

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Relatório Técnico



RT-MAP-0303

**"APREÇAMENTO DE CONTRATOS DE VOLATILIDADE A TERMO NO
MERCADO BRASILEIRO"**

Jorge C. Kapotas, Pedro Paulo Schirmer & Sandro
Magalhães Manteiga

Série: Seminário de Finanças - 01/2003

OUTUBRO 2003



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÃO PAULO - BRASIL

Apreçamento de Contratos de Volatilidade a Termo no Mercado Brasileiro

Jorge C. Kapotas * Pedro Paulo Schirmer †

Sandro Magalhães Manteiga ‡

Primeira Versão
18 de Julho de 2003

Resumo

Neste trabalho considera-se o apreçamento de uma classe de derivativos de volatilidade, os swaps de variância. O valor justo de um swap de variância é igual ao valor esperado da variância realizada a termo. O valor esperado é calculado a partir do payoff de uma opção com perfil logarítmico. Mostra-se como replicar estaticamente o payoff logarítmico em termos de opções de compra e venda. Usando preços reais de mercado para as opções dos ativos TNLP4 e PETR4 da BOVESPA, mostra-se como construir uma carteira sintética com exposição pura à volatilidade. Considerações para o mercado brasileiro são feitas ao fim do trabalho.

*Octaplus Financial Analytics. Rua Arandu 205 cj 1003, CEP 04562-030, Brooklin, São Paulo, SP, Brasil

†Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Rua do Matão 1010, Cidade Universitária, CEP 05508-090, Butantã, São Paulo, SP, Brasil.

‡Deutsche Bank MaxBlue, Rua Alexandre Dumas 2200, CEP 04717-910, São Paulo, SP, Brasil

1 Introdução

Este trabalho versa sobre o apreçamento de uma classe particular de derivativos de volatilidade, os chamados swaps de variância. Swaps de variância são os instrumentos mais simples para permitir a negociação de pura volatilidade, uma tarefa bastante complexa e não contemplada nem por posições delta-gamma neutras com exposição apenas à vega. Não mencionando os efeitos de ordem superior e o efeito dos termos cruzados, posições neutras com relação aos demais parâmetros e expostas apenas à vega não permitem diretamente o apreçamento do risco de volatilidade, entendido como o risco de mudança de nível de volatilidade. A proteção contra o risco de volatilidade consiste em obter um valor justo de mercado para a volatilidade que será realizada a termo, um benchmark. O desenvolvimento de uma indústria de trading puro de volatilidade está precisamente alicerçada na definição de um benchmark que permita a estimativa não-ambígua para a variância realizada, quer dizer, de uma estimativa que seja unânime para todos os participantes do mercado. Neste trabalho, analisamos os conceitos teóricos por trás da construção de um tal benchmark e os problemas de natureza prática que surgem em um mercado com baixa liquidez como o brasileiro ¹. Uma vez compreendido o papel deste benchmark, a avaliação dos contratos de volatilidade é imediata, sendo igual ao preço de referência de um swap de variância.

Além do apreçamento imediato de contratos de variância, este benchmark oferece uma série de outras funções interessantes. Em primeiro lugar pode atuar como um termômetro de risco de mercado, exibindo de maneira consolidada em uma única grandeza, o consenso da volatilidade a termo do mercado. Além disto, oferece para a indústria de risco a possibilidade do surgimento no Brasil de uma segunda geração de produtos de controle de risco, substituindo os cálculos das volatilidades históricas pelas volatilidades antecipadas pelo mercado. Desta forma a aceitação desta grandeza como um consenso da volatilidade a termo viabilizaria a implantação no Brasil de produtos orientados ao puro trading de volatilidade através de contratos futuros, opções ou swaps de variância. Por ser a melhor aposta da volatilidade realizada que o mercado pode fazer usando apenas informação pública,

¹Na verdade, a implementação desta metodologia foi efetuada no Brasil pela OctaPlus Financial Analytics para um horizonte padrão de 21 dias úteis e consolidada em um índice de volatilidade implícita com marca registrada denominado IVOL. Calculado através das volatilidades implícitas de todas as opções de compra e venda líquidas disponíveis no instante do cálculo, sintetiza em um único número, as expectativas do mercado com relação à volatilidade a termo para o horizonte de 21 dias úteis.

acreditamos que seja um candidato natural a desempenhar o papel de um benchmark de volatilidade em mercados emergentes com alta volatilidade como é o caso do mercado brasileiro.

1.1 Negociando a Volatilidade: Swaps de Variância

Uma das principais razões para a existência de mercados de capitais é de permitir a transferência e diluição do risco financeiro através da negociação de contratos estruturados de compra ou venda de ativos. Por risco entendemos, neste contexto, a volatilidade dos retornos dos preços dos ativos mobiliários. Um dos mecanismos mais eficientes de transferência e diluição do risco financeiro é feito pelo uso de derivativos. Derivativos permitem aos agentes financeiros tomar posições de acordo com suas próprias percepções de eventos futuros e refletem apostas direcionais no movimento de um ativo. Tomando posições em derivativos, é possível para os participantes do mercado estarem comprados ou vendidos em volatilidade. Em geral, uma em uma posição direcional de preço do ativo. Isto fica evidente quando se calcula a variação do preço de uma opção com relação à flutuação de preço do ativo subjacente. Desprezando efeitos de ordem superior², podemos calcular o impacto no preço de uma opção dos diversos fatores de risco:

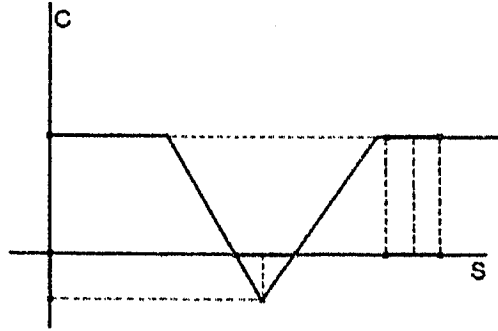
$$\Delta C = \theta \Delta t + V \Delta \sigma + \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2 \quad (1)$$

Assim, uma posição sobre uma única opção implica uma exposição à fatores econômicos que não somente a volatilidade. Através de posições em carteiras de opções pode-se construir padrões de retornos que premiam apenas exposição à volatilidade. Por exemplo, tomando uma posição em um straddle vemos que flutuações de preços com mesma amplitude podem produzir efeitos completamente diferentes no P&L de uma carteira de opções.

Posições mais complexas como um straddle ou um butterfly são tentativas para se tomar uma posição em pura volatilidade, mas continuam sofrendo da limitação intrínseca de ainda refletirem efeitos direcionais. São portanto instrumentos impuros do ponto de vista de volatilidade.

Como uma tentativa de resolver este impasse, foram desenvolvidos no final dos anos oitenta nos mercados de balcão norte-americanos produtos com a finalidade de trocar volatilidade pura. São os chamados *swaps de variância*. Imaginemos um contrato estruturado a partir dos preços de

²Observar que estamos desprezando exatamente os termos que são usados para fazer trading de volatilidade, que é calcular as gregas de segunda geração, como, volga, vanna, epsilon e kappa.



fechamento de um ativo com risco. Um swap de variância prevê uma troca de fluxos de caixa baseada na diferença entre a variância diária realizada do ativo durante um determinado período de tempo e uma aposta feita no momento da emissão do contrato. Se n denota o número de dias úteis até o vencimento do contrato de variância, estamos interessados em estimar, no momento da emissão do swap, o valor da variância que será realizada nos próximos n dias úteis, isto é, a expressão:

$$V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2$$

Os valores, S_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, denotam os valores diários de fechamento de um determinado ativo com risco. Se $K > 0$ é o valor do exercício do contrato, no vencimento $T = n$, o contrato pagará ao emissor $(V_n - K)$ vezes o notional. Normalmente, nos mercados de balcão, o valor de K é escolhido de forma a zerar o fluxo financeiro, isto é, escolhe-se o valor $K = K_{SWAP}$ de forma que:

$$K_{SWAP} = E[V_n]$$

O valor do swap é exatamente igual ao valor esperado, segundo uma medida de probabilidade que quantifica a dispersão das várias realizações dos retornos do ativo base, da variância realizada. Assim, se estes contratos fossem negociados no mercado, teríamos uma família de instrumentos que poderia ser usada diretamente para se fazer o hedge do risco de volatilidade.

