



DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NA GEOMETRIA ESFÉRICA

ANA PAULA JAHN – IME/USP

VINCENZO BONGIOVANNI – COLÉGIO UNIVERSITAS, SANTOS, SP

Como abordar o tópico “distância entre dois pontos do globo terrestre” para alunos do ensino médio, usando apenas resultados da trigonometria plana? A motivação para escrever este artigo foi o excelente texto do Prof. Sérgio Alves, intitulado *A Geometria do Globo Terrestre* ([1]), no qual a distância entre dois pontos de uma superfície esférica, dados por suas coordenadas geográficas, foi tratada via coordenadas cartesianas e com o recurso do produto interno usual. Neste texto, revisitamos essas ideias usando apenas resultados básicos da Geometria Euclidiana.

Apresentaremos uma sequência de situações que trata dessa questão e que pode motivar os alunos a se interessarem pela integração da Matemática com a Geografia.

Inicialmente, vamos determinar a distância entre dois pontos A e B de uma superfície esférica¹, medida ao longo de uma circunferência máxima².

Situação 1

Desprezando o fato de que a Terra apresenta um achatamento nos polos, considerando-a perfeitamente esférica e adotando para seu raio o valor de 6400 km, quantos quilômetros percorrerá um navio quando se move em 1° de uma circunferência máxima?

¹Seja O um ponto e r um número real positivo. A **superfície esférica** de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a O é igual a r .

²A intersecção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada de **circunferência máxima** da superfície esférica.



A questão se resume em determinar o comprimento de um arco contido numa circunferência máxima, associado a um ângulo central de medida 1° .

Uma simples regra de três fornece o resultado:

km	grau
$2\pi \cdot 6400$	----- 360°
x	----- 1°

$$\text{Donde } x = \frac{2\pi \cdot 6400}{360} \text{ km} \cong 111,7 \text{ km.}$$

Conclusão

Quando os pontos A e B estão sobre uma circunferência máxima de centro O , a distância (aproximada), em km, entre A e B é a medida do ângulo AOB , em graus, multiplicada por 111,7.

Agora, vamos determinar a distância entre os pontos A e B de uma superfície esférica, medida ao longo de um meridiano.

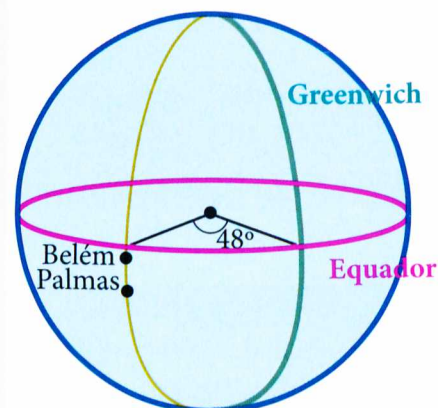
Situação 2

As cidades brasileiras de Palmas e Belém estão localizadas no mesmo meridiano 48° Oeste (W). Sabendo que suas latitudes são, respectivamente, $10^\circ 12' 46''$ Sul (S) e $1^\circ 27' 21''$ Sul (S), qual a distância entre elas (distância aérea e não rodoviária)?

Meridianos são semicircunferências que ligam os polos Norte (N) e Sul (S) por meio de arcos máximos, isto é, arcos contidos em circunferências máximas que passam pelos polos. Como os meridianos estão contidos em circunferências máximas, a distância de um grau é de aproximadamente 111,7 km. Como a diferença das latitudes é de:

$$\begin{aligned} 10^\circ 12' 46'' - 1^\circ 27' 21'' &= 9^\circ 72' 46'' - 1^\circ 27' 21'' = \\ 8^\circ 45' 25'' &= 8^\circ + (45/60)^\circ + (25/3600)^\circ = \\ &= (8,7569)^\circ, \end{aligned}$$

conclui-se que a distância entre as cidades é de 8,7569.111,7 km, o que dará, aproximadamente, 978 km.



