

Sobre o Problema de Collatz

Fábio Armando Tal

Curso Experimental de Ciências Moleculares - USP

endereço eletrônico: fabiotat@cecm.usp.br

Manuel V. P. Garcia

Departamento de Matemática Aplicada - IME - USP

endereço eletrônico: mane@ime.usp.br

§0. Introdução: De origem um tanto incerta, o problema que abordamos nesta nota mereceu a atenção de vários pesquisadores nos últimos 30 anos.

Para cada número natural $n \geq 0$ considere $f(n) = \frac{n}{2}$, se n é par e $f(n) = \frac{3n+1}{2}$ caso contrário. A questão em que estamos interessados é estudar as órbitas determinadas por f .

Por exemplo, a órbita de 1 é (1, 2, 1, 2, ...), a de 3 é (3, 5, 8, 4, 2, 1, ...), o leitor pode fazer por si mesmo algumas experiências (por exemplo, pode analisar a órbita de 27) e perceber que, ao que parece, após vagar um pouco por N cada órbita acaba por recair no ciclo da órbita de 1.

A conjectura de Collatz afirma que esse comportamento verifica-se para todo natural $n \geq 1$, mais precisamente, para todo $n \geq 1$ existe algum k tal que $f^k(n) = 1$.

Apesar da ingenuidade do enunciado este problema resiste às tentativas de resolvê-lo nas últimas décadas. Trabalhos interessantes relativos a este assunto são [1], [2] e [3].

Para estudar este assunto é útil considerar a noção de densidade de um sub-conjunto de N . Se $A \subseteq N$ diz-se que A tem densidade quando existir o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \in A : k \leq n\}}{n}.$$

Neste caso diz-se que este limite é $\rho(A)$, a densidade de A .

Observação: Note que, se para algum par de naturais p, s , com $s \neq 0$ tivermos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \{k \in A : k \leq p + sn\}}{p + sn} = \sigma,$$

então $\rho(A) = \sigma$.

Em [1] Everett demonstra que $\{n \in N^* : \exists k, f^k(n) < n\}$ tem densidade 1, o que não prova a conjectura, apesar de reforçar a crença na sua validade. Para obter esse resultado, Everett introduz uma dinâmica simbólica associada a f com a qual vamos trabalhar no texto.

O artigo de Hepner, [2], que trata de uma classe de problemas mais ampla do que o de Collatz, obtém resultados que generalizam os de Everett e têm semelhança com os que obtemos aqui. No parágrafo 2, fazemos uma comparação entre nosso trabalho e [2].

Em [3] é apresentada uma boa resenha deste problema e faz-se um tratamento “estocástico” do mesmo.

O objetivo central deste trabalho é provar duas proposições que reforcem, mais uma vez, a idéia de que a conjectura é verdadeira.

A primeira delas demonstra que para todo natural n , a órbita $\mathcal{O}(n) = \{f^k(n): k \in \mathbb{N}\}$ tem densidade nula. A segunda estabelece que, num sentido bastante razoável, o conjunto de todas as órbitas “distintas” (aquelas que não coincidem após um número finito de etapas) também tem densidade nula.

Estes resultados apoiam-se em um resultado auxiliar (Proposição 0) cuja demonstração fica simplificada com o uso de uma conveniente dinâmica simbólica, introduzida por Everett, associada à função f .

Na secção 1 é apresentada esta dinâmica simbólica e são obtidos alguns resultados básicos acerca da mesma. O leitor familiarizado com o trabalho de Everett, [1], pode dispensar a leitura desse parágrafo.

O enunciado e a demonstração da Proposição 0 encontram-se na secção 2. Também nessa secção usamos a Proposição 0 para generalizar o resultado de Everett, mencionado acima, mostrando que para todo real $0 < \mu \leq 1$, a densidade de $\{n \in \mathbb{N}: \exists k, f^k(n) < \mu n\}$ é 1.

Na secção 3 enunciamos e provamos os dois resultados centrais do trabalho, supra mencionados.

§1. Dinâmica Simbólica e Resultados Auxiliares: Esta secção destina-se precipuamente à demonstração de alguns resultados de carácter essencialmente técnico, que serão usados no resto do trabalho.

Começamos por introduzir uma dinâmica simbólica associada a f .

Para cada n considere a seqüência $(s_k^n)_{k \geq 0}$, onde $s_k^n = P$, se $f^k(n)$ é par e $s_k^n = I$ caso contrário.

