Minicurso: **Equações Algébricas: uma abordagem histórica**

Profa. Heloisa D. Borsari (IME USP)

SEMANA DA LICENCIATURA DO IME USP

de 4 a 8 de outubro de 2004

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Equações Algébricas
uma abordagem histórica

Profa. Heloísa D. Borsari
Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística da USP

0. Introdução

Este texto pretende apresentar de forma resumida, a história das equações algébricas de graus 2,3 e 4, assim como a dedução de suas fórmulas de resolução.

Enquanto procurava bibliografia que pudesse me auxiliar nesse trabalho, um colega indicou-me o livro de Gilbert G. Garbi, intitulado "Romance das Equações Algébricas".

Bastou-me ler as primeiras páginas e ficou absolutamente claro que seria muito difícil (serão impossível) para mim contar melhor essa história.

Assim, grande parte desse texto é um resumo do livro citado, cuja leitura recomendo, com entusiasmo, a todos vocês.

Heloísa Borsari
Setembro/2004

1. Quando começou o homem a fazer Matemática?

Quando o homem começou a fazer Matemática?

Para esta pergunta não há uma resposta precisa. As descobertas científicas recentes demonstram ser a presença do homem na Terra mais antiga do que se imaginava; os primeiros hominídios a adotar a postura bípede surgiram na África há cerca de 4.000.000 de anos. As primeiras ferramentas foram construídas pelo chamado Homo Habilis, que apareceu na África por volta de 2.000.000 de anos atrás. O homem moderno (Homo Sapiens) que fala, pensa, inventa e interfere na natureza, parece ter surgido entre 300.000 e 200.000 anos atrás, novamente na África, de onde emigrou para os demais continentes.

Registros arqueológicos indicam ter havido, há cerca de 50.000 anos, uma grande revolução intelectual em nossa espécie: as ferramentas tornaram-se muito mais sofisticadas e produzidas em maior quantidade e o homem passou a dispor de condições que lhe permitiu, por exemplo, realizar longas viagens pelo mar. Por esta época, chegaram à Austrália tendo para isso percorrido pelo menos 90km de oceano, o que exigia a construção de barcos razoavelmente equipados, além de algum planejamento. A agricultura surgiu há cerca de 10.000 anos no Oriente Médio, provavelmente na região onde hoje fica o Iraque, entre os rios Tigre e Eufrates. A revolução agrícola representa um marco importantíssimo na história da humanidade: ao invés de apenas caçar e recolher frutos, o homem passou a cultivar seu próprio alimento, o que exigiu uma nova organização do trabalho, desenvolvimento de técnicas de estocagem e a criação de métodos para a divisão da terra e de sua produção. Nesta época, surgiram as primeiras cidades, assim como os governos e a coleta de impostos.

Em torno de 4.000 A.C., apareceram formas primitivas de escrita que evoluíram e consolidaram-se definitivamente na Mesopotânia, com os Sumérios e, poucos séculos depois, no Egito dos Faraós.

Os mais antigos documentos que se conhece tratam basicamente de dois temas: a glorificação dos reis e a contabilidade de impostos, estoque e transações comerciais.

Diante desses dados históricos onde localizar o início da Matemática?

Até hoje não se chegou a uma resposta concensual. De todo modo, é bastante provável que o homem já fizesse algo de matemática há 50.000 anos, quando os barcos que o levaram a Austrália foram construídos. E não resta dúvida de que quando dividia a terra entre os lavradores e a produção entre as pessoas, o homem da revolução agrícola já fazia Matemática.

2. Os primeiros registros escritos

Durante muitos séculos após sua invenção, a escrita ainda permanecia restrita a um pequeno número de pessoas, os chamados *escribas*. A eles competiam registrar a história dos reis, a contabilidade dos impostos, os estoques, as transações comerciais, etc. Ao fazê-lo, realizavam cálculos aritméticos e geométricos, de modo que seu treinamento não poderia limitar-se às técnicas das letras, mas deveria incluir rudimentos matemáticos que eles próprios desenvolviam e ensinavam a seus sucessores.

Dentre todos os documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, os mais famosos são os chamados Papiro de Ahmes (ou de Rhind) e Papiro de Moscou. O primeiro é um documento egípcio de 1650 A.C., onde o escriba Ahmes expõe as soluções de 85 problemas da aritmética e geometria. Foi encontrado no final do século XIX e hoje está exposto no Museu Britânico, em Londres. O Papiro de Moscou é um pouco mais antigo ainda e contém a fórmula correta para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide (!). Em ambos os papiros, aparecem problemas que contém equações do 1°. grau. Os egípcios, evidentemente, não dispunham da simbologia algébrica moderna, inventada, como veremos, há poucos séculos atrás. Não sabiam também resolver, em geral, nem mesmo as equações do 1°. grau. Usavam, entretanto, um engenhoso artifício, que lhes permitia resolver casos particulares e que descreveremos com um exemplo:

"Qual o número que somado à sua terça parte dá 8?"

Fazia-se uma hipótese inicial "conveniente" (o que dependia da sensibilidade e intuição do calculista), por exemplo 3. Ora, 3 somado com sua terça parte dá 3+1=4, que é a metade de 8. Logo, o número procurado deve ser o dobro de 3, ou seja, 6.

3. A primeira fórmula para a equação do 2°. grau.

Na mesma época, cerca de 4.000 anos atrás, os babilônios já conseguiam resolver equações do 2°. grau, baseados no que chamamos hoje de "complemento do quadrado". No entanto, os registros apresentam apenas sequências de instruções do tipo: "faça isto" ou "faça aquilo", sem qualquer justificativa sobre o processo desenvolvido. A título de ilustração, consideremos o problema abaixo, inscrito por um desconhecido escriba da Babilônia, em uma tabuleta de barro.