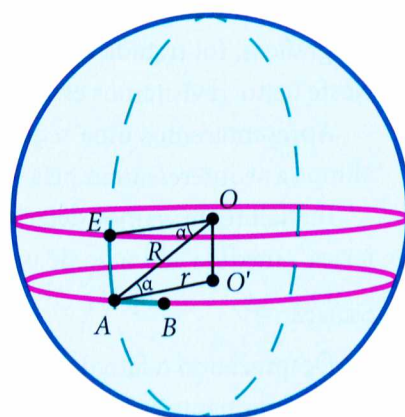
Conclusão

Quando A e B possuem a mesma longitude, a distância, em km, entre A e B é variação entre as latitudes, em graus, multiplicada por 111,7.

Vejamos como podemos tratar a distância entre os pontos A e B , medida ao longo de um paralelo.

Situação 3

As cidades brasileiras de Campo Grande e Vitória estão localizadas aproximadamente no mesmo paralelo. Sabendo que suas latitudes são aproximadamente 20° S e suas longitudes são respectivamente 55° W e 40° W, qual a distância entre elas, medida ao longo do paralelo?



Lembramos que os **paralelos** correspondem às circunferências que são secções da superfície terrestre por planos paralelos ao plano do equador.

As cidades A e B estão no mesmo paralelo 20° S. O ângulo EOA mede 20° (latitude de Campo Grande e de Vitória). Logo, o ângulo OAO' medirá 20° . No triângulo retângulo AOO' , teremos $\cos 20^\circ = r/R$, onde r é o raio da circunferência de centro O' e R é o raio da Terra. Adotando $R = 6400$ km, teremos: $r = 6400 \cdot \cos 20^\circ \cong 6014$ km. A distância de A até B medida ao longo do paralelo será então $\frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 15}{360}$ km $\cong 1574$ km.

Devemos observar que a distância entre A e B medida ao longo do paralelo não é a menor distância entre A e B .

Conclusão

Quando A e B possuem a mesma latitude α (em graus), a distância entre A e B medida ao longo do paralelo é $\frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360}$ km, sendo $\cos \alpha = \frac{r}{6400}$.

Com o que foi apresentado até aqui, podemos resolver as seguintes questões extraídas de vestibulares:

UNICAMP (2003, 2ª fase, Questão 5)

Os pontos A e B estão, ambos, localizados na superfície terrestre a 60° de latitude norte; o ponto A está a $15^\circ 45'$ de longitude leste e o ponto B a $56^\circ 15'$ de longitude oeste.

a) Dado que o raio da Terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6400 km, qual é o raio do paralelo de 60° ? Resp: 3200 km.

b) Qual é a menor distância entre os pontos A e B , medida ao longo do paralelo de 60° ? (Use $22/7$ como aproximação para π .)

Resposta: 4 022,9 km.

FUVEST (2016, 2ª fase, 2º dia, Questão 10)

Dois aviões vão de Brasília a Moscou. O primeiro voa diretamente para o norte, até atingir o paralelo de Moscou, quando então

muda o rumo para o leste, seguindo para o seu destino final. O segundo voa para o leste até atingir o meridiano de Moscou, tomando então o rumo norte até chegar a essa cidade.

a) Desprezando as variações de altitude, qual avião terá percorrido a maior distância em relação ao solo? Justifique sua resposta.

b) Calcule a diferença entre as distâncias percorridas, supondo que a Terra seja esférica.

Note e adote
$\cos 56^\circ = 0,56$; $\sin 56^\circ = 0,83$; $\cos 16^\circ = 0,96$; $\sin 16^\circ = 0,28$
Latitude e longitude de Brasília: 16° S e 48° W
Latitude e longitude de Moscou: 56° N e 37° E
Raio da Terra: 6400 km

Fonte: FUVEST (2016, 2ª fase, 2º dia, Questão 10)

Resposta: 1209π km.