Uma das primeiras questões que devem ser abordadas no tratamento da volatilidade a termo e no apreçamento de contratos derivativos de volatilidade é a dependência no modo como os preços são cotados em volatilidade,

isto é, no preço de mercado para se expor à uma unidade de volatilidade do ativo subjacente. A prática universalmente difundida nas mesas de trading é a de cotar preços em volatilidades usando o modelo de Black-Scholes³. Apesar dos preços de mercado violarem explicitamente as hipóteses do modelo de Black-Scholes, o mercado segue adotando esta prática, nos remetendo à uma consideração mais aprofundada sobre a verdadeira origem e definição da estrutura de volatilidade do ativo com risco. Esta questão, de fundamental importância, nos remete por sua vez à modelagem matemática dos processos responsáveis pelas flutuações aleatórias dos retornos dos ativos financeiros com risco. Em outras palavras, devemos considerar modelos onde a volatilidade é volátil. Assumindo que o processo de preços segue, uma dinâmica com volatilidade estocástica do tipo log-normal:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Nesta classe de modelos, a volatilidade σ_t é um processo estocástico não-observável diretamente no mercado e está sujeito à uma dinâmica própria, também com parâmetros não-observáveis, impossível de ser calibrada em mercados incompletos, com prêmios de risco de volatilidade desconhecidos. Devido à sua relativa complexidade, os modelos de volatilidade estocástica foram inicialmente preteridos pelos modelos de volatilidade local, parametrizados por uma função de duas variáveis $\sigma(t, S)$ chamada de volatilidade local. A função de volatilidade local $\sigma(t, S)$ deve ser entendida como o valor esperado da volatilidade a termo, relativo à uma medida de probabilidade definida sobre as possíveis realizações estocásticas do processo não-observável da volatilidade, quer dizer:

$$\sigma(t, S) = \mathbb{E}[\sigma_t(\cdot) | S_t = S] \quad (2)$$

Em outras palavras, a volatilidade local é o valor esperado condicional da volatilidade, condicionado ao fato que no tempo t , o nível de mercado é igual a S_t . São sutilezas como esta, versando sobre esperanças condicionais, que estão na raiz do chamado paradoxo de Taleb, visto mais adiante. Assim, passaremos adiante a considerar apenas modelos de retornos de ativos da forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

³Semelhantemente, para o modelo de Black nos mercados de renda fixa e para o modelo de Garman-Kohlhagen nos mercados de câmbio. Todos estes modelos são modelos com volatilidade local constante. Em termos práticos, travestem apenas uma questão semântica de indicar que prêmios de opções tenham aumentado ou diminuído conforme a volatilidade tenha aumentado ou diminuído de forma correspondente.

parametrizados por uma *estrutura de volatilidade local* $\sigma(t, S)$, que, dependendo do tempo e do nível do mercado, origina a variância dos retornos infinitesimais de preços e sintetiza o valor esperado de todos os possíveis valores do real processo de volatilidade. Neste caso, toda a teoria de apreçamento e hedge de opções se transforma, pelo menos do ponto de vista prático, em uma pergunta sobre a natureza e os modos de vibração da função de volatilidade local.

Um dos principais obstáculos ao trading de volatilidade é a ausência de uma teoria consistente de volatilidade de um ativo com risco que seja consagrada pelo mercado como um benchmark e disponha de uma aceitação semelhante à teoria de Black-Scholes para o apreçamento de opções. No mundo Black-Scholes, a estrutura de volatilidade é a mais simples possível, que é exatamente uma estrutura plana sem curvatura, exibindo a independência da volatilidade implícita no preço de exercício da opção e no vencimento, igual ao valor constante σ da volatilidade dos retornos normais do ativo subjacente. Esta simplicidade consolida este modelo como o benchmark universalmente usado pelos agentes econômicos para cotar os preços em termos de suas volatilidades implícitas.

Uma prática largamente adotada pelos traders para extrair uma estimativa da volatilidade do ativo subjacente para o período de vida da opção é usar as volatilidades implícitas *at-the-money-forward* (ATMF) quer dizer, as volatilidades calculadas para um preço de exercício hipotético $K = Se^{rT}$ igual ao valor a termo do preço do ativo subjacente na data de vencimento da série de opções. Apesar de comum e francamente adotado como prática de mercado, este procedimento não é exato por várias razões e constitui uma das possíveis fontes de erro no controle de risco e no apreçamento de ativos. A razão mais contundente para se negar tal prática é que tal procedimento só faria sentido se a volatilidade do ativo subjacente se mantivesse constante até o tempo de exercício da opção, assumindo válidas as hipóteses do mundo Black-Scholes com volatilidade constante. Mas é exatamente em razão do mercado violar as hipóteses do modelo de Black-Scholes que se usa a volatilidade ATMF e portanto percebemos um círculo vicioso de idéias e hipóteses errôneas embutidas nesta prática. Na verdade: *São exatamente estes efeitos de heteroscedasticidade do processo de preços que devemos capturar.* Um outro problema que surge diz respeito à obter a volatilidade ATMF por interpolações pontuais do smile de volatilidade. Sabe-se que interpolações pontuais do smile de volatilidade conduzem à instabilidades numéricas, produzindo um valor de volatilidade viesado e com tendência à subestimar a volatilidade realizada.

Na próxima seção, veremos como organismos e bolsas internacionais

tentaram resolver este impasse, estabelecendo benchmarks de volatilidade implícita.

1.2 Benchmarks de Volatilidade

O pioneiro na introdução de benchmarks de volatilidade foi o Chicago Board of Options Exchange (CBOE) com a introdução do índice VIX em 1993. Este índice, diferentemente da metodologia proposta neste artigo para uso no Brasil, é construído a partir de uma interpolação de preços de oito opções líquidas próximas ao dinheiro, sintetizando a volatilidade implícita de uma opção at-the-money fictícia com vencimento em 30 dias. Propostas semelhantes foram introduzidas em outros mercados, tendo como exemplos o índice VDAX de Frankfurt, introduzido em 5 de dezembro de 1994 e medindo a volatilidade para 45 dias e os índices VX1 e VX6 do MONEP, em Paris, introduzidos em 8 de outubro de 1997, medindo volatilidades para um e seis meses respectivamente. Também o índice de ações NASDAQ-100 possui seu índice de volatilidade VXN e recentemente, em 23 de janeiro de 2001, foi introduzido pelo American Stock Exchange (AMEX) de Nova Iorque o índice de volatilidade QQV para o índice de ações de tecnologia NASDAQ-100 Unit Trust. Para maiores detalhes, o leitor deve consultar o artigo de Fleming-Whaley [FOW]. Recentemente no Brasil, a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BMF) iniciou a introdução de contratos de volatilidade para o índice IBOVESPA, denominados de (VOI), ainda em fase de divulgação no mercado brasileiro.

Em mercados pouco líquidos, como é o caso do mercado brasileiro, as propostas de índices como o índice VIX são francamente impossíveis de serem implementadas, face ao número muito elevado de opções líquidas que à sua alta volatilidade. Para estes mercados uma metodologia alternativa que lide com o problema da baixa liquidez se faz necessária. A metodologia deve ser robusta o suficiente para assegurar a qualidade e o poder preditivo do índice, bem como substituir estimativas pontuais do smile de volatilidade por uma estimativa global, isto é, uma estimativa que faça uso de toda a estrutura de volatilidade observada no mercado.

A solução para este problema foi dada por Neuberger [N] e por Carr-Madan [CM], através da observação que um estimador da variância realizada pode ser obtido pelo cálculo de uma opção exótica com perfil logarítmico e pela observação que esta última pode ser replicada estaticamente por uma carteira de opções de compra e venda ponderada pelo quadrado do inverso do preço de exercício.

Como apenas alguns exercícios possuem opções líquidas, se faz necessário

um procedimento sintético para se criar os preços das opções européias de compra e venda. Isto é feito respeitando as volatilidades negociadas e interpolando o smile de volatilidade para a criação de uma carteira de opções com preços sintéticos calculados pela fórmula de Black-Scholes. O estimador de volatilidade emerge através da integração destes preços sintéticos, tomando integralmente o smile de volatilidade como base, um procedimento consideravelmente mais estável, do ponto de vista numérico, que a interpolação pontual usada para calcular a volatilidade ATMF.

A introdução do conceito de estimador da variância realizada permite a solução do chamado *Paradoxo de Taleb* em finanças (termo cunhado por Marco Avellaneda em [A]). Este paradoxo se manifestaria em uma hipotética conversa entre dois traders de opções. Se um benchmark de volatilidade fosse adotado pelo mercado, poderíamos ouvir a seguinte conversa sobre preços de opções expirando em exatamente 21 dias:

Trader A: "Qual a volatilidade implícita ATMF hoje para PETR4 ?"

Trader B: "25.0% para compra e 25.8% para venda"

Trader A: "E qual a sua aposta para a volatilidade daqui a 21 dias úteis?"

Trader B: "Minha aposta é de 27.00% "

Os números acima não são inconsistentes entre si, face ao exposto anteriormente sobre a natureza da volatilidade local, enquanto que a volatilidade ATMF é um valor condicionado ao preço "forward" do ativo subjacente. O suposto paradoxo se desfaz exatamente quando entendemos a diferença entre uma esperança condicional e uma esperança incondicional.

2 Aprecamento da Volatilidade a Termo

2.1 Modelos de Volatilidade Implícita

A volatilidade de um ativo financeiro é um dos aspectos mais importantes a serem considerados na análise de seus retornos. O nó central na questão da definição de um benchmark de volatilidade reside na inexistência de um modelo universal de volatilidade que possa ser lido de maneira não-ambígua pelos participantes do mercado. Uma vez que a real estrutura de volatilidade local $\sigma(t, S)$ não é diretamente observável, o mercado acaba por fazer uso de um substituto, calculando a volatilidade implícita $\sigma(T, K)$ das várias opções de compra e de venda escritas para um determinado ativo, isto é, o valor da volatilidade que reproduz o preço de mercado C_{mkt} da opção:

$$C(S, K, r, T, \sigma(K, T)) = C_{mkt}$$

Como o preço da opção depende do preço de exercício K e do vencimento T , então, em princípio, a volatilidade implícita é uma função de duas variáveis que descreve uma superfície de volatilidade.