"Qual o lado do quadrado cuja área menos o dobro do lado é vinte e quatro?"

Na mesma tabuleta, ele inscreveu:

"Tome a metade dois,

que é um,

e multiplique um por ele mesmo.

Some o resultado a vinte e quatro,

o que dá vinte e cinco.

Isto é, na verdade, o quadrado de cinco que, somado à metade de dois,

vai dar o lado do quadrado,

que é igual a seis."

O que você pensa que o escriba fez?

Como você resolveria o problema?

Seu resultado coincide com o do escriba?

Mesmo sem conhecer a fórmula para sua resolução e dispondo apenas de palavras para expressá-las, os matemáticos da Antiguidade conseguiam resolver a maior parte das equações de 2º. grau, seguindo sempre o mesmo "roteiro de instruções". Hoje, poderíamos traduzir o roteiro utilizado pelos escribas para resolver equação de 2º. grau expressas na forma

$$x^2 - bx = c$$

através da fórmula

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$$

Esta fórmula é equivalente àquela que você conhece? Por quê?

4. O papel da Matemática Grega

No Egito e na Mesopotânia tiveram origem os conhecimentos matemáticos da Europa. Nesse processo de assimilação, os gregos desempenharam um papel fundamental por terem sido eles os primeiros europeus a se interessarem e reconhecerem a utilidade da Geometria. Esta palavra, aliás, é de origem grega e significa "medida da terra", porque naquele tempo era este o principal uso que se fazia da Geometria.

O primeiro grande matemático grego foi Tales (da cidade de Mileto). Tales era um rico comerciante, que podia dar-se ao luxo de estudar Astronomia, Filosofia e Matemática, por puro prazer. Conta a História que Tales ficou famoso por prever a ocorrência de um eclipse (isto permitiu, mais tarde, situar sua obra por volta de 600 A.C.). Tales visitou o Egito e a Babilônia e de lá trouxe para a Grécia o estudo da Geometria, introduzindo um conceito revolucionário: **As verdades matemáticas precisam ser provadas**.

Foi a primeira vez que alguém expressou com clareza um dos alicerces mais importantes para toda atividade científica.

A partir daí, começaram as demonstrações dos teoremas. Tales deu o pontapé inicial, provando que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, entre outros resultados. Poucas décadas depois, Pitágoras demonstrou o seu famoso teorema que afirma que, em um triângulo retângulo, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Produziu-se, pela primeira vez na Europa, uma equação do 2°. grau, com um atraso de pelo menos 1200 anos em relação à Babilônia.

Após Tales e Pitágoras, as descobertas geométricas avançaram rapidamente e os teoremas foram se acumulando em grande quantidade. Por volta de 300 A.C., a Grécia produziu um gênio que se encarregou de sintetizar e sistematizar todo o conhecimento acumulado até então: Euclides, autor de Elementos, considerado o maior livro-texto de Matemática de todos os tempos.

Não se sabe onde Euclides nasceu, talvez tenha estudado em Atenas por algum tempo. Mas foi em Alexandria, cidade fundada por Alexandre Magno no Delta do Nilo (Egito), que seu talento se revelou, transformando a cidade no grande centro do saber da Antigüidade Clássica. Já observamos que Tales revolucionou o pensamento matemático ao estabelecer que as verdades precisam ser provadas. Euclides manteve esse conceito mas fez uma ressalva que por si só, bastariam para torná-lo famoso. **Nem todas as verdades podem ser provadas; algumas delas, as mais elementares, devem ser admitidas sem demonstrações**.

Os Elementos escritos em 13 livros, realizaram o trabalho de organizar todo o conhecido geométrico de forma dedutiva, partindo de um número mínimo de definições e de verdades aceitas sem provas. A idéia básica dos Elementos está presente em toda a produção científica até hoje.

A intensa dedicação dos matemáticos gregoss à geometria, custou-lhes o sacrifício dos conhecimentos aritméticos. Apesar disso, Euclides demonstrou alguns importantes teoremas da Teoria dos Números e introduziu conceitos que se tornaram fundamentais na solução das equações. Logo no início dos Elementos, ele explicitou algumas verdades evidentes por si mesmas, chamadas **axiomas**, dos quais destacamos os seguintes:

a) Entidades iguais a uma terceira são iguais entre si.

b) Se a iguais somam –se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais.

c) A parte é menor que o todo.

d) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais

Aí estava a chave para a solução das equações de 1°. grau.

Considere, por exemplo, a equação

$$3x + 2 = 8$$

$$3x + 2 - 2 = 8 - 2 \qquad \text{(b)}$$

$$3x = 6 \qquad \text{(d)}$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \qquad \text{(d)}$$

$$x = 2 \qquad \text{(a)}$$

Finalmente, após tanto tempo, obtinha-se a fórmula para resolução das equações de 1°. grau, sem as agruras da "Regra da Falsa Posição".

Voltemos às equações de 2°. grau. O domínio que os gregos tinham sobre a Geometria permitia-lhes resolver alguns tipos de equações do 2°. grau, apenas com régua e compasso.

Exemplo: Considere a equação $5x - x^2 = 4$.

1) Trace um segmento $\overline{AB}$ de comprimento 5 (= coeficiente do termo em x)
2) Divida $\overline{AB}$ ao meio e chame C o ponto médio de $\overline{AB}$.
3) Trace um segmento $\overline{CP}$, perpendicular a $\overline{AB}$, cujo comprimento seja igual a 2 (raiz quadrada do 2°. membro da equação).
4) Trace uma circunferência de centro P e raio $\overline{CB}$ que corta o segmento $\overline{CB}$ no ponto D.
5) Construa o retângulo ABEF, tal que DB = BE.
6) Complete o quadrado DBEG.
7) Mostre que x_1 = DB é uma raiz da equação dada.

