Notas de Desenho Geométrico do Curso de SLC534
Desenho Geométrico e Geometria Descritiva

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

São Carlos - Agosto de 2011

Sumário

Capítulo 1

Construções Elementares

1.1 Introdução

Citando a introdução do Livro Construções Geométricas do Prof. Eduardo Wagner (Proj. IMPA/VITAE), as construções geométricas já haviam sido consideradas no século V a.C. .

A palavra *número* era usada somente para os inteiros e uma fração (ou número racional) era vista como a razão entre dois números inteiros.

A noção de número real estava ainda longe de ser concebida.

Nos problemas, as grandezas que apareciam, em vez de serem associadas a números, eram vistas como medidas de segmentos de reta.

Com isto, muitos problemas poderiam ser resolvidos geometricamente (mesmo que não se conhece o valor do mesmo do ponto de vista numérico), ou seja, *resolver* uma equação poderia estar associada a idéia de *construir* a solução.

Como motivação o autor considera o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.1 *Encontrar uma solução x da equação $ax = bc$, onde a, b, c são valores conhecidos (ou seja, medidas de segmentos de retas dados, com $a \neq 0$).*

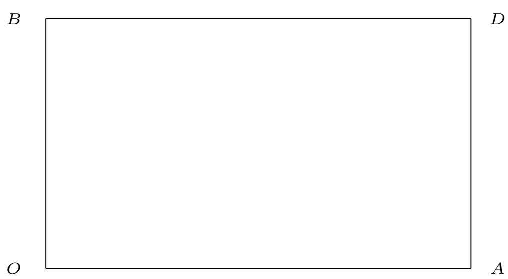
Resolução:

Um modo como essa equação poderia ser resolvida era encará-la da seguinte forma: tentar encontrar a altura, de comprimento $\underline{x}$, de um retângulo de base de comprimento $\underline{a}$ que tivesse a mesma área de um retângulo com altura de comprimento $\underline{b}$ e base de comprimento $\underline{c}$.

Para tanto agia-se da seguinte forma:

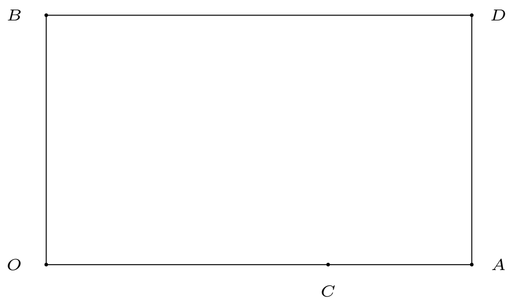
1^o: Constrói-se, geometricamente, o retângulo $\square OBDA$ (veja figura abaixo) de tal modo que

$$OA = a \quad \text{e} \quad OB = b.$$



2^o: Sobre o lado $\overline{OA}$ encontra-se o ponto C de tal modo que (veja figura abaixo)

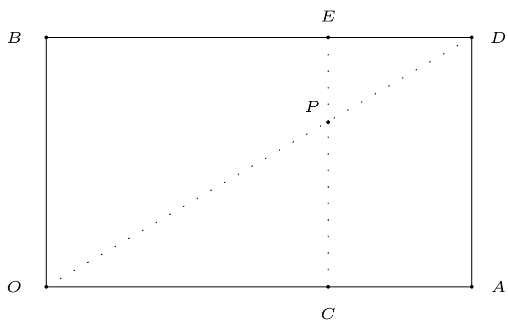
$$OC = c.$$



Observemos que caso $c > a$ então o ponto C estará no prolongamento do lado $\overline{OA}$.

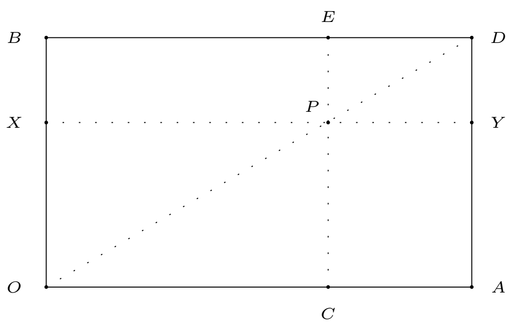
3^o: Traça-se a reta paralela a reta que contém lado $\overline{OB}$ que passa pelo ponto C.