Finalmente, vamos determinar a distância entre os pontos A e B de uma superfície esférica, de latitudes e longitudes diferentes.

Situação 4

As cidades de Brasília e Fortaleza têm latitudes iguais a $15^\circ 46' 47''$ S e $3^\circ 43' 02''$ S, respectivamente, e longitudes iguais, respectivamente, a $47^\circ 55' 47''$ W e $38^\circ 32' 35''$ W. Qual a distância entre elas?

Para resolver esse problema, utilizaremos o teorema dos cossenos da Geometria Esférica.

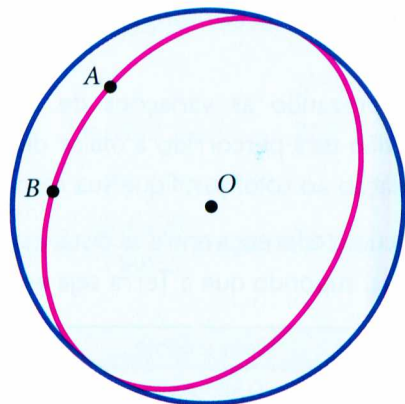
Teorema dos cossenos

Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c , e ângulos internos A, B e C . Então,
 $\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(A)$

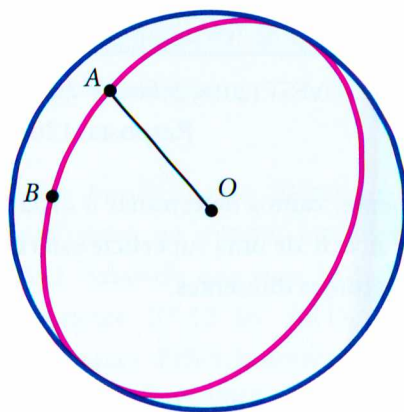
Antes de provar o teorema, vamos lembrar como construir uma reta tangente a uma circunferência máxima de uma superfície esférica, por um ponto pertencente a essa superfície.



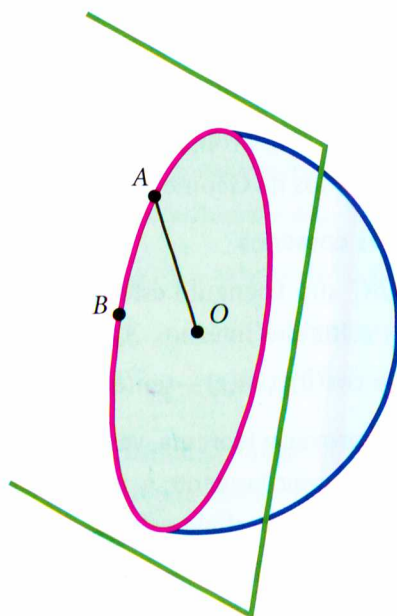
AB é um arco de uma circunferência máxima de centro O . Construir, pelo ponto A , uma reta tangente ao arco AB .



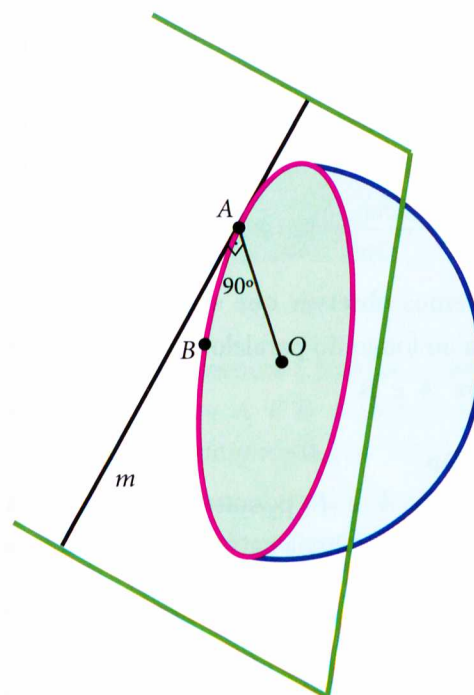
1. Ligar o centro O da esfera ao ponto A , obtendo o raio OA da esfera.



