N = \frac{ES}{\ell} u = \frac{P^2 \ell^4 S}{15 E J^2}$$

Admitindo, por exemplo (figura 55):

$$h = 20 \text{ cm (NP20)}$$

$$S = 33,5 \text{ cm}^2$$

$$J = 2142 \text{ cm}^4$$

$$W = \text{módulo de resistência} = 214 \text{ cm}^3$$

$$b_0 = 0,75 \text{ cm}$$

$$b = 9 \text{ cm}$$

$$z = \text{braço de alavanca} = 18 \text{ cm}$$

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$G = 800 \text{ t/cm}^2$$

$$\bar{\sigma} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\ell = 3 \text{ m}$$

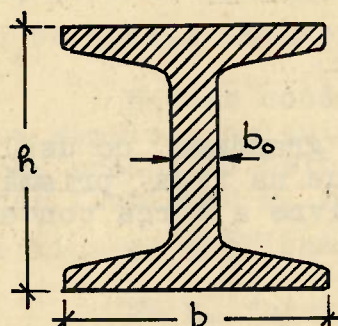


Figura 55

determinemos, de início, qual o valor máximo de P (carga concentrada na extremidade livre) que a viga pode suportar. Partindo de

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P\ell}{W} = \bar{\sigma}$$

vem:

$$P = \frac{\bar{\sigma} W}{\ell} = \frac{1200 \times 214}{300} = 850 \text{ kg}$$

Para esse valor de P a flecha f na extremidade livre é:

$$f = \frac{P\ell^3}{3EJ} = \frac{850 \times 27 \times 10^6}{3 \times 21 \times 2142 \times 10^5} = 1,7 \text{ cm}$$

Se levarmos em conta a influência da força cortante, o valor de f se acresce de:

$$v = \pi \frac{Q\ell}{GS}$$

No caso:

$$\pi = \frac{S}{b_0 z} = \frac{33,5}{0,75 \times 18} = 2,48$$

$$v = 2,48 \frac{850 \times 300}{800000 \times 33,5} = 0,0236 \text{ cm}$$

portanto v é desprezível em face de f.

O deslocamento longitudinal é:

$$u = \frac{P^2 \ell^5}{15 E^2 J^2} = \frac{850^2 \times 243 \times 10^{10}}{15 \times 441 \times 10^{10} \times 2142^2} = 0,0058 \text{ cm}$$

valor este bastante pequeno relativamente a f.



Se se impedir, porém, esse deslocamento, a tensão que a parece na viga será:

$$\sigma = \epsilon E = \frac{\mu}{l} E = \frac{0,0058 \times 21 \cdot 10^5}{300} = 40,6 \text{ kg/cm}^2$$

e a tensão máxima será então:

$$\sigma' \cong 1200 + 41 = 1241 \text{ kg/cm}^2$$

em lugar de  $\bar{\sigma} = 1200 \text{ kg/cm}^2$ .

A força normal necessária para impedir o deslocamento longitudinal é, então:

$$N = \sigma \cdot S = 40,6 \times 33,5 = 1360 \text{ kg}$$

**26 - Influência da temperatura:** - Quando uma barra de material homogêneo é submetida ao acréscimo

uniforme de temperatura  $\Delta t$  a distância entre dois quaisquer de seus pontos, A e B, inicialmente igual a  $d$  (antes do acréscimo de temperatura) passa, depois do acréscimo de temperatura (figura 56) a:

$$d_1 = d(1 + \alpha \Delta t)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação linear do material de que é feita a barra. O acréscimo de comprimento, devido a  $\Delta t$ , é, então:

$$\Delta d = d_1 - d = \alpha \cdot \Delta t \cdot d$$

Para alguns dos materiais mais utilizados nas construções, o valor de  $\alpha$  é, em média:

Para o aço e para o concreto:  $\alpha = 0,0000125 \text{ m/m/}^\circ\text{C}$

Para a madeira:  $\alpha = 0,0000044 \text{ m/m/}^\circ\text{C}$ .

Se a força axial  $N$  (figura 56) necessária para impedir o deslocamento  $\Delta l$  proveniente do acréscimo de temperatura é igual a (barra de seção constante):

$$N = -ES \frac{\Delta l}{l}$$

onde  $\Delta l = \alpha \cdot \Delta t \cdot l$

resulta:

$$N = -\alpha \Delta t E S$$

Se a barra for de seção variável ter-se-á:

$$\Delta l = - \int_0^l \frac{N}{ES} dx = - \frac{N}{E} \int_0^l \frac{dx}{S}$$

$$N = - \frac{E \cdot \Delta l}{\int_0^l \frac{dx}{S}} = - \frac{E \alpha \cdot \Delta t \cdot l}{\int_0^l \frac{dx}{S}}$$

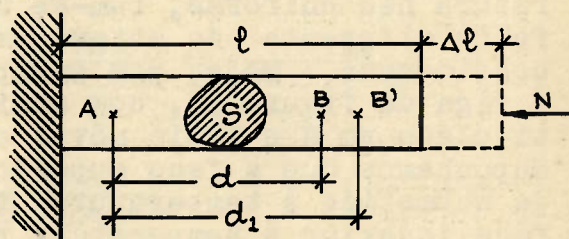


Figura 56



Essa força  $N$  é, então, a que se manifesta, por exemplo, em uma viga (figura 57) sobre dois apoios submetida ao acréscimo de temperatura  $\Delta t$ , quando o apoio móvel  $B$ , por uma razão qualquer, deixa de funcionar como tal e impede qualquer movimento longitudinal da viga.

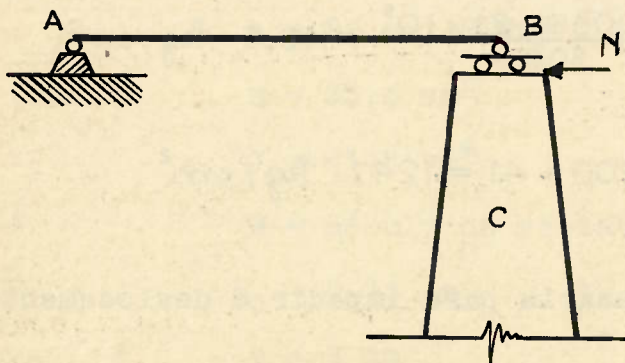


Figura 57

No caso em que a viga é submetida a um acréscimo de temperatura não uniforme, tem-se um efeito diferente do anteriormente considerado. Seja, por exemplo, a viga da figura 58, com apoio articulado em  $A$  e apoio móvel em  $B$ . Suponhamos que a face superior seja submetida à temperatura  $t$  e a face inferior à temperatura  $t + \Delta t$ .

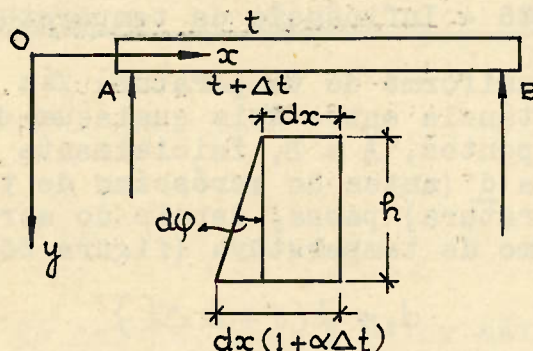


Figura 58

Um elemento de comprimento  $dx$  medido sobre o eixo da viga, toma, por efeito da temperatura, a forma indicada na figura 58. Chamando  $h$  a altura da viga, ter-se-á uma deformação angular:

$$d\varphi \approx \tan d\varphi = [dx(1 + \alpha \Delta t) - dx] \frac{1}{h} = \frac{\alpha \Delta t dx}{h}$$

donde:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

Considerando que no caso de uma viga prismática de  $EJ$  constante, o efeito de temperatura acima considerado é equivalente à ação de um momento fletor constante e positivo  $M$ , deve-se ter, para a orientação dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  apresentada na figura;

$$\frac{d\varphi}{dx} = - \frac{M}{EJ} = - \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

donde:

$$M = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h}$$

**27 - Barras de pequena curvatura:** - Se a barra for curva, com raio de curvatura grande, em relação às suas dimensões transversais, e se  $y = f(x)$  for a equação de seu eixo (figura 59) tem-se, chamando de  $\alpha$  o ângulo da tangente à curva com o eixo  $Ox$ :

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$



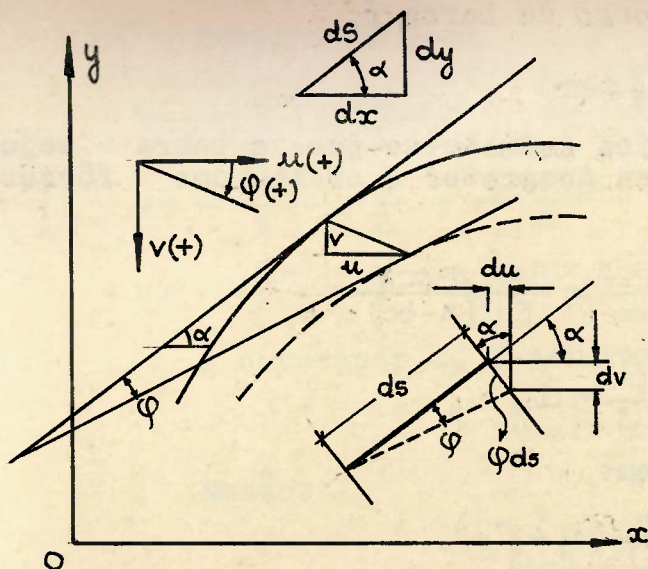


Figura 59

$$ds = \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{dy}{\sin \alpha}$$

De acôrdo com a notação apresentada na figura tem-se ainda ( $u$  e  $v$  são os deslocamentos de um ponto do eixo da barra):

$$du = \phi ds \cdot \sin \alpha = \phi dy$$

$$dv = \phi ds \cdot \cos \alpha = \phi dx$$

donde:

$$\phi = \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$$

A deformação angular  $d\phi$  medida em sentido destrorso é:

$$d\phi = -\frac{M}{EJ} ds = -\frac{M dx}{EJ \cos \alpha} = -\frac{M dy}{EJ \sin \alpha}$$

Portanto:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} = -\frac{M}{EJ \cos \alpha}$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d\phi}{dy} = -\frac{M}{EJ \sin \alpha}$$

equações que dão os deslocamentos  $u$  e  $v$  em qualquer ponto da barra.

**28 - Exercícios:** - 1º) Na figura 60 se apresenta uma barra de seção constante, com forma de quadrante de circunferência de raio  $r$ , engastada em uma extremidade e solicitada na outra por uma força vertical  $P$ . Determinar os deslocamentos  $u$  e  $v$ , respectivamente paralelos a  $Ox$  e  $Oy$  e, em particular, os valores de  $u_0$  e  $v_0$  (ponto de aplicação de  $P$ ).

A equação do eixo da barra é, usando os eixos coordenados indicados na figura 60:

$$y^2 = x(2r - x)$$

donde:

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{x(2r-x)}}{r}$$

$$\sin \alpha = \frac{r-x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{\sqrt{x(2r-x)}}$$

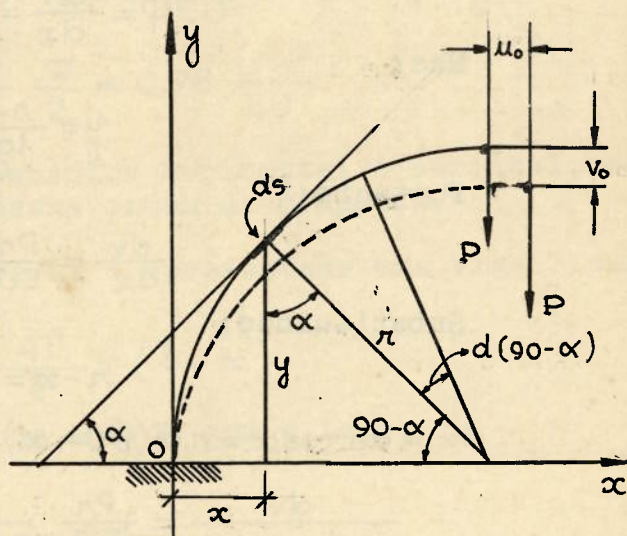


Figura 60



O momento fletor ao longo da barra é:

$$M = -P(n-x)$$

e os deslocamentos que êle origina (admite-se que a barra seja bastante rígida para que se possa desprezar o efeito das forças normais) obtêm-se de:

$$\frac{d\varphi}{dy} = - \frac{M}{EJ \sin \alpha} = \frac{P(n-x)}{EJ(n-x)} n$$

ou:

$$d\varphi = \frac{P}{EJ} n dy$$

Supondo  $EJ = \text{const}$ , vem:

$$\varphi = \frac{Pn}{EJ} (y + C_1)$$

A constante  $C_1$  é nula porque para  $y = 0$  deve-se ter  $\varphi = 0$ ; portanto:

$$\varphi = \frac{Pn}{EJ} y$$

Como:

$$\varphi = \frac{du}{dy} = \frac{Pn}{EJ} y$$

obtém-se:

$$u = \frac{Pn}{EJ} \int y dy = \frac{Pn}{EJ} \left( \frac{y^2}{2} + C_2 \right)$$

A constante  $C_2$  é nula porque para  $y = 0$  deve-se ter  $u = 0$ ; portanto:

$$u = \frac{Pn}{2EJ} y^2$$

Para o cálculo de  $v$  partimos de:

$$\varphi = \frac{dv}{dx} = \frac{Pn}{EJ} y$$

Mas:

$$y = \frac{n-x}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Portanto:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Pn}{EJ} \cdot \frac{n-x}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Substituindo:

$$n-x = n \cdot \sin \alpha$$

$$dx = ds \cdot \cos \alpha = n \cdot d(90 - \alpha) \cdot \cos \alpha = -n \cdot \cos \alpha d\alpha$$

$$\frac{dv}{-n d\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{Pn}{EJ} \cdot \frac{n \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha$$

$$\frac{dv}{d\alpha} = - \frac{Pn^3}{EJ} \cos^2 \alpha$$



Integrando vem:

$$v = -\frac{Pn^3}{EJ} \int \cos^2 \alpha d\alpha = -\frac{Pn^3}{EJ} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) d\alpha$$

$$v = -\frac{Pn^3}{EJ} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + C_3 \right)$$

$$v = -\frac{Pn^3}{EJ} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2} + C_3 \right)$$

A constante  $C_3$  é determinada com a condição:

$$v = 0 \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Então:

$$0 = -\frac{Pn^3}{EJ} \left( \frac{\pi}{4} + C_3 \right)$$

$$C_3 = -\frac{\pi}{4}$$

Portanto:

$$v = -\frac{Pn^3}{EJ} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Finalmente:

$$v = \frac{Pn^3}{2EJ} \left( \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \cos \alpha - \alpha \right)$$

$$u = \frac{Pn}{2EJ} \cdot y^2$$

No ponto de aplicação da carga  $P$  (onde  $\alpha = 0$  e  $y = r$ ), tem-se:

$$u_0 = \frac{Pn^3}{2EJ} = 0,50 \cdot \frac{Pn^3}{EJ}$$

$$v_0 = \frac{Pn^3}{2EJ} \cdot \frac{\pi}{2} = 0,78 \cdot \frac{Pn^3}{EJ}$$

Neste caso os deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente  $u_0$  e  $v_0$ , são de mesma ordem de grandeza.

2º) Na figura 61 é apresentada uma viga curva de eixo parabólico:

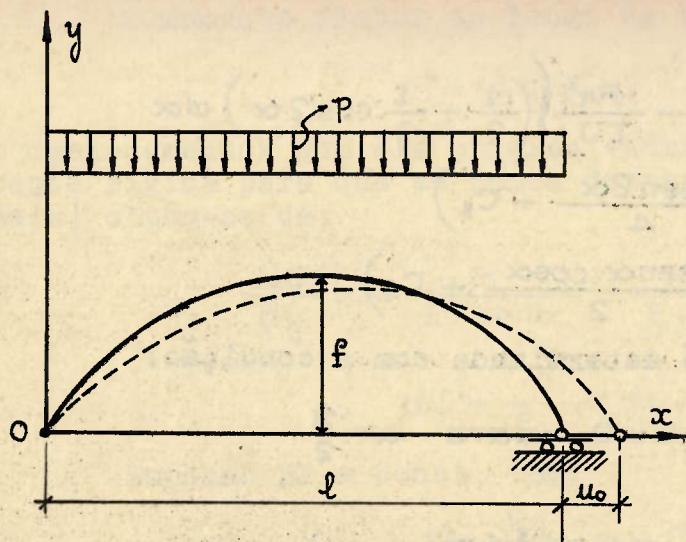
$$y = \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x)$$

e momento de inércia variável de acordo com a lei:

$$J = \frac{J_0}{\cos \alpha}$$

onde  $J_0$  é uma constante e  $\alpha$  a inclinação da tangente geométrica à curva  $y = f(x)$  no ponto considerado. Determinar os deslocamentos





u e v, respectivamente paralelos a Ox e Oy e, em particular o valor de  $u_0$  (figura 61).

O momento fletor numa secção qualquer de coordenadas x, y, é:

$$M = \frac{p}{2} x (l - x)$$

Substituindo em:

$$\varphi = \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} = - \int \frac{M}{EJ} ds$$

vem:

Figura 61

$$\varphi = - \int \frac{p}{2} x (l - x) \frac{1}{EJ_0} dx$$

ou:

$$\varphi = - \frac{p}{2EJ_0} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 \right)$$

Portanto:

$$v = \int \varphi dx = - \frac{p}{2EJ_0} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \right)$$

A constante  $C_2$  é nula porque  $v = 0$  para  $x = 0$ . O valor de  $C_1$  obtém-se da condição:

$$v = 0 \text{ para } x = l$$

donde:

$$0 = - \frac{p}{2EJ_0} \left( \frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} + C_1 l \right)$$

$$C_1 = - \frac{l^3}{12}$$

Finalmente:

$$v = - \frac{p}{2EJ_0} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3 x}{12} \right)$$

$$v = - \frac{px}{24EJ_0} (2lx^2 - x^3 - l^3)$$

O deslocamento horizontal se obtém de:

$$du = \varphi dy = - \frac{p}{2EJ_0} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 \right) dy$$

$$dy = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) dx$$

Portanto:

$$u = \int \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx = - \frac{2pf}{l^2 E J_0} \int \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 \right) (l - 2x) dx$$



$$u = - \frac{2pf}{l^2 EJ_0} \int \left( \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{l x^3}{3} + C_1 l - l x^3 + \frac{2}{3} x^4 - 2 C_1 x \right) dx$$

Substituindo  $C_1 = - \frac{l^3}{12}$  e integrando vem:

$$u = - \frac{2pf}{l^2 EJ_0} \left( \frac{l^2 x^3}{6} - \frac{l x^4}{12} - \frac{l^4}{12} x - \frac{l x^4}{4} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{l^3}{12} x^2 + C_3 \right)$$

ou:

$$u = - \frac{pf}{3EJ_0 l^2} \left( \frac{4}{5} x^5 - 2 l x^4 + l^2 x^3 + \frac{l^3 x^2}{2} - \frac{l^4 x}{2} \right)$$

A constante  $C_3$  é nula porque para  $x = 0$  deve-se ter  $u = 0$

Verifica-se que o valor máximo de  $u$  se dá para  $x = l$  e é igual a

$$u_{\max} = u_0 = \frac{pfl^3}{15EJ_0}$$

Verifica-se também que o valor máximo de  $v$  se dá para  $x = \frac{l}{2}$  e é igual a

$$v_{\max} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ_0}$$

29 - Aplicações:- Vejamos agora algumas das aplicações do estudo das deformações.