Embora para nós seja difícil entender a resolução de Euclides, o teorema de Pitágoras nos ajuda a compreender porque x_1=DB é uma raiz da equação. Uma construção geométrica semelhante a esta permite calcular a outra raiz.

A conquista da Grécia por Roma praticamente apagou a matemática grega. A escola de Alexandria continuou a existir por mais alguns séculos, mas sua produção já não tinha o mesmo brilho. Com o fim do Império Romano, a Europa entrou na Idade das Trevas. Neste período, o desenvolvimento da Matemática esteve nas mãos de dois outros povos: os árabes e os hindus.

5. Os árabes e os hindus

Os primeiros séculos depois de Cristo foram bastante agitados. O Império Romano atingiu seu ápice, mas começou a cair, abalado pela corrupção interna e pelos bárbaros, que lhe rompiam as fronteiras.

Com as energias consumidas pelas guerras pouco restava para ser dedicado às ciências. O Império dividiu-se: sua parte ocidental ficou nas mãos dos invasores e Bizâncio, capital do Império Romano do Oriente – que incluía Alexandria - tornou-se a última guardiã da cultura acumulada na Antiguidade Clássica. No entanto, logo Bizâncio teve sua influência reduzida pelo surgimento de nova força político/religiosa no Oriente próximo.

Por volta de 570 dc, na Arábia, nasce Maomé, destinado a criar um império que abalou o mundo, desde a Europa até a Índia. Conta-se que aos 40 anos, Maomé foi tomado por profundo sentimento religioso dando início, em 613, à sua pregação pública. Unidos pelos ensinamentos islâmicos de Maomé, mais tarde compilados no Corão, os árabes conquistaram os países vizinhos, um após o outro, chegando, em poucas décadas até a fronteira da Espanha com a França, no Ocidente, e a Índia, no Oriente.

Com a queda do Egito em 641, os 600.000 manuscritos da Biblioteca de Alexandria arderam nas caldeiras dos banhos públicos durante meses.

Omar, o conquistador árabe responsável por esse crime contra a cultura clássica, entendia que os livros ou repetiam os ensinamentos do Corão – e por isso eram supérfluos - ou os contrariavam - e por isso eram nocivos. Em qualquer caso, deveriam ser queimados.

Tudo indicava que o império árabe viria a tornar-se sinônimo de obscurantismo, nas ciências e na cultura. No entanto, o que ocorreu foi o contrário. Em pouco tempo os califas (sucessores de Maomé) reconheceram a importância do saber e das artes e passaram a patrociná-los.

O primeiro a fazê-lo foi Hanm Al-Raschid, imortalizado nos Contos das 1001 Noites, que ordenou que os Elementos de Euclides fossem traduzidos para o Árabe. Seu filho, Al-Mamun, que reinou de 813 a 833, continuou a obra do pai, determinando a tradução para a língua árabe de todos os antigos manuscritos gregos, criando em Bagdad uma escola científica cuja biblioteca foi a melhor do mundo, depois da de Alexandria.

Entre os cientistas convidados para sua corte, estava o famoso Matemático Abu-Abdullah Muhammed Ibn Musa Al-Khwarizmi, cujo nome deu origem à palavra **algarismo**.

Por solicitação de Al-Mamun, produziu uma obra popular sobre as equações intitulada Al-Kitab Al-jabr wa'l Muquabaheh (o livro da restauração e do balanceamento). A palavra Al-jabr (que deu origem à palavra Álgebra) era utilizada por Al-Khwarizmi para designar operações do tipo

$$x - 3 = 6 \Rightarrow x = 9$$

Procurando ao máximo tornar-se compreensível a seus leitores, Al-Khwarizmi trouxe da Índia o sistema de numeração decimal utilizado até hoje, cujos elementos fundamentais são os algarismos de zero a nove e seu valor, em função da posição ocupada no número. Em particular, com a introdução do zero pelos hindus, equações do 2°. grau como "$x^2 = 2x$", passaram a ser resolvidas corretamente, encontrando-se (ainda com palavras somente) as solução $x = 0$ e $x = 2$.

Paralelamente a isso, os matemáticos hindus também avançaram em suas pesquisas e Bhaskara é o que mais facilmente vem à nossa memória, por estar ligado à fórmula geral da solução das equações do 2°. grau. A este respeito vale ressaltar que conforme relato do próprio Bhaskara no século XII, a mencionada fórmula não foi descoberta por ele e sim pelo matemático hindu Sridhara, um século antes. Vamos, finalmente, a ela.

Considere a equação geral do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Deduza a conhecida fórmula de Bhasbara, utilizando o método de complementar quadrados.

Vencidas as equações do 2°. grau, a curiosidade dos matemáticos levou-os a pensar sobre formas de resolver as de grau 3. Aqui também os árabes tiveram um papel importante, embora não tenham conseguido obter a fórmula. Coube aos italianos, durante o Renascimento, levar avante os trabalhos realizados pelos árabes e hindus até então. Antes de passarmos a esse ponto, vamos resolver alguns problemas envolvendo equações do 2°. grau.

6. PROBLEMAS

1) Um estacionamento mede 32m de largura e 50m de comprimento. O proprietário deseja aumentar sua área para $2320m^2$, acrescentando faixas de mesma largura a um dos lados e aos fundos de modo a conservar o formato retangular. Determine a largura dessas faixas.

2) Um trem percorre 550km com velocidade constante. Se aumentasse a velocidade em 5km/h, gastaria 1 hora a menos. Determine o tempo de viagem.

3) Uma torneira A enche um tanque em 40' e outra torneira B, para encher o mesmo tanque sozinha, demora 15 minutos a mais que as duas juntas. Em quanto tempo B enche o tanque sozinha?