Assim para cada natural n associamos duas seqüências, uma numérica, a órbita de n , $\mathcal{O}(n) = (n; f(n); \dots; f^p(n); \dots)$, e a órbita simbólica de n , $\mathcal{S}(n) = (s_k^n)_{k \geq 0}$.

Estaremos também interessados nas seqüências finitas truncadas de $\mathcal{S}(n)$, ou seja, $\mathcal{S}(n; k) = (s_0^n; \dots; s_k^n)$.

Lema 0: Sejam $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ e $p \in \{0, \dots, n\}$.

Então existe um natural ímpar r , tal que $f^p(k + 2^n) - f^p(k) = r2^{n-p}$.

Dem.: Se $n = 0$ nada há a demonstrar.

Suponhamos então $n \geq 1$. Vamos provar o lema através de indução finita em p .

Isto é claramente verdadeiro para $p = 0$.

Admita agora, por hipótese de indução, que $f^p(k + 2^n) - f^p(k) = r2^{n-p}$, com r ímpar, para algum $p \in \{0, \dots, n-1\}$, então $n - p \geq 1$ e portanto $f^p(k + 2^n)$ e $f^p(k)$ tem mesma paridade.

Assim, se $f^p(k)$ é par, tem-se que $f^{p+1}(k + 2^n) - f^{p+1}(k) = r2^{n-p-1}$. E, quando $f^p(k)$ é ímpar, $f^{p+1}(k + 2^n) - f^{p+1}(k) = 3r2^{n-p-1}$.

Isto mostra que o resultado vale para $p + 1$ e encerra a prova. ■

Fato 0: Sejam $\ell \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, 1, \dots, 2^{\ell+1} - 1\}$. Então as seqüências $\mathcal{S}(k; \ell)$ e $\mathcal{S}(k + 2^{\ell+1}; \ell)$ coincidem nos ℓ primeiros elementos sendo diferentes no último.

Dem.: Aplicando o Lema 0 para $n = \ell$ vem que, para $0 \leq p \leq \ell$, $f^p(k)$ e $f^p(k + 2^{\ell+1})$ tem a mesma paridade. Portanto $\mathcal{S}(k; \ell)$ e $\mathcal{S}(k + 2^{\ell+1}; \ell)$ coincidem nos ℓ primeiros termos.

Além disso, o mesmo Lema 0 mostra que $f^{\ell+1}(k + 2^{\ell+1}) - f^{\ell+1}(k) = r$, onde r é ímpar, de onde segue imediatamente a parte final do resultado. ■

Fato 1: Seja ℓ um natural. Então existe uma bijeção entre $\{0, 1, \dots, 2^{\ell+1} - 1\}$ e o conjunto $\{S(n; \ell): 0 \leq n \leq 2^{\ell+1} - 1\}$.

Dem.: Far-se-á uma indução em ℓ .

Para $\ell = 0$ o resultado é de verificação imediata.

Suponha, por hipótese de indução, que isto é verdadeiro para $\ell = k - 1$. Vamos provar que o resultado também vale para $\ell = k$.

Para isso basta mostrar que, se n e m estão em $\{0, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ e $S(n; k) = S(m; k)$, então $n = m$.

Para isto, notemos que, pela hipótese de indução, existe um único $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ tal que $S(j; k - 1) = S(n; k - 1) = S(m; k - 1)$.

Como, pelo Fato 0, para todo $p \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$, $S(p; k)$ e $S(p + 2^k; k)$ coincidem nos primeiros $k - 1$ termos e são diferentes no último, resulta que, se $u \in \{0, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ e $S(u; k - 1) = S(j; k - 1)$, então ou $p = j$ ou $p = 2^k + j$ e, além disso, $S(j; k) \neq S(j + 2^k; k)$.

Logo $\{m, n\} \subset \{j, j + 2^k\}$ e como $S(m; k) = S(n; k)$ temos $m = n$. ■

Observação: Notemos que o resultado acima mostra que $\{S(n; \ell): 0 \leq n \leq 2^{\ell+1} - 1\}$ coincide com o conjunto de todas as seqüências de P 's e I 's de comprimento $\ell + 1$ (basta aplicar um argumento sobre a cardinalidade destes conjuntos).