1) Na figura 62 é apresentada uma estrutura hiperestática formada de duas vigas cruzadas que se apoiam nas quatro paredes de uma sala. No ponto em que as vigas se cruzam é aplicada a força vertical  $P$ ; como se distribue a força  $P$  pelas duas vigas?

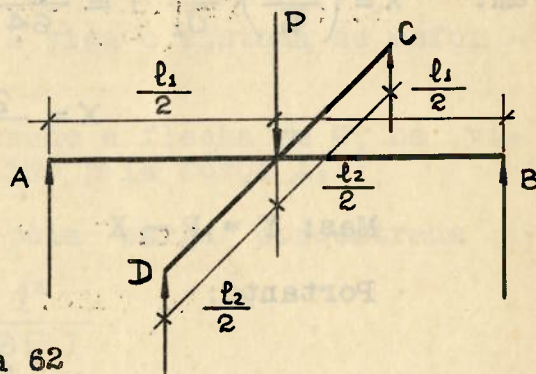
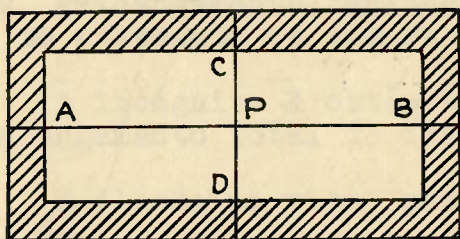


Figura 62

Chamando  $X$  a parte de  $P$  absorvida pela viga  $AB$  e  $Y$  a parte de  $P$  absorvida pela viga  $CD$ , tem-se:

$$X + Y = P$$

única equação fornecida pela estática.

Para resolver o problema é necessário recorrer ao cálculo das deformações; para isso considere-se que sob a ação da força  $X$  aplicada no meio da viga  $AB$  a flecha que aí se produz é:

$$f_{AB} = X \frac{l_1^3}{48E_1J_1}$$

onde  $E_1$  e  $J_1$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade do ma-



terial e o momento de inércia da viga (supõe-se que a viga seja prismática).

Analogamente, a flecha que se produz no meio da viga CD é:

$$f_{CD} = Y \frac{l_2^3}{48 E_2 J_2}$$

A equação:

$$f_{AB} = f_{CD}$$

juntamente com:

$$X + Y = P$$

permite resolver o problema proposto.

Ter-se-á:

$$\frac{X l_1^3}{E_1 J_1} = \frac{Y l_2^3}{E_2 J_2}$$

Admitindo:

$$E_1 = E_2$$

$$J_1 = \frac{10 \times 20^3}{12} \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{10 \times 10^3}{12} \text{ cm}^4$$

$$l_1 = 4 \text{ m}$$

$$l_2 = 3 \text{ m}$$

$$\text{vem: } X = \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^3 \frac{J_1}{J_2} Y = \frac{27}{64} \cdot \frac{20^3}{10^3} Y = \frac{27}{64} \frac{2^3 \cdot 10^3}{10^3} Y$$

$$X = \frac{27}{8} Y$$

$$\text{Mas: } Y = P - X$$

Portanto:

$$X = \frac{27}{8} (P - X)$$

$$X \left( 1 + \frac{27}{8} \right) = \frac{27}{8} P$$

$$X = \frac{27}{35} P$$

$$Y = \frac{8}{35} P$$



2) Na figura 63 é apresentada uma viga prismática sobre dois apoios tendo o seu ponto médio ligado por um fio a um ponto D tal como se indica na figura. Admitindo que antes do carregamento da viga o fio estivesse perfeitamente esticado, mas sem aplicar esforço nenhum na viga, pergunta-se qual o momento fletor na viga, em C, e qual o esforço agente no fio, produzidos pelas cargas indicadas na figura?

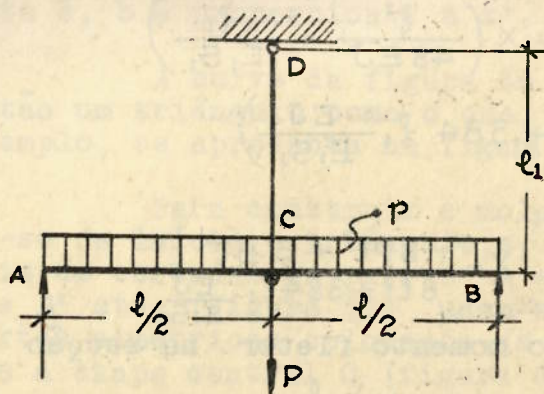


Figura 63

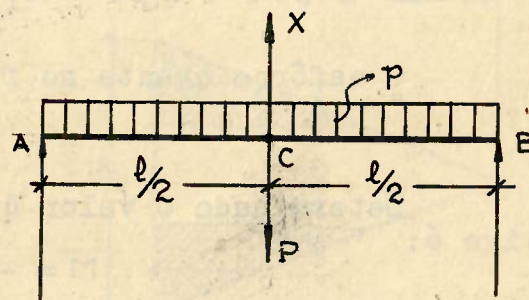


Figura 64

Chamando:

$X$  = força normal no fio

$S_1$  = área da secção transversal do fio

$E_1$  = módulo do material do fio

$J$  = momento de inércia da viga

$E$  = módulo do material da viga

ter-se-á, evidentemente, agindo sobre a viga o sistema de esforços que se apresenta na figura 64.

A incógnita  $X$  obtém-se igualando a flecha em C, na viga, ao alongamento total do fio produzido pela força  $X$ .

A flecha na viga, produzida pela carga concentrada  $(P - X)$ , é:

$$f' = (P - X) \frac{l^3}{48 E J}$$

e pela carga distribuída é:

$$f'' = \frac{5 p l^4}{384 E J}$$

Portanto, a flecha em C é:

$$f = f' + f'' = (P - X) \frac{l^3}{48 E J} + \frac{5 p l^4}{384 E J}$$

O alongamento total do fio é:

$$\Delta l = \frac{X l_1}{E_1 S_1}$$

A equação:

$$f = \Delta l$$



fornece a incógnita X.

Ter-se-á:

donde:

$$(P-X) \frac{l^3}{48 EJ} + \frac{5 pl^4}{384 EJ} = \frac{X l_1}{E_1 S_1}$$

$$\frac{Pl^3}{48 EJ} + \frac{5 pl^4}{384 EJ} = X \left( \frac{l^3}{48 EJ} + \frac{l_1}{E_1 S_1} \right)$$

$$8 Pl^3 + 5 pl^4 = X \left( 8 l^3 + 384 l_1 \frac{EJ}{E_1 S_1} \right)$$

O esforço agente no fio é:

$$X = \frac{8 Pl^3 + 5 pl^4}{8 l^3 + 384 l_1 \frac{EJ}{E_1 S_1}}$$

Determinado o valor de X o momento fletor na secção C da viga é:

$$M = \frac{pl^2}{8} + (P-X) \frac{l}{4}$$

3) Estudo do "feixe de molas" - O chamado feixe de molas é, na realidade, uma mola formada por um conjunto de chapas metálicas dispostas como se indica esquematicamente na figura 65.

O conjunto trabalha como uma viga de momento de inércia variável, apoiada nas duas extremidades, e com uma carga concentrada agindo segundo o eixo de simetria.

Suponhamos que as chapas que constituem a mola sejam colocadas uma ao lado da outra num mesmo plano e que assim se obtenha a curva da figura 66 cuja equação iremos determinar. Estabeleçamos como condição para resolver o problema que por ocasião do carregamento a curvatura das chapas seja constante, isto é:

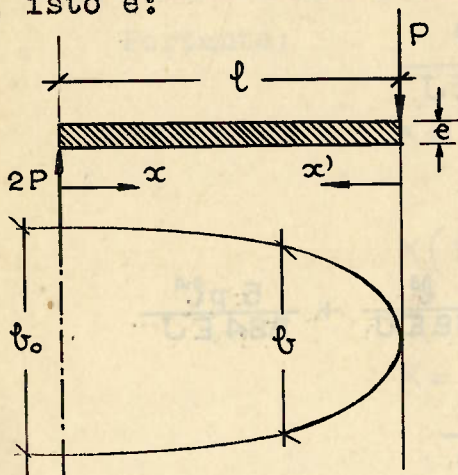


Figura 66

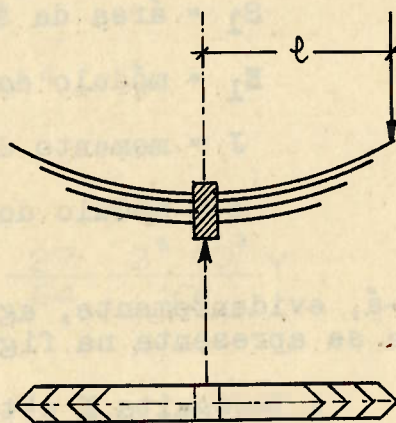


Figura 65

$$\frac{d\phi}{dx} = \text{const} = - \frac{M}{EJ}$$

Mas  $M = -Px'$ , logo:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{Px'}{EJ} = \text{const}$$

Supondo que sejam constantes: P, E e a espessura e da chapa, vem:

$$\frac{x'}{J} = \text{const} = \frac{12 x'}{le^3} = k$$



donde:

$$b = \frac{12}{k e^3} x' = k' x'$$

isto é,  $b$  é proporcional a  $x'$ .

A curva da figura 66 é, então um triângulo como o que, por exemplo, se apresenta na figura 67.

Para construir a mola corta-se de início o triângulo, e, depois de cortadas as partes A e A', B e B' etc., (figura 67) unem-se as partes simétricas colocando-as sobre a chapa central C (figura 65).

Vejamos um exemplo numérico: Seja  $l = 30$  cm o comprimento da metade da mola; admitamos  $\bar{\sigma} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup> e  $E = 2100$  t/cm<sup>2</sup>. Pe-  
de-se o dimensionamento da mola que fornece a flecha máxima  $f = 1,5$  cm.

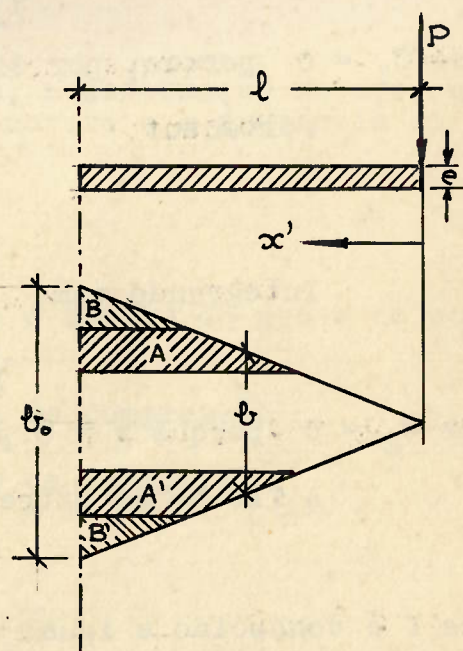


Figura 67

Partindo de

$$b = b_0 \cdot \frac{x'}{l}$$

vem:

$$W = \frac{b e^2}{6} = \frac{b_0 e^2}{6 l} x'$$

A tensão  $\bar{\sigma}$  é constante e igual a:

$$\bar{\sigma} = \frac{|M|}{W} = \frac{P x' 6 l}{b_0 e^2 x'} = \frac{6 P l}{b_0 e^2}$$

Igualando a  $\bar{\sigma}$  vem:

$$\bar{\sigma} = \frac{6 P l}{b_0 e^2}$$

donde:

$$b_0 = \frac{6 P l}{\bar{\sigma} e^2}$$

Para calcular  $\varphi$  entramos com a condição da flecha; par-  
tindo de

$$\frac{d\varphi}{dx} = - \frac{M}{E J} = \frac{12 P x'}{E b e^3} = \frac{12 l P x'}{E b_0 e^3 x'}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{12 P l}{E e^3 b_0}$$



e integrando vem:

$$\varphi = \frac{12 P l}{E e^3 b_0} x + C_1$$

onde  $C_1 = 0$  porque, por simetria  $\varphi = 0$  para  $x = 0$ .

Portanto:

$$\varphi = \frac{12 P l}{E e^3 b_0} x$$

Integrando vem:

$$y = \frac{12 P l}{E e^3 b_0} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$$

onde  $C_2 = 0$  porque  $y = 0$  para  $x = 0$ .

A flecha na extremidade se obtém fazendo  $x = l$  :

$$f = \frac{6 P l^3}{E e^3 b_0}$$

onde  $f$  é conhecido e igual a 1,5 cm.

Substituindo  $b_0$  por

$$\frac{6 P l}{\sigma e^2}$$

resulta:

$$e = \frac{\sigma l^2}{E f}$$

No caso em questão:

$$e = \frac{1400 \times 900}{2100000 \times 1,5} = 0,4 \text{ cm}$$

Determinado  $e$  podemos fixar  $P$ , calcular  $b_0$  e cortar a mola correspondente.

4) Vigas de concreto armado - Outra aplicação interessante do cálculo das deformações está no dimensionamento das vigas de concreto armado; consideraremos a seguir, o dimensionamento de uma viga retangular segundo as hipóteses do chamado "dimensionamento no estágio II". O problema é estudado com mais detalhes na cadeira de "Concreto Simples e Armado".

Admitimos no que se segue:

- 1º) Que os materiais obedeçam à lei de Hooke.
- 2º) Que as secções transversais se conservem planas durante a deformação.
- 3º) Que o concreto não resista à tração e que êsses esforços sejam absorvidos, em sua totalidade, pelo aço.

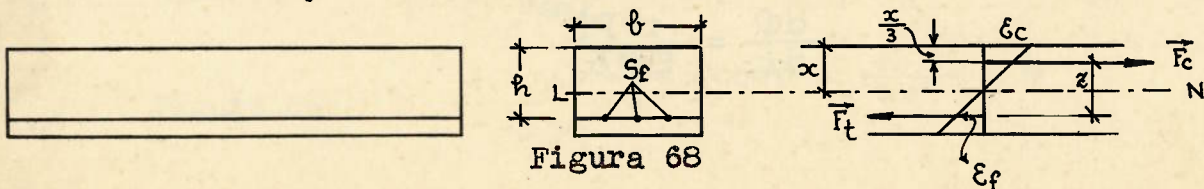


Figura 68



Nessas condições, de acordo com o diagrama de deformações da figura 68, vem:

$$\frac{\epsilon_f}{h-x} = \frac{\epsilon_c}{x}$$

onde  $\epsilon_f$ ,  $\epsilon_c$  e  $x$  são, respectivamente, a deformação no aço, a deformação na fibra mais comprimida do concreto e a distância da linha neutra à face superior da viga.

Chamando:

$$n = \frac{E_f}{E_c} = \text{relação entre o módulo do aço e do concreto}$$

$\sigma_c$  = tensão máxima de compressão

$\sigma_f$  = tensão no aço da armadura

a expressão acima se escreve:

$$\sigma_f = n \sigma_c \frac{h-x}{x}$$

Chamando:

$F_t$  = força de tração na armadura de aço

$F_c$  = resultante das tensões de compressão no concreto

$M$  = momento fletor na secção considerada

$z$  = distância de  $F_c$  à armadura

$S_f$  = área da armadura

vem (figura 68):

$$M = F_t \cdot z = F_c \cdot z$$

$$F_t = S_f \cdot \sigma_f = n \sigma_c \frac{h-x}{x} \cdot S_f$$

$$F_c = F_t = \frac{M}{z} = \frac{M}{h - \frac{x}{3}} = \frac{\sigma_c \cdot x}{2} \cdot b$$

donde:

$$\frac{\sigma_c \cdot x}{2} \cdot b = n \sigma_c \frac{h-x}{x} \cdot S_f$$

$$n S_f \frac{h-x}{x} = \frac{bx}{2}$$

$$n h S_f - n S_f x - \frac{bx^2}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{2n S_f}{b} \cdot x - \frac{2nh}{b} S_f = 0$$



Finalmente:

$$x = \frac{n S_f}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 h b}{n S_f}} \right]$$

Fácil é vêr que a outra raiz da equação do segundo grau é negativa, não interessando, portanto, no problema em questão.

A fórmula acima determina a posição da linha neutra; conhecido  $x$ , tem-se:

$$z = h - \frac{x}{3}$$

$$F_c = \frac{M}{z} = F_t = \sigma_f \cdot S_f = \frac{\sigma_c \cdot x}{2} b$$

$$\sigma_c = \frac{2}{b x} \cdot F_c = \frac{2}{b x} \cdot \frac{M}{h - \frac{x}{3}}$$

$$\sigma_f = n \sigma_c \cdot \frac{h - x}{x}$$

e o problema está inteiramente resolvido.

Para exemplificar considere-se:

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$h = 45 \text{ cm (distância da armadura à face superior)}$$

$$\bar{\sigma}_c = \sigma_c = 50 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_f = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$S_f = 5 \text{ cm}^2 \text{ (quatro ferros de meia polegada)}$$

$$n = 15$$

Pede-se calcular o momento máximo que essa secção pode suportar.

Calculemos a posição da linha neutra:

$$x = \frac{15 \times 5}{25} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 45 \times 25}{15 \times 5}} \right) = 13,8 \text{ cm}$$

Para que não seja ultrapassada a tensão admissível  $\bar{\sigma}_f$  no aço, deve-se ter:

$$M \leq z \bar{\sigma}_f \cdot S_f = \left( h - \frac{x}{3} \right) \bar{\sigma}_f \cdot S_f$$

e para que não seja ultrapassada a tensão admissível  $\bar{\sigma}_c$ , no concreto, deve-se ter:

$$M \leq \frac{\bar{\sigma}_c \cdot b \cdot x}{2} \left( h - \frac{x}{3} \right)$$

No caso presente tem-se:

$$h - \frac{x}{3} = 45 - 4,6 = 40,4 \text{ cm}$$

Então:

$$\left( h - \frac{x}{3} \right) \bar{\sigma}_f \cdot S_f = 40,4 \times 1200 \times 5 = 242400 \text{ kg} \times \text{cm}$$



$$\left(1 - \frac{x}{3}\right) \bar{\sigma}_c \frac{bx}{2} = 40,4 \frac{50 \times 25 \times 13,8}{2} = 348450 \text{ kg} \times \text{cm}$$

isto é, o momento máximo que a secção pode resistir sem que sejam ultrapassadas as tensões admissíveis é:

$$M = 2,424 \text{ t} \times \text{m}$$

30 - Deformação e deslocamento: - Para evitar confusão de nomenclatura, observe-se o seguinte:

Deslocamento de um elemento de uma barra ao se deformar é a variação de sua posição no espaço; assim, na flexão,  $\phi$  é um deslocamento angular;  $u$  e  $v$ , na flexão de barras curvas, são deslocamentos lineares em dadas direções. São deslocamentos lineares a flecha de uma viga, a quantidade  $\Delta l$  (na tração ou compressão) etc.