4) Na Índia eram muito comuns competições públicas da quebra cabeças onde inúmeros problemas algébricos surgiram de maneira poética em forma de verso e prosa como o que segue abaixo:

Um grupo de abelhas cujo número era igual a raiz quadrada da metade de todo o enxame pousou sobre um jasmim, tendo deixado para trás $\frac{8}{9}$ do enxame; só uma abelha do mesmo enxame voava em torno de um lotus, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que caíra imprudentemente na copa da flor, de doce fragância. Quantas abelhas formavam o enxame?

5) João e Maria aplicaram seus capitais, que somam R$90.000,00, a uma mesma taxa de 36% ao ano. O capital de João foi aplicado por 5 meses a mais que o de Maria e rendeu 18.000,00 de juros, ao passo que o dela rendeu R$15.000,00. Quanto cada um aplicou e por quanto tempo?

6) Um comerciante árabe comprou um certo número de objetos de prata por 480 moedas. Porém, 4 destes objetos foram roubados e outros 6 estavam com defeito. Para não ter prejuízo, o comerciante foi obrigado a vender os objetos restantes com um lucro de 4 moedas em cada um. Se não ganhou nem perdeu nesta operação, quantos eram os objetos de prata?

7) Uma idéia brilhante de Al-Khwarizm:

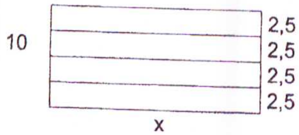
Depois de resolver e explicar algumas equações do 2°. grau, ele procurou verificar, através da Álgebra Geométrica de Euclides, se suas soluções estavam efetivamente corretas. Vejamos como ele procedia, tomando como exemplo a equação

$$x^2 + 10x = 39$$

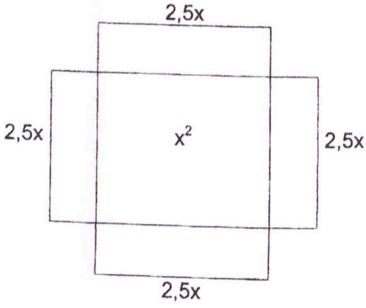
a) O termo x^2 pode ser interpretado como a área de um quadrado de lado x.

b) O termo 10x pode ser interpretado como a área de um retângulo de base x e altura 10.

c) Al-Khwaarizmi dividiu este retângulo em quatro retângulos de áreas iguais.



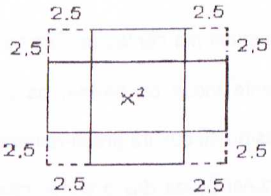
d) Aplicou, sobre o quadrado de lado x, cada um desses novos retângulos



e) A área da figura formada é

$$x^2 + 4.\ 2{,}5x = x^2 + 10x = 39$$

f) Depois, "completou o quadrado',



g) A área desse quadrado é gual a

$$39 + 4(2,5 \times 2,5) = 39 + 25 = 64$$

Portanto, o lado desse quadrado é 8.

h) Finalmente, al-khwarizmi deduziu a raiz da equação

$$2,5 + x + 2,5 = 8$$

$$x = 3!$$

8) Encontre dois números x e y, conhecendo-se sua soma 5 a seu produto P.

7. O ressurgimento da Matemática na Itália.

Os séculos XII e XIII trouxeram acontecimentos marcantes na Europa: as cruzadas mobilizavam milhões de pessoas em praticamente todos os países; os conquistadores bárbaros foram finalmente absorvidos pelo que restou da cultura greco-romana; o comércio, liderado por Veneza, floresceu; começaram as construções das grandes catedrais, Marco Polo chegou ao Extremo Oriente e surgiram as primeiras universidades: a de Bolonha, em 1088; a de Paris, em 1200, a de Nápoles, em 1224; a de Cambridge, em 1231.

Foi neste clima de ebulição que viveu o maior matemático europeu da Idade Média, Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci, filho de Bonacci, próspero encarregado de negócios das cidades da Veneza, Pisa e Gênova. Leonardo nasceu em 1175 e passou parte de sua juventude no norte da África, onde tomou contato com a cultura Árabe. Em seguida, viajou pelo Mediterrâneo, visitando o Egito, a Síria, a Grécia, a Sicília, o Sul da França e Constantinopla, o que lhe permitiu estudar vários dos sistemas aritméticos então existentes.

Convencido de que o método hindu-árabe era o melhor, passou a transmiti-lo a seus compatriotas italianos e em 1202 publicou sua 1ª. obra, o Liber Abaci, no qual tratava de questões aritméticas profundas e discorria sobre álgebra.

As palavras iniciais do Liber Abaci são históricas: **Estes são os nove símbolos hindus 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com eles, mais o símbolo 0, pode-se escrever qualquer número. E foi assim que os algarismos arábicos foram introduzidos na Europa, em 1202**.

Em 1220, sua reputação de grande matemático já era conhecida e em 1225 quando de passagem por Pisa, o Imperador Frederico II decidiu testar sua capacidade: uma das questões propostas por um conselheiro do Imperador foi encontrar, pelos métodos euclidianos, um segmento x que satisfizesse a equação

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0.$$

Leonardo provou ser impossível construir tal segmento com régua e compasso mas deu uma solução numérica aproximada, correta até a 9ª casa decimal.

Mais uma vez o desafio das equações de 3°. grau se impunha provocando os cérebros daqueles que jamais se conformam com problemas sem solução.

A obra de Leonardo inspirou inúmeros seguidores, principalmente na Itália, e representou um marco na história da ciência ocidental.

Depois de Leonardo, o próximo grande matemático italiano foi o franciscano Fra Luca Pacciolo que se interessou profundamente pela aritmética e que é considerado o pai da contabilidade moderna. Nasceu em 1445, no mesmo período em que, na Alemanha, Guttemberg inventava a imprensa, o que tornou possível a rápida multiplicação e divulgação dos livros (a 1ª. edição impressa dos Elementos de Euclides, em latim, foi publicada em Veneza, em 1482). O momento histórico era, portanto, propício para uma síntese do conhecimento matemático acumulado na Europa até então e coube a Luca Paccioli realizá-la.