Esta reta encontrará a diagonal (ou o prolongamento da mesma) $\overline{OD}$ do retângulo $\square OBDA$ no ponto P e também encontrará o lado $\overline{BD}$ do retângulo $\square OBDA$ no ponto E (veja figura abaixo).



4. Traça-se por P a reta paralela a reta que contém o lado $\overline{OA}$.

   Esta encontrará os lados $\overline{OB}$ e $\overline{AD}$, do retângulo $\square OADB$, nos pontos X e Y, respectivamente (veja figura abaixo).



5. A solução da nossa equação será

$$x = OX.$$

Para demonstrar isso observemos que:

1. Como, por construção, as retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas segue que os triângulos ΔODA, ΔOBD são congruentes (caso LL L comum); os triângulos ΔOPC, ΔOXP são congruentes (caso LL L comum) e os triângulos ΔPDY, ΔPED também são congruentes (caso LL L comum).

   Portanto, dois a dois, eles têm mesma área.

2. Temos que
$$\text{Área}(\Delta OBD) = \text{Área}(\Delta ODA).$$
Assim
$$\begin{aligned}\text{Área}(\Delta OBD) &= \text{Área}(\Delta OXP) + \text{Área}(\Box XBEP) + Area(\Delta PED)\\ \text{Área}(\Delta ODA) &= \text{Área}(\Delta OPC) + \text{Área}(\Box CPYA) + \text{Área}(\Delta PDY).\end{aligned}$$
Mas
$$\begin{aligned}\text{Área}(\Delta OPC) &= \text{Área}(\Delta OXP);\\ \text{Área}(\Delta PDY) &= \text{Área}(\Delta PED)\end{aligned}$$
logo
$$\text{Área}(\Box XBEP) = \text{Área}(\Box CPYA).$$
Logo os retângulos $\Box XBEP$ e $\Box CPYA$ têm mesma área.

3. Temos também que
$$\begin{aligned}\text{Área}(\Box OBEC) &= \text{Área}(\Delta OPC) + \text{Área}(\Delta OXP) + Area(\Box XBEP)\\ &\overset{[\text{Área}(\Delta OPC)=\text{Área}(\Delta OXP)]}{=} 2\text{Área}(\Delta OPC) + \text{Área}(\Box XBEP)\\ &\overset{[\text{Área}(\Box XBEP)=\text{Área}(\Box CPYA)]}{=} 2\text{Área}(\Delta OCP) + \text{Área}(\Box CPYA)\\ &\overset{[\text{Área}(\Delta OPC)=\text{Área}(\Delta OXP)]}{=} \text{Área}(\Delta OCP) + \text{Área}(\Delta OXP) + \text{Área}(\Box CPYA)\\ &= \text{Área}(\Box OXYA).\end{aligned}$$
Logo os retângulos $\Box OBEC$ e $\Box OXYA$ têm mesma área, ou seja,
$$OC.OB = OA.OX \quad \text{isto é,} \quad bc = ax.$$
Assim encontramos, geometricamente, a solução $\underline{x}$ para nossa equação!

1.2 Perpendiculares

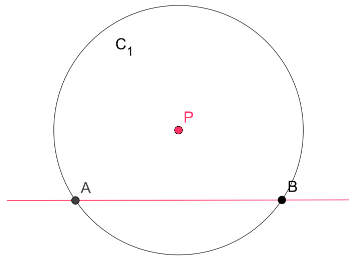
Problema 1.2.1 *Dados uma reta $\underline{r}$ e um ponto $\underline{P}$ encontrar, geometricamente, a reta perpendicular à reta $\underline{r}$ que contém pelo ponto $\underline{P}$.*

1.2.1 O ponto $\underline{P}$ não pertence à reta $\underline{r}$:

Como encontrar, geometricamente, a reta perpendicular a uma reta $\underline{r}$ dada por um ponto $\underline{P}$ que não pertence a reta $\underline{r}$?