A superfície de volatilidade possui uma dinâmica estocástica com vários modos de vibração, ativados pela movimentação de preços no mercado, consistindo de um modo fundamental, responsável por movimentos paralelos da superfície, por modos intermediários que curvam a superfície na direção do preço de exercício K (smile) e na direção do vencimento T (estrutura a termo), assim como harmônicos de ordem superior que torcem a superfície em componentes mistas de alta frequência. O modo flat fundamental é aquele lido pelo mercado de maneira não ambígua pois coincide com o único modo de vibração previsto no modelo de Black-Scholes.

Para maiores detalhes o leitor deve consultar [DDKZ], bem com seus trabalhos anteriores no assunto [DK].

Como o mercado de derivativos brasileiro apresenta poucas séries de opções para vencimentos diferentes (em verdade não mais que duas séries líquidas, quando muito) vamos restringir nossa atenção neste documento apenas ao efeito do smile de volatilidade, assumindo que a superfície de volatilidade não possui curvatura na direção dos vencimentos.

2.2 Valor Esperado da Variância Realizada

Apesar da volatilidade ser uma quantidade mais natural do ponto de vista financeiro, matematicamente é mais razoável lidar com seu quadrado, quer dizer, com sua variância. Por ser uma quantidade linear na escala de

tempo a variância é um melhor objeto para descrever variações de preço ao longo do tempo.

Vamos considerar um mercado líquido, com risco de volatilidade encapsulado em uma função de volatilidade local $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde são negociadas opções de compra e de venda para qualquer preço de exercício e vencimento. Em um mundo ajustado ao risco, o processo de retornos é :

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma(t, S)dW$$

O resultado provado por Dupire [D] em 1994 estabelece que o mercado se completa com os preços dos derivativos e que apenas uma única estrutura de volatilidade $\sigma(t, S)$ é compatível com estes preços, isto é, os preços teóricos produzidos com aquela estrutura de volatilidade para qualquer preço de exercício e qualquer vencimento coincide com os preços de mercado. Mais ainda, esta estrutura é dada explicitamente pela célebre fórmula:

$$\sigma(T, x) = \sqrt{\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \Big|_{K=x} \quad (3)$$

Esta fórmula é bastante interessante do ponto de vista teórico, pois praticamente define a volatilidade em termos de um consenso de preços de mercado. Na prática, é de uso bastante difícil, devido à instabilidade das interpolações numéricas usadas para calcular as derivadas dos preços. Para opções de curto prazo, ou muito fora do dinheiro, chega inclusive a produzir resultados anômalos devido à valores negativos dentro da raiz quadrada ou divisão por valores próximos de zero. Em resposta à estes efeitos, Derman-Kani introduziram as árvores de volatilidade, que são nada mais nada menos que o análogo discreto, no mundo real, do resultado de Dupire. Estas árvores têm grande utilidade no apreamento de opções pouco líquidas ou exóticas.

Por outro lado seria interessante a utilização de preços do mercado de derivativos para inferir o valor da volatilidade do ativo objeto destas opções. Vamos assumir que todas as opções vencem no mesmo vencimento T . A pergunta fundamental consiste em calcular o valor da esperança condicional da variância realizada do ativo com risco para um período de tempo igual a T , condicionada ao fato que seu preço S é conhecido hoje. Quer dizer, vamos calcular o valor da quantidade:

$$\sigma^2[S_{0 \leq t \leq T} | S_0 = S] = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \quad (4)$$

O melhor preditor desta variância será obviamente o valor esperado incondicional:

$$\sigma_{\text{termo}}^2 = \mathbb{E}[\sigma^2[S_{0 \leq t \leq T} | S_0 = S]] \quad (5)$$

Observa-se que tanto as variâncias quanto os valores esperados usados nas fórmulas acima dizem respeito à uma medida de probabilidade já ajustada ao risco, chamada de medida de Arrow-Debreu, que ajusta os valores dos preços dos ativos aos prêmios de risco pagos no mercado. É importante notar aqui o resultado devido a Breeden-Litzenberger relativo à recuperação da medida de Arrow-Debreu pelos preços de opções em um mercado de derivativos líquido, com o mesmo vencimento em T . Apresentamos este resultado no apêndice A.1.

A observação chave deve ser creditada à Neuberger [N], que, em 1990, observou que o payoff de uma opção com perfil logarítmico poderia reproduzir a variância realizada. Aliado à observação de Carr-Madan sobre replicação estática de opções exóticas, isto permitiu a construção de um estimador de volatilidade baseado apenas em volatilidades implícitas. Este preditor da variância realizada a termo do ativo base pode ser interpretado como o custo para montar uma posição sintética de opções de compra e venda exposta apenas à volatilidade, quer dizer:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{forecast}}^2 = & \frac{2}{T} \left[rT - \left(\frac{S_0}{S^*} e^{rT} - 1 \right) - \log\left(\frac{S^*}{S_0}\right) \right. \\ & \left. + e^{rT} \int_0^{S^*} \frac{1}{K} P(K) dK + e^{rT} \int_{S^*}^{+\infty} \frac{1}{K^2} C(K) dK \right] \end{aligned} \quad (6)$$

O ponto chave para o cálculo do preditor de variância é a construção de uma carteira de opções de compra e de venda com preços sintéticos, calculados por meio de uma estrutura de volatilidade igualmente sintética levantada a partir do smile de volatilidade do mercado. O preditor de volatilidade usado aqui é um avanço crucial sobre o resultado de 1994 devido à Dupire, bem como as árvores implícitas de Derman-Kani, inferindo diretamente dos preços das opções o valor esperado da variância realizada a termo do ativo objeto. Com isso, não somente obtém-se um estimador não-ambíguo e não-enviesado, mas também evita-se interpolações locais, numericamente instáveis, da estrutura de volatilidade.

Na fórmula acima S^* denota um valor intermediário entre o preço a vista e o preço futuro, escolhido através de critérios de liquidez e $P(K)$ e $C(K)$ denotam preços de opções de venda e compra, respectivamente, calculadas

por meio da estrutura sintética de volatilidade. É possível mostrar que esta carteira de opções, composta por opções com exercício K na proporção $1/K^2$ representa uma posição em pura volatilidade cuja medida de sensibilidade Vega é insensível às flutuações do preço de mercado do ativo base.

Alguns pontos ligados à sua implementação prática se fazem necessários. Como se percebe pelas integrais definidas contendo singularidades e limites de integração impróprios, uma implementação prática exige uma série de cuidados.

A demonstração da fórmula acima pode ser feita em várias etapas. O ponto fundamental para a construção da carteira sintética de opções consiste em usar o lema de Itô e mostrar que o cálculo da variância é equivalente ao preço de um contrato com perfil logarítmico no preço do ativo base. De fato, considerando a função logarítmica $\log(S)$, podemos usar o lema de Itô para obter:

$$d(\log S) = \frac{dS}{S} - \frac{1}{2} \left(\frac{dS}{S} \right)^2 = rdt + \sigma dW - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

Isolando o termo com a variância estocástica e integrando até o vencimento T , temos que:

$$\begin{aligned} \sigma^2[S_{0 \leq t \leq T} | S_0 = S] &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T rdt + \sigma_t dW_t - d(\log S_t) \\ &= 2r + \left(\frac{2}{T} \int_0^T \sigma_t dW_t \right) - \frac{2}{T} \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \end{aligned}$$

Tomando valores esperados e usando o fato que a integral de Itô é um martingal, em relação à medida de Arrow-Debreu, com média nula, obtemos o seguinte estimador da variância realizada:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} (rT - \mathbb{E}[\log(\frac{S_T}{S_0})]) \quad (7)$$

O cálculo do valor esperado consiste assim no cálculo do valor de uma opção exótica, com perfil logarítmico. Isto pode ser feito através de um resultado matemático sobre replicação estática de opções, devido à Carr e Madan ([CM]), usando a seguinte identidade para funções $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(S) &= f(S^*) + f'(S^*)(S - S^*) + \\ &+ \int_0^{S^*} f''(K)(K - S)^+ dK + \int_{S^*}^{+\infty} f''(K)(S - K)^+ dK \end{aligned}$$

A prova deste resultado pode ser encontrada no apêndice A.3.

A fórmula acima, uma generalização do princípio de paridade put-call, afirma que uma posição exótica com perfil $f(S)$ pode ser replicada estatisticamente, quer dizer, sem necessidade de hedge dinâmico, através de uma posição em numerário, no ativo base e numa carteira de opções européias de compra e venda, com quantidades apropriadas $f''(K)$ de cada opção necessárias para gerar a curvatura do perfil $f(S)$. Escolhendo um valor apropriado de S^* e tomando $S = S_T$, podemos agora calcular o valor da opção com payoff logarítmico, usando a função $f(K) = \log K$:

$$\begin{aligned} \log S_T &= \log S^* + \frac{1}{S^*}(S_T - S^*) \\ &+ \int_0^{S^*} \left(-\frac{1}{K^2}\right)(K - S_T)^+ dK + \int_{S^*}^{+\infty} \left(-\frac{1}{K^2}\right)(S_T - K)^+ dK \end{aligned}$$

Tomando valores esperados segundo a medida de Arrow-Debreu e usando o fato que relativo à esta medida temos que $\mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{rT}$, então podemos estimar o valor esperado do pay-off logarítmico como segue:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[-\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] &= \log S_0 - \log S^* - \frac{1}{S^*}(\mathbb{E}[S_T] - S^*) \\ &+ \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \mathbb{E}[(K - S_T)^+] dK + \int_{S^*}^{+\infty} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] dK \\ &= \log S_0 - \log S^* - \frac{1}{S^*}(S_0 e^{rT} - S^*) \\ &+ \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rT} \mathbb{E}[e^{-rT}(K - S_T)^+] dK \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{1}{K^2} e^{rT} \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] dK \\ &= \log S_0 - \log S^* - \frac{1}{S^*}(S_0 e^{rT} - S^*) \\ &+ \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rT} P(K) dK + \int_{S^*}^{+\infty} \frac{1}{K^2} e^{rT} C(K) dK \\ &= -\log\left(\frac{S^*}{S_0}\right) - \left(\frac{S_0}{S^*} e^{rT} - 1\right) + \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rT} P(K) dK \\ &+ \int_{S^*}^{+\infty} \frac{1}{K^2} e^{rT} C(K) dK \end{aligned} \tag{8}$$

Daí segue claramente o valor do estimador de variância.