Sua obra foi publicada em Veneza em 1494 e motivou inúmeros talentos matemáticos. Infelizmente, Luca cometeu vários erros e um deles foi declarar ser impossível resolver as equações de 3°. grau. Poucas décadas depois, na mesma Itália, Tartaglia obteve a fórmula de resolução das equações de grau 3.

8. Cardano e Tartaglia: a disputa pelas equações de 3°. grau.

Os grandes gênios, felizmente, são seres humanos como os demais, com qualidades, defeitos, paixões, fraquezas e tudo aquilo que nos caracteriza como pessoas.

Este fato elementar explica por que, na história da ciência, não foram raros os choques entre dois talentos, em torno de disputas cuja essência eram as vaidades ou outros sentimentos ainda menos “nobres”. Além disso, ser um gênio não faz de ninguém um bom caráter. O que houve entre Cardano e Tartaglia, no início do século XVI, é um exemplo disso.

De Girolamo Cardano, nascido em Pavia, em 1501 e falecido em Roma em 1576, o mínimo que se pode dizer é que levou uma vida marcada por contrastes e extremos. Excepcional cientista, dedicou-se também à Astrologia. Protegido do Papa Gregório XIII, acabou sendo acusado de heresia por haver divulgado o horóscopo de Jesus Cristo. Astrólogo do Vaticano, escreveu um livro louvando a Nero, o grande perseguidor dos cristãos do Império Romano; autor do Liber de Ludo Aleae, onde brilhantemente introduziu a idéia de probabilidade que se usa até hoje, ali também ensinou maneiras de se trapacear nos jogos. Filho ilegítimo de um advogado de Milão, professor em Bolonha, Pavia e Milão, constituiu uma família absolutamente desregrada. Seu filho mais velho foi condenado à morte por ter assassinado a esposa. De seu filho mais novo, Cardano, num acesso de fúria, arrancou as duas orelhas. Em documento por ele mesmo redigido, definiu-se como desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, etc, etc, etc.

Apesar destes traços pessoais nada recomendáveis, Cardano legou à posteridade um livro que, para a época, era o maior compêndio algébrico existente: a ARS MAGNA publicado na Alemanha, em 1545. Ali foi introduzido com clareza, o conceito de número negativo, em analogia com os créditos e débitos da contabilidade usual.

Nicolo Fontana, apelidado Tartaglia, só tinha em comum com Cardano a nacionalidade italiana e o talento matemático. Nascido em Bréscia, em 1500, teve desde a infância uma vida marcada pelo infortúnio. Aos 11 anos, em 1512, Bréscia foi tomada por tropas francesas e parte da população, incluindo mulheres e crianças, refugiou-se na igreja. Os cavalarianos invadiram o local, chacinando indiscriminadamente quem encontravam pela frente. O menino Nicolo foi gravemente ferido por golpes de sabre. Do triste incidente, Nicolo carregou para o resto de sua vida uma profunda cicatriz na boca que lhe provocou um permanente defeito na fala, daí ter sido apelidado Tartaglia, que significa gago.

A despeito de infância tão amarga, desde cedo Tartaglia demonstrou grande amor pelos estudos e grande vontade de aprender. Como sua mãe não pudesse pagar-lhe a escola, Tartaglia estudava por si mesmo, nos raros livros que conseguia obter. Sem dinheiro para comprar papel e tinta, dirigia-se à noite ao cemitério onde escrevia com carvão sobre as lápides dos túmulos. Em 1535, ganhava seu sustento como professor de ciências em Verona, Vicenza, Bréscia e Veneza. Ao longo de sua vida, publicou diversas obras, mas o que o colocou definitivamente nos anais da Matemática foram suas disputas com Cardano, sobre as equações do 3°. grau.

Consta que, por volta de 1510, um matemático italiano de nome Scipione del Ferro, encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas morreu sem publicar sua descoberta. Seu aluno, Antonio Maria Fior, tentou ganhar notoriedade valendo-se da descoberta de seu mestre. Na época eram frequentes os desafios entre os sábios (e, também, entre os que desejavam sê-lo) e Fior elegeu Tartaglia como alvo. O desafio consistia na solução de diversos problemas que um deveria propor ao outro e Fior naturalmente, pretendia apresentar questões relacionadas àquele tipo de equação.

Tartaglia aceitou o desafio e veio a saber que seu oponente estava armado do método desenvolvido por Scipione del Ferro. Conforme mais tarde relatou o próprio Tartaglia, "mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui, em 10 de fevereiro de 1535. Mas Tartaglia foi mais longe: resolveu também as equações do tipo

$x^3 + px^2 + q = 0$, que Fior não conhecia.

O resultado do desafio foi que Fior saiu humilhado: enquanto Tartaglia resolveu corretamente todos os problemas propostos por Fior, este não conseguiu resolver nenhum dos problemas propostos por Tartaglia, já que envolviam equações do tipo

$x^3 + px^2 + q = 0$.