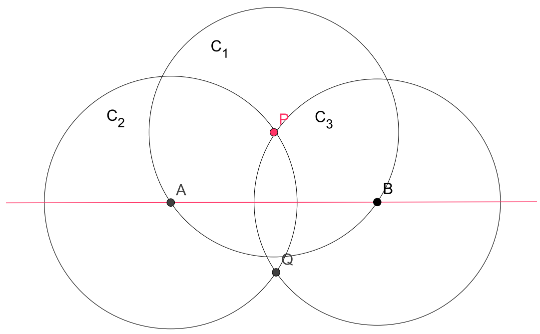
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso no ponto $\underline{P}$, com uma abertura maior que a distância do ponto $\underline{P}$ à reta $\underline{r}$, tracemos uma circunferência, $\mathcal{C}_1$, que interceptará a reta r nos pontos, distintos, A e B (ver figura abaixo);

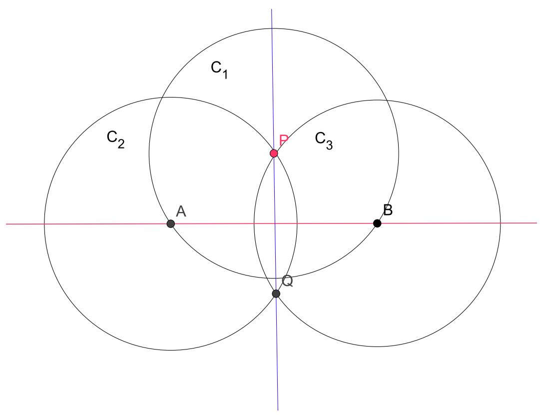


2. Centrando o compasso no ponto A, com a abertura AP, tracemos a circunferências, $\mathcal{C}_2$ e centrando o compasso no ponto B, com a abertura AP, tracemos a circunferências $\mathcal{C}_3$.

   Com isto temos que as circunferências $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ se interceptam nos pontos P e Q (ver figura abaixo);



3. A reta que contém os pontos P e Q é a reta perpendicular a reta r e que contém o ponto P (ver figura abaixo).



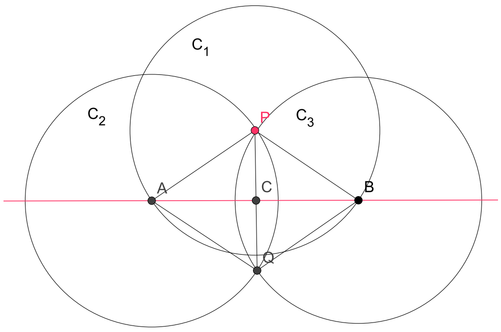
Para mostrar que isto é verdade, seja C o ponto de intersecção da reta r com a reta que contém P e Q.

Observemos que (veja figura abaixo):

$$\Delta PBQ \equiv \Delta PQA \ (LLL \text{ comum}) \Rightarrow \widehat{CPB} \equiv \widehat{APC}.$$

$$\Delta APC \equiv \Delta CPB \ (LAL \text{ comum}) \Rightarrow AC = CB \text{ e } \widehat{PCA} \equiv \widehat{BCP}.$$

$$\text{Como } \widehat{PCA} + \widehat{BCP} = \pi \quad \overset{\widehat{PCA} \equiv \widehat{BCP}}{\Rightarrow} \quad \widehat{PCA} = \frac{\pi}{2}.$$



Portanto a retas r e a reta que contém os pontos P e Q são perpendiculares, como queríamos mostrar.

Observação 1.2.1 *Na verdade acabamos de provar que as diagonais do losango $\Diamond APBQ$ cruzam-se perpendicularmente, pois*

$$\frac{\pi}{2} = \widehat{PCA} = \widehat{BCP} = \widehat{ACQ} = \widehat{QCB},$$

e nos seus respectivos pontos médios, pois ,

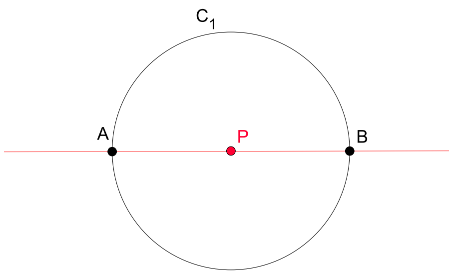
$$AC = CB \quad e \quad CP \equiv QC.$$

1.2.2 O ponto P pertence à reta r:

Como encontrar, geometricamente, a reta perpendicular a uma reta r dada por um ponto P que pertence a reta r?