Corolário 1.0: Se $S(k)$ e $S(r)$ satisfazem $S(k; \ell) = S(r; \ell)$, para algum $\ell \in \mathbb{N}^*$ (isto é, o segmento inicial de comprimento ℓ de $S(k)$ e $S(r)$ são iguais), então existe um natural p tal que $|k - r| = p2^{\ell+1}$.

Dem.: Considere o (único) natural j , $0 \leq j < 2^{\ell+1} - 1$ associado pelo Fato 1 a $S(k; \ell)$.

Pelo Fato 0 vem que

$$\begin{aligned} k &= j + p_0 2^{\ell+1} + p_1 2^{\ell+2} + \dots + p_s 2^{\ell+s} \\ r &= j + q_0 2^{\ell+1} + q_1 2^{\ell+2} + \dots + q_s 2^{\ell+s}, \end{aligned}$$

onde os números p_i e q_i são elementos de $\{0, 1\}$.

$$\text{Assim, segue-se } k - r = 2^{\ell+1} \left(\sum_{m=0}^s (p_m - q_m) 2^m \right).$$

Assim, se C_ℓ é uma seqüência finita de ℓ elementos e $m(C_\ell)$ é o único natural entre 0 e $2^\ell - 1$ que tem C_ℓ como prefixo, segue-se diretamente dos resultados anteriores que o conjunto

$$\mathcal{M}(C_\ell) = \left\{ n \in \mathbb{N}: n = m(C_\ell) + 2^\ell \left(\sum_{k=0}^s p_k 2^k \right), p_k \in \{0, 1\}, s \in \mathbb{N} \right\}$$

é exatamente o conjunto dos naturais n tais que $S(n; \ell) = C_\ell$.

Com isto mostramos que na verdade vale também a recíproca do Corolário 1.0, qual seja,

Corolário 1.1: Se k e r são dois naturais tais que $|k - r| = p2^{\ell+1}$ então $S(k; \ell) = S(r; \ell)$.
Dem.: Feita acima. ■

Um fato interessante de ser notado é que, conquanto qualquer sequência finita de comprimento ℓ seja prefixo de um conjunto infinito de números, uma sequência *infinita* pode representar, no *máximo*, um número natural.

Para perceber a unicidade da representação, tome dois naturais $k < r$ e considere $\ell = \lfloor \log_2 r \rfloor$. Segue-se imediatamente do item (i) do Fato 0 que $S(k; \ell) \neq S(r; \ell)$.

Quanto à existência de seqüências infinitas que não representam naturais, veja que $\mathbb{N}$ é enumerável e o conjunto das seqüências de dois elementos tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

Um exemplo de seqüência infinita que não representa nenhum número obtém-se precedendo-se $S(27)$ de um I , ou seja, a seqüência $(I; S(27))$ não é a órbita de nenhum natural (na verdade poder-se-ia trocar 27 por qualquer natural p côngruo a 0 ou 1 módulo 3, pois é fácil ver que o único r tal que $f(r) = p$ é $r = 2p$).

Consideremos agora o conjunto $\mathcal{V}_\ell = \{S(n; \ell) : 0 \leq n \leq 2^{\ell+1} - 1\}$, que conforme o Fato 1, é o conjunto de todas as seqüências de comprimento ℓ de P 's e I 's. Para $s \in \mathcal{V}_\ell$ denotaremos por $i(s)$ o número de elemntos iguais a I em s . Evidentemente $0 \leq i(s) \leq \ell$.

Um resultado que será útil no futuro é a seguinte proposição clássica de combinatória, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [0].

Fato 2: Seja um real $\mu \in (\frac{1}{2}; 1]$. Então

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\#\{s \in \mathcal{V}_\ell : i(s) \geq \mu(\ell + 1)\}}{2^{\ell+1}} = 0.$$

Corolário 2.0: Sejam os reais $\mu \in (\frac{1}{2}; 1]$ e $\epsilon > 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$ tem-se que

$$\rho(\{k \in \mathbb{N} : i(S(k; n)) \geq \mu(n + 1)\}) < \epsilon.$$

Dem.: Usando a observação que segue a definição de densidade basta calcular, para $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\#\{0 \leq k < p2^{n+1} : i(S(k; n)) \geq \mu(n + 1)\}}{p2^{n+1}}.$$