Observe que a carteira sintética de opções envolve o cálculo de duas integrais impróprias: uma, envolvendo preços de opções de venda e exibindo

uma singularidade em zero e outra, envolvendo opções de compra e exigindo a integração imprópria até o infinito. No caso de um mercado líquido isto é um pequeno problema, mas no caso de uma implementação prática como no caso do mercado brasileiro, exige cuidados de natureza computacional. A origem das dificuldades reside na quase inexistência de opções de venda no mercado brasileiro e na inexpressiva quantidade de opções líquidas com diferentes preços de exercício para o mesmo ativo. Isto torna a qualidade da interpolação mais pobre na região de exercícios mais baixos, que é aquela normalmente coberta no mercado por opções de venda. O valor de S^* marca a fronteira virtual entre opções de venda e de compra sintéticas e deve ser escolhido cuidadosamente no cálculo das integrais mencionadas acima por razões também numéricas.

2.3 A Estrutura a termo da Volatilidade

Quando o mercado negocia opções em um único vencimento, vimos que o preditor da variância realizada visto na seção anterior faz o papel do benchmark de volatilidade. Neste caso, a melhor aposta para a volatilidade em uma data qualquer é igual ao valor da volatilidade para o horizonte de tempo dado pelo vencimento desta única série de opções. O problema fundamental se dá quando o mercado negocia opções para vários vencimentos. Neste caso, devemos adotar um horizonte padrão na definição do benchmark de volatilidade.

Como no mercado brasileiro há falta de um número razoável de vencimentos, foi escolhido um horizonte de 21 dias úteis para lastrear o índice preditor, praticamente o equivalente a 30 dias corridos. Se o mercado negociar opções com vencimentos $T_1, T_2, \dots, T_n$, determina-se o par de vencimentos $T_i < 21 < T_{i+1}$ que abrange a data de 21 dias úteis, de modo a definir o estimador por interpolação linear da variância:

$$IVOL21 = \sqrt{\frac{(21 - T_i)\sigma_{i+1}^2 + (T_{i+1} - 21)\sigma_i^2}{T_{i+1} - T_i}} \quad (9)$$

Quando duas ou mais séries de opções líquidas são negociadas simultaneamente, escolhe-se as duas séries mais próximas da data de 21 dias. A menos de 21 dias do vencimento da série curta a série longa começa a tomar liquidez e a interpolação é feita. O índice reflete desta maneira uma fotografia uni-dimensional das várias dimensões de risco do mercado.

3 Implementação no Mercado Brasileiro

Vamos discutir aqui nesta seção alguns exemplos do comportamento do preditor de volatilidade, exibindo seus valores para alguns ativos e para alguns instantes de tempo. Usamos os valores do índice IVOL como base para os registros qualitativos de mercado. O índice IVOL pode ser aplicado à qualquer ativo com opções líquidas negociadas na BOVESPA. Vejamos algumas fotografias do IVOL para o ativo TNLP4 em vários instantes do mercado intra-diário.

Vejamos inicialmente os valores do índice IVOL no final de julho de 2002. As flutuações intradiárias são compatíveis com a liquidez das opções de TNLP4, exibindo variações da ordem de até 20% em um único dia, como mostra o gráfico da volatilidade intradiária para o dia 17 de julho de 2002.

Neste dia, às 10:00 da manhã, o mercado negociava 8 opções de compra com exercícios variando de 24.00 a 40.00 e faltando 23 dias úteis para o vencimento da série. No mercado à vista, o ativo TNLP4 era negociado a um valor de 26.9 . No instante em que o índice foi calculado, com uma taxa pré de 18.07%, observamos os preços:

Tabela 1

Smile de volatilidade, Vol. ATMF e IVOL para TNLP4 no dia 17 de julho de 2002 às 10:00h.

Opção	Preço	Strike	Smile (%)	Vol ATMF (%)	IVOL (%)
call	4,025	24	66,3	41,0	45,8
call	2,005	26	40,2	41,0	45,8
call	1,025	28	41,5	41,0	45,8
call	0,16	32	41,0	41,0	45,8
call	0,08	34	44,6	41,0	45,8
call	0,045	36	48,3	41,0	45,8
call	0,025	38	51,3	41,0	45,8
call	0,015	40	54,2	41,0	45,8

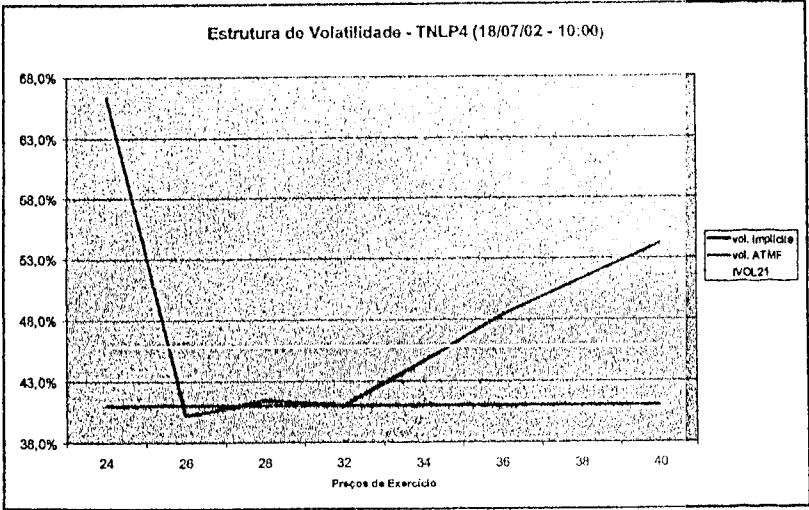
Comparamos os valores do índice com as volatilidades Black-Scholes e as volatilidades ATMF para uma melhor percepção de cálculo do índice IVOL. Quando comparamos o valor do IVOL com os valores Black-Scholes, devemos sempre ter em mente o significado do índice. Lembramos que de acordo com sua definição, o índice IVOL deve reproduzir, para um conjunto de preços Black-Scholes, a volatilidade do ativo subjacente.

O smile de volatilidade observado está ilustrado abaixo, mostrando a diferença entre o valor da volatilidade ATMF e o valor do índice IVOL

calculando os efeitos de heterocedasticidade desprezados pelo valor ATMF.

Figura 1

Este exemplo sugere que a volatilidade ATMF, por não levar em conta os efeitos de heterocedasticidade do processo de volatilidade, tem o efeito de subestimar a volatilidade em relação ao IVOL.



Nas próximas seções, vamos investigar algumas situações contendo o comportamento do índice de volatilidade implícita IVOL para várias escalas de tempo e para dois ativos com opções líquidas.

3.1 Comportamento Diário

Vamos examinar o comportamento de baixa-frequência do índice IVOL, quer dizer, para observações das médias diárias.

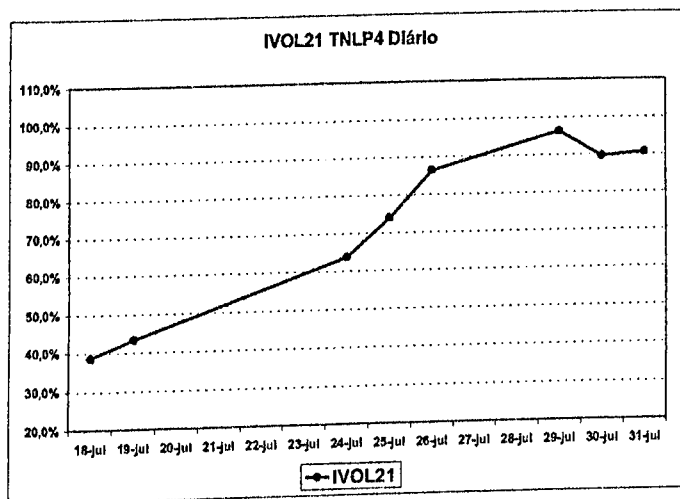
3.1.1 Ativo: TNLP4

A Tabela 2 e Figura 2 apresentam a evolução diária da volatilidade a termo, ou seja, o valor esperado pelo mercado da volatilidade a ser realizada até a data de vencimento da opção sobre a ação da Telemar (TNLP4) entre os dias 18/07/02 e 31/07/02. Nota-se claramente no gráfico, uma acentuada tendência de alta na volatilidade esperada. Este período coincide com o acirramento da corrida eleitoral, onde o candidato da oposição registrava uma larga vantagem sobre o segundo colocado. No campo financeiro a volatilidade dos ativos aumentava significativamente, enquanto que o dólar e o risco país disparavam. Os valores diários são computados a partir de médias dos valores intradiários calculadas diariamente

Tabela 2
Médias diárias do IVOL para TNLP4.