Deformação é a modificação que o elemento sofre em si mesmo; assim,  $d\phi$  é uma deformação,  $\epsilon'$  e  $\epsilon''$  (caso da flexão) são deformações lineares (alongamento e encurtamento considerados por unidade de comprimento).

Distorção é uma deformação  $\gamma$ , causada por tensões de cisalhamento e que não traz alteração do volume.

Essas grandezas não têm dimensões, salvo os deslocamentos lineares, que são medidos em comprimentos ( $|L|$ ).

Às vezes faz-se referência à "deformação total de uma barra"; tem-se na realidade um deslocamento ( $\Delta l$ ).

#### D - FLEXÃO COMPOSTA. FLAMBAGEM.

31 - Vigas esbeltas com carga axial: - Nos casos mais comuns, a influência da força normal, na deformação de uma barra fletida, é desprezível em face da causada pelos momentos fletores. Quando, porém, a rigidez da barra é muito pequena, a influência da força normal torna-se sensível, podendo mesmo, da deformação que ela causa, provir a ruptura da barra.

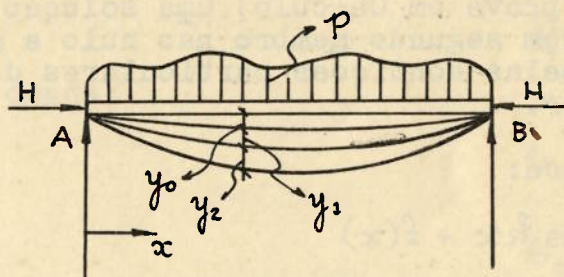


Figura 69

Considere-se uma viga prismática AB (figura 69) submetida à carga distribuída  $p = p(x)$  e à força normal  $H$ .

Seja  $M_0$  o momento fletor, numa secção qualquer da viga, devido exclusivamente à carga  $p$ , e  $y_0$  a flecha correspondente.

Se depois de aplicada a carga  $p$  a aplicarmos a força normal  $H$  o momento  $M_0$  se acresce de  $H y_0$ ; a flecha, por sua vez, passa de  $y_0$  a  $y_0 + y_1$ . Acrescendo, porém, a flecha, de  $y_1$ , acresce, também, o momento, de  $H y_1$ , e assim por diante.

Ter-se-á, então, como momento final a soma:

$$M = M_0 + H y_0 + H y_1 + H y_2 + \dots$$



que constitui uma série. Se essa série for divergente a viga romperá; se for convergente a viga não se romperá e apresentará a linha elástica final:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

que constitui uma série convergente.

Se o material obedecer à lei de Hooke e se verificar a hipótese de Bernoulli, tem-se com as notações usuais (admite-se desprezível o efeito das forças cortantes):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}$$

onde  $M = M_0 + Hy$ .

A equação diferencial da linha elástica escreve-se, então:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_0 + Hy}{EJ}$$

ou:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{H}{EJ} y = - \frac{M_0}{EJ}$$

No caso em que a viga é prismática tem-se  $EJ = \text{constante}$ ; pondo:

$$\frac{H}{EJ} = k^2 = \text{const}$$

a equação diferencial se escreve:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = - \frac{k^2}{H} M_0$$

A integração analítica dessa equação diferencial linear, de segunda ordem, conduz a:

$$y = A \sen kx + B \cos kx + f(x)$$

visto que a equação:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + k^2 Y = 0$$

tem como solução:

$$Y = A \sen kx + B \cos kx$$

A função  $f(x)$  é (como se prova em Cálculo) uma solução particular da equação diferencial com segundo membro não nulo e as constantes A e B são determinadas pelas condições particulares do problema que se tem em mira resolver.

A equação da linha elástica:

$$y = A \sen kx + B \cos kx + f(x)$$

estará determinada quando se conhecerem as constantes A e B assim como a função  $f(x)$ . Nos exercícios que a seguir se apresentam ver-se-á alguns casos de determinação da linha elástica; para isto observe-se que se a função:

$$M_0 = M_0(x)$$

for um polinômio inteiro de x, pode admitir-se, também, para  $f(x)$  um polinômio inteiro de x. O princípio da identidade dos polinômios permite, nesse caso, determinar os coeficientes do polinômio  $f(x)$ .



Para exemplificar seja:

$$M_0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

onde  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  são conhecidos.

Admitindo que  $f(x)$  seja o polinômio:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

onde  $b_1$  são coeficientes a determinar, substituamos na equação:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = - \frac{k^2}{H} M_0$$

as expressões:

$$M_0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$y = A \sin kx + B \cos kx + f(x)$$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

Resulta, evidentemente:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) + k^2 f(x) = - \frac{k^2}{H} M_0$$

e, como:

$$\frac{d}{dx} f(x) = b_1 + 2 b_2 x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 2 b_2$$

vem:

$$(2 b_2 + k^2 b_0) + k^2 b_1 x + k^2 b_2 x^2 = - \frac{k^2}{H} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$$

Pelo princípio da identidade dos polinômios, vem:

$$2 b_2 + k^2 b_0 = - \frac{k^2}{H} a_0$$

$$k^2 b_1 = - \frac{k^2}{H} a_1$$

$$k^2 b_2 = - \frac{k^2}{H} a_2$$

donde:

$$b_2 = - \frac{a_2}{H}$$

$$b_1 = - \frac{a_1}{H}$$

$$b_0 = \frac{1}{k^2} \left( - \frac{k^2}{H} a_0 + \frac{2 a_2}{H} \right) = - \frac{1}{H} \left( a_0 - \frac{2 a_2}{k^2} \right)$$

e finalmente:

$$f(x) = - \frac{1}{H} \left[ \left( a_0 - \frac{2 a_2}{k^2} \right) + a_1 x + a_2 x^2 \right]$$



32 - Exemplos:- 1º) Determinar a equação da linha elástica e o momento fletor máximo que se verificam na viga prismática da figura 70.

Nesse caso, o momento fletor  $M_0$  é:

$$M_0 = \frac{P}{2} x \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

A equação diferencial da linha elástica se escreve:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -\frac{k^2}{H} M_0 = -\frac{k^2 P}{2H} x$$

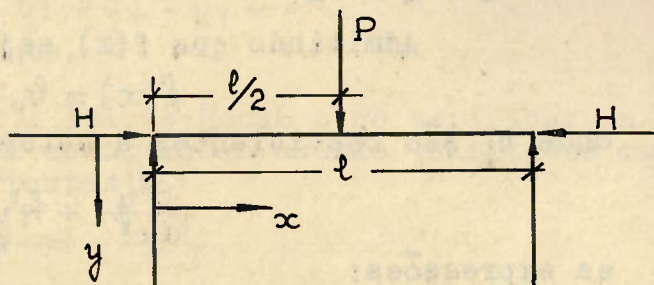


Figura 70

A solução dessa equação é:

$$y = A \sin kx + B \cos kx + f(x)$$

onde  $f(x)$  é tal que:

$$f''(x) + k^2 f(x) = -\frac{k^2 P}{2H} x$$

Admitindo para  $f(x)$ :

$$f(x) = b_1 x$$

vem:

$$k^2 b_1 x = -\frac{k^2 P}{2H} x$$

isto é:

$$b_1 = -\frac{P}{2H}$$

e:

$$f(x) = -\frac{P}{2H} x$$

donde a solução geral:

$$y = A \sin kx + B \cos kx - \frac{P}{2H} x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

São condições do problema:

a)  $y = 0$  para  $x = 0$

b)  $\frac{dy}{dx} = 0$  para  $x = \frac{l}{2}$  (devido à simetria)

Portanto:

$$B = 0$$

$$y = A \sin kx - \frac{P}{2H} x$$

$$\frac{dy}{dx} = k A \cos kx - \frac{P}{2H}$$



$$0 = k A \cos \frac{kl}{2} - \frac{P}{2H}$$

$$A = \frac{P}{2Hk} \sec \frac{kl}{2}$$

e, finalmente:

$$y = \frac{P}{2H} \left[ \frac{\sin kx}{k \cos \frac{kl}{2}} - x \right] \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$$

A flecha no meio da viga é:

$$f = \frac{P}{2Hk} \left( \operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)$$

ou, chamando:

$$\frac{kl}{2} = u$$

e lembrando que:

$$k = \sqrt{\frac{H}{EJ}}$$

vem:

$$Hk = k^3 EJ = \frac{8u^3 EJ}{l^3}$$

e:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ} \cdot \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3}$$

O momento fletor máximo, que se dá para  $x = \frac{l}{2}$ , é:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} + Hf = \frac{Pl}{4} \left( 1 + \frac{4Hf}{Pl} \right) = \frac{Pl}{4} \left( 1 + \frac{Hl^2}{4EJ} \cdot \frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3} \right)$$

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \left( 1 + \frac{k^2 l^2}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3} \right) = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} u}{u}$$

Se não houvesse a força longitudinal H a flecha no meio da viga seria:

$$f_0 = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

Quando existe a força H tem-se:

$$f = f_0 \cdot \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^3}$$

ou:

$$\frac{f}{f_0} = 3 \frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3} = \frac{24}{k^2 l^3} \left( \operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)$$

Essa relação varia entre 1 (para  $kl = 0$ ) e infinito (para  $kl = \pi$ ). Para valores pequenos de  $k$  ( $H$  pequeno ou  $J$  grande) pode desprezar-se o efeito de  $H$ .

2º) Determinar a linha elástica e o momento fletor máximo que se verificam na viga prismática da figura 71.



Nesse caso, o momento fletor  $M_0$  é:

$$M_0 = \frac{pl}{2} \cdot x - \frac{p}{2} x^2$$

isto é:

$$M_0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

onde:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{pl}{2}$$

$$a_2 = -\frac{p}{2}$$

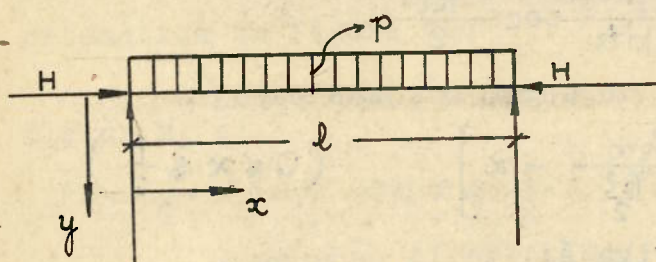


Figura 71

Portanto, de acordo com o que se apresentou no item 31:

$$b_2 = -\frac{1}{H} a_2 = \frac{p}{2H}$$

$$b_1 = -\frac{1}{H} a_1 = -\frac{pl}{2H}$$

$$b_0 = -\frac{1}{H} \left( a_0 - \frac{2a_2}{k^2} \right) = -\frac{p}{Hk^2}$$

A equação da linha elástica é:

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - \frac{p}{Hk^2} - \frac{1}{H} \left( \frac{pl}{2} x - p \frac{x^2}{2} \right)$$

Para  $x = 0$  deve-se ter  $y = 0$ , portanto:

$$0 = B - \frac{p}{Hk^2}$$

isto é:

$$B = \frac{p}{k^2 H}$$

Para  $x = l$  deve-se ter  $y = 0$ , portanto:

$$0 = A \operatorname{sen} kl + \frac{p}{k^2 H} (\cos kl - 1)$$

isto é:

$$A = \frac{p}{k^2 H} \cdot \frac{1 - \cos kl}{\operatorname{sen} kl} = \frac{p}{k^2 H} \operatorname{tg} \frac{kl}{2}$$

Substituindo-se essas expressões, vem:

$$y = \frac{p}{k^2 H} \left[ \operatorname{tg} \frac{kl}{2} \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1 \right] - \frac{M_0}{H}$$

$$y = \frac{p}{k^2 H} \left[ \frac{\cos k(\frac{l}{2} - x)}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right] - \frac{M_0}{H}$$

O momento fletor numa seção de abscissa  $x$  é:

$$M = M_0 + Hy = \frac{p}{k^2} \left[ \frac{\cos k(\frac{l}{2} - x)}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right]$$



Para  $x = \frac{\ell}{2}$  vem:

$$M_{\max} = \frac{p}{k^2} \left( \sec \frac{k\ell}{2} - 1 \right)$$

$$f = \frac{p}{k^2 H} \left( \sec \frac{k\ell}{2} - 1 \right) - \frac{p\ell^2}{8H}$$

3º) Determinar a equação da linha elástica da viga prismática da figura 72.

No caso em questão tem-se:

$$M_0 = \frac{Pb}{\ell} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

e a equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -\frac{k^2}{H} M_0 = -\frac{k^2 P b}{H \ell} x$$

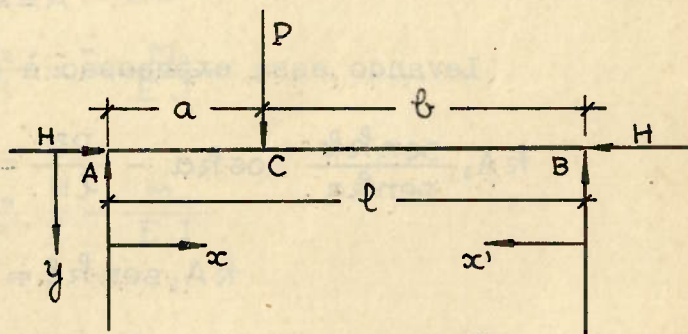


Figura 72

A solução dessa equação é:

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - \frac{Pb}{\ell H} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

No trecho compreendido entre os pontos C e B ter-se-á análogamente:

$$y = A_1 \operatorname{sen} kx' + B_1 \cos kx' - \frac{Pa}{\ell H} x' \quad (0 \leq x' \leq b)$$

É condição do problema, porém:

$$y = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad \text{e para } x' = 0$$

portanto:

$$B = B_1 = 0$$

donde:

$$y = A \operatorname{sen} kx - \frac{Pb}{\ell H} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$y = A_1 \operatorname{sen} kx' - \frac{Pa}{\ell H} x' \quad (0 \leq x' \leq b)$$

Derivando a primeira equação em relação a x e a segunda em relação a x' vem:

$$\frac{dy}{dx} = kA \cos kx - \frac{Pb}{\ell H} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\frac{dy}{dx'} = kA_1 \cos kx' - \frac{Pa}{\ell H} \quad (0 \leq x' \leq b)$$

Para determinar as constantes A e  $A_1$  estabelecemos que no ponto de aplicação da carga P as duas equações acima, que fornecem as rotações, devem fornecer valores iguais e de sinais contrários; além disso os valores de y devem ser, também, iguais.



Em resumo, para  $x = a$  e  $x' = b$  deve-se ter:

$$y_c = A \operatorname{sen} k a - \frac{P a b}{2 H} = A_1 \operatorname{sen} k b - \frac{P a b}{2 H}$$

$$\varphi_c = k A \cos k a - \frac{P b}{2 H} = -k A_1 \cos k b + \frac{P a}{2 H}$$

Da primeira se tira:

$$A = A_1 \frac{\operatorname{sen} k b}{\operatorname{sen} k a}$$

Levando essa expressão à segunda, vem:

$$k A_1 \frac{\operatorname{sen} k b}{\operatorname{sen} k a} \cos k a - \frac{P b}{2 H} = -k A_1 \cos k b + \frac{P a}{2 H}$$

$$k A_1 \operatorname{sen} k l = \frac{P}{H} \operatorname{sen} k a$$

$$A_1 = \frac{P}{H k} \cdot \frac{\operatorname{sen} k a}{\operatorname{sen} k l}$$

$$A = A_1 \frac{\operatorname{sen} k b}{\operatorname{sen} k a} = \frac{P}{H k} \cdot \frac{\operatorname{sen} k b}{\operatorname{sen} k l}$$

Portanto:

$$y = \frac{P}{H} \left[ \frac{\operatorname{sen} k b}{k \operatorname{sen} k l} \cdot \operatorname{sen} k x - \frac{b}{l} x \right] \quad 0 \leq x \leq a$$

$$y = \frac{P}{H} \left[ \frac{\operatorname{sen} k a}{k \operatorname{sen} k l} \cdot \operatorname{sen} k x' - \frac{a}{l} x' \right] \quad 0 \leq x' \leq b$$

Quando  $a = b = \frac{l}{2}$  vem:

$$\begin{aligned} (y)_{x=\frac{l}{2}} = f &= \frac{P}{H} \cdot \left[ \frac{\operatorname{sen}^2 k \frac{l}{2}}{k \operatorname{sen} k l} - \frac{l}{4} \right] \\ f &= \frac{P}{2 H k} \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{k l}{2} - \frac{k l}{2} \right) \end{aligned}$$

**33 - Observação:** - No caso de uma viga reta submetida ao momento fletor  $M = M(x)$  a equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{E J}$$

onde o segundo membro é apenas função de  $x$ , mostra ser aplicável o princípio da superposição.

De fato, suponha-se que se carregue, inicialmente, a viga, com uma parte da carga que produz o momento  $M$ ; num ponto qualquer da viga o momento será  $M_1 = M_1(x)$  e a linha elástica correspondente:  $y_1 = y_1(x)$ . Carregando a viga com outra parte da carga total produzir-se-á num ponto qualquer o momento  $M_2$  em vez de  $M_1$ .



e a linha elástica correspondente será  $y_2$ , e assim por diante.

Sendo:  $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,

as linhas elásticas correspondentes à aplicação de  $M_1$ , de  $M_2, \dots$  de  $M_n$  ter-se-á:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = - \frac{M_1}{EJ}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = - \frac{M_2}{EJ}$$

$\vdots$

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = - \frac{M_n}{EJ}$$

donde:

$$\frac{d^2}{dx^2} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = - \frac{1}{EJ} (M_1 + M_2 + \dots + M_n) = - \frac{M}{EJ}$$

isto é, a linha elástica  $y$ , devida ao momento  $M$ , é:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

Quando, porém, o momento fletor  $M$  também é função de  $y$ , como acontece nos casos de vigas com carga axial (figura 73), não é mais válido o princípio da superposição dos efeitos das cargas  $H, P_1, P_2, P_3$  pois a equação diferencial

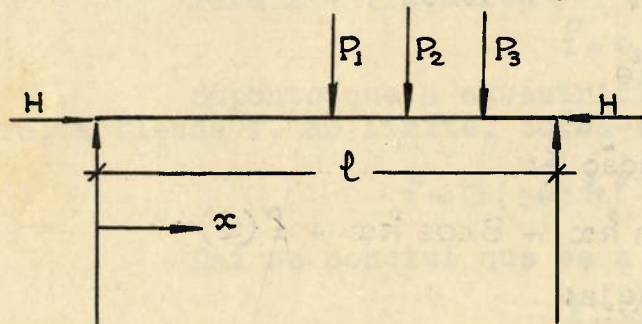


Figura 73

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ} = - \frac{1}{EJ} (M_0 + Hy)$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Hy = - M_0$$

não é homogênea em relação a essas quantidades. Note-se porém que, se  $M_1, M_2$  e  $M_3$  forem os momentos devidos respectivamente a  $P_1, P_2$  e  $P_3$  ter-se-á:

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Hy = - (M_1 + M_2 + M_3)$$

$$EJ \frac{d^2 y_1}{dx^2} + Hy_1 = - M_1$$

$$EJ \frac{d^2 y_2}{dx^2} + Hy_2 = - M_2$$

$$EJ \frac{d^2 y_3}{dx^2} + Hy_3 = - M_3$$



O efeito total é pois igual à soma dos efeitos parciais de cada carga  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , considerada aplicada, cada uma de per si e simultaneamente com a força longitudinal  $H$ . Há pois uma lei de superposição, mas tôda sui-generis, e que só se refere às cargas transversais.