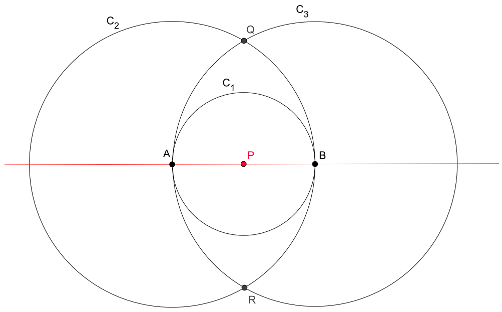
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso no ponto P, com uma abertura qualquer tracemos uma circunferência, $\mathcal{C}_1$, que intercepta a reta r nos pontos A e B;

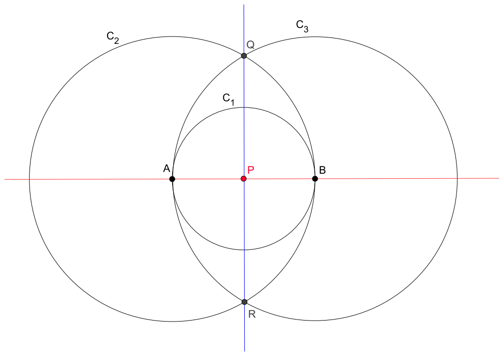


2. Centrando o compasso no ponto A, com a abertura AB (poderíamos ter escolhido qualquer abertura maior que AP), tracemos a circunferência $\mathcal{C}_2$ e centrando o compasso no ponto B, com a abertura AB (ou a mesma escolhida anteriormente), tracemos a circunferência $\mathcal{C}_3$.

   Com isto temos que as circunferência $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ se interceptam no ponto Q (e no ponto R);

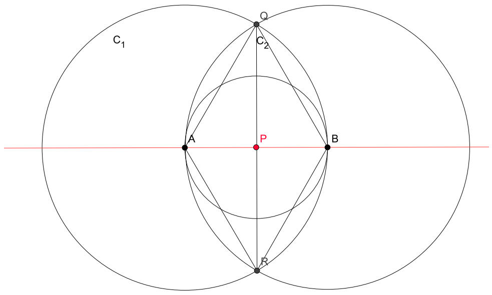


3. A reta que contém os pontos P e Q é a reta perpendicular a reta r e que passa pelo ponto P (veja figura abaixo).



Para mostrarmos que isto é verdade, observemos que o quadrilátero $\lozenge AQBR$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência $\mathcal{C}_2$ ou $\mathcal{C}_3$ - ver figura abaixo).

Logo suas diagonais cruzam-se perpendicularmente, isto é, a reta r e a reta que contém os pontos Q e R são perpendiculares e a segunda contém o ponto P (que será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e do segmento $\overline{RQ}$).



$\square$

1.3 Mediatriz

Definição 1.3.1 *Se A e B são pontos distintos.*

*A **Mediatriz** do segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes do ponto A e do pomto B.*

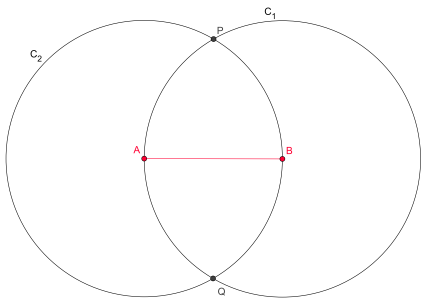
Problema 1.3.1 *Encontrar, geometricamente, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.*

Resolução:

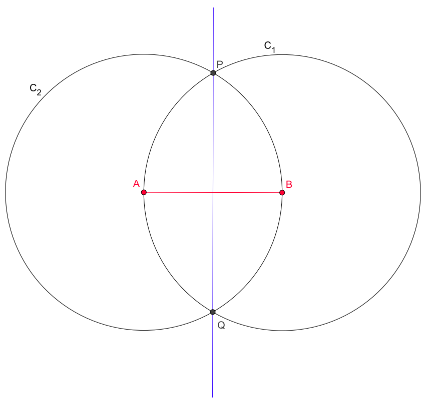
Uma construção possível seria:

1. Centrando o compasso nos pontos A, com a abertura AB, tracemos a circunferência $\mathcal{C}_1$ e centrando o compasso nos pontos B, com a abertura AB (bastaria ser maior que $\dfrac{AB}{2}$), tracemos a circunferência $\mathcal{C}_2$.

   As circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se interceptarão nos pontos P e Q (ver figura abaixo);



2. Afirmamos que a reta que contém P e Q é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



Mostremos que a afirmação acima é verdadeira.

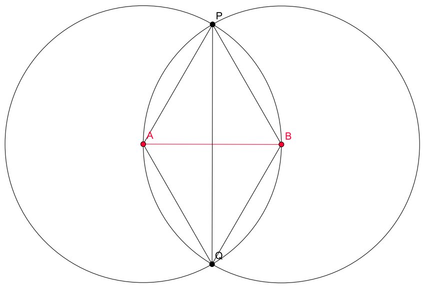
Para isto observemos que o quadrilátero $\Diamond APBQ$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$, a saber AP - veja figura abaixo).

Logo suas diagonais cruzam-se perpendicularmente nos seus pontos médios, isto é, os pontos P e Q estão na mediatriz.

Falta mostrar que todo ponto da reta que contém os pontos P e Q são equidistantes dos pontos A e B.

Isso será deixado como exercício para o leitor (a seguir)

Exercício 1.3.1 *Mostrar a afirmação acima.*



1.4 Paralelas

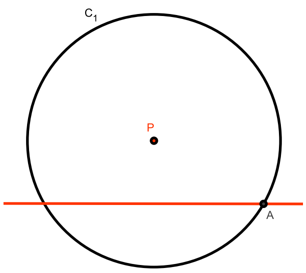
Problema 1.4.1 *Encontrar, geometricamente, a reta paralela a uma reta r dada que passa pelo ponto P, que não pertence à reta r.*

Resolução:

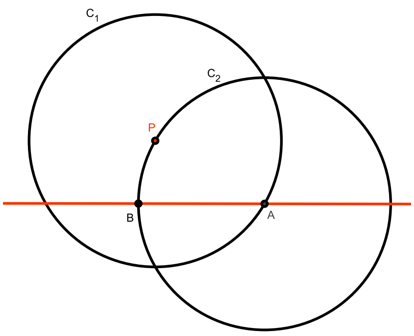
Daremos três possibilidades para a construção:

1.4.1 1.a construção da paralela

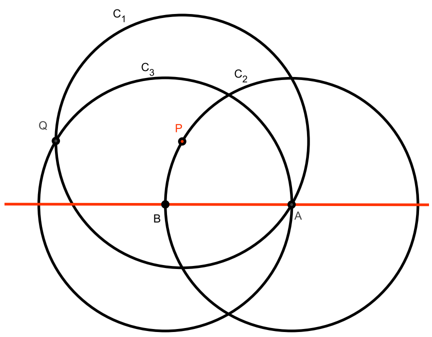
1. Centrando o compasso no ponto P escolha uma abertura PA de tal modo que a circunferência $\mathcal{C}_1$ obtida intercepte a reta r em um ponto A (no caso de obter dois pontos; escolha um deles);