Data	IVOL
18-jul	38,7%
19-jul	43,3%
24-jul	63,7%
25-jul	73,9%
26-jul	86,5%
29-jul	96,2%
30-jul	89,7%
31-jul	90,6%

Figura 2
Médias diárias do IVOL para TNLP4.



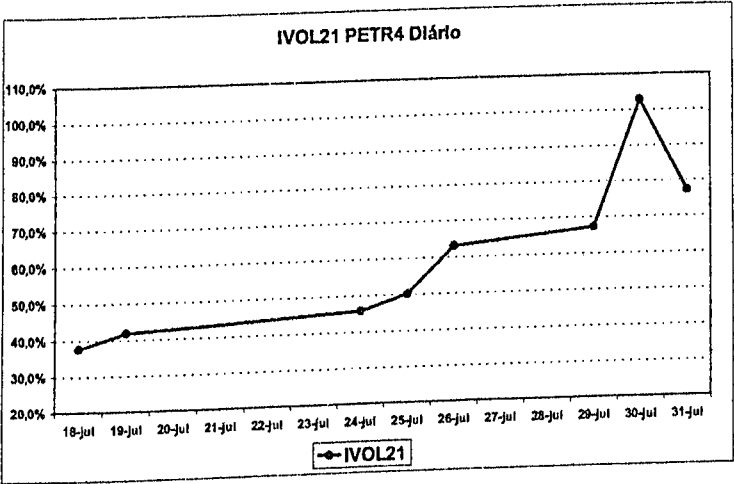
3.1.2 Ativo: PETR4

Na Tabela 3 e na Figura 3 apresentamos o comportamento diário do IVOL para o mesmo período acima. Percebe-se claramente a mesma tendência de alta na volatilidade esperada típica do momento de incertezas.

Tabela 3
Médias diárias do IVOL para PETR4.

Data	IVOL
18-jul	37,7%
19-jul	41,9%
24-jul	49,0%
25-jul	45,9%
26-jul	63,0%
29-jul	67,3%
30-jul	102,7%
31-jul	75,9%

Figura 3
Médias diárias do IVOL para PETR4.



3.2 Comportamento Intra-Diário

Vamos agora examinar o comportamento do índice em uma escala de frequência maior, observando seu movimento dentro dos dias.

Apresentamos na Tabela e na Figura 4 e na Tabela e na Figura 5, à título de ilustração, o comportamento intra-diário da volatilidade a termo do mercado, nos dias 24/07/02 e 31/07/02, respectivamente, para as opções de TNLP4. O cálculo da volatilidade a termo (IVOL) é feito em intervalos regulares de vinte minutos, utilizando-se informações de mercado geradas por provedores de informação eletrônicos. Fica evidente dos gráficos acima, que a volatilidade a termo oscila fortemente durante o pregão, acompanhando os humores do mercado.

Tabela 4

Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita para o dia 24/7/2002 da opção de TNLP4.

Hora	IVOL
10:23	67,3%
11:03	66,9%
11:43	65,8%
12:43	62,9%
13:03	63,0%
13:23	61,0%
14:03	64,2%
14:23	62,3%
14:43	63,3%
15:23	62,2%
15:43	64,4%
16:43	62,8%
17:03	62,4%

Figura 4
Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita para o dia 24/7/2002 da opção de TNLP4.

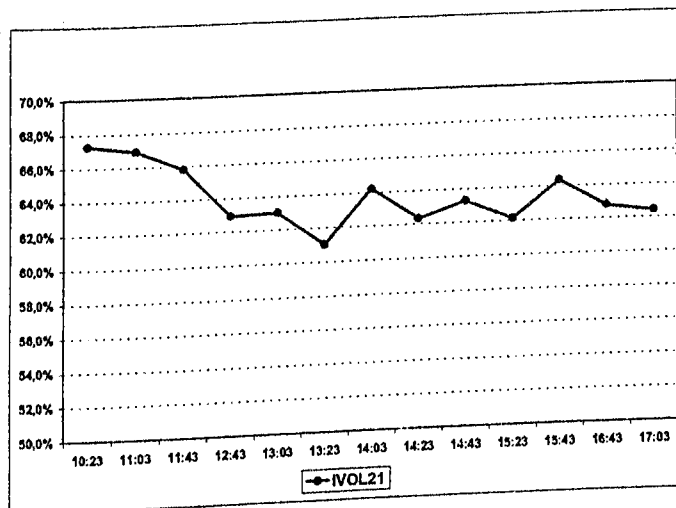
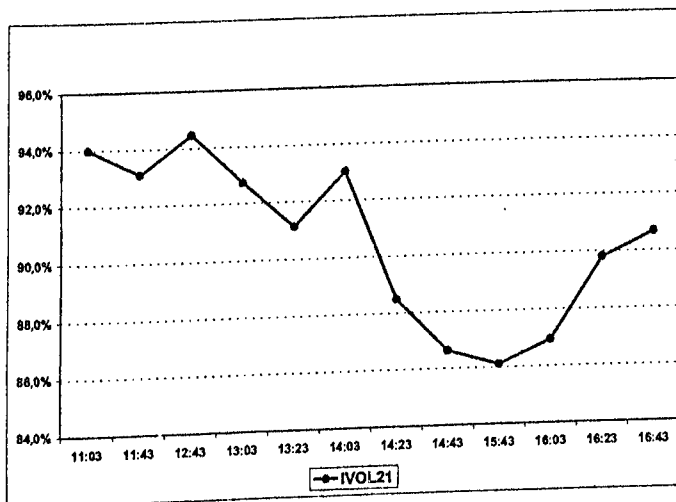


Tabela 5
Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita para o dia 31/7/2002 da opção de TNLP4.

Hora	IVOL
11:03	94,0%
11:43	93,1%
12:43	94,5%
13:03	92,7%
13:23	91,1%
14:03	93,0%
14:23	88,5%
14:43	86,6%
15:43	86,1%
16:03	86,9%
16:23	89,8%
16:43	90,7%
12:03	91,4%
12:23	95,5%

Figura 5
Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita para o dia 31/7/2002 da opção de TNLP4.



As mesmas informações das tabelas e gráficos anteriores são apresentadas para as opções de Petrobrás nas Tabelas e Figuras 6 e 7. Uma inspeção mais detalhada do gráfico demonstra uma menor oscilação da volatilidade a termo da ação da Petrobrás, como inicialmente suspeitaríamos, dada a natureza, porte e mercado da empresa.

Tabela 6

Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita para o dia 24/7/2002 da opção de PETRA.

Hora	IVOL
10:23	56,9%
11:03	53,4%
11:43	50,0%
12:43	45,4%
13:03	45,6%
13:23	47,4%
14:03	48,6%
14:23	50,2%
14:43	48,5%
15:23	50,4%
15:43	49,3%
16:43	45,4%
17:03	45,6%

Figura 6

Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita para o dia 24/7/2002 da opção de PETRA.

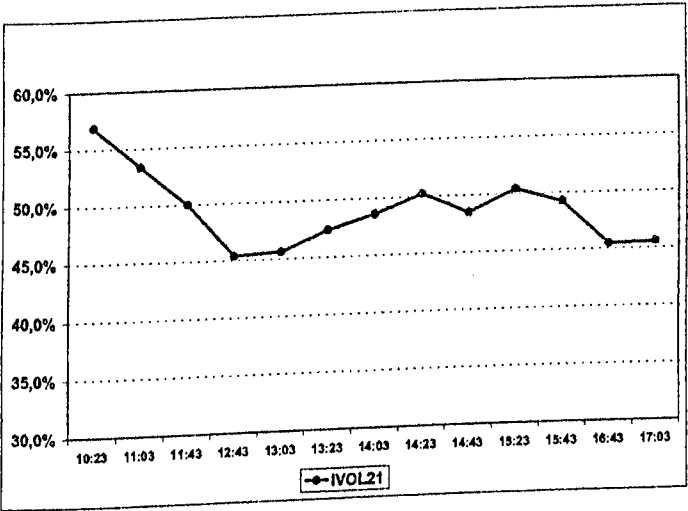
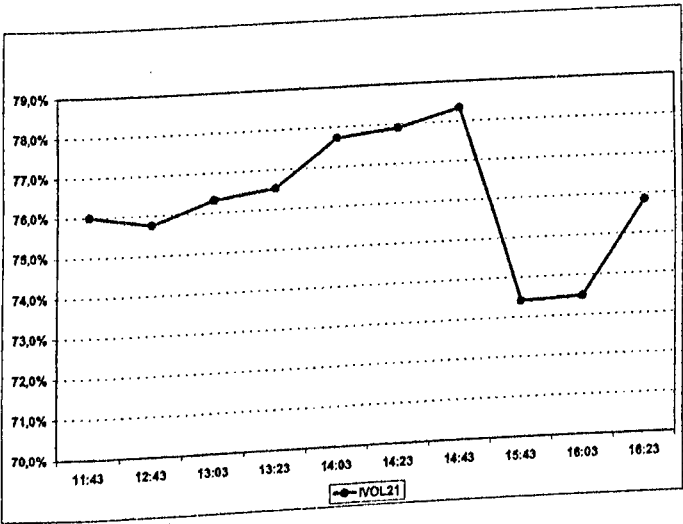


Tabela 7
 Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita
 para o dia 31/7/2002 da opção de PETR4.