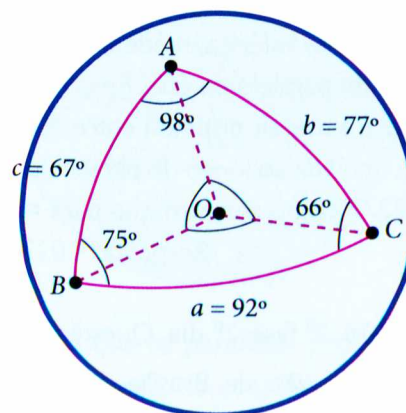
2. Criar o plano que passa por A , O e B .



3. Nesse plano, pelo ponto A , construir a reta m perpendicular ao segmento AO . Essa reta m é a tangente procurada.



Vamos explicitar a nomenclatura que será utilizada neste texto. Considere um triângulo ABC construído numa superfície esférica. Lembrar que na Geometria Esférica as “linhas retas” são representadas por circunferências máximas. Portanto, os lados do triângulo esférico AB , AC e BC são arcos contidos em circunferências máximas. Por meio de um exemplo, vamos precisar o significado de a , b , c , A , B e C .



Dois pontos A e B de uma circunferência máxima de centro O , que não são extremidades de um

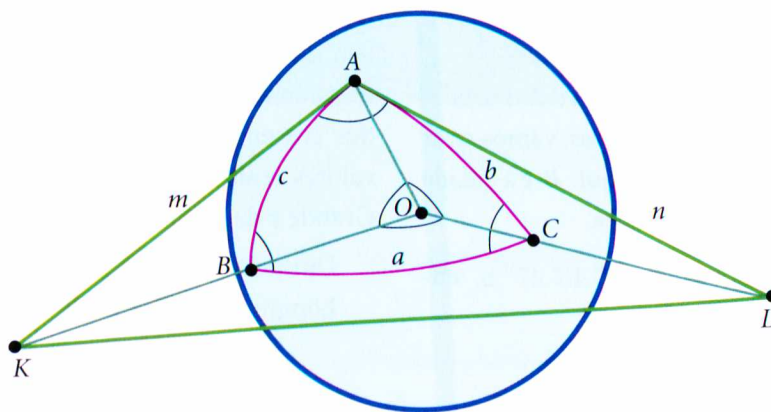
diâmetro, dividem a circunferência em dois arcos: um menor e o outro maior. A soma das medidas dos dois arcos é 360° . O ângulo AOB associado ao arco menor recebe o nome de ângulo central. A medida do arco menor é igual à medida do seu ângulo central correspondente. A medida do arco maior é 360° menos a medida do arco menor. O é o centro da esfera. Suponhamos que os ângulos centrais AOB , AOC e BOC medem, respectivamente, 67° , 77° e 92° . Portanto, os correspondentes arcos $c = AB$, $b = AC$ e $a = BC$ medirão também 67° , 77° e 92° . O ângulo entre as retas tangentes aos arcos AB e AC mede 98° e corresponde ao ângulo A do triângulo esférico ABC . De modo análogo, o ângulo en-

tre as retas tangentes aos arcos BC e BA no ponto B mede 75° e será indicado por B e aquele entre as tangentes aos arcos CB e CA no ponto C mede 66° e será indicado por C .

Observe que, no exemplo anterior, a soma das medidas dos ângulos do triângulo esférico ABC é maior do que 180° . Esse é um resultado da Geometria Esférica (ver [2] para uma demonstração) e mostra que as propriedades geométricas dos objetos situados numa superfície esférica diferem daquelas de objetos situados num plano euclidiano. Estamos tratando de uma geometria não euclidiana, a Geometria Esférica.