Enquanto isso, Cardano estava escrevendo a Pratica Arithmeticae Generalis, englobando Álgebra, Aritmética e Geometria. Ainda acreditando na afirmação de Luca Paccioli sobre a impossibilidade de uma solução geral para as equações de grau 3, não pretendia incluí-las em seu livro. Entretanto ficou sabendo que Tartaglia achara a solução e resolveu pedir-lhe que a revelasse para publicação na Pratica. Tartaglia não concordou, alegando ter a intenção de publicá-la ele mesmo em um livro a ser escrito no futuro. Diante da negativa, Cardano ofendeu Tartaglia acusando-o de mesquinho e egoísta. Algum tempo depois, Tartaglia recebe uma carta, assinada por um nobre italiano, convidando-o a visitá-lo em Milão. Qual não foi sua surpresa quando, ao chegar, ao invés do nobre, esperava-o o próprio Cardano que lhe implorou, jurando guardar segredo, a revelação das cobiçadas das fórmulas. Tartaglia, confiando em Cardano, enviou-lhe o segredo em forma de um poema – cifrado e misterioso – que Cardano não conseguiu entender. Após mais conversas, mais juras e mais promessas, Tartaglia terminou por revelar-lhe tudo. Conforme qualquer um poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e em 1545, fez publicar na Ars Magna a fórmula de Tartaglia.

Embora tenha feito muitos elogios a Tartaglia, Cardano acrescentou que, independentemente e há alguns anos antes, Scipione del Ferro havia chegado aos mesmos resultados. A reação de Tartaglia foi imediata e explosiva: publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído juramento feito sobre a Bíblia. O círculo de ódio, rivalidade e intriga aumentou, desembocando em mais ofensas e desafios entre as partes envolvidas. O corajoso Tartaglia chegou a aceitar um debate público contra Cardano, mas quem compareceu no lugar deste foi Ferrari, seu discípulo e descobridor da solução das equações de 4°. grau.

No final, a posteridade não fez justiça à Tartaglia. Sua fórmula é até hoje conhecida como Fórmula de Cardano.

9. A fórmula geral para equações de grau 3.

Vamos tratar, finalmente, de encontrar a solução geral das equações de grau 3. Vimos que Tartaglia encontrou a solução de dois tipos especiais de equações de 3º. grau, a saber, $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$. No entanto, começamos observando que qualquer equação de 3º. grau pode ser reduzida facilmente a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$.

1º. passo. Considere a equação geral de grau 3,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Mostre que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que se efetuarmos a substituição $x = y + m$, a equação obtida na variável y é do tipo $y^3 + py + q = 0$. Mostre ainda que se soubermos encontrar as raízes desta nova equação, conheceremos também as raízes da equação geral.

(Com isso, vemos que Tartaglia não resolveu apenas casos particulares e, sim, encontrou a solução geral do problema).

Agora vamos ao segredo: todas as grandes descobertas partem de uma idéia fundamental. No caso, a idéia de Tartaglia foi supor que a solução procurada era composta de duas parcelas.

2°. passo. Considere a equação $x^3 + px + q = 0$ e suponha que $x = A + B$ seja uma raiz

a) Mostre que $x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$

b) Conclua que

$$\begin{cases} A^3B^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ A^3 + B^3 = -q \end{cases}$$

Assim, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto.

c) Calcule A^3 e B^3 em função de p e q.

d) Mostre que

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$ é uma raiz da equação $x^3+px+q = 0$.

Esta foi a fórmula descoberta por Tartaglia, mas conhecida até hoje por fórmula de Cardano.

Vejamos agora como funciona o método de Tartaglia em um exemplo concreto.

Exemplo. Resolva a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, pelo método de Tartaglia.

Quantas raízes você obteve?

À primeira vista, imaginou-se que as equações de grau 3 estivessem vencidas pela fórmula de Tartaglia, a exemplo do que ocorrera com as equações de grau 2, a partir da fórmula de Bhaskara. Ledo engano! Logo começaram a surgir dúvidas, perguntas e problemas na aplicação do método de Tartaglia e os matemáticos da época viam-se enredados em questões que demandariam cerca de 200 anos para serem resolvidas.

Dentre tantas dúvidas, a mais elementar surge naturalmente quando observamos a fórmula de Tartaglia e é a seguinte: por que a fórmula exibe apenas <u>uma</u> raiz? Sabemos que as equações de 3º. grau possuem três raízes. Onde estariam as outras duas? Este é o assunto da nossa próxima seção.

10. A insuficiência dos números reais

Consideremos, por exemplo, a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

(i) Verifique que $x = 4$ é raiz da equação.

(ii) Divida o polinômio $(x^3 - 15x - 4)$ pelo polinômio $(x - 4)$.

(iii) Mostre que as duas outras raízes da equação dada também são reais.

Aplicando a fórmula de Cardano, no entanto, teremos

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

e nos deparamos não apenas com a extração de raízes quadradas de números negativos, mas também com a extração de raízes cúbicas de números que, na época, eram inteiramente desconhecidos.

Aqui estava uma questão realmente séria. Quando, nas equações de 2°. grau, a fórmula de Bhaskara levava a raízes quadradas de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava que o problema não teria solução. Agora, no entanto, estava-se diante de uma equação do 3°. grau, com três raízes <u>reais</u>, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. E, pior, este não é um caso isolado. Pode-se mostrar, com relativa facilidade que se uma equação de 3°. grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

possui três raízes reais, então $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0$. Isto significa que para encontrar as raízes desta equação pela fórmula de Cardano (Tartaglia) temos obrigatoriamente que trabalhar com raízes quadradas de números negativos. Assim, não havia mais como negar que os números reais eram insuficientes para o estudo da Álgebra!

Antes de passarmos a relatar como foram introduzidos os números complexos, vamos examinar um pouco melhor a fórmula de Tartaglia.

Consideremos novamente a equação $x^3 + px + q = 0$. Lembremos que para encontrar sua solução Tartaglia escreveu $x = A + B$ e deduziu que $AB = -p/3$ e $A^3 + B^3 = -q$. Daí pode calcular A^3 e B^3 e concluir que

$$x = \overbrace{\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}}}^{A} + \overbrace{\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}}}^{B} \quad \text{é raiz da equação,}$$

onde $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Sabemos que todo número complexo tem três raízes cúbicas complexas. Assim, a expressão $A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ não representa um único número e sim, três complexos distintos. Observação idêntica vale para $B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}}$.

