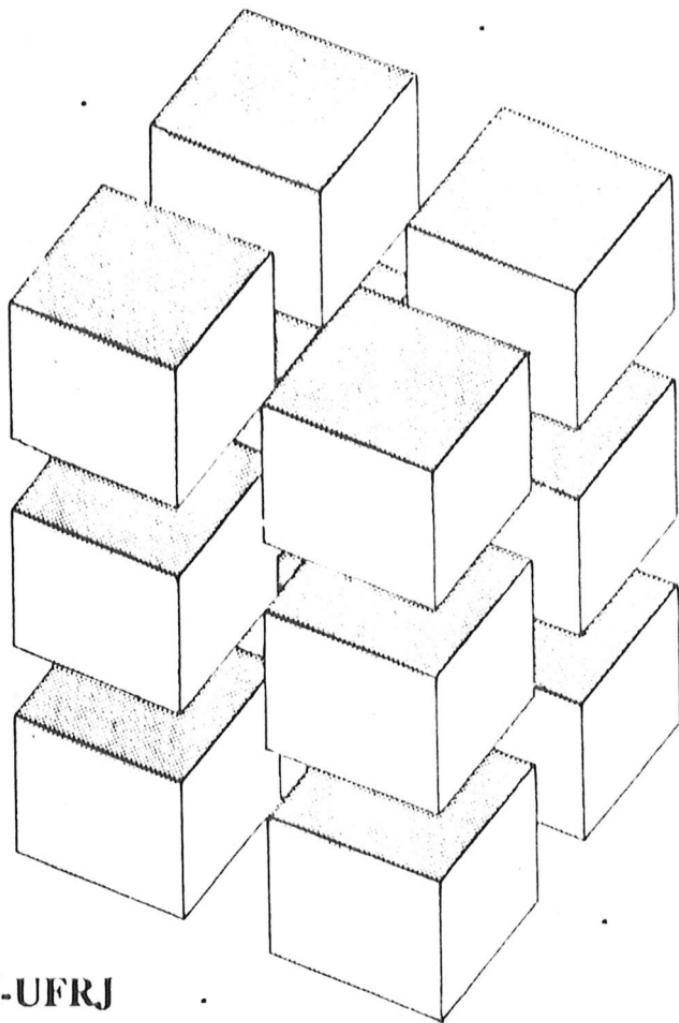


**XI CONGRESSO IBERO  
LATINO AMERICANO  
SOBRE MÉTODOS  
COMPUTACIONAIS PARA  
ENGENHARIA**



**COPPE-UFRJ**

**AMC**

**29-31, OUTUBRO, 1990**

**RIO DE JANEIRO**

---

# **MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA - 1990**

---

**ANAIIS DO**

**XI CONGRESSO LATINO-IBERO-AMERICANO  
SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA  
ENGENHARIA**

**VOLUME I**

**PUBLICAÇÃO COMPILADA POR**

**A. J. FERRANTE  
N. F. F. EBECKEN**

**RIO DE JANEIRO, BRASIL**

**OUTUBRO DE 1990**

BATTISTELLE, Rosane Ap. Gomes & MANCINI, Eddie  
Influência das deformações axiais dos pilares e efeito de 2<sup>a</sup> ordem em pórticos planos.  
In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE  
MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11.,  
Rio De Janeiro, 1990. Anais. Rio de Ja-  
neiro, COPPE-UFRJ, 1990. v.1, p. 25-36.