Como, pelo Fato 0,

$\#\{0 \leq k < p2^{n+1} : i(S(k; n)) \geq \mu(n + 1)\} = p \#\{0 \leq k < 2^{n+1} : i(S(k; n)) \geq \mu(n + 1)\}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\#\{0 \leq k < p2^{n+1} : i(S(k; n)) \geq \mu(n + 1)\}}{p2^{n+1}} &= \frac{\#\{0 \leq k < 2^{n+1} : i(S(k; n)) \geq \mu(n + 1)\}}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{\#\{s \in \mathcal{V}_n : i(s) \geq \mu(n + 1)\}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

O resultado segue agora diretamente do Fato 2. ■

§2. "Princípios de Contagem": O objetivo desta secção é provar a seguinte proposição.
Proposição 0: Dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ reais estritamente positivos existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\ell \geq n_0$ o conjunto

$$\{m \in \mathbb{N}: f^{(\ell)}(m) \geq \varepsilon_1 m\}$$

tem densidade menor ou igual a ε_2 .

Em [2], Hepner mostra um resultado que, no caso particular da função f , é semelhante a esta proposição. Mais precisamente é provado que dados ε_1 e ε_2 reais em $(0;1)$ e $x \in \mathbb{N}$, tomando $N = \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor$ então

$$\#\{n \leq x: f^N(n) \geq \varepsilon_1 n\} = O(x^{1-\varepsilon_2}).$$

Observe que no resultado de Hepner $N = N(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} N(x) = \infty$, enquanto na nossa Proposição 0, n_0 depende apenas de ε_1 e ε_2 .

É esta uniformidade que nos permitirá obter os resultados da próxima secção.

Para $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, definimos a função $z_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como

$$z_m(q) = i(S(q; m-1)) = \#\{j \in \mathbb{N}, 0 \leq j < m: f^j(q) \text{ é ímpar}\}.$$

Fato 3: Sejam k, n e p naturais com $n \geq 1$ e $\ell = k2^n + p$. Então $f^n(\ell) = f^n(p) + k3^{z_n(p)}$.

Dem.: A demonstração será feita por indução finita em n .

Para $n = 1$ o resultado é de verificação imediata.

Admita o fato verdadeiro para $n-1$.

Como $\ell = (2k)2^{n-1} + p$ resulta da hipótese de indução que

$$f^{n-1}(\ell) = f^{n-1}(p) + (2k)3^{z_{n-1}(p)}.$$

Há agora duas possibilidades:

- $f^{n-1}(p)$ é par. Neste caso, por definição, $z_{n-1}(p) = z_n(p)$ e, além disso, $f^{n-1}(\ell)$ é par. Portanto

$$f^n(\ell) = \frac{f^{n-1}(\ell)}{2} = \frac{f^{n-1}(p)}{2} + k3^{z_{n-1}(p)} = f^n(p) + k3^{z_n(p)},$$

o que encerra a prova neste caso.

- $f^{n-1}(p)$ é ímpar. Aqui tem-se $z_n(p) = z_{n-1}(p) + 1$ e $f^{n-1}(\ell)$ ímpar. Portanto

$$f^n(\ell) = \frac{3f^{n-1}(\ell) + 1}{2} = \frac{3f^{n-1}(p) + 1}{2} + k3^{z_{n-1}(p)+1} = f^n(p) + k3^{z_n(p)}.$$

Isto estabelece o resultado também neste caso e encerra a prova. ■

Observação: Pelo Corolário 1.1, como a diferença entre p e ℓ é um múltiplo de 2^n vem que $z_n(p) = z_n(\ell)$, dessa forma resulta provado o corolário abaixo.

Corolário: Sejam k, n e p naturais com $n \geq 1$ e $\ell = k2^n + p$. Então $f^n(\ell) = f^n(p) + k3^{z_n(\ell)}$.

Fato 4: Sejam n e p naturais tal que $p < 2^n$ então $f^n(p) < 3^{z_n(p)}$.

Dem.: Imediata. ■

Vamos agora provar a Proposição 0.

Proposição 0: Sejam ε_1 e ε_2 reais estritamente positivos. Existe $n_0 = n_0(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tem-se

$$\rho(\{k \in \mathbb{N}: f^n(k) > \varepsilon_1 k\}) < \varepsilon_2.$$

Dem.: Como $\log_2(1.9) > \frac{1}{2}$, o Corolário 2.0 acarreta a existência de um natural n_1 tal que, para todo natural $n \geq n_1$ tem-se

$$\rho(\{k \in \mathbb{N}: z_n(k) \geq n \log_2(1.9)\}) < \varepsilon_2.$$

É claro que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1.9^n}{2^n} = 0$.