Demonstração do teorema dos cossenos na Geometria Esférica

Pelo ponto A tracemos as retas tangentes aos arcos AB e AC . Vamos nomeá-las de m e n . O ângulo formado por essas retas é o ângulo A . Seja K a intersecção da tangente m com a reta OB e L a intersecção da reta tangente n com a reta OC . Observe que, como AK e AL são tangentes aos arcos AB e AC , então os ângulos KAO e LAO são retos.



Apliquemos o teorema dos cossenos da trigonometria plana aos triângulos AKL e OKL :

$$KL^2 = AK^2 + AL^2 - 2.AK.AL.\cos A$$

$$KL^2 = OK^2 + OL^2 - 2.OK.OL.\cos a$$

Das duas igualdades, temos:

$$\begin{aligned} AK^2 + AL^2 - 2.AK.AL.\cos A &= \\ OK^2 + OL^2 - 2.OK.OL.\cos a &\quad (1) \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos KAO e LAO , teremos:

$$OK^2 = R^2 + AK^2 \quad (2)$$

$$\text{e } OL^2 = R^2 + AL^2 \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), teremos:

$$AK^2 + AL^2 - 2.AK.AL.\cos A = \\ R^2 + AK^2 + R^2 + AL^2 - 2.OK.OL.\cos a.$$

Cancelando os termos semelhantes, resulta:

$$- 2.AK.AL.\cos A = 2R^2 - 2.OK.OL.\cos a. \quad (4)$$

Aplicando relações trigonométricas aos triângulos retângulos KAO e LAO , teremos:

$AK = OK.\sin c$; $AL = OL.\sin b$; $R = OL.\cos b$ e $R = OK.\cos c$. Substituindo esses valores em (4):

$$- 2.OK.\sin c.OL.\sin b.\cos A =$$

$$2.OL.\cos b.OK.\cos c - 2.OK.OL.\cos a.$$

Donde

$$- 2.\sin c.\sin b.\cos A = 2.\cos b.\cos c - 2.\cos a.$$

Portanto,

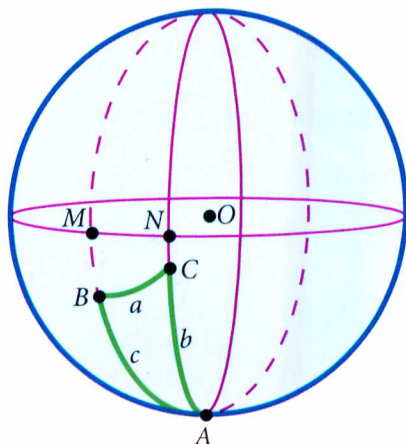
$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A,$$

o que demonstra o teorema.

De volta à questão proposta na Situação 4

Sejam B e C as cidades de Brasília e de Fortaleza. Para aplicar o teorema dos cossenos, vamos criar o triângulo ABC , onde A é o polo Sul, B é a cidade de Brasília e C a cidade de Fortaleza.

Como a latitude de Brasília é $15^\circ 46' 47''$ S, então: $c = 90^\circ - 15^\circ 46' 47'' = (74,22)^\circ$.



Como a latitude de Fortaleza é $3^\circ 43' 02''$ S,

$$b = 90^\circ - 3^\circ 43' 02'' = (86,28)^\circ.$$

O ângulo A é tanto o ângulo formado pelas tangentes aos arcos AB e AC no ponto A , como é o ângulo formado pelos planos BOA e COA . Nesse caso, é o ângulo MON .