34 - Fórmula de Euler:- Consideremos a coluna prismática da figura 74, submetida à força de compressão  $P$  aplicada com excentricidade  $e$ . O eixo da peça, inicialmente reto, vai se encurvando; se  $y = f(x)$  é a equação da linha elástica o momento fletor na seção de abscissa  $x$  é:

$$M = -P(e + y)$$

Substituindo êsse valor na equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} (f - y) = - \frac{M}{EJ} = \frac{P}{EJ} (e + y)$$

Fazendo:

$$k^2 = \frac{P}{EJ}$$

resulta:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2(e + y)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 e$$

A solução dessa equação é:

$$y = A \cdot \text{sen } kx + B \cos kx + f(x)$$

Admitindo que  $f(x)$  seja:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

vem:

$$f'(x) = a_1$$

$$f''(x) = 0$$

substituindo em:

$$f''(x) + k^2 f(x) = -k^2 e$$

resulta:

$$a_0 + a_1 x = -e$$

isto é:

$$a_0 = -e$$

$$a_1 = 0$$

Donde:

$$f(x) = -e$$

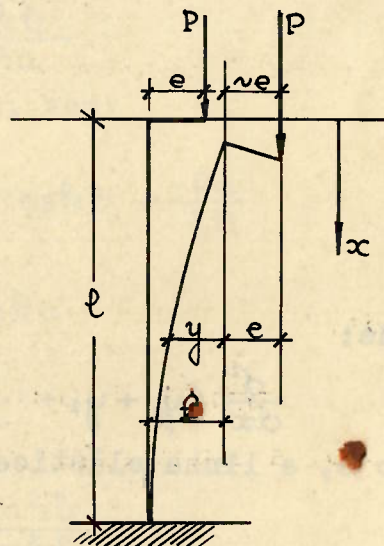


Figura 74



$$y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - e$$

As constantes A e B determinam-se com as condições:

$$1) \quad y = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{para} \quad x = l$$

isto é:

$$0 = B - e$$

$$0 = kA \cos kl - kB \operatorname{sen} kl$$

donde:

$$B = e$$

$$A = B \operatorname{tg} kl = e \operatorname{tg} kl$$

Finalmente:

$$y = e (\operatorname{tg} kl \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1)$$

$$y = e \left( \frac{\operatorname{sen} kl \operatorname{sen} kx + \cos kl \cos kx}{\cos kl} - 1 \right)$$

$$y = e \left[ \frac{\cos k(l-x)}{\cos kl} - 1 \right]$$

Para  $x = l$  resulta

$$f = e (\sec kl - 1)$$

Supondo que a excentricidade  $e$  da carga P tenda para zero, a flecha  $f$ , no limite, torna-se:

$$f = 0 (\sec kl - 1) = 0 \frac{1 - \cos kl}{\cos kl}$$

Dai se conclui que se a fração:

$$\frac{1 - \cos kl}{\cos kl}$$

tiver valor finito, a flecha é nula e a coluna permanece reta; quando, porém, se tiver:

$$\cos kl = 0$$

isto é:

$$kl = n \frac{\pi}{2} \quad (n=1, 3, \dots)$$

a expressão de  $f$  assume a forma indeterminada:

$$f = 0 \cdot \infty$$

e, então, a flecha poderá ser diferente de zero.

Sendo:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

a condição

$$kl = n \frac{\pi}{2}$$



se escreve:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} l = n \frac{\pi}{2}$$

ou:

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$$

Tais são os valores da carga  $P$  para os quais a flecha  $f$  pode não ser nula. Ao menor desses valores da carga  $P$ , e que corresponde a  $n = 1$ , dá-se o nome de carga de flambagem.

A carga de flambagem da coluna reta e prismática, que estamos considerando, é, então:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$$

Observe-se que quando  $e$  é diferente de zero, qualquer que seja o seu valor, tem-se:

$$f = \infty$$

para  $P = P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$  (porque  $\cos kl = 0$ ).

Supondo-se uma coluna de comprimento  $l$ , módulo de elasticidade  $E$  e momento de inércia  $J$ , pode-se verificar que a variação de  $f$  em função de  $P$  a princípio é lenta, crescendo, porém, rapidamente quando  $P$  se aproxima de  $P_{fl}$  e tendendo para infinito quando  $\cos kl$  tende para zero.

Assim, para

$$kl = 0,1 \quad \text{tem-se} \quad f = 0,005025 e$$

$$kl = 0,5 \quad \text{tem-se} \quad f = 0,1395 e$$

$$kl = 1,0 \quad \text{tem-se} \quad f = 0,8508 e$$

$$kl = 1,5 \quad \text{tem-se} \quad f = 13,14 e$$

$$kl = \frac{\pi}{2} \quad \text{tem-se} \quad f = \infty$$

isto é, o valor de  $f$  se aproxima de infinito, por menor que seja a excentricidade  $e$  (porém não nula), quando a carga  $P$  se aproxima de  $P_{fl}$ .

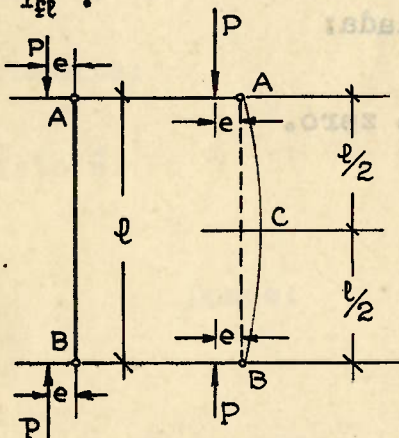


Figura 75

No caso de uma barra reta e prismática, articulada nas duas extremidades (figura 75) a determinação da carga de flambagem pode ser obtida diretamente a partir dos resultados obtidos no estudo da coluna da figura 74.

De fato, no caso em questão, cada uma das metades da barra está exatamente nas mesmas condições da barra da figura 74; trata-se, então, de determinar a carga de flambagem de uma coluna engastada em C (pois que, devido à



simetria, a tangente à linha elástica em C tem a direção do eixo da barra não deformada) e articulada em A. A carga de flambagem da barra da figura 75 é a mesma da barra da figura 74 desde que se considere como comprimento da coluna a distância  $l/2$ .

Portanto:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{4(l/2)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

No caso da barra reta e prismática, engastada nas duas extremidades (figura 76) a linha elástica apresentará em D e em E (à distância  $l/4$  dos engastamentos) pontos de inflexão; em C (ponto médio) a tangente à linha elástica terá a mesma direção do eixo da barra não deformada. Cada uma das quatro partes (AD, DC, CE e EB) está nas mesmas condições da coluna da figura 74. A carga de flambagem da barra da figura 76 é a mesma da barra da figura 74 desde que se considere como comprimento da coluna a distância  $l/4$ .

Portanto:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{4(l/4)^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$$

No caso em que a barra é articulada numa extremidade e engastada na outra (figura 77) a determinação da carga de flambagem não pode ser obtida assim tão facilmente. Aplicamos, então, o processo usado para o estudo da coluna da figura 74.

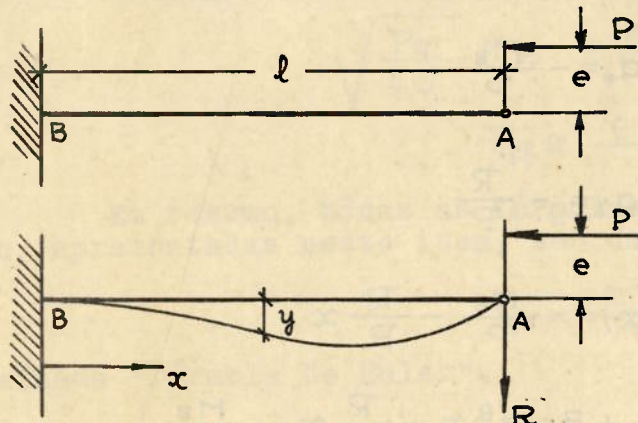


Figura 77.

Neste caso, a articulação A não permitindo nenhum movimento na direção normal à do eixo da barra não deformada, aparecerá em A a força R (figura 77).

O momento fletor na seção de abscissa x (onde a flecha é y) é:

$$M = P(e + y) - R(l - x)$$

ou, chamando:

$$M_A = P.e$$

$$M_B = P.e - R.l = M_A - R.l$$

vem:

$$M = P.y + R.x + M_B$$

Portanto:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{P.y + R.x + M_B}{EJ}$$

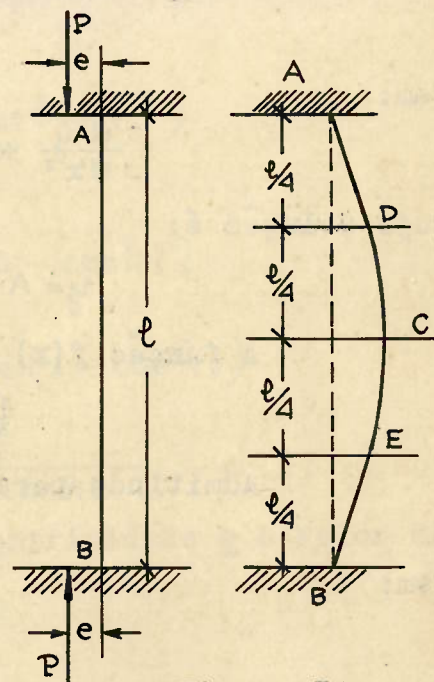


Figura 76



$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EJ} = - \frac{Rx + M_B}{EJ}$$

Fazendo:

$$k^2 = \frac{P}{EJ}$$

vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = - \frac{k^2}{P} (Rx + M_B)$$

cuja solução é:

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + f(x)$$

A função  $f(x)$  é tal que:

$$f''(x) + k^2f(x) = - \frac{k^2}{P} (Rx + M_B)$$

Admitindo para  $f(x)$  o polinômio:

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

vem:

$$f'(x) = a_1$$

$$f''(x) = 0$$

donde:

$$k^2(a_0 + a_1x) = - \frac{k^2}{P} (Rx + M_B)$$

isto é:

$$a_0 = - \frac{M_B}{P}$$

$$a_1 = - \frac{R}{P}$$

$$f(x) = - \frac{M_B}{P} - \frac{R}{P}x$$

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - \frac{R}{P}x - \frac{M_B}{P}$$

Para  $x = 0$  deve-se ter  $y = 0$ , logo:

$$0 = B - \frac{M_B}{P}$$

$$B = \frac{M_B}{P}$$

Para  $x = 0$  deve-se ter  $\frac{dy}{dx} = 0$ , logo:

$$0 = kA - \frac{R}{P}$$



$$A = \frac{R}{kP}$$

Portanto:

$$y = \frac{R}{kP} \cdot \operatorname{sen} kx + \frac{M_B}{P} \cdot \cos kx - \frac{R}{P} x - \frac{M_B}{P}$$

Para  $x = l$  tem-se  $y = 0$ , donde:

$$0 = \frac{R}{P} \left( \frac{\operatorname{sen} kl}{k} - l \right) + \frac{M_B}{P} (\cos kl - 1)$$

ou, como  $M_B = Pe - Rl$  :

$$R \left( \frac{\operatorname{sen} kl}{k} - l \right) = (Pe - Rl)(1 - \cos kl)$$

$$R \left[ \frac{\operatorname{sen} kl}{k} - l - l \cos kl + l \right] = Pe(1 - \cos kl)$$

$$R = Pe k \frac{1 - \cos kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl}$$

Qualquer que seja o valor da excentricidade  $e$  o valor de  $R$  torna-se infinito quando

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} kl &= kl \cos kl \\ \operatorname{tg} kl &= kl \end{aligned}$$

A menor raiz positiva dessa equação é:

$$kl = 4,49 \cong \pi\sqrt{2}$$

A carga de flambagem é:

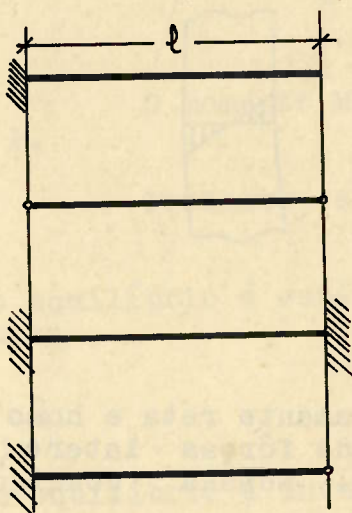
$$\sqrt{\frac{P_{fl}}{EJ}} \cdot l \cong \pi\sqrt{2}$$

$$P_{fl} \cong \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$$

Em resumo, todas as fórmulas que fornecem a carga de flambagem, apresentadas neste item, são do tipo:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l_f^2}$$

denominada "fórmula de Euler".



$$l_f = 2l$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l_f^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

$$l_f = l$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l_f^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$l_f = 0,5l$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l_f^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$l_f \cong \frac{l}{\sqrt{2}} \cong 0,7l$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l_f^2} \cong \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$$

Figura 78



O valor de  $l_f$  é denominado comprimento de flambagem; nos casos apresentados, os valores de  $l_f$  são os que se indicam na figura 78.

**35 - Flambagem:** - A teoria exposta no item anterior, segundo a qual se determinou a carga de flambagem para diversos tipos de barras retas prismáticas, sugere uma série de dúvidas. Assim, o caso da carga concentrada axial é apresentado como caso limite daquele em que a carga é aplicada com excentricidade, deixando a impressão de que a flexão da barra nesse caso só seja possível por causa de imperfeições na aplicação da carga concentrada axial, de modo a haver sempre uma excentricidade e não nula embora tão pequena quanto se possa imaginar.

Por outro lado, a expressão indeterminada:

$$f = 0. \infty$$

pode ter um valor diferente de zero para:

$$P = P_{fl}$$

$$e = 0$$

mas não se provou que de fato tal expressão tem um valor diferente de zero; portanto não se pode concluir que a flexão se dê com certeza.

É preferível, então, estudar diretamente o comportamento da barra com carga axial. Ver-se-á qual a essência do fenômeno da flambagem, e que mesmo no caso da carga perfeitamente axial o fenômeno é previsível; em outras palavras, uma barra reta axialmente carregada adquire, quando  $P = P_{fl}$ , uma forma de equilíbrio instável.

Para tal fim considere-se, por exemplo, uma coluna articulada nas duas extremidades (figura 79) e submetida a uma força de compressão  $P$ .

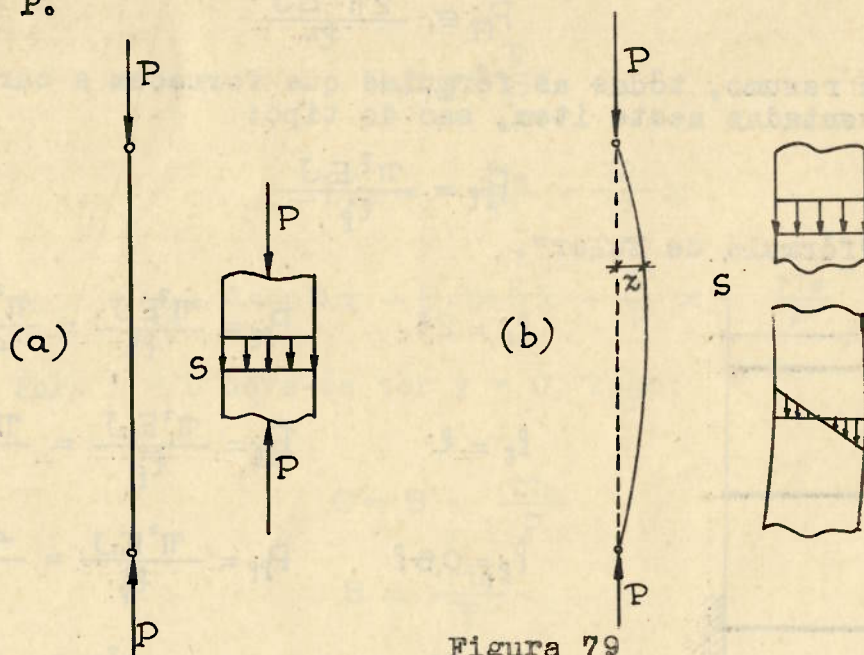


Figura 79

Suponhamos que a coluna seja perfeitamente reta e homogênea, a carga  $P$  exatamente axial, a ausência de forças laterais (coluna vertical) e as articulações sem atrito. Nessas condições



ter-se-á necessariamente uma barra em equilíbrio porque numa secção transversal qualquer, S, age o esforço normal  $P$  que provoca as tensões  $\sigma$ , uniformemente distribuídas pela secção; sua resultante passa pelo centro de gravidade da secção e coincide com a força externa  $P$ . Todavia, embora existindo equilíbrio pode tratar-se de "equilíbrio estável" ou de "equilíbrio instável". Para determinar a forma de equilíbrio basta modificar, de pouco, a posição inicial, por intermédio de uma causa qualquer, extranha, e vêr se, com o cessar desta, o sistema retoma a posição inicial ou se, ao invés, se afasta cada vez mais dessa posição.

Suponha-se, então, que se faça fletir a barra momentaneamente e que depois se anule a causa extranha que produziu a flexão. A força  $P$  (figura 79b), nessas condições, não passa mais pelo centro de gravidade da secção; o momento da força  $P$  em relação ao centro de gravidade de uma secção qualquer, S, é:

$$M_e = Pz$$

onde  $z$  é a linha elástica produzida apenas pela causa extranha, em questão. As mesmo tempo, a distribuição uniforme de tensões:

$$\sigma = \frac{P}{S}$$

se acresce outra distribuição de tensões (figura 79b) devida à linha elástica  $z$  e equivalente a um momento  $M_i$ .

É intuitivo que:

- 1) Se  $M_e < M_i$ , retirada a causa que produziu a linha elástica  $z$ , a coluna retoma a posição inicial, perfeitamente retilínea; trata-se, então, de uma forma "estável" de equilíbrio.
- 2) Se  $M_e > M_i$ , retirada a causa que produziu a linha elástica  $z$ , a coluna tende a se fletir cada vez mais e não retoma a posição inicial. A forma inicial de equilíbrio é "instável".