UEESC

Cód.: 3.20.00.00-0

UEESC

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ARGYRIS, J. H., HILPERT, O., MALEJANNAKIS, G. A. and SCHARPF, D. W., "On the Geometrical Stiffness of a Beam In Space - A consistent V. W. Approach", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 20, 1979, pp. 105-131.
- [2] ARGYRIS, J. H., BONI, B., HINDENLANG, U. and KLEIBER, M. "Finite Element Analysis of Two- and Three Dimensional Elasto-Plastic Frames - The Natural Approach", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.35, No.2, 1982, pp. 221-245.
- [3] BRUINETTE, K. E. and FENVES, S. J., "A General Formulation of the Elastic-Plastic Analysis of Space Frameworks", International Conference on Space Structures, Univ. of Surrey, 1966.
- [4] DUMONT, N. A. and KRÜGER, S. D., "Um Método Eficiente para a Resolução de Problemas Altamente Não Lineares", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, Brasil, Dezembro, 1989.
- [5] HAYTHORNHAITE, R. M. " Beams with full end fixity ", Engineering, 183, 1957, pp. 110-112.
- [6] LESCOUARCH'H, Y., "Sollicitations Ultimes dans une Section", Manuel pour le Calcul en Plasticité des Constructions en Acier, Chapitre 4, Centre Technique Industriel de la Construction Métallique.
- [7] ORAN, C., "Tangent Stiffness in Space Frames", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST6, Proc. Paper 9813, June, 1973, pp. 987-1001.
- [8] SHI, G. and ATLURI, S. N., "Elasto-Plastic Large Deformation Analysis of Space Frames: a Plastic-Hinge and Stress-Based Explicit Derivation of Tangent Stiffnesses", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, 1988, pp. 589-615.
- [9] MARQUES, S. P. C., "Análise Não-Linear Física e Geométrica de Pórticos Espaciais". Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, setembro de 1990.
- [10] SMITH, M., "The NAFEMS Benchmark Tests for Two-Dimensional Thin Beams and Axially-symmetric Shells with Geometric Nonlinearity", Benchmark, April, 1990, pp. 13-15.
- [11] Yang, Y. B., "Linear and Nonlinear Analysis of Space Frames with Nonuniform Torsion Using Interactive Computer Graphics", Department of Structural Engineering Report, Cornell University, Number 84 - 10, June, 1984.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro prestado pela CAPES e pelo CNPq.

# INFLUÊNCIA DAS DEFORMAÇÕES AXIAIS DOS PILARES E EFEITO DE 2<sup>a</sup> ORDEM EM PÓRTICOS PLANOS

*Rosane Ap. Gomes Battistelle*

Universidade Estadual Paulista - UNESP

Campus de Bauru

Departamento de Engenharia e Tecnologia Civil

*Eddie Mancini*

Universidade de São Paulo - USP

Escola de Engenharia de São Carlos

Departamento de Estruturas

## RESUMO

SYSNO 0808222  
PROD 000706

ACERVO EESC

Analisa-se, neste artigo, os deslocamentos laterais depórticos planos considerando os deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2a. ordem, sendo o carregamento externo constituído de cargas laterais e verticais uniformemente distribuídas ao longo de sua altura.

No desenvolvimento teórico utiliza-se a Técnica do Meio Contínuo, que consiste basicamente na substituição do sistema discreto formado por lajes e vigas que conectam os elementos verticais, ao nível dos andares, por um meio contínuo de rigidez equivalente, distribuído ao longo da altura da estrutura.

O comportamento deste modelo estrutural expressa-se através de uma equação diferencial de terceira ordem, que é resolvida através da utilização do método numérico das Diferenças Finitas. Este método por conduzir a um sistema de equações com um grande número de incógnitas exigiu a elaboração de um programa de cálculo, em linguagem FORTRAN, para microcomputadores.

## 1- INTRODUÇÃO

Com base no trabalho de BATHAUS [1], que estudou os painéis pótico considerando a influência dos deslocamentos axiais nos seus pilares, e de XAVIER [4], que analisou o efeito de 2a. ordem em vários modelos estruturais, pretende-se neste trabalho desenvolver a determinação dos deslocamentos laterais em painéis pótico, sujeitos à ação de cargas laterais e verticais, uniformemente distribuídas ao longo da altura dos mesmos.