Portanto, o ângulo A é igual à diferença (variação) entre as longitudes de B e C :

$$47^\circ 55' 47'' - 38^\circ 32' 35'' = 9^\circ 23' 12'' = \\ (9+23/60 + 12/3600)^\circ = (9,39)^\circ.$$

Aplicando o teorema dos cossenos, teremos:

$\cos a =$

$$\cos 86,28.\cos 74,22 + \sin 86,28.\sin 74,22.\cos 9,39.$$

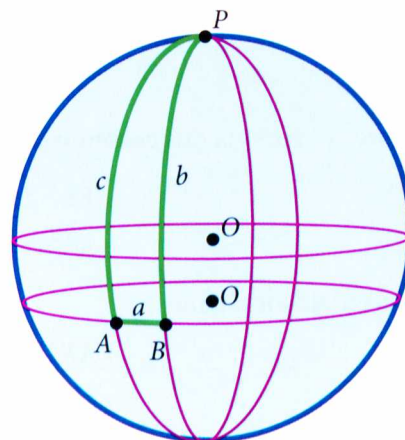
Portanto, $\cos a = 0,9651$.

Logo, $a \cong 15,18^\circ$. Como BC é um arco contido numa circunferência máxima, pela Situação 1, teremos que a distância entre A e B é $(15,18)^\circ$ multiplicado por $111,7$ km, ou seja, 1696 km.

Na Situação 3, calculamos apenas a distância entre Campo Grande e Vitória ao longo de um paralelo. Vamos calcular agora a menor distância entre essas duas cidades. Para isso, usaremos o teorema dos cossenos da Geometria Esférica e também os valores reais das latitudes e longitudes de Campo Grande e de Vitória, respectivamente, a saber:

Latitudes: $20^\circ 26' 34''$ S e $20^\circ 19' 10''$ S

Longitudes: $54^\circ 38' 47''$ W e $40^\circ 20' 16''$ W



Embora não pareça no desenho anterior, em virtude de a variação das longitudes ser pequena, o arco menor AB contido na circunferência máxima não coincide com o arco menor contido no paralelo:

$$20^{\circ} 26' 34'' = (20 + 26/60 + 34/3600)^{\circ} = (20,4428)^{\circ}$$

$$20^{\circ} 19' 10'' = (20 + 19/60 + 10/3600)^{\circ} = (20,3194)^{\circ}$$

Vamos criar o triângulo APB onde P é o polo. Temos:

$$b = 90^{\circ} + 20,4428^{\circ} = 110,4428^{\circ},$$

$$c = 90^{\circ} + 20,3194^{\circ} = 110,3194^{\circ}$$

$$A = 54^{\circ} 38' 47'' - 40^{\circ} 20' 16'' = 14^{\circ} 18' 31'' = (14 + 18/60 + 31/3600)^{\circ} = 14,3086^{\circ}.$$

Aplicando o teorema dos cossenos, teremos:

$\cos a =$

$$\cos 110,4428^{\circ} \cdot \cos 110,3194^{\circ} +$$

$$\sin 110,4428^{\circ} \cdot \sin 110,3194^{\circ} \cdot \cos 14,3086^{\circ} =$$

$$0,9727.$$

Donde, $a \approx (13,4092)^{\circ}$.

A menor distância entre A e B será

$$(13,4092) \cdot 111,7 \text{ km} = 1498 \text{ km}.$$

Lembramos que a distância obtida anteriormente ao longo do paralelo foi de 1594 km.

Com essas atividades, o aluno entra em contato com conceitos da Geometria Esférica, geralmente pouco explorados em sala de aula. Cálculos de distâncias diferentes da euclidiana, usualmente estudada na Educação Básica, podem ampliar a visão do aluno para o conhecimento de outras geometrias. O estudo da esfera relacionado com o globo terrestre permite estabelecer relações entre a disciplina de Matemática e a de Geografia, propiciando um trabalho interdisciplinar e contribuindo para a compreensão do mundo em que vivemos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALVES, SÉRGIO. *A geometria do globo terrestre*. In II Bienal da SBM, Minicurso 29, UFBA, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf>. Acesso em: 16 abril 2016.

[2] LIMA, ELON LAGES. *Ainda sobre o Teorema de Euler para poliedros convexos*. Revista do Professor de Matemática, n. 5, p. 1-7, 2º semestre de 1984.