Seja então n_2 tal que, para todo $n \geq n_2$ tem-se $\frac{1.9^n}{2^n} < \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Tome agora $n_0 = \max\{n_1; n_2\}$, e considere um natural ℓ tal que $(k-1)2^n < \ell < k2^n$, onde $n \geq n_0$ e $k \geq 2$ é um natural.

Então $\ell = (k-1)2^n + p$, onde $p \in \mathbb{N}^*$ e, pelo corolário que segue o Fato 3 resulta que $f^n(\ell) = f^n(p) + (k-1)3^{z_n-1}(\ell)$.

Por outro lado, tem-se que $p < 2^n$ e portanto, pelo Fato 4 e de $z_n(p) = z_n(\ell)$, vem que $f^n(p) < 3^{z_n(p)} = 3^{z_n(\ell)}$, de onde resulta que $f^n(\ell) < k3^{z_n(\ell)}$.

Suponhamos agora que $f^n(\ell) \geq \varepsilon_1 \ell$.

Segue-se das desigualdades anteriores que

$$\varepsilon_1(k-1)2^n < \varepsilon_1 \ell < f^n(\ell) < k3^{z_n(\ell)}.$$

Afirmamos agora que, nestas condições, $z_n(\ell) \geq n \log_3(1.9)$.

De fato, se por absurdo, $z_n(\ell) < n \log_3(1.9)$, resultaria $\varepsilon_1(k-1)2^n < k(1.9)^n$, contrariando o fato de $n \geq n_0 \geq n_2$.

Dessa forma vemos que, para $n \geq n_2$,

$$\{\ell \in \mathbb{N}: f^n(\ell) \geq \varepsilon_1 \ell\} \subseteq B_n = \{\ell \in \mathbb{N}: z_n(\ell) > n \log_3(1.9)\}.$$

Portanto, como escolhemos também $n \geq n_1$, vemos que $\rho(B_n) < \varepsilon_2$, e dessa forma estabelece-se a tese. ■

Como consequência praticamente imediata deste resultado vamos mostrar que se $0 < \mu \leq 1$, praticamente todo natural n possui um número menor do que μn , mais precisamente, vamos mostrar que:

Proposição 1: Sejam μ número real em $(0; 1]$ e $A_\mu = \{n \in \mathbb{N}: \mathcal{O}(n) \cap [0; \mu n] \neq \emptyset\}$. Então $\rho(A_\mu) = 1$.

Dem.: Tomemos na Proposição 0 $\varepsilon_1 = \mu$ e $\varepsilon_2 = \frac{1}{k}$ e escolhamos N_k dado por aquela proposição.

Então, como evidentemente, $N \setminus A_\mu \subseteq \{m \in N: f^{N_k}(m) > \mu m\}$ resulta que

$$\rho(N \setminus A_\mu) \leq \rho(\{m \in N: f^{N_k}(m) > \mu m\}) < \frac{1}{k}.$$

Portanto $\rho(A_\mu) \geq 1 - \frac{1}{k}$ e o resultado ao fazer $k \rightarrow \infty$. ■

Observação: A Proposição 1 acima também pode ser facilmente obtida do trabalho [2] de Hepner, comentado e enunciado no início deste parágrafo. É claro que quando $\mu = 1$ a Proposição 1 é o resultado de Everett sobre densidade citado na introdução desta nota.

§3. Dois resultados: Nesta secção vamos estabelecer os resultados centrais desta nota.

Por questões técnicas será conveniente colocar aqui a definição de *densidade superior* e *densidade inferior* de um subconjunto A de N .

Seja $A \subseteq N$, definimos a densidade superior de A como

$$\bar{\rho}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in A: k \leq n\}}{n}.$$

Analogamente definimos a densidade inferior de A como

$$\underline{\rho}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in A: k \leq n\}}{n}.$$

Observe que, embora possa não existir a *densidade* de A , sempre existem $\bar{\rho}(A)$ e $\underline{\rho}(A)$.

Além disso é claro que $0 \leq \underline{\rho}(A) \leq \bar{\rho}(A) \leq 1$ e que A tem densidade se, e só se, vale a igualdade.

Portanto se $\bar{\rho}(A) = 0$ resulta que A tem densidade e esta é igual a zero.

Proposição 2: Para todo $n \in N$ a órbita de n por f tem densidade nula.