A técnica utilizada no desenvolvimento teórico é a Técnica do Meio Contínuo, sendo que o comportamento deste modelo estrutural expressa-se através de uma equação diferencial de terceira ordem, solucionada com a aplicação do Método das Diferenças Finitas.

## 2- CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS LATERAIS

### 2.1- Força Cortante ao Nível do Andar

Para a obtenção do conjunto de equações que define o comportamento do painel pótico, analisa-se a estrutura na sua posição deformada. Considera-se um carregamento externo constituído de uma carga horizontal  $p$ ; uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel, de cargas verticais  $p_1$ , uniformemente distribuídas ao longo da altura  $z$  dos pilares do pótico e de uma força lateral  $F$  concentrada no topo, representadas na figura 1.a.

Mostra-se na figura 1.b o pótico na sua posição deformada. O momento fletor do carregamento externo à uma cota  $z$  da base do pótico, em relação ao ponto B, igualado ao momento fletor das forças internas, fornece:

$$M_{\ell_f} - \int_z^H p_1 \left[ \ell_v - (\eta - u) \right] d\lambda + \int_z^H p_2 (\eta - u) d\lambda = N_A \ell_v \quad (1)$$

onde  $M_{\ell_f}$  é o momento produzido pelas cargas laterais em relação ao ponto B.

Desenvolvendo-se a equação (1), derivando-a e levando-se em consideração que

$$\frac{dM_{\ell_f}}{dz} = -V_{\ell_f} \quad (2.1)$$

encontra-se:

$$V_{\ell_f} = -N_A' \ell_v + p_1 \ell_v - (p_1 + p_2)(H - z) u' \quad (2.2)$$

uma vez que uma cota z da base tem-se o deslocamento  $u = \eta(z)$ .

## 2.2- Força Cortante nas Vigas

Demonstra-se na figura 2 os esforços atuantes em uma viga genérica, onde  $q_v$  é a força cortante na viga, concentrada ao nível dos andares e  $q$  é a força cortante distribuída ao longo da altura dos pilares do pórtico.

Adotando-se a convenção apresentada na figura 2, pode-se escrever:

$$q = -\frac{1}{h\ell_v} \left( M_{AB} + M_{BA} \right) \quad (3)$$

Substituindo-se as expressões dos momentos aplicados pelas barras aos nós A e B na equação (3), encontra-se:

$$q = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (4)$$

onde:

$$c_1 = \frac{24 E K_p K_v}{h (2 K_p + K_v) \ell_v} , \quad d_1 = \frac{c_1}{\ell_v} \quad (5)$$

e  $v_A$  e  $v_B$  são os deslocamentos axiais dos pilares A e B, respectivamente.

### 2.3- Deslocamentos Axiais dos Pilares

O equilíbrio de um elemento genérico do pilar A, com seu respectivo carregamento  $q$ ,  $p_1$  e esforços normais, fornece:

$$\frac{dN_A}{dz} = p_1 - q \quad (6)$$

Sabe-se que

$$N_A = E S_A V'_A , \quad (7.1)$$

que combinada com a equação (6) resulta:

$$E S_A V'_A = p_1 - q \quad (7.2)$$

Analogamente para o pilar B, encontra-se:

$$E S_B V'_B = p_2 + q \quad (8)$$

Substituindo-se a equação (6) na equação (2.2), tem-se:

$$V_{\ell_f} = q \ell_v - (p_1 + p_2) (H - z) u' \quad (9)$$

Completa-se, assim, o sistema de equações formado pelas expressões (4), (7), (8) e (9).