Mas, então, teríamos 9 possbilidades para o valor de

$$x = A + B$$

o que é impossível, já que sabemos que uma equação de 3°. grau possui no máximo três raízes distintas.

Use o fato de que $AB = -p/3 \in \mathbb{R}$ para esclarecer essa aparente contradição.

11. A introdução dos números complexos

O homem que conseguiu ultrapassar a barreira dos números reais foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530. Corajoso, pertinaz e sempre disposto a pensar em coisas novas, seus estudos começaram com a tentativa de conciliar o resultado fornecido pela Fórmula de Cardano (Tartaglia) para a equação

$x^3 - 15x + 4 = 0$,

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

com a raiz x = 4, constatada por mera observação.

Conforme seu próprio relato em 1572 no livro L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica, seu método baseou-se no "pensamento rude" de que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $(a+\sqrt{-b})$ e $(a-\sqrt{-b})$, respectivamente.

Vamos percorrer o caminho de Bombelli:

a) Suponha $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}$; $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}$ e deduza que a=2 e b=1.

b) Conclua que a raiz x = 4 da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ é obtida pela fórmula de Cardano.

c) Obtenha as outras duas raízes.

d) Que regras você utilizou para operar com esses números?

Ao realizar seus cálculos, Bombelli criou as seguintes regras para operar com os números da forma $a+\sqrt{-b}=a+b\sqrt{-1}$

Soma de dois destes números:

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$

Regras para se operar com $\sqrt{-1}$

$$(\sqrt{-1}).(\sqrt{-1})=-1$$
$$(-\sqrt{-1}).(\sqrt{-1})=1$$
$$(-\sqrt{-1}).(-\sqrt{-1})=-1$$
$$(\pm 1)\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-1}$$
$$(\pm 1)(-\sqrt{-1})=\mp\sqrt{-1}$$

Estavam assim lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco campo da Matemática: a Teoria dos Números Complexos.

Duas observações finais:

A primeira diz respeito ao pioneirismo de Cardano no manuseio dos números complexos. Em certa passagem da Ars Magna ele escreveu que se alguém procura dividir 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40 verificará que isto é impossível. Entretanto ele resolve o problema obtendo o resultado $x=5\pm\sqrt{-15}$ e y = $5\mp\sqrt{-15}$ e acrescenta que este resultado é "tão sutil quanto inútil'.

A segunda observação é quanto à origem dos números complexos: foram as equações de 3°. grau (e não as de 2°.) que desencadearam o desenvolvimento teórico nessa área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da idéia inicial de Bombelli.

12. Ferrari e as equações de 4°. grau.

Ludorico Ferrari, nascido em Bolonha em 1522 e falecido por volta de 1560, foi o mais famoso aluno de Cardano. Oriundo de família extremamente humilde, foi trabalhar como servo na casa de Cardano aos 15 anos; sua inteligência brilhante logo foi reconhecida pelo mestre, que o promoveu a secretário. Seu temperamento incontrolável produziam atritos constantes com Cardano, mas apesar disso, eram amigos e colaboradores.

A partir dos 18 anos, Ferrari passou a ensinar por conta própria em Milão e, com a proteção do Cardeal de Mântova, alcançou posições que lhe proporcionaram uma boa renda. Logo após formar-se professor de Matemática na Universidade de Bolonha, veio a falecer aos 38 anos de idade, provavelmente envenenado pela própria irmã.

Dentro do costume vigente na época entre os matemáticos, de proporem problemas uns aos outros, um certo Zuanne de Tonini da Coi submeteu a Cardano uma questão que envolvia a equação

$$x^4+6x^2-60x+36=0,$$

Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano passou a questão ao jovem Ferrari que, num lampejo de gênio, encontrou o método geral para as equações de 4°. grau. Tal método também foi publicado por Cardano na Ars Magna em continuidade à solução dada por Tartaglia às equações do 3°. grau.

13. O método de Ferrari

Começamos reduzindo o problema a equações de 4°. grau que não tem termo em x^3

<u>1°. passo</u>. Considere a equação geral de 4°. grau

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

Mostre que existe $m \in IR$ tal que se efetuarmos a substituição $x=(y+m)$, a equação obtida na variável y é da forma $y^4+py^2+qy+r=0$.

Mostre ainda que se soubermos encontrar as raízes dessa nova equação, conheceremos também as raízes da equação geral.

Ferrari olhou a equação $x^4+px^2+qx+r=0$ e procurou reagrupar os termos de modo a obter, nos dois lados da igualdade, polinômios quadrados perfeitos. Se tal reagrupamento fosse possível, extraindo as raízes quadradas de ambos os lados, teríamos duas equações do 2°. grau a resolver, o que solucionaria o problema.

<u>2°. passo</u>. Considere a equação de grau 4

$$x^4+px^2+qx+r=0 \qquad (*)$$

(a) Verifique que a equação acima pode ser escrita na forma

$$x^4+(p+\alpha)x^2+(r+\beta) = \alpha x^2-qx+\beta,\ \forall\alpha,\beta\in \mathbb{R} \qquad (**)$$

(b) Mostre que existem $\alpha,\beta\in \mathbb{R}$ tais que os dois lados da equação acima são quadrados perfeitos. (para isso use o fato de que $az^2+bz+c=0$ é quadrado perfeito se e só se $\Delta=(b^2-4ac=0)$

(c) Verifique que se α e β são como em (b) então

$\beta=\dfrac{q^2}{4\alpha}$ e α é raiz da equação $y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0$.

Assim, como sabemos resolver as equações de 3°. grau, podemos encontrar α, em seguida β, de modo que a equação (*) possa ser escrita como igualdade entre dois quadrados perfeitos.