Hora	IVOL
11:03	75,4%
11:43	76,0%
12:43	75,8%
13:03	76,3%
13:23	76,5%
14:03	77,7%
14:23	77,9%
14:43	78,3%
15:43	73,4%
16:03	73,5%
16:23	75,8%
16:43	74,2%

Figura 7
 Comportamento intra-diário do índice de volatilidade implícita
 para o dia 31/7/2002 da opção de PETR4.



3.3 Smiles de Volatilidade Intra-Diários

Continuando com o processo de descida das texturas da volatilidade, vamos agora examinar a escala mais alta de granularidade da volatilidade, que é examinar os efeitos do smile de volatilidade e como seus movimentos de vibração se coordenam para produzir o índice IVOL.

3.3.1 Ativo: TNLP4

Nas Tabelas e Figuras a seguir (8, 9 e 10), apresentamos o comportamento intra-diário do smile de volatilidade das opções de TNLP4, juntamente com a volatilidade ATMF e a volatilidade a termo, calculados em três diferentes momentos do pregão do dia 2/06/02. Notamos ao longo este dia a execução de um movimento de curvatura do “smile” de volatilidade, que se acentua gradualmente, fazendo com que a volatilidade esperada (IVOL) se distancie da volatilidade ATMF. A distância absoluta entre a volatilidade a termo e a volatilidade ATMF depende da curvatura e assimetria do “smile”. Quanto maior o efeito de assimetria ou curvatura, maior será o efeito indicativo desta distância.

Tabela 8
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de TNLP4,
2/6/2002 às 11:20h

Vol ATMF	38,67%	IVOL	40,22%
Opção	Preço	Strike	Smile (%)
call	4,47	27,18	52,80%
call	2,56	29,18	40,16%
call	1,10	31,18	38,97%
call	0,30	33,18	37,55%
call	0,07	35,18	39,47%
call	0,02	37,18	42,59%

Figura 8
Smile de Volatilidade Implícita para o ativo TNLP4, 2/6/2002 às 11:20h

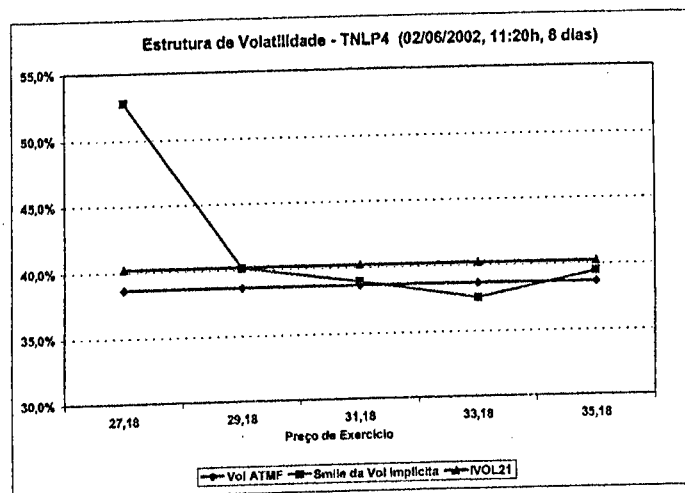


Tabela 9
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de TNLP4, 2/6/2002 às 12:00h.

Vol ATMF	37,25%	IVOL	39,22%
Opção	Preço	Strike	Smile (%)
call	2,38	29,18	38,12
call	0,96	31,18	37,28
call	0,25	33,18	37,02
call	0,06	35,18	39,68
call	0,02	37,18	43,89

Figura 9
Smile de Volatilidade Implícita para o ativo TNLP4, 2/6/2002 às 12:00h

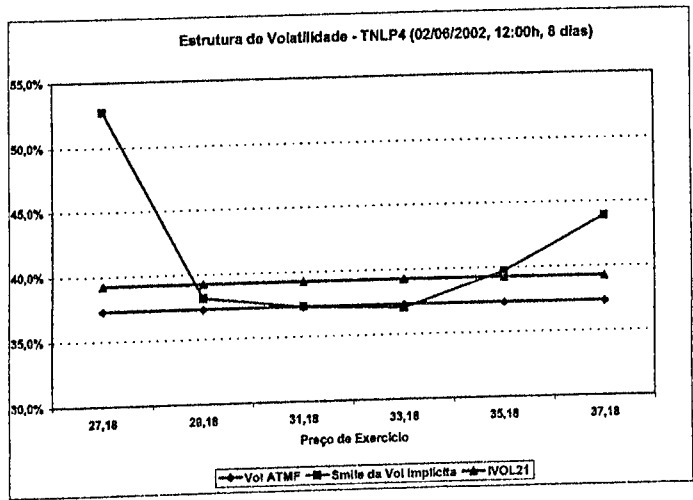
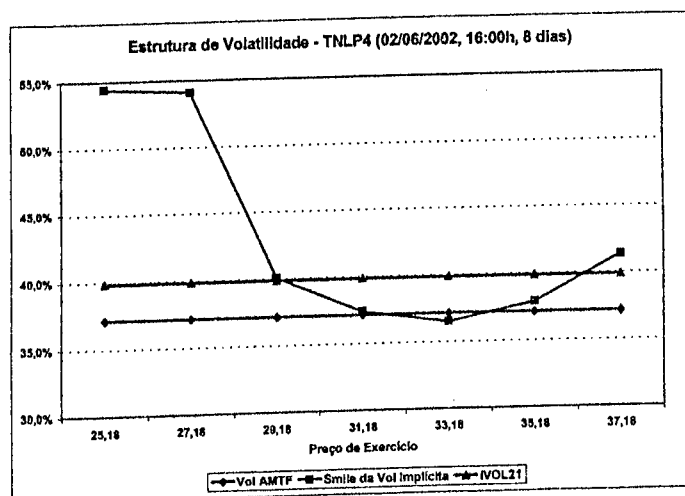


Tabela 10
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de TNLP4, 2/6/2002 às 16:00h

Vol ATMF	37,13%	IVOL	39,85%
Opção	Preço	Strike	Smile (%)
call	6,58	25,18	54,45
call	4,64	27,18	54,14
call	2,71	29,18	40,06
call	1,17	31,18	37,38
call	0,32	33,18	36,52
call	0,07	35,18	37,89
call	0,02	37,18	41,35

Figura 10
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de TNLP4,
2/6/2002 às 16:00h



3.3.2 Ativo: PETR4

As Tabelas e Figuras 11, 12 e 13 apresentam a evolução intra-diária do “smile” de volatilidade da opção de Petrobrás PETR4 conjuntamente com a volatilidade ATMF e a volatilidade a termo para o pregão do dia 14/06/02. Percebemos na Figura 11, correspondente a “fotografia” de mercado das 11:10, uma leve assimetria do “smile”, que se acentua claramente ao longo do dia. As figuras seguintes caracterizam de forma inequívoca, a assimetria e a curvatura dos “smiles” de volatilidade do mercado vespertino.

Tabela 11

Smile de Volatilidade Implícita para a opção de PETR4,
3/6/2002 às 11:10h

Vol ATMF	27,75%	IVOL	26,16%
Opção	Preço	Strike	Smile (%)
call	5,26	50,00	34,56
call	3,35	52,00	27,66
call	1,65	53,87	20,40
call	1,64	54,00	22,74
call	0,60	56,00	22,76
call	0,27	57,87	26,71
call	0,27	58,00	27,69
call	0,06	62,00	34,36

Figura 11

Smile de Volatilidade Implícita para a opção de PETR4,
3/6/2002 às 11:10h

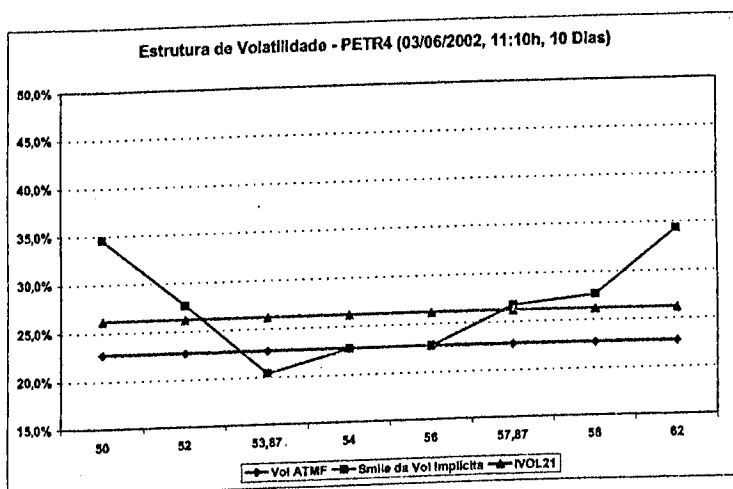


Tabela 12
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de PETR4,
3/6/2002 às 15:10h

Vol ATMF	21,75%	IVOL	25,60%
Opção	Preço	Strike	Smile (%)
call	5,66	50,00	48,57
call	3,41	52,00	24,26
call	1,78	53,87	20,46
call	1,70	54,00	20,97
call	0,67	56,00	22,19
call	0,28	57,87	24,94
call	0,27	58,00	25,53
call	0,07	62,00	33,11