Resolvendo-se este sistema de quatro incógnitas ( $q, u, v_A$  e  $v_B$ ) por substituição, encontra-se a seguinte expressão:

$$\left[ c_1 \ell_v - p_k (H - z) \right] u''' + 2p_k u'' - d_1 \ell_v \left\{ \left( \frac{p_1}{ES_A} - \frac{p_2}{ES_B} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{\ell_v} \left( \frac{1}{ES_A} + \frac{1}{ES_B} \right) \left[ p(H - z) + F + p_k (H - z) u' \right] \right\} = 0 \quad (10)$$

onde

$$p_k = p_1 + p_2 \quad (11)$$

e  $V_{\ell_f}$  é a força cortante do carregamento lateral expressa por:

$$V_{\ell_f} = p(H - z) + F \quad (12)$$

Rearranjando-se a equação (10), escreve-se:

$$\left[ C_k - \frac{1}{2} (H - z) \right] u''' + u'' + C_2 (H - z) u' = \\ = C_3 (H - z) + C_4 \quad (13)$$

sendo:

$$C_k = \frac{c_1 \ell_v}{2p_k} \quad (14)$$

$$C_2 = \frac{d_1}{2E} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right)$$

$$C_3 = \frac{-d_1 p}{2E p_k} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right)$$

$$C_4 = \frac{-d_1}{2E p_k} \left( \frac{F - p_1 \ell_v}{S_A} + \frac{F + p_2 \ell_v}{S_B} \right)$$

Definindo-se  $\eta$  como um parâmetro adimensional, dado por:

$$\eta = \frac{z}{H} \quad (15)$$

pode-se, portanto, escrever a equação (13) como:

$$\left[ D_k - \frac{1}{2} (1 - \eta) \right] u''' + u'' + D_2 (1 - \eta) u' = D_3 (1 - \eta) + D_4 \quad (16)$$

onde:

$$D_k = \frac{C_k}{H}$$

$$D_2 = C_2 H^2 \quad (17)$$

$$D_3 = C_3 H^3$$

$$D_4 = C_4 H^2$$

lembrando-se que:

$$u = u(\eta) \quad (18)$$

$$\frac{d^1 u(z)}{d^1 z} = \frac{1}{H^1} \frac{d^1 u(\eta)}{d^1 \eta} \quad (19)$$

### 3- RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A resolução da equação diferencial de terceira ordem, equação (16), é feita com a utilização dos conceitos apresentados em SALVADORI & BARON [3] e dos operadores das diferenças finitas desenvolvidos no trabalho de MANCINI [2].

#### 3.1- Condições de Contorno

Utilizam-se as seguintes condições de contorno para a equação diferencial:

- na base ( $\eta = 0$ ):

$$a) u(0) = 0 \quad (20)$$

$$b) v_A(0) = v_B(0) = 0 \quad (21)$$

- no topo ( $\eta = 1$ ):

$$c) v'_A(1) = v'_B(1) = 0 \quad (22)$$

### 4- RESULTADOS E CONCLUSÕES

Os resultados obtidos referem-se ao exemplo apresentado na figura 3, tendo sido utilizado um programa para computador, desenvolvido em linguagem FORTRAN.

A estrutura apresentada é constituída de 15 andares com pé direito de 3,0m. Os pilares e as vigas possuem seções transversais constantes ao longo da altura, medindo 0,3 x 0,8m e 0,3 x 0,7m respectivamente. O carregamento externo atuante na estrutura consiste de uma carga lateral uniformemente distribuída de valor

$p=3,6\text{KN/m}$  e uma carga vertical distribuída uniformemente ao longo dos pilares A e B de valor  $p_1=p_2=40\text{KN/m}$ . O valor do módulo de elasticidade é  $E=2\times 10^7\text{KN/m}^2$ .

Apresentam-se na figura 4 os valores dos deslocamentos horizontais da estrutura, ao longo de sua altura, sendo:

CASO(1) - Painel pótico sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2a. ordem;

CASO(2) - Painel pótico considerando-se a influência dos deslocamentos axiais e sem considerar o efeito de 2a. ordem;

CASO(3) - Painel pótico sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e considerando-se o efeito de 2a. ordem;

CASO(4) - Painel pótico considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2a. ordem.