Dem.: Para provar isto, vamos mostrar que a órbita de n tem densidade superior nula.

Suponhamos, por contradição, que a afirmação da proposição é falsa. Tomemos $k \in N$ tal que $\bar{\rho}(\mathcal{O}(k)) = \varepsilon > 0$.

Consideremos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{8}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ e tomemos $n_0 = n_0(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ dado pela Proposição 0.

Seja $C = \{n \in \mathcal{O}(k): f^{n_0}(n) > \varepsilon_1 n\}$.

Da Proposição 0, vem que $\bar{\rho}(C) \leq \varepsilon_2$ e portanto, como C é um subconjunto da órbita de k , cuja densidade superior é ε , resulta que

$$\rho(\mathcal{O}(k) \setminus C) > \varepsilon - \varepsilon_2.$$

Logo, pela definição de densidade superior existe um $M \in N$ tal que

$$\#((\mathcal{O}(k) \setminus C) \cap \{0, \dots, M\}) > M \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{2}. \quad (0)$$

Por outro lado, para todo $m \in \mathcal{O}(k) \setminus C$ temos que $f^{n_0}(m) \leq \varepsilon_1$, portanto se $u \in ((\mathcal{O}(k) \setminus C) \cap \{0, \dots, M\})$ temos $f^{n_0}(u) \leq \varepsilon_1 M$.

Usando (0) e fazendo uma aplicação simples do princípio da casa do pombo, vem que existem pelo menos

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 2$$

elementos diferentes, r e s , em $((\mathcal{O}(k) \setminus C) \cap \{0, \dots, M\})$ tais que $f^{n_0}(r) = f^{n_0}(s)$.

Como r e s estão na órbita de k e são diferentes, resulta imediatamente que $\mathcal{O}(k)$ é periódica e portanto é um conjunto finito, contrariando a hipótese de ter densidade superior positiva.

Logo $\bar{\rho}(\mathcal{O}(k)) = 0$ e o resultado segue. ■

Para o próximo resultado será necessário considerar em $\mathbb{N}$ a relação

$$n \sim m \Leftrightarrow \exists k: f^k(n) = f^k(m).$$

Veja que esta relação identifica elementos cuja órbita coincide, a partir de um certo k . Por exemplo, se a órbita de n acaba por atingir o ciclo 1, 2, 1, 2, ... então existe k tal que $f^k(n) = 1$, então ou $n \sim 1$, caso k seja ímpar, ou $n \sim 2$ caso k seja par.

É claro que $\sim$ define uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$ e pode-se assim considerar um conjunto completo de representantes determinado por $\sim$.

É imediato ver que a conjectura de Collatz é equivalente a afirmar que $\mathbb{N}/\sim = \{0, 1, 2\}$.

O que provamos a seguir é que, embora não consigamos dizer que $\mathcal{P} = \mathbb{N}/\sim$ resume-se a esses três elementos, quando consideramos $\mathcal{P}$ como subconjunto de $\mathbb{N}$ este é *pequeno*, no sentido que tem densidade nula.

Proposição 3: Se $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ é um conjunto completo de representantes de $\sim$ então $\rho(\mathcal{P}) = 0$. Dem.: É análoga à da Proposição 2.

Outra vez vai ser mostrado que a densidade superior de $\mathcal{P}$ é zero.

Isto é feito por redução absurdo e esta parte da demonstração é totalmente igual à parte correspondente da Proposição 2 até o momento em que se encontram $n_0 \in \mathbb{N}$ e um par de elementos r e s de $\mathcal{P}$ tais que $f^{n_0}(r) = f^{n_0}(s)$.

Agora veja que isto também aqui leva a uma contradição, pois como $\mathcal{P}$ é um conjunto completo de representantes de $\sim$ não se poderia ter esta igualdade. ■

REFERÊNCIAS

- [0] Feller, W. - *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* - 3rd Edition - J. Wiley & Sons, 1968, vol. 1.
- [1] Everett, C. J., - Iteration of the number-theoretic function ... - *Advances in Math.* - vol. 25(1) 1977, pg. 42-45.
- [2] Hepner, E., - Eine Bemerkung zum Hasse-Syracusse Algorithmus - *Archiv der Math.* - vol. 31(3), 1978, pg. 317-320.
- [3] Crandall, R. E., - On the $3x + 1$ Problem - *Math. Comput.* - vol. 32(4), 1978, pg. 1281-1292.