Figura 12
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de PETR4,
3/6/2002 às 15:10h

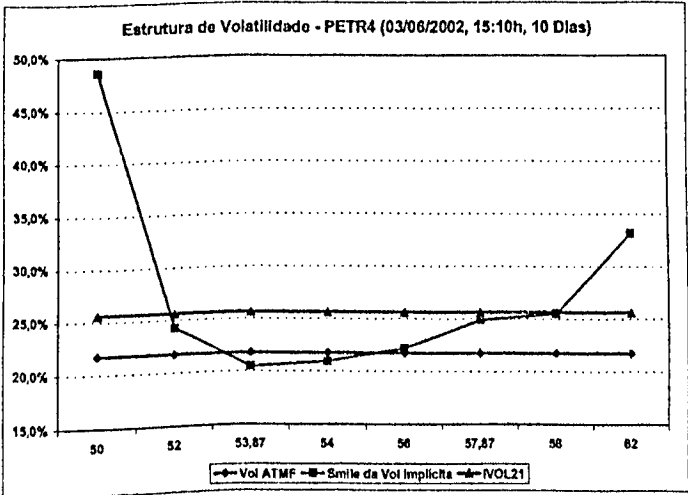
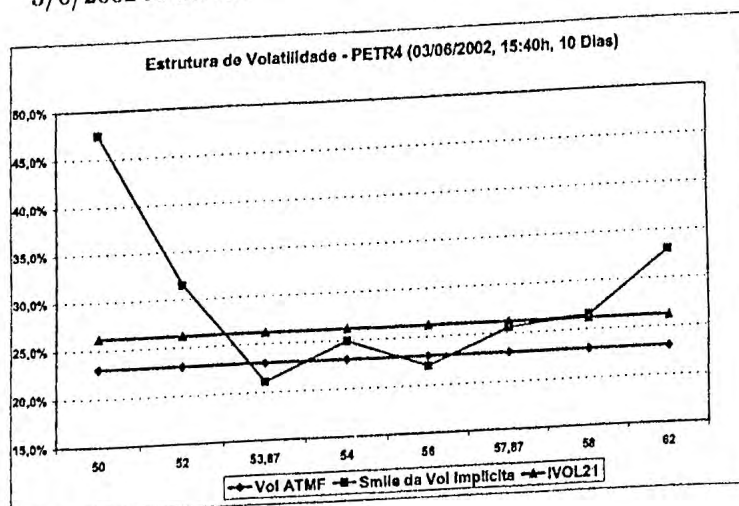


Tabela 13
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de PETR4,
3/6/2002 às 15:40h

Vol ATMF	23,02%	IVOL	26,17%
Opção	Preço	Strike	Smile (%)
call	5,66	50,00	47,46
call	3,60	52,00	31,50
call	1,82	53,87	21,10
call	1,87	54,00	24,94
call	0,68	56,00	22,02
call	0,30	57,87	25,58
call	0,31	58,00	26,52
call	0,07	62,00	32,98

Figura 13
Smile de Volatilidade Implícita para a opção de PETR4,
3/6/2002 às 15:40h



A significativa presença de acentuadas assimetrias e curvaturas nos “smiles” de volatilidade representados nos gráficos anteriores, justifica de forma irrefutável a utilização da volatilidade a termo como “benchmark” da volatilidade esperada pelo mercado. Trata-se na verdade do valor “forward” da volatilidade que apreça os contratos ou “swaps” de variância.

4 Conclusões

Apresentamos neste trabalho as bases teóricas para o apreçamento de contratos de volatilidade do tipo swap de variância no mercado brasileiro. Isto se traduz pela análise dos valores de um índice de volatilidade implícita que representa o valor justo, ou seja, o valor esperado da volatilidade a termo que irá se realizar no mercado durante o tempo de vida da opção. A realização de um estudo econométrico aprofundado esbarra em alguns problemas técnicos e práticos. São necessárias séries temporais de preços de mercado absolutamente síncronos. Questões ligadas à qualidade das informações de taxas de juros e de prêmios de opções efetivamente válidos são fundamentais. Traders e participantes de pregão com conhecimento preciso das condições de mercado teriam condições de filtrar os dados, obtendo valores do índice livres de quaisquer tipo de impurezas e imperfeições informacionais.

A Apêndices

A.1 O Resultado de Breeden-Litzenberger: Probabilidades Implícitas

Neste apêndice vamos apresentar o resultado devido à Breeden-Litzenberger versando sobre a possibilidade de extrair dos preços de opções líquidas negociadas pelo mercado em um instante de tempo a medida de probabilidade ajustada ao risco de Arrow-Debreu. Isto se torna importante para construirmos um preditor de volatilidade puramente baseado em mercados líquidos de opções.

O resultado de Breeden-Litzenberger considera apenas opções com um vencimento fixo $T > 0$ e sintetiza, a partir dos preços de um espectro contínuo de opções líquidas, a medida de probabilidade de Arrow-Debreu $p(T, \cdot)$, que, vigente na data futura $T > t$, regula os possíveis preços futuros S_T do ativo base. Para determinarmos esta medida de probabilidade, escrevemos o valor presente da opção como um valor esperado, relativo à medida de Arrow-Debreu, dos valores intrínsecos na data terminal:

$$C(t, T, K) = e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)^+] \quad (10)$$

Usando a densidade de probabilidade $p(t, S, T, x)$ da medida de probabilidade de Arrow-Debreu em relação à medida de Lebesgue usual, podemos escrever:

$$C(t, T, K) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - K)^+ p(t, S, T, x) dx. \quad (11)$$

Usando o fato que somente os valores $x > K$ contribuem para a integral acima, podemos derivar o valor da opção em relação à K e obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K} \left(e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (x - K) p(t, S, T, x) dx \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial K} \left(\int_K^{+\infty} (x - K) p(t, S, T, x) dx \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \left(\int_K^{+\infty} \frac{\partial}{\partial K} (x - K) p(t, S, T, x) dx \right. \\ &\quad \left. - (x - K) p(t, S, T, x) \Big|_{x=K} \right) \\ &= -e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} p(t, S, T, x) dx \end{aligned}$$

Observe que exatamente quando $p > 0$ temos que $\frac{\partial C}{\partial K} < 0$, pois relações de não-arbitragem impõem que o preço de uma opção de compra seja decrescente com relação ao preço de exercício. Assumindo um contínuo de opções líquidas negociadas para qualquer preço de exercício, podemos derivar mais uma vez com relação à K , obtendo:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = e^{-r(T-t)} p(t, S, T, K) \quad (12)$$

Segue finalmente desta fórmula a medida de probabilidade de Arrow-Debreu:

$$p(t, S, T, K) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \quad (13)$$

Observe novamente que as relações de não-arbitragem exigem que o preço de uma opção de compra seja convexo em relação ao preço de exercício, produzindo valores positivos para a densidade de probabilidade de Arrow-Debreu. Esta medida, ajustada aos preços de mercado das opções, determina a probabilidade que um ativo com risco, negociado na data t pelo valor S , passe a valer na data $T > t$ posterior a t um valor de mercado igual a K .

Se o mercado fizesse uso do modelo de Black-Scholes, então o valor desta medida seria simplesmente uma medida com densidade log-normal com drift igual a $r - \sigma^2/2$, como se poderia comprovar diretamente por derivação da fórmula de Black-Scholes em relação ao preço de exercício K .

A.2 Reconstruindo a Volatilidade: A Fórmula de Dupire

Apresentamos neste apêndice o resultado de 1994 devido a B. Dupire ([D]) versando sobre a reconstrução da estrutura de volatilidade local a partir dos preços de mercado de opções de compra e venda líquidas. Além de clarificar a importância da metodologia escolhida, permite também colocar em perspectiva o papel da liquidez na reconstrução de um preditor de variância.

Vamos considerar um mercado mais rico em opções, que negocia opções para qualquer vencimento $T > 0$ e qualquer exercício K . Neste caso, o resultado de Dupire afirma ser possível determinar a estrutura completa de volatilidade local que dá os preços de mercado às opções. A volatilidade local é a função $\sigma(t, S)$ que determina a dinâmica de preços do ativo base de acordo com a fórmula:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma(t, S)dW, \quad \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

O resultado de Dupire afirma basicamente que existe apenas uma estrutura de volatilidade local compatível com um mercado líquido de opções em todas as maturidades e preços de exercício, quer dizer, a função de volatilidade local em relação a qual os preços do modelo coincidem com os preços de mercado. Mais ainda, esta estrutura de volatilidade pode ser calculada explicitamente a partir dos preços das opções segundo a fórmula:

$$\sigma(T, x) = \sqrt{\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \Big|_{K=x} \quad (14)$$

Observe que em um mercado sem oportunidades de arbitragem, os valores de uma opção de compra devem ser crescentes com relação ao vencimento, decrescentes em relação ao preço de exercício e convexos nestes últimos. Isto significa que para opções com vencimento muito curto ou para opções muito fora do dinheiro, a fórmula acima exiba um comportamento anômalo. Vamos derivar neste apêndice a fórmula de Dupire. Procedendo como no apêndice anterior, vamos escrever o preço da opção usando a medida de Arrow-Debreu para tomarmos os valores esperados sobre os possíveis preços terminais do ativo base:

$$C(t, T, K) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - K)^+ p(t, S, T, x) dx \quad (15)$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (x - K) p(t, S, T, x) dx \quad (16)$$