Analizando-se os deslocamentos horizontais no topo do pótico, nota-se um pequeno acréscimo de 3% no CASO(3) quando comparado ao CASO(1), ocasionado pela consideração do efeito de 2a. ordem. Esta percentagem aumenta para 39% quando se considera o deslocamento axial dos pilares (CASO(4) comparado com CASO(1)).

Para observar o comportamento dos deslocamentos horizontais do CASO(01) e CASO(02), processou-se o mesmo exemplo em um outro programa de microcomputador, observando-se uma igualdade de deslocamentos em ambos os casos, comprovando-se parcialmente a teoria aqui apresentada.

A figura 5 fornece os valores dos deslocamentos horizontais

no topo da estrutura, variando as cargas  $p_1$  e  $p_2$  até chegarem a valores próximos ao da carga crítica. O valor obtido para a carga crítica mostrou-se inferior àquele obtido por processo de análise discreta. Isto deve-se ao fato do pórtico possuir na base uma rigidez lateral maior, pelo engastamento dos pilares, fato este que não é levado em conta no cálculo aqui efetuado.

## 5- NOTAÇÃO

E - Módulo de elasticidade longitudinal da estrutura

$S_A$  - Área da seção transversal do pilar A

$S_B$  - Área da seção transversal do pilar B

$K_p$  - Rrigidez do pilar, dada pela expressão:  $K_p = \frac{I_p}{h}$

$K_v$  - Rrigidez da viga, fornecida pela divisão  $K_v = \frac{I_v}{l_v}$

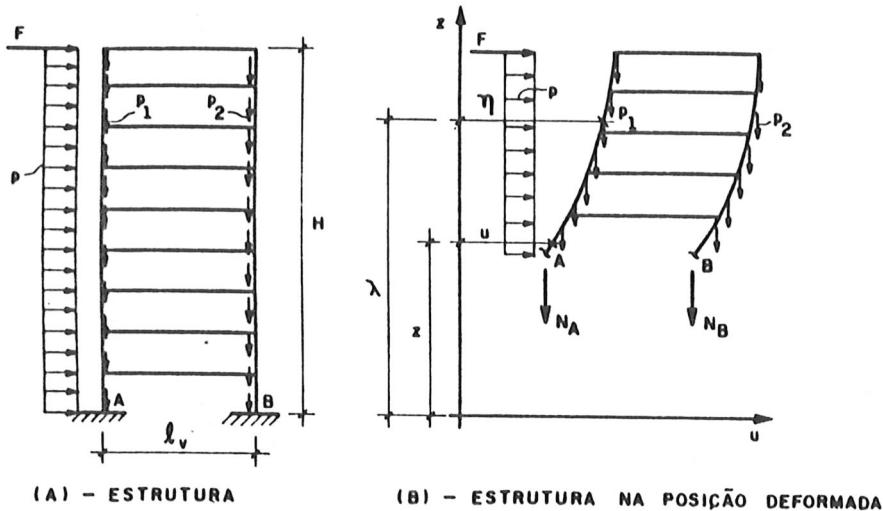
$l_v$  - Distância de eixo a eixo entre pilares (comprimento da viga)

## 6- REFERÊNCIAS

- 1- BATHAUS FILHO, M. Painéis de contraventamento. São Carlos, EESC-USP (Trabalho de especialização)
- 2- MANCINI, E. Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento. São Carlos, EESC-USP, 1973. 140p. (Tese de Doutorado)
- 3- SALVADORI, M. G. & BARON, M.L. Métodos numéricos aplicados à engenharia. Tradução de Harry Farrer. Belo Horizonte, Escola de Engenharia da Universidade

de Minas Gerais, 1956.

4- XAVIER, Maria Angela, P. Análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo. São Carlos, EESC-USP, 1986. 317p  
(Dissertação de Mestrado).