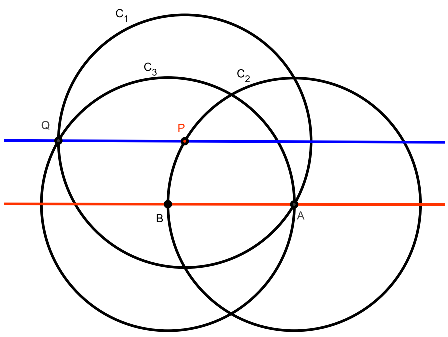
2. Centrando o compasso no ponto A, com a abertura anterior, tracemos a circunferência $\mathcal{C}_2$ que intercepterá a reta r em um ponto B (na verdade obteremos dois pontos; escolha um deles);



3. Centrando o compasso no ponto B, com a abertura anterior, tracemos a circunferência $\mathcal{C}_3$ que intercepterá a circunferência $\mathcal{C}_1$ em um ponto Q que está no mesmo semi-plano determinado pela reta r que contém o ponto P (na verdade também interceptará a reta r no ponto A);



4. Afirmamos que a reta que contém os pontos P e Q é uma reta paralela a reta r (e contém o ponto P).



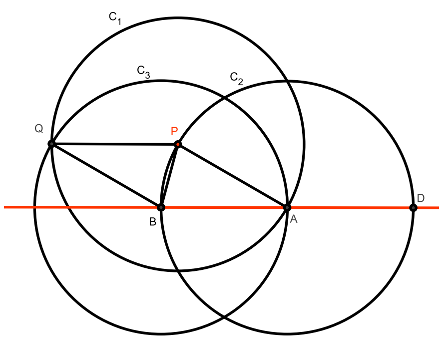
Mostremos que a afirmação acima é verdadeira.

Para isto, observemos que quadrilátero $\lozenge PABQ$ é um losango (pois seus lados têm mesma medida que é igual ao raio da circunferência - ver figura abaixo).

Logo seus lados adjacentes são paralelos o que mostra que a reta r e a reta que contém os pontos P e Q são paralelas.

Observação 1.4.1 *Uma outra demonstração seria:*

Consideremos D o outro de intersecção da reta r com a circunferência $\mathcal{C}_2$ (veja figura abaixo).



Observemos que o triângulo ΔPAB é isósceles (pois os lados $\overline{PA}$ e $\overline{AB}$ têm mesma medida e são iguais a medida do raio da circunferência $\mathcal{C}_2$).

Assim $\widehat{BPA} \equiv \widehat{ABP}$.
Os triângulos ΔPAB *e* ΔPBQ *são congruentes (LL L comum) logo* $\widehat{BPA} = \widehat{QPB}$.
Do triângulo ΔPAB, *temos que*

$$\widehat{BPA} + \widehat{ABP} + \widehat{PAB} = \pi \quad \overset{[\widehat{BPA}=\widehat{ABP}]}{\Rightarrow} \quad 2\,\widehat{BPA} + \widehat{PAB} = \pi. \tag{1.1}$$

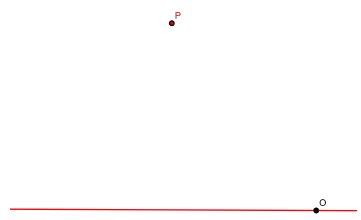
Por outro lado,

$$\widehat{DAP} + \widehat{PAB} = \pi \quad \overset{(1.1)}{\Rightarrow} \quad \widehat{DAP} = 2\,\widehat{BPA} \overset{[\widehat{BPA}=\widehat{QPB}]}{=} \widehat{BPA} + \widehat{QPB} = \widehat{QPA}.$$

Conclusão: $\widehat{DAP} = \widehat{QPA}$.
Portanto as retas r *e que contém os pontos* P *e* Q *são paralelas (pois a reta que contém os pontos* A *e* P *tem ângulos alternos internos iguais).*

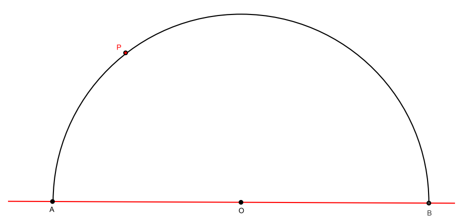
1.4.2 2.a construção da paralela

1. Escolha um ponto O sobre a reta r que não esteja na reta perpendicular a reta r que contém o ponto P (veja figura abaixo);