Observe-se porém que o momento  $M_i$ , em uma secção qualquer, depende unicamente da curvatura da linha elástica  $z$  na secção considerada, isto é, do tipo do deslocamento provocado e não depende do valor de  $P$ ; portanto, para uma dada linha elástica, seu valor é determinado:

$$M_i = \frac{EJ}{\rho} \approx EJ \frac{d^2z}{dx^2}$$

O momento  $M_e = P.z$  depende do deslocamento  $z$  e da carga  $P$ .

Portanto, se  $P$  é muito pequeno, resulta certamente:

$$M_e < M_i$$

e o equilíbrio é estável; se  $P$  é muito grande é possível que se tenha:

$$M_e > M_i$$

e o equilíbrio é instável.



Admita-se, então, a existência de um valor de  $P = P_{fl}$  para o qual

$$M_e = M_i$$

Nesse caso seriam possíveis, teoricamente, duas hipóteses: a barra permanece reta, ou a barra se encurva. De qualquer forma, para  $P = P_{fl}$  ter-se-ia uma forma de equilíbrio instável.

Estabelece-se, assim, que na carga axial o fenômeno da flambagem (passagem de uma forma de equilíbrio estável a outra forma de equilíbrio) não é devido apenas às inevitáveis imperfeições da coluna e da centragem da carga; produz-se ainda que não haja qualquer imperfeição, por quanto é devido ao fato de que, quando  $P$  atinge o valor  $P_{fl}$  e o supera (embora de pouco), a forma inicial de equilíbrio se torna instável.

Naturalmente ainda não se conclui que a barra deva fletir-se; todavia, como em todos os casos de equilíbrio instável, é extremamente improvável que a coluna permaneça reta (assim como é extremamente improvável que um pêndulo sem atrito permaneça firme com a massa na posição mais alta). Na prática, pois as inevitáveis imperfeições, embora muito pequenas, favorecem ou provocam o início do fenômeno.

Assim que  $P$  atinge  $P_{fl}$ , tem início a flexão, e bastam acréscimos muito pequenos de  $P$  para que a faça crescer de muito. Portanto, as tensões aumentam muito rapidamente podendo dar-se a ruptura do material; nessas condições, quer o material se rompa, quer a coluna se deforme demasiado, a estrutura deixa de ser aproveitável para o fim a que se destinara. Isto equivale a dizer-se que atingir a carga de flambagem é, nos cálculos, equivalente ao atingir-se uma carga de ruptura.

Visto isso, deduzamos diretamente a fórmula que fornece a carga de flambagem, afim de que se possa justificar o processo adotado no item 34.

Considere-se, por exemplo, a coluna reta e prismática da figura 80 submetida à carga axial  $P$ .

Supondo que a coluna atinja uma forma de equilíbrio instável, é possível, além da posição retilínea, que a barra se encurve. Isto implica em que  $M_i$  seja igual a  $M_e$  e se exprime escrevendo:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -Py$$

ou, fazendo:  $k^2 = \frac{P}{EJ}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

A integral geral é:

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

e sua derivada:

$$\frac{dy}{dx} = kA \cos kx - kB \sin kx$$

Para  $x = 0$  deve-se ter  $y = 0$ ,

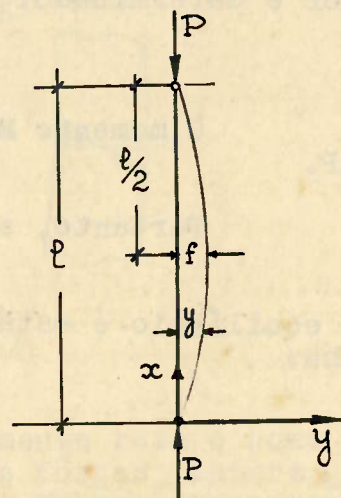


Figura 80



logo  $B = 0$  e a equação se escreve:

$$y = A \operatorname{sen} kx$$

Para  $x = l$  deve-se ter  $y = 0$ , logo:

$$0 = A \operatorname{sen} kl$$

Esta condição é satisfeita se  $A = 0$ , caso em que a coluna permanece reta, ou se:

$$kl = n\pi$$

Para  $n = 0$  tem-se  $kl = 0$ , o que só é possível, para  $l$  e  $EJ$  diferentes de zero, quando  $P$  é nulo. A solução não interessa, portanto. A primeira solução aceitável se obtém para  $n = 1$  e fornece:

$$kl = \pi$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

A carga de flambagem, assim obtida, coincide, portanto, com a que se determinou no item 34.

Se  $P$  é menor que  $P_{fl}$  tem-se:

$$\operatorname{sen} kl \neq 0$$

e, portanto:

$$A = 0$$

Portanto  $P_{fl}$  é o menor valor de  $P$  para o qual não são necessariamente nulas as constantes  $B$  e  $A$ .

Para  $x = \frac{l}{2}$  vem:

$$y = f = A \operatorname{sen} k \frac{l}{2} = A \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = A$$

onde:

$$A = f$$

e a linha elástica se escreve:

$$y = f \operatorname{sen} kx$$

Desejando-se determinar a flecha  $f$  com a condição:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=\frac{l}{2}} = 0$$

obtem-se:

$$0 = kf \cos \frac{kl}{2} = kf \cos \frac{\pi}{2}$$

isto é:

$$0 = kf \cdot 0$$

condição satisfeita qualquer que seja o valor de  $f$ . A flecha permanece indeterminada, isto é, quando  $P = P_{fl}$  o equilíbrio é instável qualquer que seja o valor de  $f$ .

Esta conclusão não corresponde, porém, à realidade porque quando a coluna começa a fletir-se bastam pequenos acréscimos de  $P$  além de  $P_{fl}$  para que se produzam flechas consideráveis, e a qualquer valor de  $P > P_{fl}$  corresponde uma flecha  $f$  determinada.



A incongruência é devida ao emprêgo da equação aproximada:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cong - \frac{M}{EJ}$$

a qual se aplica apenas para deformações pequenas e que, portanto, não pode interpretar o fenômeno quando  $f$  atinge valores grandes.

Observe-se, todavia, que o valor de  $P_{fl}$  é exato não obstante o emprêgo da equação aproximada, porque para a determinação da carga que corresponde ao início da instabilidade as deformações consideradas são, ainda, muito pequenas.

De tudo o que foi apresentado resulta ainda que no caso de vigas esbeltas com carga axial (figura 69) a carga  $P$  não influe sobre o valor da carga de flambagem, isto é, a barra  $AB$  flamba quando  $H$  atinge o valor  $H_{fl}$  determinado como se  $p$  fosse nulo.

Aliás isso se deduz da equação:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Hy = -M_0$$

pois que, sendo  $M_0$  finito, ele não influirá no valor infinito de  $y$  [condição que permitiu determinar  $P_{fl}$  para os casos estudados no item 34; assim, por exemplo, no caso da coluna da figura 74 partiu-se de  $f = e$  (seck  $l = 1$ ) e determinou-se  $P_{fl}$  procurando o valor de  $kl$  que tornava  $f$  infinito].

36 - Exercícios: - 1) Determinar a equação da linha elástica e a flecha máxima da barra prismática de eixo ligeiramente curvo, da figura 81, submetida à carga  $P$  agindo segundo a reta que une as suas extremidades.

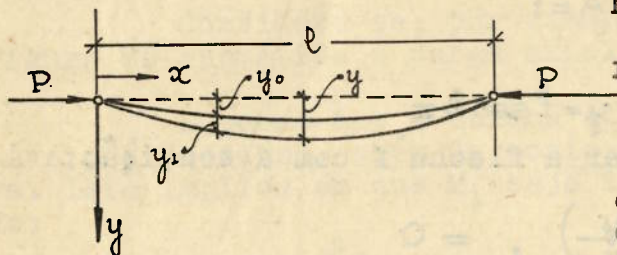


Figura 81

linha elástica deduzida para as barras de eixo reto, vem (figura 81):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = - \frac{M}{EJ}$$

Mas:  $M = P(y_0 + y_1)$

$$y_1 = y - y_0$$

donde:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} = - \frac{P}{EJ} y$$

Fazendo:

$$k^2 = \frac{P}{EJ}$$

A equação do eixo da barra é:

$$y_0 = \Delta \sin \frac{\pi x}{l}$$

Chamando  $y = f(x)$  a equação do eixo deformado e admitindo que o valor de  $\Delta$  seja suficientemente pequeno (barra de pequena curvatura) para poder-se aplicar a equação diferencial da



e substituindo:

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta \sin \frac{\pi x}{l}$$

vem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta \sin \frac{\pi x}{l}$$

A solução dessa equação é:

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx + f(x)$$

sendo:

$$f''(x) + k^2 f(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta \sin \frac{\pi x}{l}$$

Admitindo para  $f(x)$  a função:

$$f(x) = c \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$f''(x) = -c \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

e substituindo na igualdade acima vem:

$$-c \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} + k^2 c \cdot \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta \sin \frac{\pi x}{l}$$

donde:

$$-c \cdot \frac{\pi^2}{l^2} + k^2 c = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta$$

$$c \left( \frac{\pi^2 - k^2 l^2}{l^2} \right) = \frac{\pi^2}{l^2} \Delta$$

$$c = \frac{\pi^2 \Delta}{\pi^2 - k^2 l^2}$$

Portanto:

$$y = A \operatorname{sen} kx + B \operatorname{cos} kx + \frac{\pi^2 \Delta}{\pi^2 - k^2 l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Para  $x = 0$  deve-se ter  $y = 0$ , logo  $B = 0$

Para  $x = l$  deve-se ter  $y = 0$ , logo:

$$0 = A \cdot \operatorname{sen} kl$$

Essa condição é satisfeita para  $A = 0$  ou para

$$\operatorname{sen} kl = 0$$

O menor valor de  $P$ , não nulo, para o qual a condição a cima é satisfeita é:

$$kl = \pi$$

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} \cdot l = \pi$$

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_{fl}$$



Mas para esse valor de  $P$  obtém-se a carga de flambagem. Daí se conclui que para  $P < P_{fl}$  a condição  $A = 0$  é a que deve ser adotada.

Portanto, a linha elástica é:

$$y = \frac{\Delta \pi^2}{\pi^2 - k^2 l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

O valor máximo de  $y$  obtém-se para  $x = \frac{l}{2}$ ; seu valor é:

$$y_m = \frac{\Delta \pi^2}{\pi^2 - k^2 l^2} = \Delta \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{fl}}}$$

2) A coluna reta e prismática da figura 82 é submetida à carga de compressão  $P$  aplicada com excentricidade  $e$ . Admitindo que a seção transversal seja uma coroa de círculo de diâmetro externo  $D = 20$  cm e diâmetro interno  $d = 18$  cm; o comprimento  $l = 6$  m e  $P = 2500$  kg, pede-se calcular a excentricidade máxima sabendo-se que o material de que é feita a coluna é aço com limite de escoamento  $\sigma_e = 2700$  kg/cm<sup>2</sup>. Admite-se o coeficiente de segurança  $n = 3$ .

Observe-se, de início, que a seção mais solicitada é a do engastamento, onde, em valor absoluto:

$$M = P(e + f) = Pe + Pe(\sec k l - 1)$$

$$M = Pe \sec k l$$

Nessa seção a tensão máxima de compressão é:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} + \frac{Pe}{W''} \sec k l$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} \left[ 1 + \frac{e}{k''} \sec k l \right]$$

onde  $S$  é a área da seção transversal e  $k''$  a distância nuclear.

Não é válida, porém, a condição de dimensionamento:

$$\sigma_{\max} \leq \bar{\sigma}$$

De fato, recorde-se que ao se estabelecer a condição:

$$P \leq \frac{P_R}{n}$$

onde  $P$  é a carga a que se submete a estrutura,  $P_R$  a carga de ruptura correspondente e  $n$  o coeficiente de segurança, só se tem:

$$\sigma_{\max} \leq \bar{\sigma}$$

quando as tensões  $\sigma$  são proporcionais às cargas  $P$ .

No caso em questão:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} \left[ 1 + \frac{e}{k''} \sec \left( l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) \right]$$

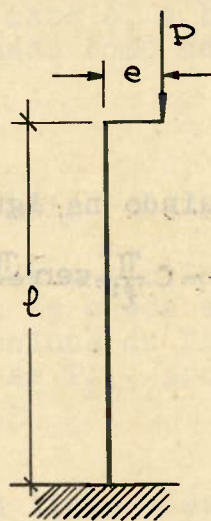


Figura 82



isto é, a tensão  $\sigma_{\max}$  cresce muito mais rapidamente que a força  $P$  de modo que impondo a condição

$$\sigma_{\max} = \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R}{n}$$

tem-se o grau de segurança, fixado pelo coeficiente  $n$ , para as tensões, mas para a força  $P$  realmente aplicada e a carga de ruptura  $P_R$  o grau de segurança é menor.

Portanto, para que se conserve o coeficiente de segurança  $n$ , para a força externa, deve-se estabelecer que a tensão máxima correspondente à força  $nP$  seja no máximo, igual à maior tensão a que o material pode resistir.

Não é lícito, porém, exprimir-se essa condição igualando a tensão máxima (correspondente à força  $nP$ ) à tensão de ruptura  $\sigma_R$  porque o material deixa de ser elástico antes de atingir a tensão de ruptura e não são mais válidas, então, as hipóteses adotadas para a dedução da fórmula:

$$M = P \cdot e \cdot \sec k \ell$$

Considerando-se, porém, a tensão máxima admissível como sendo a de escoamento, a qual já compromete a resistência do material, e admitindo ainda que até essa tensão o material se comporte de acordo com a lei de Hooke, a condição de resistência se exprime:

$$\frac{nP}{S} \left[ 1 + \frac{e}{k''} \sec \left( \ell \sqrt{\frac{nP}{EJ}} \right) \right] \leq \sigma_e$$

Voltando ao problema em questão, a excentricidade máxima se escreve:

$$e = \left( \frac{\sigma_e \cdot S}{nP} - 1 \right) k'' \cos \left( \ell \sqrt{\frac{nP}{EJ}} \right)$$

De acordo com os dados:

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 59,7 \text{ cm}^2$$

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 2701 \text{ cm}^4$$

$$k'' = \frac{W''}{S} = \frac{2J}{DS} = 4,52 \text{ cm}$$

$$\sigma_e = 2700 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = 3$$

$$P = 2500 \text{ kg}$$

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

vem:

$$e = \left( \frac{2700 \times 59,7}{3 \times 2500} - 1 \right) 4,52 \cos \left( 600 \sqrt{\frac{3 \times 2500}{2,1 \times 10^6 \times 2701}} \right)$$

$$e = 20,49 \times 4,52 \cos 0,690 = 71,4 \text{ cm}$$

$$e = 71,4 \text{ cm}$$



A flecha máxima é:

$$f = e (\sec k l - 1) = 71,4 \frac{1 - \cos 0,398}{\cos 0,398}$$

$$f = 6,05 \text{ cm}$$

Observe-se que a tensão máxima de compressão é

$$\sigma_{\max} = \frac{2500}{59,7} \left( 1 + \frac{71,4}{4,52} \sec 0,398 \right) = 759,5 \text{ kg/cm}^2$$

donde o coeficiente de segurança relativo às tensões:

$$n' = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\max}} = \frac{2700}{759,5} = 3,56$$

37 - Limite de aplicação da fórmula de Euler: - A carga de flambagem de uma barra reta e prismática, que obedece à lei de Hooke e à hipótese de Navier (as secções planas permanecem planas após a deformação) é:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 E J}{l_f^2}$$

onde:  $l_f$  = comprimento de flambagem

$E$  = módulo de elasticidade do material

$J$  = menor momento de inércia da secção transversal da barra.

Define-se tensão de flambagem, e designa-se por  $\sigma_{fl}$ , a relação:

$$\sigma_{fl} = \frac{P_{fl}}{S}$$

onde  $S$  é a área da secção transversal da barra.

A tensão de flambagem, quando são satisfeitas as hipóteses que permitiram a dedução da fórmula de Euler, se escreve:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{l_f^2} \cdot \frac{J}{S}$$

Fazendo:

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} \quad = \text{raio de giração mínimo}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} \quad = \text{índice de esbeltez}$$

resulta:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Dai se conclui que a tensão de flambagem é função do índice de esbeltez da barra; a função  $\sigma_{fl} = f(\lambda)$  é uma hipérbole cúbica (figura 83) denominada hipérbole de Euler. Essa curva apresenta como assíntota o eixo dos  $\sigma_{fl}$  mostrando que a tensão de flambagem cresce indefinidamente à medida que  $\lambda$  se aproxima de zero.



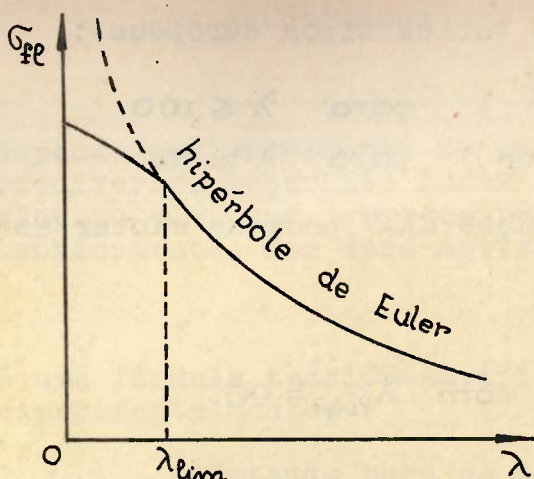


Figura 83

Todavia a fórmula de Euler não é aplicável qualquer que seja o valor de  $\lambda$ ; para valores de  $\lambda$  menores que um determinado valor, denominado "índice de esbeltez limite" ( $\lambda_{lim}$ ), os valores de  $\sigma_{Fl}$  são maiores que a tensão correspondente ao limite de proporcionalidade  $\sigma_p$  do material. Nesse caso a fórmula de Euler não é mais aplicável porque ultrapassado o limite de proporcionalidade o material não obedece mais à lei de Hooke. A fórmula de Euler só é aplicável quando:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_p$$

isto é, para:

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

O valor  $\lambda_{lim}$  é, então:

$$\lambda_{lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

No caso do aço tem-se:

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$\sigma_p = 2400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{2100000}{2400}} = 93$$

Para as madeiras  $\lambda_{lim} \approx 60$  a 70 e para o ferro fundido  $\lambda_{lim} \approx 80$ .

Para valores de  $\lambda$  inferiores a  $\lambda_{lim}$  tem-se uma curva da forma indicada na figura 83, para a qual diversas fórmulas empíricas ou teórico-empíricas têm sido propostas.

Dentre elas salienta-se a de Tetmayer:

$$\sigma_{Fl} = a_1 - a_2 \lambda - a_3 \lambda^2$$

Observe-se porém que os coeficientes  $a_i$  apresentados por Tetmayer, ou por outros pesquisadores que adotam também essa fórmula, foram determinados em ensaios de Laboratório; deve-se portanto, no dimensionamento, ter o cuidado de verificar se as características dos materiais que se possuem são idênticas às dos materiais das experiências que forneceram esses coeficientes.