(A) - ESTRUTURA

(B) - ESTRUTURA NA POSIÇÃO DEFORMADA

Figura 1 - Painel pótico

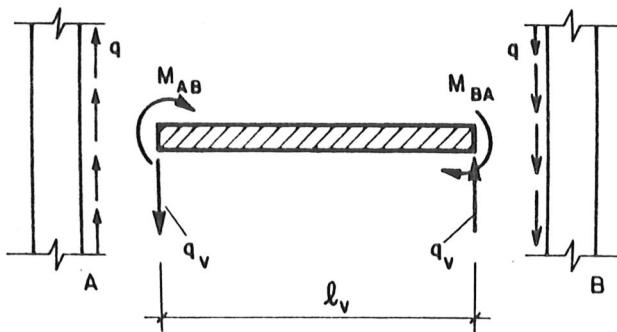


Figura 2 - Esforços positivos na viga

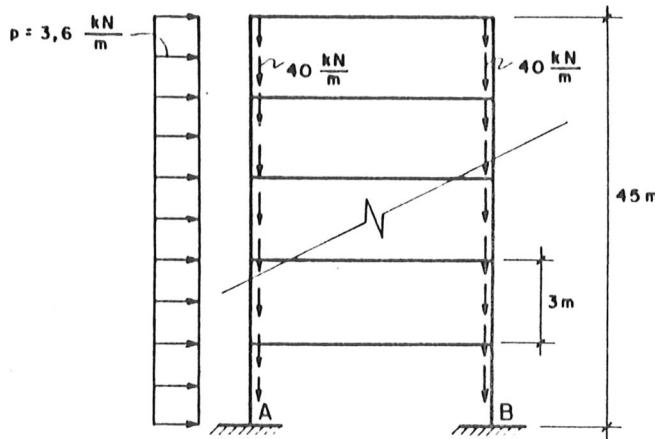


Figura 3 - Exemplo numérico

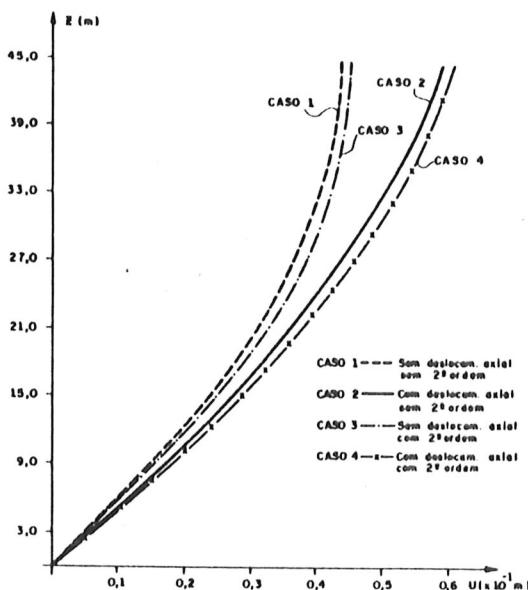


Figura 4 - Deslocamentos horizontais (m)

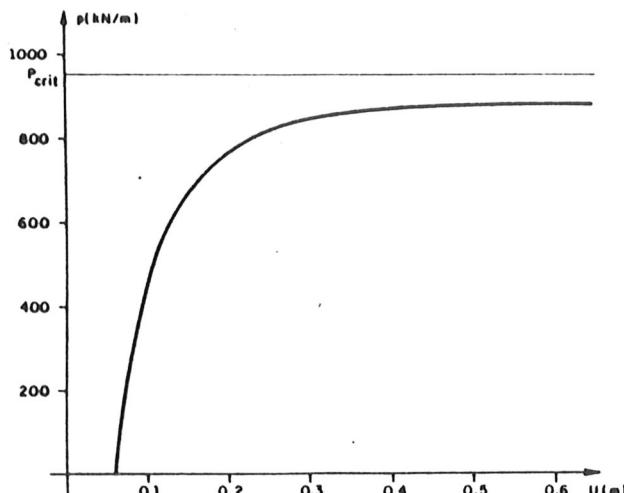


Figura 5 - Deslocamentos horizontais no topo - Caso (4)