Assumindo um mercado líquido de opções em qualquer maturidade, podemos derivar esta fórmula com relação à T e obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} = & -re^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (x-K)p(t, S, T, x)dx \\ & + e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_K^{+\infty} (x-K)p(t, S, T, x)dx \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Usando a expressão para o valor do preço da opção e derivando em relação à maturidade T , temos que:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -rC + e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (x-K) \frac{\partial p}{\partial T}(T, x)dx.$$

Para calcularmos a integral, devemos fazer uso da equação de Kolmogorov direta (consulte o livro de Oksendahl [O]), que afirma que:

$$\frac{\partial p}{\partial T}(T, x) = \frac{1}{2} \partial_x^2 (x^2 \sigma^2(T, x)p) - \partial_x (rxp).$$

Neste caso, inserindo este valor na expressão (17), obtemos:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -rC + e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (x-K) \left\{ \frac{1}{2} \partial_x^2 (x^2 \sigma^2(T, x)p) - \partial_x (rxp) \right\} dx. \quad (18)$$

Os termos com as derivadas parciais devem ser integrados por partes. Para o primeiro deles:

$$\begin{aligned} - \int_K^{+\infty} (x-K) \partial_x (rxp(T, x)) dx &= \int_K^{+\infty} \partial_x (x-K) rxp(T, x) dx \\ &= rxp(T, x)(x-K) \Big|_K^{+\infty} \\ &= r \int_K^{+\infty} xp(T, x) dx \end{aligned} \quad (19)$$

O segundo termo é integrado semelhantemente ao primeiro:

$$\begin{aligned}
\int_K^{+\infty} (x - K) \partial_x^2 (x^2 \sigma^2(T, x) p(T, x)) dx &= \\
&= - \int_K^{+\infty} \partial_x (x - K) \partial_x (x^2 \sigma^2(T, x) p(T, x)) dx \\
&+ (x - K) \partial_x (x^2 \sigma^2 p) \Big|_K^{+\infty} \\
&= - \int_K^{+\infty} \partial_x (x^2 \sigma^2(T, x) p(T, x)) dx \\
&= - x^2 \sigma^2(T, x) p(T, x) \Big|_K^{+\infty} \\
&= K^2 \sigma^2(T, K) p(T, K).
\end{aligned} \tag{20}$$

Substituindo pelas equações (19) e (20) na fórmula (18), obtemos finalmente a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial T} &= -rC + \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + rC + rK \underbrace{e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} p(T, x) dx}_{\frac{\partial C}{\partial K}} \\
&= \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + rK \frac{\partial C}{\partial K}
\end{aligned}$$

Isolando o termo com a estrutura de volatilidade, obtemos:

$$\sigma^2(T, K) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \tag{21}$$

Podemos finalmente enunciar o resultado de Dupire como segue:

Teorema A.1 (B. Dupire, 1994) *Se um mercado sobre um ativo base com dinâmica de preços do tipo:*

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

consegue encontrar preços de equilíbrio para quaisquer opções de compra (ou venda) para todo vencimento T e todo preço de exercício K , então existe uma única estrutura de volatilidade local compatível com o conjunto de preços $\{C(K, T)\}$ de opções negociados no mercado. Mais ainda, esta

estrutura de volatilidade pode ser calculada explicitamente a partir dos preços das opções segundo a fórmula:

$$\sigma(T, K) = \sqrt{\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \Big|_{K=x}$$

A.3 Generalizando o Princípio de Paridade Put-Call: Replicação Estática de Opções

Vamos exibir neste apêndice uma relação de natureza matemática que, no contexto de derivativos, permite-nos generalizar o princípio de paridade entre opções de compra e venda (put-call parity). Podemos entender esta última relação como a possibilidade de replicarmos uma posição linear em um ativo com preço S por uma carteira sintética consistindo de duas opções, uma de compra e uma de venda. Mais geralmente, pode-se mostrar que qualquer perfil não-linear pode ser replicado em um instante de tempo, daí o nome de replicação estática, por uma carteira sintética de opções de compra e de venda e uma posição em numerário.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denota uma função real de classe $\mathcal{C}^2$, então para todo número real S e para todo valor S^* , podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(S) &= f(S^*) + f'(S^*)(S - S^*) + \int_0^{S^*} f''(K)(K - S)^+ dK \\ &\quad + \int_{S^*}^{+\infty} f''(K)(K - S)^+ dK \end{aligned}$$

Quando imaginamos a função f como um pay-off terminal de uma opção, a fórmula acima permite mostrar que uma posição na opção exótica com perfil f pode ser replicada por meio de uma posição em numerário (cash), igual a $f(S^*)$, uma posição no ativo objeto S , representado pelo termo com a derivada $f'(S^*)$ e por uma posição em uma carteira de opções européias com preço de exercício x variando em um contínuo de preços de exercício $[0, +\infty)$ hipotéticos. Estes últimos termos reproduzem a convexidade do perfil f através da quantidade $f''(x)$ de opções com preço de exercício x em $[0, +\infty)$.

A prova deste resultado é feita diretamente através de integrações por partes. De fato, usando o teorema fundamental do cálculo, podemos escrever, uma das duas seguintes fórmulas para quaisquer valores de S e S^* :

$$f(S) = \begin{cases} f(S^*) - \int_S^{S^*} f'(x)dx, & S < S^* \\ f(S^*) + \int_S^{S^*} f'(x)dx, & S > S^* \end{cases}$$

Escrevendo de maneira unificada estas duas relações, temos que:

$$f(S) = f(S^*) + 1_{\{S > S^*\}} \int_{S^*}^S f'(x)dx - 1_{\{S < S^*\}} \int_S^{S^*} f'(x)dx$$

Usando novamente o teorema fundamental do cálculo em cada uma das integrais, temos que:

$$\begin{aligned} f(S) &= f(S^*) + 1_{\{S > S^*\}} \int_{S^*}^S [f'(x) + \int_{S^*}^x f''(K) dK] dx \\ &\quad - 1_{\{S < S^*\}} \int_{S^*}^S [f'(x) - \int_x^{S^*} f''(K) dK] dx \end{aligned}$$

Rearranjando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} f(S) &= f(S^*) + 1_{\{S > S^*\}} f'(S^*) \int_{S^*}^S dx - 1_{\{S < S^*\}} f'(S^*) \int_{S^*}^S dx \\ &\quad + 1_{\{S > S^*\}} \int_{S^*}^S \int_{S^*}^x f''(K) dK dx + 1_{\{S < S^*\}} \int_S^{S^*} \int_x^{S^*} f''(K) dK dx \\ &= f(S^*) + 1_{\{S > S^*\}} f'(S^*) (S - S^*) - 1_{\{S < S^*\}} f'(S^*) (S^* - S) \\ &\quad + 1_{\{S > S^*\}} \int_{S^*}^S \int_{S^*}^x f''(K) dK dx + 1_{\{S < S^*\}} \int_S^{S^*} \int_x^{S^*} f''(K) dK dx \\ &= f(S^*) + f'(S^*) (S - S^*) + 1_{\{S > S^*\}} \int_{S^*}^S \int_{S^*}^x f''(K) dK dx \\ &\quad + 1_{\{S < S^*\}} \int_S^{S^*} \int_x^{S^*} f''(K) dK dx \end{aligned}$$

Trocando a ordem das integrais e integrando sobre a variável x :

$$\begin{aligned} f(S) &= f(S^*) + f'(S^*) (S - S^*) + 1_{\{S > S^*\}} \int_{S^*}^S \int_{S^*}^x f''(K) dK dx \\ &\quad + 1_{\{S < S^*\}} \int_S^{S^*} \int_x^{S^*} f''(K) dK dx \end{aligned}$$

Usando a definição da função indicadora, obtemos finalmente a expressão desejada. Quando a função f não é duas vezes diferenciável, como no caso de um perfil de uma opção europeia de compra ou venda, é possível mostrar que a fórmula continua válida neste caso. Obtem-se assim a relação de paridade put-call.

Referências

- [A] *Variance and Option Strategies*, M. Avellaneda, Derivatives Week N° 46, vol IX (November 2000).
- [N] *Volatility Trading*, A. Neuberger. London Business School working paper, 1990.
- [CM] *Towards a Theory of Volatility Trading*, P. Carr, D. Madan. Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives. Eds. R. Jarrow, (1998).
- [DDKZ] *More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps*, K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal, J. Zou. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes (March 1999).
- [DK] *Riding on a smile*, E. Derman e H. Kani. RISK, 8, (1), 1994.
- [D] *Pricing with a Smile*, B. Dupire. RISK, 7, (1), 1994.
- [FOW] *Predicting Stock Market Volatility: A New Measure*, J. Fleming, B. Ostdiek, R. Whaley. Duke University Preprint (1993).
- [O] *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, B. Øksendal. Springer-Verlag, 5° edition, 2000.

RELATÓRIOS TÉCNICOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

2003

RT-MAP-0301 – Michael Forger & Hartmann Römer
"Currents and the Energy-Momentum Tensor in Classical Field Theory: A Fresh Look at an Old Problem"
July, 2003 - São Paulo - IME-USP – 91 pg.

RT-MAP-0302 - Garcia, M. V. P. & Tal, Fábio A.
"The Influence of the Kinetic Energy in Equilibrium of Hamiltonian Systems"
August, 2003 - São Paulo - IME-USP – 08 pg.