As fórmulas apresentadas por Tetmayer são (em  $\text{kg/cm}^2$ ):

a) Para o ferro fundido:

$$\sigma_{Fl} = 7760 - 120 \lambda + 0,53 \lambda^2 \quad \text{para } \lambda \leq 80$$

$$\sigma_{Fl} = \frac{9870000}{\lambda^2} \text{ (Euler)} \quad \text{para } \lambda \geq 80$$



b) Para a madeira (média de vários tipos europeus):

$$\begin{aligned}\sigma_{fe} &= 293 - 1,94 \lambda & \text{para } \lambda \leq 100 \\ \sigma_{fe} &= \frac{987000}{\lambda^2} \text{ (Euler)} & \text{para } \lambda \geq 100\end{aligned}$$

Para o aço fundido e o aço doce CA37 pode-se adotar as as fórmulas seguintes:

a) Para o aço fundido:

$$\sigma_{fe} = 3350 - 6,2 \lambda \quad \text{com } \lambda_{lim} = 90$$

b) Para o aço doce CA37:

$$\begin{aligned}\sigma_{fe} &= 2400 \text{ kg/cm}^2 & \text{para } 0 \leq \lambda \leq 60 \\ \sigma_{fe} &= 2890,5 - 8,175 \lambda & \text{para } 60 \leq \lambda \leq 100\end{aligned}$$

sendo  $\lambda_{lim} = 100$ .

Os ensaios de flambagem, descritos no Boletim nº 10 do I.P.T., referentes à peroba, conduziram aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned}\sigma_{fe} &= 345 \text{ kg/cm}^2 & \text{para } 0 < \lambda \leq 15 \\ \sigma_{fe} &= 378 - 2,19 \lambda & \text{para } 15 \leq \lambda \leq 62 = \lambda_{lim} \\ \sigma_{fe} &\approx \frac{930000}{\lambda^2} \text{ (Euler)} & \text{para } \lambda \geq \lambda_{lim}\end{aligned}$$

Considerando o inconveniente das fórmulas de Tetmayer só poderem ser aplicadas para materiais já ensaiados, procuraram outros autores deduzir teoricamente a expressão de  $\sigma_{fe} = f(\lambda)$  válida para  $\lambda < \lambda_{lim}$ . Entre essas fórmulas, distingue-se a de Rankine, também denominada de Navier ou de Schwartz. Essa fórmula pode ser deduzida admitindo-se que a fórmula de Euler seja aplicável também para  $\lambda < \lambda_{lim}$  desde que se substitua o valor de E pelo módulo de elasticidade fictício (função de  $\sigma_{fe}$ ):

$$E_f = E \left( 1 - \frac{\sigma_{fe}}{\sigma_R} \right)$$

onde E = módulo de elasticidade do material.

$\sigma_R$  = tensão de ruptura à compressão simples.

Nessas condições tem-se:

$$\sigma_{fe} = \frac{\pi^2 E_f}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{\sigma_{fe}}{\sigma_R} \right)$$

donde:

$$\sigma_{fe} = \frac{\sigma_R}{1 + \frac{\sigma_R}{\pi^2 E} \lambda^2} = \frac{\sigma_R}{1 + A \lambda^2}$$



A quantidade:

$$A = \frac{\sigma_R}{\pi^2 E}$$

depende exclusivamente do material em estudo. Os valores de A para diversos materiais foram determinados experimentalmente por Rankine, o qual não empregou para essa quantidade o valor deduzido teoricamente. Por esse motivo diz-se que a fórmula de Rankine:

$$\sigma_{fl} = \frac{\sigma_R}{1 + A\lambda^2}$$

é uma fórmula teórica-empírica, sendo o coeficiente A determinado experimentalmente.

Adotando para as tensões a unidade kg/cm<sup>2</sup> os valores de A são, em média:

A = 0,0007 para o ferro fundido

A = 0,0001 para o concreto

A = 0,0006 para madeiras europeias

A = 0,00012 para a peroba (ensaios I.P.T.)

38 - Dimensionamento:- O dimensionamento de peças de estruturas, à flambagem, é feito, em geral, estabelecendo-se que a tensão máxima seja menor que a enésima parte da tensão de flambagem correspondente.

A ordem de grandeza do coeficiente de segurança n adotado para a flambagem é:

a) para o ferro fundido:  $n \approx 6$  a 8

b) para os aços:  $n \approx 5$

c) para a madeira:  $n \approx 7$  a 10

O cálculo é feito, então, a partir da tensão admissível à flambagem:

$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{n}$$

Quando a seção transversal da barra e o comprimento de flambagem são conhecidos, calculam-se, de início os valores de:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}$$

$$\lambda_{lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}}$$

Conforme se tenha  $\lambda \geq \lambda_{lim}$  ou  $\lambda < \lambda_{lim}$  aplica-se a fór



mula correspondente para o cálculo de  $\sigma_{fl}$ ; fixado o coeficiente de segurança  $n$  tem-se:

$$\frac{P}{S} = \frac{\sigma_{fl}}{n} = \bar{\sigma}_{fl}$$

donde:  $P = \bar{\sigma}_{fl} \cdot S$ .

Se se fixa, porém, a carga  $P$ , obtém-se o coeficiente de segurança:

$$n = \sigma_{fl} \cdot \frac{S}{P}$$

Quando se trata de dimensionar a secção transversal, o problema se resolve por tentativas: pode-se, por exemplo, admitir, de início, uma secção transversal qualquer e verificar se o coeficiente de segurança  $n$  (fixado  $P$ ) é aquele que se deseja. Caso contrário modificam-se as dimensões (ou a forma e as dimensões) da secção transversal até que se consiga obter o coeficiente de segurança desejado.

O processo acima descrito é empregado quando se adota um coeficiente de segurança constante qualquer que seja o valor de  $\lambda$ . Os processos de dimensionamento mais modernos adotam, porém, coeficientes de segurança variáveis com o índice de esbeltez. Nesse caso o dimensionamento é feito de maneira análoga ao das peças que trabalham à compressão simples, devendo-se, porém, multiplicar a carga  $P$  por um coeficiente  $\omega$ . Aplica-se, então, a fórmula:

$$\omega \frac{P}{S} \leq \bar{\sigma}$$

sendo  $\bar{\sigma}$  a tensão admissível à compressão simples.

O coeficiente  $\omega$ , função de  $\lambda$  e do material que se considera, é apresentado em tabelas, nos manuais de Engenharia, como por exemplo o Hütte.

Para o aço CA37 pode adotar-se a fórmula ( $\omega = 1$  para  $\lambda < 20$ ):

$$\omega = 1 + 2 \left( \frac{\lambda - 20}{100} \right)^2 \quad \text{para } \lambda > 20$$

que fornece, em relação aos valores tabelados no Hütte, erros da ordem de 1,5 %.

Para o concreto, adotam as normas brasileiras, a fórmula:

$$\omega = \frac{100}{150 - \lambda} \quad 50 \leq \lambda \leq 110$$

$$\omega = 1 \quad \text{para } \lambda < 50$$

O processo tem a vantagem de que os valores de  $\omega$  já levam em conta o fato de a fórmula de Euler só ser aplicável para  $\lambda > \lambda_{lim}$ ; isto simplifica de muito os cálculos, porque não é necessário aplicarem-se fórmulas (ou tabelas) diferentes para o cálculo de  $\omega$ , conforme se tenha  $\lambda > \lambda_{lim}$  ou  $\lambda < \lambda_{lim}$ . Além disso, permite calcular as peças sujeitas à compressão excêntrica com a fórmula:

$$\omega \frac{P}{S} \pm \frac{M}{W} \leq \bar{\sigma}$$



análoga à da flexão composta.

89 - Exercícios:- 1) Determinar a carga de flambagem de uma barra reta, articulada nas extremidades, com 2,45m de comprimento e secção transversal circular de diâmetro  $d = 1,27\text{cm}$ . Admite-se  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  e  $\lambda_{\text{lim}} = 100$ .

No caso tem-se:

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = 3,14 \frac{1,27^4}{64} = 0,125 \text{ cm}^4$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$i^2 = \frac{J}{S} = \frac{d^2}{16}$$

$$i = \frac{d}{4}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{l}{i} = \frac{4l}{d} = \frac{4 \times 245}{1,27} \approx 773$$

Sendo  $\lambda > \lambda_{\text{lim}} = 100$  é aplicável a fórmula de Euler:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 E J}{l^2} \approx \frac{10 \times 2100000 \times 0,125}{245 \times 245} = 43,8 \text{ kg}$$

$$P_{fl} = 43,8 \text{ kg}$$

2) Uma coluna reta e prismática com  $S = 29,6\text{cm}^2$ ,  $J_{\text{min}} = 178 \text{ cm}^4$ ,  $l = 2\text{m}$ , articulada nas extremidades, suporta a carga de compressão  $P = 20\text{t}$ . Determinar o coeficiente de segurança sabendo-se que o material de que é feita a coluna é tal que  $\sigma_{fl} = 3100 - 11,4\lambda$  para  $\lambda < \lambda_{\text{lim}} = 100$ .

No caso, tem-se:

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} = \sqrt{\frac{178}{29,6}} = 2,45 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{l}{i} = \frac{200}{2,45} = 86$$

Como  $\lambda < \lambda_{\text{lim}}$ , tem-se:

$$\sigma_{fl} = 3100 - 11,4 \times 86 = 2186 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \sigma_{fl} \cdot \frac{S}{P} = 2186 \frac{29,6}{20000} = 3,23$$



3) Dimensionar um pilar de peroba de seção transversal retangular, com 3m de comprimento, para suportar a carga de compressão  $P = 9t$ . Sabe-se que a tensão de ruptura à compressão simples, da peroba, é  $545 \text{ kg/cm}^2$  e que a tensão admissível correspondente é  $80 \text{ kg/cm}^2$ .

Admitindo para o cálculo de flambagem que se adote coeficiente de segurança constante, vem:

onde  $\sigma_R$  é a tensão de ruptura à compressão simples e  $\sigma$  a tensão admissível correspondente.

Portanto:

$$\frac{P}{S} = \frac{\sigma_R}{n} = \frac{\sigma_R}{\sigma} \cdot \sigma$$

$$\frac{P}{S} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_R} = \sigma$$

Chamando:

$$\omega' = \frac{P}{S} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_R}$$

vem:

$$\omega' \cdot \frac{P}{S} = \sigma$$

isto é, o dimensionamento pode ser feito como se tratasse de compressão simples, desde que se multiplique a carga  $P$  pelo coeficiente:

$$\omega' = \frac{\sigma}{\sigma_R}$$

onde  $\sigma_R$  é constante e  $\sigma$  é função de  $\lambda$ .  
Chamando a  $b$  ( $b > a$ ) os lados do retângulo da seção transversal, vem:

$$J_{\min} = \frac{ba^3}{12}$$

$$S = \frac{ba}{2} \cdot \sqrt{\frac{12}{ba^3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12}{ba}}$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} = \sqrt{\frac{1}{12} \frac{ba^3}{ba}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$\lambda = \frac{l}{i} = \sqrt{12} \cdot \frac{l}{a} = 3,46 \cdot \frac{l}{a}$$

Admitindo  $a = 12 \text{ cm}$  vem:

$$\lambda = 3,46 \cdot \frac{300}{12} = 86,5$$

De acordo com os dados do Boletim nº 10 do I.P.T. tem-



-se  $\lambda_{lim} = 62$ ; é, portanto, aplicável a fórmula de Euler:

$$\sigma_{fl} \approx \frac{930000}{\lambda^2} = \frac{930000}{86,5 \times 86,5} \approx 124 \text{ kg/cm}^2$$

Tem-se:

$$\omega' = \frac{\sigma_R}{\sigma_{fl}} = \frac{345}{124} = 2,78$$

$$P\omega' = S\bar{\sigma} = a b \bar{\sigma}$$

$$b = \omega' \frac{P}{a \bar{\sigma}} = 2,78 \cdot \frac{9000}{12 \cdot 80} = 26$$

$$b = 26 \text{ cm}$$

Finalmente:

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$b = 26 \text{ cm}$$

Se admitíssemos  $a = 14 \text{ cm}$  resultaria:

$$\lambda = 3,46 \cdot \frac{300}{14} = 74,2 > \lambda_{lim}$$

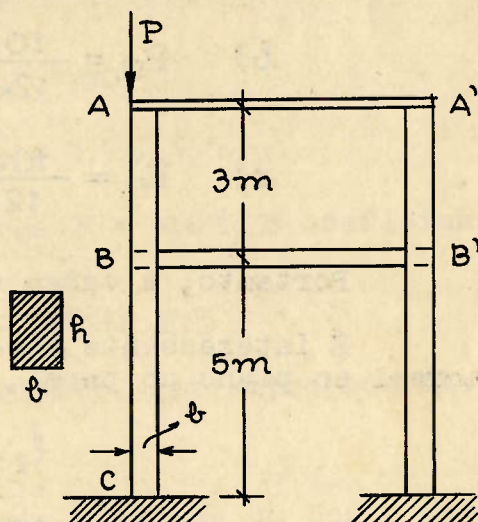
$$\sigma_{fl} \approx \frac{93000}{74,2 \times 74,2} = 169 \text{ kg/cm}^2$$

$$\omega' = \frac{345}{169} = 2,04$$

$$b = 2,04 \cdot \frac{9000}{14 \cdot 80} = 16,5 \text{ cm}$$

4) A coluna de madeira, ABC é engastada em C e articulada em A (figura 84). No ponto A ligam-se à coluna duas vigas: uma, AA', situada no plano do papel e outra normal ao plano do papel. No ponto B liga-se à coluna somente a viga BB' situada no plano do papel. Pede-se determinar a carga de flambagem da coluna sabendo-se que sua seção transversal é retangular ( $b = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 30 \text{ cm}$ ),  $E = 100 \text{ t/cm}^2$  e  $\lambda_{lim} = 60$ .

Considerando-se a flambagem no plano do papel tem-se:



a) Trecho AB:

Figura 84



$$l_f = 3 \text{ m (articulada em A e em B)}$$

b) Trecho BC:

$$l_f = 0,7 \times 5 \text{ m} = 3,5 \text{ m}$$

Considerando-se a flambagem no plano normal ao do papel:

c) Coluna AC:

$$l_f = 0,7 \times 8 \text{ m} = 5,6 \text{ m}$$

O índice de esbeltez, no caso de secção retangular, é:

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = 3,46 \frac{l_f}{a}$$

onde a é o lado do retângulo paralelo ao plano de flambagem.

Para os três casos considerados, tem-se:

$$a) \quad \lambda = 3,46 \cdot \frac{300}{10} = 103,8$$

$$b) \quad \lambda = 3,46 \cdot \frac{350}{10} = 121,1$$

$$c) \quad \lambda = 3,46 \cdot \frac{560}{30} = 64,6$$

Nos três casos é aplicável a fórmula de Euler, pois:  
 $\lambda > \lambda_{lim}$ .

As cargas de flambagem correspondentes aos três casos em questão, são:

$$a) \quad P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l_f^2} = \frac{10 \times 100 \times 30 \times 10^3}{12 \times 3 \times 3 \times 10^4} = 28 \text{ t}$$

$$b) \quad P_{fl} = \frac{10 \times 100 \times 30 \times 10^3}{12 \times 3,5 \times 3,5 \times 10^4} = 20 \text{ t}$$

$$c) \quad P_{fl} = \frac{10 \times 100 \times 27 \times 10^4}{12 \times 5,6 \times 5,6 \times 10^4} = 70 \text{ t}$$

Portanto, a carga de flambagem da coluna é 20 t.

É interessante observar que se não existisse em A a viga normal ao plano do papel, o caso c daria:

$$l_f = 2 \times 8 = 16 \text{ m}$$

$$\lambda = 3,46 \frac{1600}{30} = 184,5 > \lambda_{lim}$$



$$P_{fl} = \frac{10 \times 100 \times 27 \times 10^4}{12 \times 16 \times 16 \times 10^4} = 8,8 t$$

e a carga de flambagem cairia de 20t para 8,8 t.

5) Numa peça de máquina de aço doce, com lm de comprimento e secção transversal circular vazada, com diâmetro externo  $D = 2cm$  e diâmetro interno  $d = 1,6cm$ , engastada numa extremidade e articulada na outra, deve-se aplicar a força axial de compressão  $P = 0,8t$ . Sabe-se que para o aço doce:

$$\lambda_{lim} = 100$$

$$E = 2100 t/cm^2$$

$$\sigma_{fl} = 3100 - 11,4 \lambda \quad \text{para} \quad \lambda < \lambda_{lim}$$

Adotando-se o coeficiente de segurança 4 quando  $\lambda < \lambda_{lim}$  e o coeficiente 5 quando  $\lambda > \lambda_{lim}$  pergunta-se: 1) Pode-se empregar a peça nas condições descritas?

2) No caso da negativa, que solução se propõe para que sejam satisfeitas as condições impostas?

De acordo com os dados do problema tem-se:

$$J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 0,464 cm^4$$

$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 1,13 cm^2$$

$$l_f = 0,7 \times 100 = 70 cm$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} = 0,64$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{70}{0,64} = 109,5$$

Aplicando a fórmula de Euler vem:

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{10 \times 2100}{109,5 \times 109,5} = 1,75 t/cm^2$$

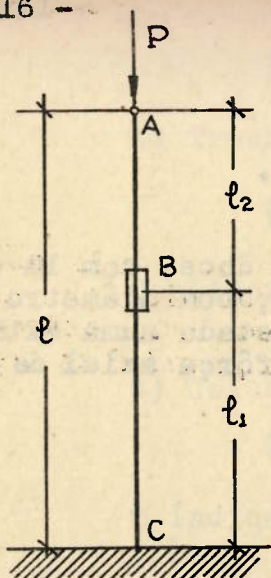
Carregando a peça com a carga  $P = 0,8t$ , o coeficiente de segurança à flambagem será:

$$n = \sigma_{fl} \cdot \frac{S}{P} = 1,75 \cdot \frac{1,13}{0,8} \cong 2,5$$

em vez de  $n = 5$ . A peça não pode, portanto, ser empregada nas condições descritas.

Uma solução do problema seria fixar-se um ponto intermédio, tal como se indica na figura 85, de modo a introduzir, em B,





uma articulação.

A posição mais favorável para a introdução dessa articulação será aquela para a qual os dois trechos AB e BC têm mesmo comprimento de flambagem, isto é,

$$l_f = l_2 = 0,7 l_1$$

Mas:

$$l_2 + l_1 = 100 \text{ cm}$$

donde:

$$0,7 l_1 + l_1 = 1,7 l_1 = 100 \text{ cm}$$

$$l_1 = 59 \text{ cm}$$

$$l_2 = 41 \text{ cm}$$

Figura 85

Nos dois trechos, o comprimento de flambagem é:

$$l_f = l_2 = 41 \text{ cm}$$

donde:

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{41}{0,64} = 64$$

Como  $\lambda < \lambda_{\text{lim}}$  não é aplicável a fórmula de Euler.