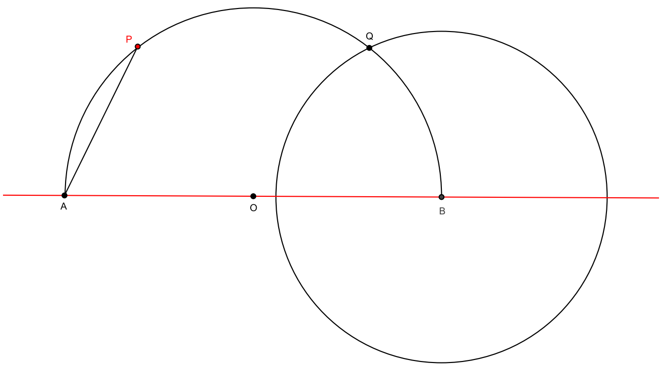


2. Centrando o compasso no ponto O tracemos a semi-circunferência, $\mathcal{C}_1$, que passa pelo ponto P (ou seja seu raio será OP) e está contida no semi-plano determinado pela reta r que contém P.

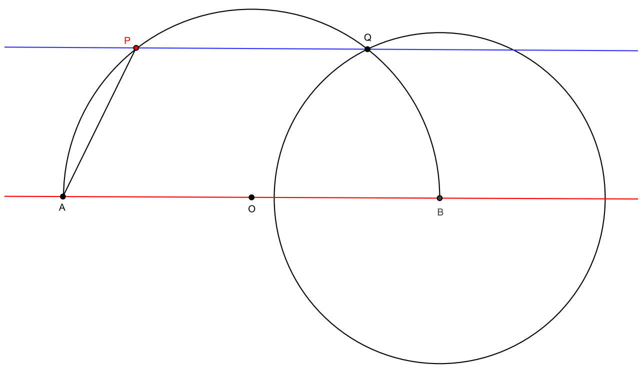
   Ela intercepta a reta r nos pontos A e B (ver figura abixo);



3. Centrando o compasso no ponto B tracemos a circunferência, $\mathcal{C}_2$, com abertuta igual a AP, que intercepterá a semi-circunferência $\mathcal{C}_1$ em um ponto Q (figura abaixo);

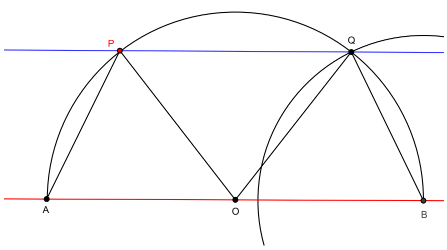


4. A reta que contém os pontos P e Q é uma reta paralela a reta r (e contém o ponto P) (figura abaixo).



Mostremos que realmente a reta encontrada é a reta paralela à reta r que contém o ponto P. Observemos que os triângulos ΔOAP, ΔOQB e ΔOPQ são isóceles logo (figura abaixo)

$$\widehat{OAP} \equiv \widehat{APO}, \quad \widehat{QBO} \equiv \widehat{OQB} \quad \text{e} \quad \widehat{OPQ} \equiv \widehat{PQO}.$$



Além disso os triângulos ΔOAP, ΔOQB são congruentes (caso LLL), logo $\widehat{POA} = \widehat{BOQ}$. Do triângulo ΔOPQ temos

$$\pi = \widehat{OPQ} + \widehat{QOP} + \widehat{PQO} = 2\widehat{OPQ} + \widehat{QOP}.$$

Mas

$$\pi = \widehat{POA} + \widehat{QOP} + \widehat{BOQ} = 2\widehat{POA} + \widehat{QOP}.$$

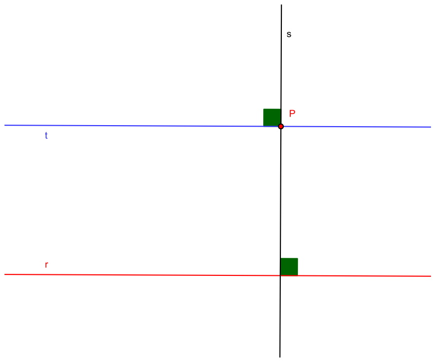
Logo $\widehat{POA} = \widehat{OPQ}$, mostrando que as retas $\underline{r}$ e a que contém os pontos P e Q são paralelas (são ângulos alternos internos).