Extraindo-se as raízes quadradas em (**), temos

$$\underbrace{\sqrt{x^4+(p+\alpha)x^2+(r+\beta)}}_{\text{quadrado perfeito}} = \pm\underbrace{\sqrt{\alpha x^2-qx+\beta}}_{\text{quadrado perfeito}}$$

Para cada alternativa de sinal temos uma equação de 2°. grau a resolver e, portanto, obtemos duas soluções. Desse modo, para a equação de 4°. grau, o método fornece quatro raízes.

Mas, e se a equação de 3°. grau em α possuí 3 raízes reais? Não importa. Para qualquer escolha de α, teremos pares de equações de 2°. grau equivalentes, isto é, que nos fornecem as mesmas raízes da equação de 4°. grau.

Vamos ilustrar o método de Ferrari seguindo seus passos, através de um exemplo concreto.

Resolva a equação x^4-15x^2-10x+24=0.

a) Encontrar $\alpha, \beta \in$ IR tais que

(*) $x^4-(15-\alpha)x^2+(24+\beta) = \alpha x^2+10x+\beta$, com ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos.

$$\begin{cases} \Delta_1 = (15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0 & (1) \\ \Delta_2 = 100 - 4\alpha\beta = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) concluímos que $\beta = \dfrac{25}{\alpha}$ (3)

Substituindo em (1), obtemos

$$(15-\alpha)^2 - 4(24+\frac{25}{\alpha}) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha(15-\alpha)^2 - 4(24\alpha + 25) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$$

b) Resolver a equação do 3°. grau

$$\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0. \qquad (4)$$

Aqui poderíamos utilizar o método de Tartaglia. No entanto, é fácil ver que α_1=1 é uma raiz da equação (pois a soma dos coeficientes da equação é zero).

Desse modo, dividindo o polinômio (α^3-30α^2+129α-100) pelo polinômio (α-1) encontramos as outras raízes: De fato:

$$\alpha^3-30\alpha^2+129\alpha-100 = (\alpha-1)(\alpha^2-29\alpha+100)$$

Resolvendo a equação do 2°. grau $\alpha^2-29\alpha+100=0$, encontramos as raízes α_2=25 e α_3=4.

Logo, as raízes da equação (4) são

$$\alpha_1=1, \quad \alpha_2 = 25 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 4$$

c₁) $\alpha_1=1, \quad \beta_1 = \frac{25}{\alpha_1} = 25$

Substituindo os valores de α_1 e β_1 na equação (*) obtemos:

$x^4 + (15-1)x^2 + (24+25) = 1x^2+10x+25$

$x^4 + 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25$

$$(x^2 - 7)^2 = (x+5)^2$$

Assim,

$x^2-7 = x+5 \Leftrightarrow x^2-x-12 = 0 \Leftrightarrow x_1=4, \quad x_2 = -3$

ou

$x^2-7 = -(x+5) \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow x_3 = -2, \quad x_4 = 1$

c₂) $\alpha_2 = 25, \quad \beta_2 = 1$

Substituindo na equação (*), obtemos

$x^4-(15-25)x^2 + (24+1) = 25x^2+10x+1$

$x^4+ 10x^2 + 25 \quad = (5x+1)^2$

$(x^2+5)^2 = (5x+1)^2$

Assim,

$x^2+5 = 5x+1 \Leftrightarrow x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow x_1=4, \quad x_2=1$

ou

$x^2+5 = -5x-1 \Leftrightarrow x^2+5x+6 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -3, \quad x_4 = -2$

c3) $\alpha_3 = 4$ e $\beta_3=\frac{25}{4}$

$x^4-(15-4)x^2 + (24 + \frac{25}{4}) = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$

$x^4 - 11x^2 + \frac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$

$(x^2 - \frac{11}{2})^2 = (2x + \frac{5}{2})^2$

Assim,

$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right)^2 = 2x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -2$

ou

$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right) = -\left(2x + \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 1, \quad x_4 = -3$

Ou seja, as raízes são sempre –3, -2, -1,4, independentemente da escolha de α e β.

Para completar, vamos resumir os passos para a resolução da equação de 4°. grau, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$

1. Toma-se a equação geral e faz-se uma mudança de variável do tipo x=y+m, de modo a cair em uma equação de 4°. grau em y, sem o termo em y^3.

2. Reagrupam-se seus termos de modo a fazer com que os lados da igualdade sejam quadrados perfeitos. Para isso, caímos em uma equação do 3°. grau em α, que podemos resolver pelo método de Tartaglia.
3. Calculando α, obtem-se β.
4. Com α e β, extrai-se raízes quadradas dos dois lados da igualdade e obtém-se os quatro valores possíveis para y. Soma-se m a cada um destes valores e obtém-se as 4 raízes da equação geral.

O método de Ferrari é perfeito do ponto de vista teórico, mas bastante trabalhoso. Seu grande mérito reside no fato de provar que a equação de 4°. grau é solúvel apenas com operações algébricas.

Referências Bibliográficas

1. A.G. Kurosch. Ecuaciones Algebraicas de Grados Arbitrários. Editora MIR, Moscou.
2. Dirk J. Struik. A Concise History of Mathematics. Dover Publications, 1987.
3. Gilberto G. Garbi. O Romance das Equações Algébricas. Editora Makron Books.
4. Oscar Guelli. Contando a História da Matemática. História da Equação do 2°. grau. Editora Ática.
5. Seiji Hariki e Dulce Satiko Onaga. Curso de Matemática 2°. grau, vol 1. Editora Harper & Row do Brasil. LTDA.

Realização: USP 70 anos Universidade de São Paulo Instituto de Matemática e Estatística da USP FEUSP Faculdade de Educação da USP

Patrocínio: Votorantim Nossa Caixa