Aplicando a fórmula de Tetmayer vem:

$$\sigma_{ff} = 3100 - 11,4 \times 64 = 3027 \text{ kg/cm}^2$$

Carregando a peça com  $P = 0,8 \text{ t}$  o coeficiente de segurança à flambagem é:

$$n = \sigma_{ff} \frac{S}{P} = 3027 \frac{1,13}{800} \cong 4,3$$

A solução é aceitável porque o coeficiente de segurança é maior do que 4.

**40 - Influência da força cortante:** - Na determinação da carga de flambagem, não levamos em conta o efeito da força cortante. Esta hipótese é aceitável para a maioria dos casos da prática em que se consideram colunas de alma cheia. Todavia, no caso de colunas reticuladas, a influência da força cortante pode ser grande.

Ao tratarmos da influência da força cortante na linha elástica de uma barra fletida, vimos que a linha elástica  $v = v(x)$ , devida unicamente à força cortante  $Q$ , é tal que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\pi}{GS} Q$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\pi}{GS} \frac{dQ}{dx}$$

Mas:

$$\frac{dM}{dx} = Q$$



$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx}$$

Logo:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\pi}{GS} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2}$$

equação igual à linha elástica causada pelo momento fletor:

$$M' = - \frac{\pi EJ}{GS} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2}$$

Chamando:

$$\beta = \frac{\pi}{GS}$$

a equação diferencial da linha elástica, produzida pelo momento fletor M e pela força cortante Q se escreve:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M + M'}{EJ} = - \frac{M}{EJ} + \beta \frac{d^2 M}{dx^2}$$

No caso da coluna reta e prismática da figura 86 suposta numa posição de equilíbrio instável, onde também é possível a forma fletida, tem-se:

$$M = Py$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = P \frac{d^2 y}{dx^2}$$

donde:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{Py}{EJ} + \beta P \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$(1 - \beta P) \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{Py}{EJ}$$

Fazendo:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ(1 - \beta P)}}$$

vem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

equação análoga à que se obteve na resolução do problema da figura 80. De acordo com a solução aí apresentada a carga de flambagem é o valor de P para o qual:

$$kl = \pi$$

No caso em questão, vem:

$$\sqrt{\frac{P_{fl}}{EJ(1 - \beta P_{fl})}} \cdot l = \pi$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} (1 - \beta P_{fl})$$

Chamando  $\bar{P}$  a carga de flambagem dada pela fórmula d e

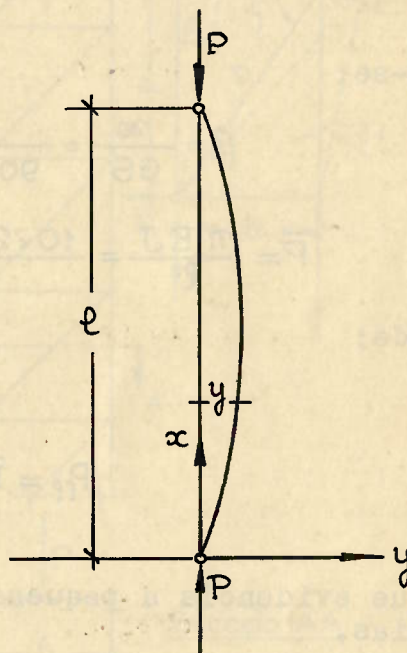


Figura 86



Euler (sem levar em conta o efeito da força cortante) vem:

$$P_{fl} = \bar{P} (1 - \beta P_{fl})$$

$$P_{fl} (1 + \beta \bar{P}) = \bar{P}$$

$$P_{fl} = \frac{\bar{P}}{1 + \beta \bar{P}}$$

No caso de uma seção duplo T com:

$$J_{min} = 163,8 \text{ cm}^4$$

$$S = 9,7 \text{ cm}^2$$

$$\alpha = 3,23$$

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$G = 900 \text{ t/cm}^2$$

$$l = 3 \text{ m} \quad (\text{comprimento da barra})$$

tem-se:

$$\beta = \frac{\alpha}{GS} = \frac{3,23}{900000 \times 9,7} = 0,372 \times 10^{-6} \text{ kg}^{-1}$$

$$\bar{P} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{10 \times 2100000 \times 163,8}{90000} = 0,038 \times 10^6 \text{ kg}$$

donde:

$$\beta \bar{P} = 0,014$$

$$P_{fl} = \bar{P} \left( \frac{1}{1 + \beta \bar{P}} \right) \cong 0,98 \bar{P}$$

o que evidência a pequena influência da força cortante nas peças cheias.

41 - Colunas reticuladas: - As peças compostas submetidas à compressão são muito empregadas em estruturas de aço ou de madeira. Sua capacidade de resistência é sempre menor que a de uma coluna cheia de mesma área de seção transversal e mesmo índice de flexibilidade e depende, em grande parte, do sistema de diagonais empregado.

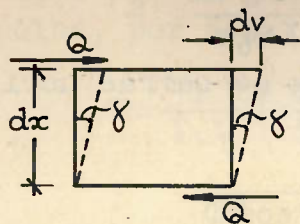
Para determinar a carga de flambagem de uma coluna reticulada, articulada nas duas extremidades, aplicaremos a fórmula:

$$P_{fl} = \frac{\bar{P}}{1 + \beta \bar{P}}$$

Vejamos como se determina o valor de  $\beta$  para diversos casos que aparecem na prática.



De acordo com o croquis da figura 87, onde se apresentam duas secções horizontais, infinitamente próximas de uma coluna vertical, a distorção  $\gamma$  produzida pela força cortante  $Q$  é:



donde:

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{dv}{dx} = \frac{\alpha}{GS} Q = \beta Q$$

$$\beta \approx \frac{\gamma}{Q}$$

Figura 87

No caso da figura 88 a força de tração em duas diagonais paralelas, devida à força cortante  $Q$ , produzida pela flexão, é:

$$D = \frac{Q}{\cos \varphi}$$

Chamando  $l$  o comprimento da diagonal tem-se:

$$l = \frac{a}{\sin \varphi}$$

Chamando  $S_d$  a área da secção transversal de duas diagonais paralelas, o acréscimo de comprimento  $\Delta l$  se escreve ( $Q$  é a força normal nas barras horizontais):

$$\Delta l = \frac{Dl}{ES_d} = \frac{Qa}{ES_d \cos \varphi \sin \varphi}$$

Mas:

$$\Delta l \approx \delta_1 \cos \varphi$$

donde:

$$\delta_1 \approx \frac{\Delta l}{\cos \varphi} = \frac{Qa}{ES_d \sin \varphi \cos^2 \varphi}$$

Esse deslocamento  $\delta_1$  é o que se verifica quando se despreza a deformação total  $\delta_2$  das barras horizontais (de comprimento  $b$ ). Levando em conta essa deformação ter-se-á ...

$\delta = \delta_1 + \delta_2$  (em lugar de  $\delta_1$  na figura 88) e  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  (em lugar de  $\gamma_1$  na figura 88).

Mas:

$$\delta_2 = \frac{Qb}{ES_b}$$

sendo  $S_b$  a área da secção transversal de duas barras de comprimento  $b$ .

A distorção  $\gamma$  será, então:

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{a} = \frac{Q}{\sin \varphi \cos^2 \varphi ES_d} + \frac{Qb}{ES_b a}$$

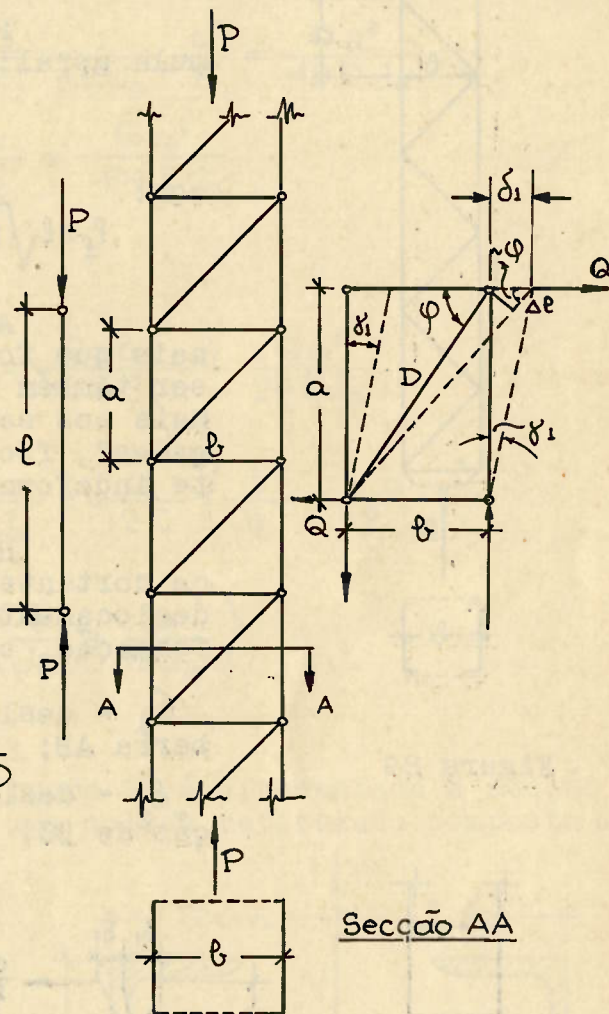


Figura 88



Portanto:

$$\beta = \frac{\gamma}{Q} = \frac{1}{\sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi E S_d} + \frac{b}{E S_b a}$$

No caso da figura 89, onde não existem as barras horizontais (de comprimento b) a fórmula a adotar é:

$$\beta = \frac{1}{E S_d \sin \varphi \cos^2 \varphi}$$

Nesses dois casos a carga de flambagem é:

$$P_{fl} = \bar{P} \cdot \frac{1}{1 + \beta \bar{P}} = \frac{\pi^2 E J}{\ell^2} \cdot \frac{1}{1 + \beta \bar{P}}$$

Pode-se, portanto, empregar a fórmula geral:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 E J}{\ell_f^2}$$

com:

$$\ell_f = \ell \sqrt{1 + \beta \bar{P}} = \ell \sqrt{1 + \beta \frac{\pi^2 E J}{\ell^2}}$$

As ligações das peças longitudinais que formam as colunas (figura 90) podem ser também feitas por meio de travessas normais aos seus eixos e a elas "rigidamente ligadas", ficando os ângulos retos praticamente indeformáveis.

Havendo duas peças verticais a força cortante em cada uma delas será  $Q/2$ . O deslocamento dessa força, em virtude da deformação, compoe-se de duas partes:

$\delta_1$  = deslocamento proveniente da flexão da barra AB;

$\delta_2$  = deslocamento proveniente da deformação de BC.

Figura 89

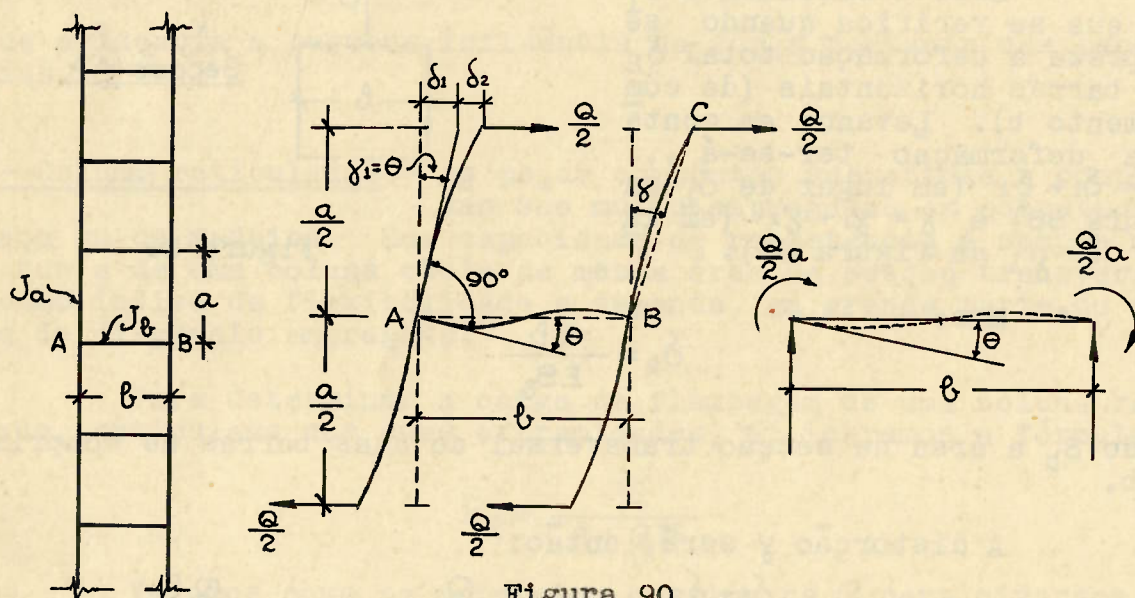


Figura 90



A barra AB está sujeita aos binários de efeitos contrários  $Qa\frac{1}{2}$  em suas duas extremidades. A rotação  $\Theta$  produzida nos apoios, por êsse binários é, de acordo com o teorema de Mohr:

$$\Theta = \frac{1}{EJ_b} \left( \frac{Q}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{b} - \frac{Q}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{b} \right)$$

$$\Theta = \frac{Qab}{12EJ_b}$$

Portanto:

$$\delta_1 = \Theta \frac{a}{2} = \frac{Qa^2b}{12EJ_b} \cdot \frac{1}{2} \quad \gamma_1 = \frac{\delta_1}{a/2} = \Theta$$

O deslocamento  $\delta_2$  será:

$$\delta_2 = \frac{Pl^3}{3EJ_a} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{3EJ_a} \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{Qa^3}{48EJ_a}$$

donde:

$$\gamma_2 = \frac{\delta_2}{a/2} = \frac{Qa^2}{24EJ_a}$$

Finalmente:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{Qab}{12EJ_b} + \frac{Qa^2}{24EJ_a}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{Q} = \frac{ab}{12EJ_b} + \frac{a^2}{24EJ_a} = \frac{a}{12E} \left( \frac{b}{J_b} + \frac{a}{2J_a} \right)$$

$$\beta = \frac{a}{12E} \cdot \left( \frac{b}{J_b} + \frac{a}{2J_a} \right)$$

**42 - Exercício:-** No croquis da figura 91 é apresentada a seção transversal de uma coluna reticulada composta de dois perfis normais n° 20. Sabendo-se que o comprimento da coluna é  $l = 8m$  e que a coluna é articulada nas duas extremidades, pode-se dimensionar as diagonais de tal forma que a resistência à flambagem na direção do eixo  $OX$  seja igual à resistência à flambagem na direção do eixo  $OY$ . De acordo com os dados do perfil n° 20, tem-se para cada perfil:

$$J_x = 1911 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 148 \text{ cm}^4$$

$$S = 32,2 \text{ cm}^2$$

$$i_x = 7,70 \text{ cm}$$

$$i_y = 2,14 \text{ cm}$$

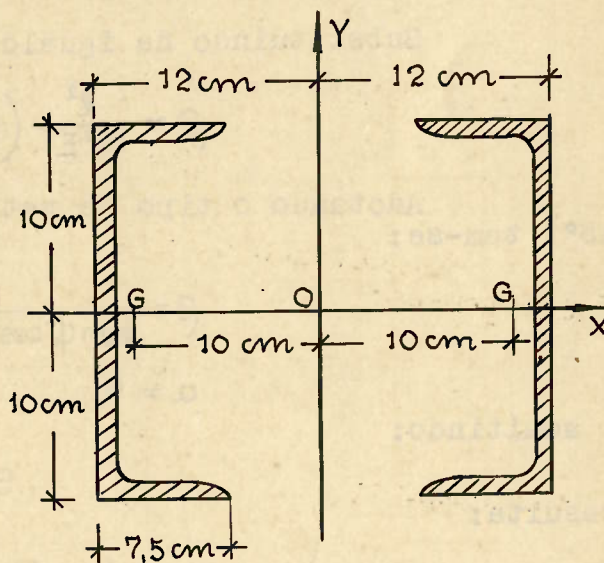


Figura 91



Para a secção composta (figura 91) tem-se, então:

$$J_x = 2 \times 1911 = 3822 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 2(148 + 32,2 \times 10 \times 10) = 6736 \text{ cm}^4$$

Como se torna necessário o emprêgo de diagonais, paralelas ao plano de traço OX, vejamos qual o tipo de reticulado que fornece a mesma resistência à flambagem nas duas direcções consideradas.

Com o reticulado, a carga de flambagem (correspondente à flambagem na direcção OX) passa a ser:

$$P_{fl} = \bar{P} \frac{1}{1 + \beta \bar{P}} \quad \left( \bar{P} = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2} \right)$$

ao passo que na direcção OY a carga de flambagem conserva-se igual à que seria sem reticulado.

Da fórmula acima vem:

$$P_{fl} \cdot (1 + \beta \bar{P}) = \bar{P}$$

$$\beta \bar{P} = \frac{\bar{P}}{P_{fl}} - 1$$

$$\beta = \frac{1}{P_{fl}} - \frac{1}{\bar{P}}$$

A condição do problema é:

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 E J_x}{l^2}$$

$$\bar{P} = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}$$

Substituindo na igualdade acima resulta:

$$\beta = \frac{l^2}{\pi^2 E} \left( \frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y} \right)$$

Adotando o tipo de reticulado da figura 88 (com  $\varphi = 45^\circ$ ) tem-se:

$$\beta = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi E S_d} + \frac{b}{a E S_b}$$

$$a = b$$

e admitindo:

$$S_d = S_b$$

resulta:

$$\beta = \frac{1}{E S_d} (2\sqrt{2} + 1) = \frac{l^2}{\pi^2 E} \left( \frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y} \right)$$



$$S_d = \frac{\pi^2(2\sqrt{2}+1)J_xJ_y}{l^2(J_y-J_x)} = \frac{10 \times 3,82 \times 3822 \times 6736}{640000(6736-3822)} = 0,53 \text{ cm}^2$$

Se adotarmos o tipo de reticulado da figura 89 (com  $\varphi = 45^\circ$ ) resultará:

$$\beta = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi E S_d} = \frac{2\sqrt{2}}{E S_d} = \frac{l^2}{\pi^2 E} \left( \frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y} \right)$$

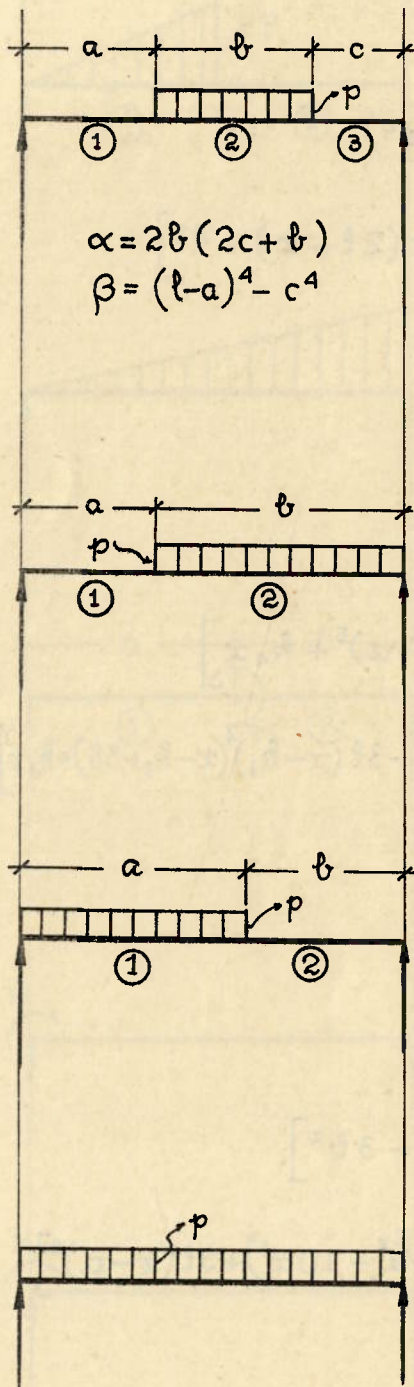
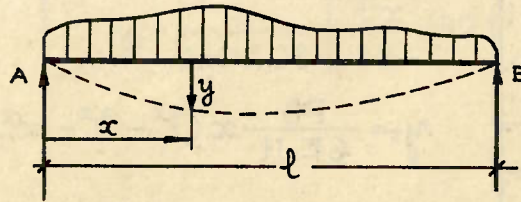
$$S_d = \frac{\pi^2 2\sqrt{2} J_x J_y}{l^2 (J_y - J_x)} = \frac{10 \times 2,82 \times 3822 \times 6736}{640000(6736-3822)} = 0,39 \text{ cm}^2$$

Daí se conclui que dos dois tipos de reticulados, o mais econômico, no caso, é este último.

---



TABELA 1 - LINHAS ELÁSTICAS DE  
VIGAS PRISMÁTICAS SIMPLEMENTE APOIADAS.



$$\alpha = 2b(2c + b)$$

$$\beta = (l - a)^4 - c^4$$

$$y_1 = \frac{pxc}{24EJl} [\alpha(l^2 - x^2) - \beta]$$

$$y_2 = \frac{px}{24EJl} [\alpha(l^2 - x^2) - \beta] + \frac{p(x-a)^4}{24EJ}$$

$$y_3 = \frac{px}{24EJl} [\alpha(l^2 - x^2) - \beta] + \frac{p(x-a)^4}{24EJ} - \frac{p(x-a-b)^4}{24EJ}$$

$$y_1 = \frac{pb^3x}{24EJl} [2(l^2 - x^2) - b^2]$$

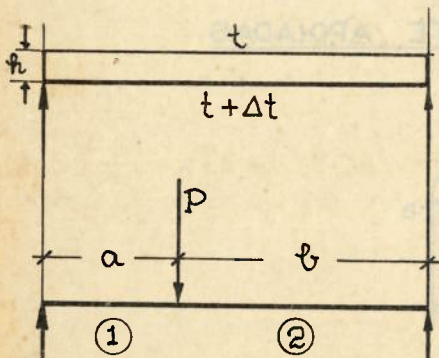
$$y_2 = \frac{pb^3x}{24EJl} [2(l^2 - x^2) - b^2] + \frac{p(x-a)^4}{24EJ}$$

$$y_1 = \frac{px}{24EJl} (l^2 - b^2)(l^2 - b^2 - 2x^2) + \frac{px^4}{24EJ}$$

$$y_2 = \frac{px}{24EJl} (l^2 - b^2)(l^2 - b^2 - 2x^2) + \frac{px^4}{24EJ} - \frac{p(x-a)^4}{24EJ}$$

$$y = \frac{px}{24EJ} [l^3 - x^2(2l - x)]$$

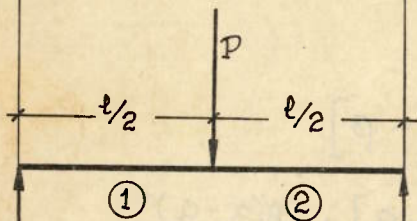




$$y = \frac{\alpha_t \Delta t}{2h} x(l-x)$$

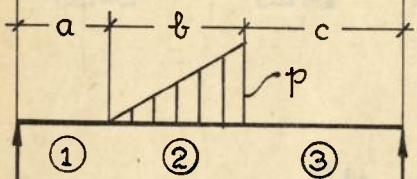
$$y_1 = \frac{Pb}{6EJl} x(l^2 - b^2 - x^2)$$

$$y_2 = \frac{Pa}{6EJl} (l-x) [x(2l-x) - a^2]$$



$$y_1 = \frac{P}{48EJ} x(3l^2 - 4x^2)$$

$$y_2 = \frac{P}{48EJ} (l-x) [4x(2l-x) - l^2]$$



$$y_1 = k_1 x (k_2 x^2 + k_4)$$

$$y_2 = k_1 [k_2 x^3 + 3l(x-a)^5 + k_4 x]$$

$$y_3 = k_1 [k_2 x^3 + 3l(x-a)^5 - 3l(x-k_3)^4 (x-k_3+5b) + k_4 x]$$

$$k_1 = \frac{p}{360EJbl}$$

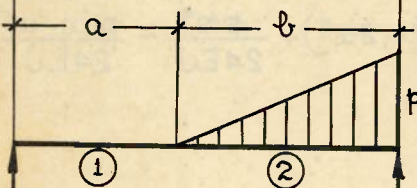
$$k_2 = -10b^2(3c+b)$$

$$k_3 = a+b = l-c$$

$$\omega_1 = 10b^2l^2(3c+b) - 3(b+c)^5$$

$$\omega_2 = 15bc^4 + 3c^5$$

$$k_4 = \omega_1 + \omega_2$$



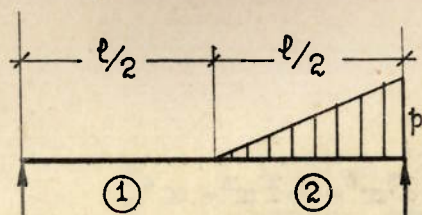
$$y_1 = k b^2 x [10(l^2 - x^2) - 3b^2]$$

$$y_2 = k_1 [b^3 x (10l^2 - 3b^2 - 10x^2) + 3l(x-a)^5]$$

$$k = \frac{p}{360EJl}$$

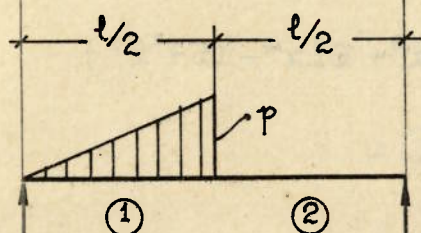
$$k_1 = \frac{p}{360EJbl}$$





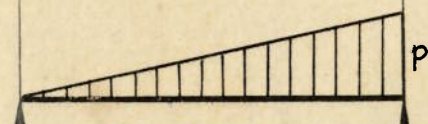
$$y_1 = \frac{p l x}{360 \times 16 E J} (37 l^2 - 40 x^2)$$

$$y_2 = \frac{p}{180 E J l} \left[ \frac{l^2 x}{32} (37 l^2 - 40 x^2) + 3 \left( x - \frac{l}{2} \right)^5 \right]$$

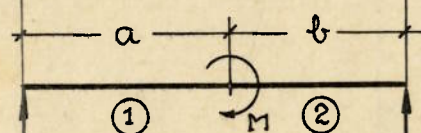


$$y_1 = \frac{p x}{180 \times 16 E J l} \left[ 16 x^2 (3 x^2 - 5 l^2) + 41 l^4 \right]$$

$$y_2 = \frac{p}{180 E J l} \left[ (3 x^2 - 5 l^2) x^3 - 3 (x + 2 l) \left( x - \frac{l}{2} \right)^4 + \frac{41}{16} l^4 x \right]$$

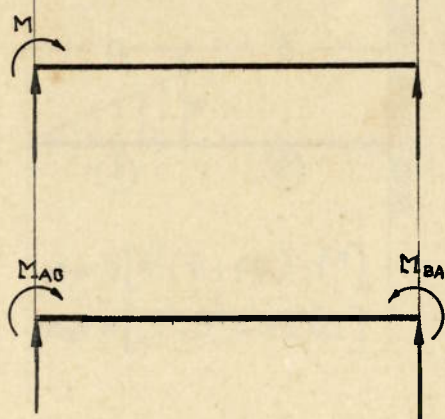


$$y = \frac{p x}{360 E J l} \left[ 7 l^4 - x^2 (10 l^2 - 3 x^2) \right]$$

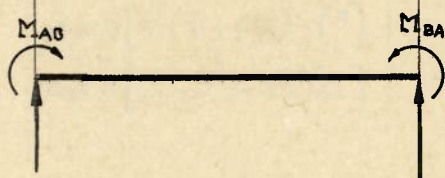


$$y_1 = - \frac{M}{6 E J l} x (l^2 - 3 b^2 - x^2)$$

$$y_2 = + \frac{M}{6 E J l} (l - x) [x (2 l - x) - 3 a^2]$$

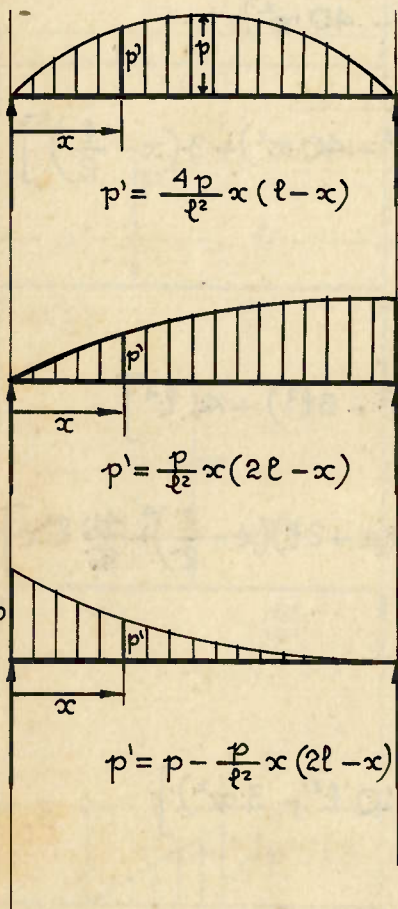


$$y = \frac{M}{6 E J l} x (l - x) (2 l - x)$$



$$y = \frac{x}{6 E J l} (l - x) \left[ (2 M_{AB} + M_{BA}) l + (M_{BA} - M_{AB}) x \right]$$





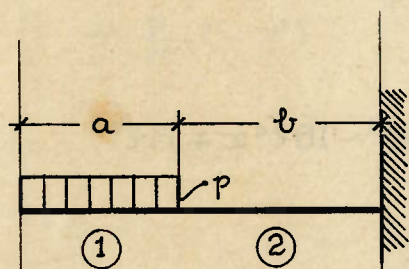
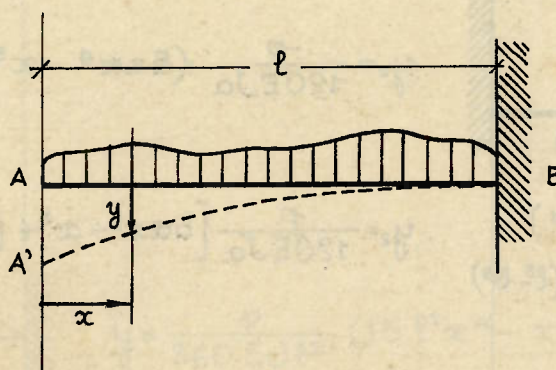
$$y = \frac{p}{90EJl^2} (3l^5x - 5l^3x^3 + 3lx^5 - x^6)$$

$$y = \frac{px}{360EJl^2} (10l^5 - x^5 + 6lx^4 - 15l^3x^2)$$

$$y = \frac{px}{360EJl^2} (5l^5 - 15l^3x^2 + 15l^2x^3 - 6lx^4 + x^5)$$

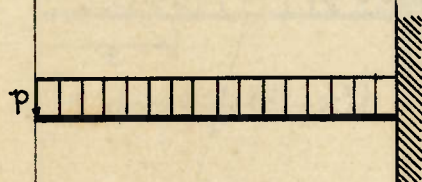


TABELA 2 - LINHAS ELÁSTICAS DE  
VIGAS PRISMÁTICAS EM BALANÇO.

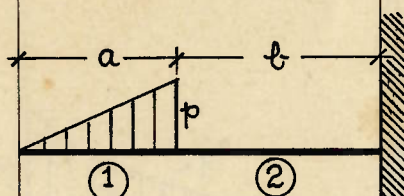


$$y_1 = \frac{p}{24EJ} [x^4 + 4(b^3 - l^3)x + (3l^4 + b^4 - 4b^3l)]$$

$$y_2 = \frac{p}{24EJ} [x^4 - (x-a)^4 + 4(b^3 - l^3)x + (3l^4 + b^4 - 4b^3l)]$$



$$y = \frac{p}{24EJ} (x^4 - 4l^3x + 3l^4)$$



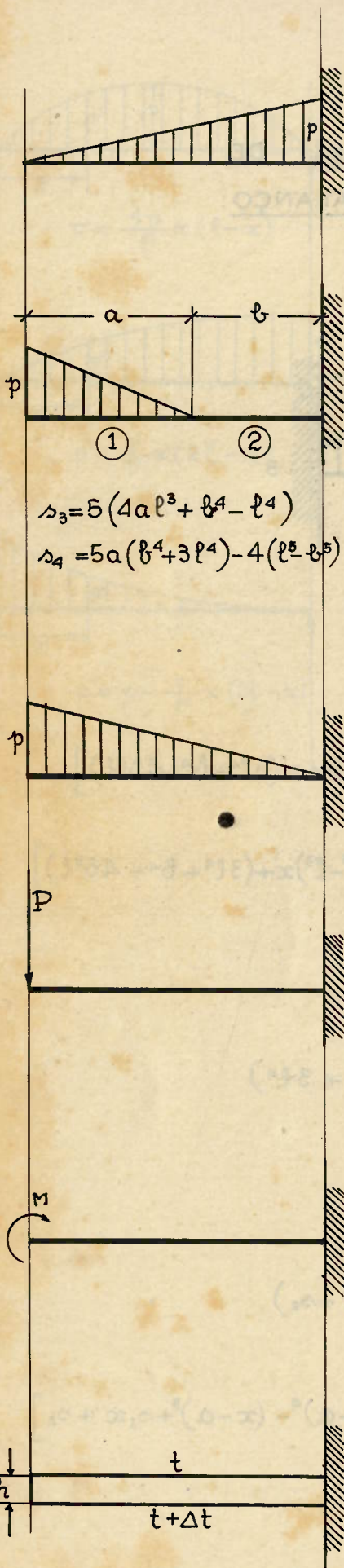
$$y_1 = \frac{p}{120EJa} (x^5 + s_1x + s_2)$$

$$y_2 = \frac{p}{120EJa} [x^5 - 5a(x-a)^4 - (x-a)^5 + s_1x + s_2]$$

$$s_1 = 5[b^3(b+4a) - l^4]$$

$$s_2 = 4[(l^5 - b^5) - 5b^3la]$$





$$y = \frac{p}{120EJl} (x^5 - 5l^4x + 4l^5)$$

$$y_1 = \frac{p}{120EJa} (5ax^4 - x^5 - s_3x + s_4)$$

$$s_3 = 5(4al^3 + b^4 - l^4)$$

$$s_4 = 5a(b^4 + 3l^4) - 4(l^5 - b^5)$$

$$y_2 = \frac{p}{120EJa} [5ax^4 - x^5 + (x-a)^5 - s_3x + s_4]$$

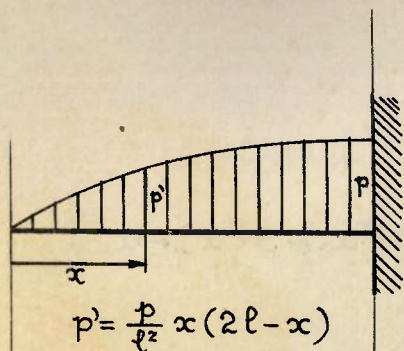
$$y = \frac{p}{120EJl} (5lx^4 - x^5 - 15l^4x + 11l^5)$$

$$y = \frac{P}{6EJ} (x^3 - 3l^2x + 2l^3)$$

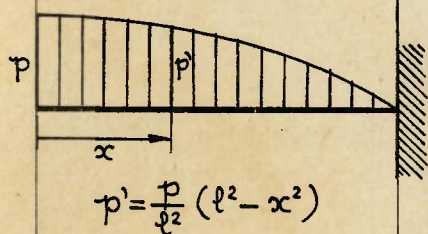
$$y = -\frac{M}{2EJ} (l-x)^2$$

$$y = -\frac{\alpha_t \Delta t}{2h} (l-x)^2$$

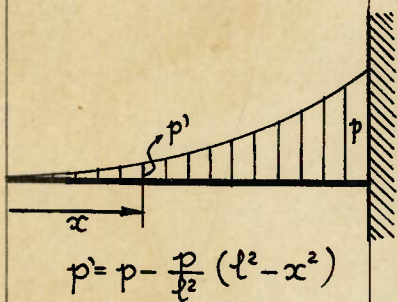




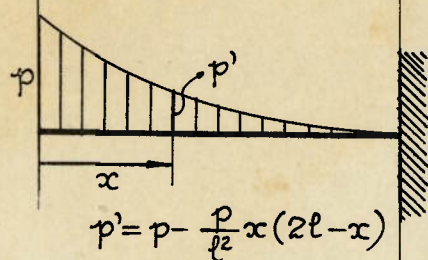
$$y = \frac{p}{360 E J l^2} (6 l x^5 - x^6 - 24 l^3 x + 19 l^6)$$



$$y = \frac{p}{360 E J l^2} (15 l^2 x^4 - x^6 - 54 l^5 x + 40 l^6)$$

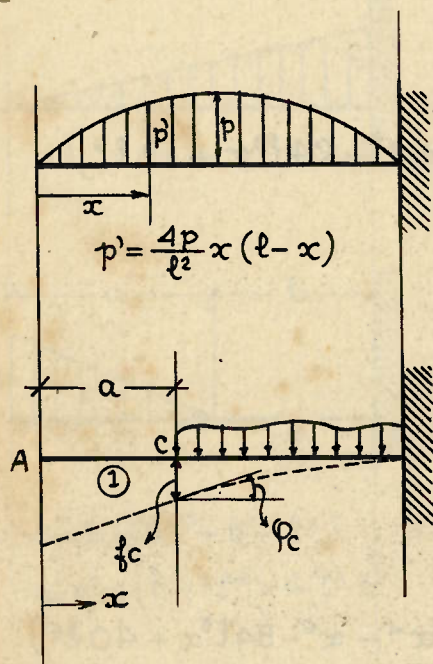


$$y = \frac{p}{360 E J l^2} (x^6 - 6 l^5 x + 5 l^6)$$



$$y = \frac{p}{360 E J l^2} (x^6 - 6 l x^5 + 15 l^2 x^4 - 36 l^5 x + 26 l^6)$$





$$y = \frac{p}{90EJl^2} (7l^6 - 9l^5x + 3lx^5 - x^6)$$

$$y_1 = f_c + \varphi_c(a-x)$$