$\square$

1.4.3 3.a construção da paralela

1. Tracemos a reta perpendicular, $\underline{s}$, a reta $\underline{r}$ que contém o ponto P (como na seção (1.2));
2. Tracemos a reta perpendicular, $\underline{t}$, a reta s que contém o ponto P (como na seção (1.2));
4. A reta $\underline{t}$ que contém os pontos P é a reta paralela a reta $\underline{r}$ (e contém o ponto P).

   A figura abaixo ilustra a situação.



A demonstração, neste caso, é muito simples visto que a reta $\underline{t}$ (que contém o ponto P) e a reta $\underline{r}$ são perpendiculares a reta $\underline{s}$ logo devem ser paralelas.

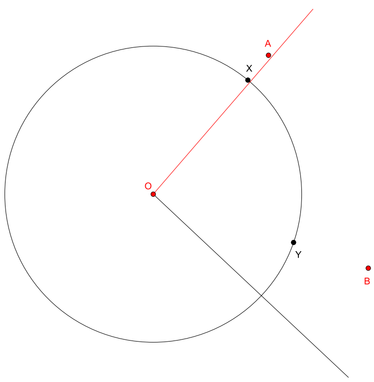
1.5 Bissetriz

Lembremos que a **Bissetriz** de um ângulo $\widehat{BOA}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo dado.

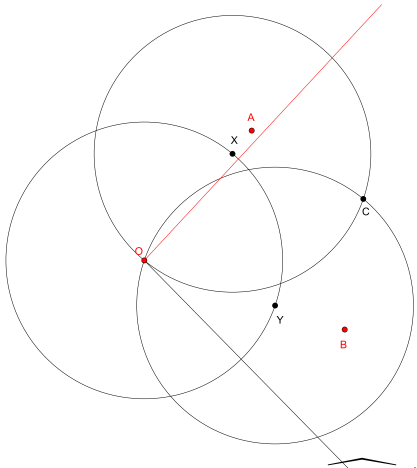
Como traçar a reta bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$?

Uma construção possível seria:

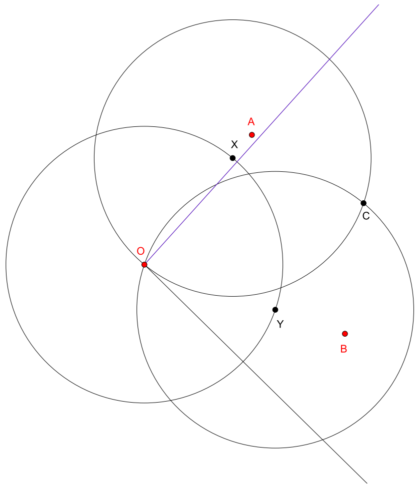
1. Centrando o compasso no ponto O, com uma abertura qualquer, tracemos uma circunferência que intercepta os lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo nos pontos X e Y (figura abaixo);



2. Centrando o compasso nos pontos X e Y, com abertura anterior, tracemos as circunferências que se interceptam no ponto C (e no ponto O) (figura abaixo);

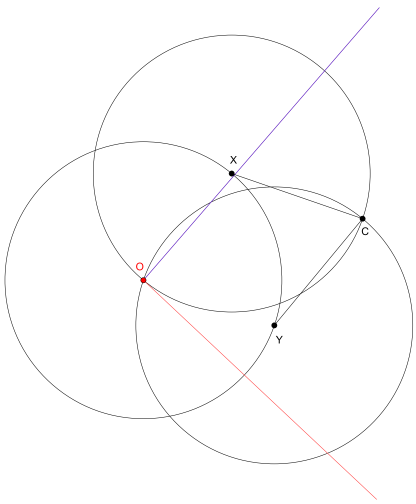


3. A semi-reta que contém O e C é a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$ (figura abaixo).

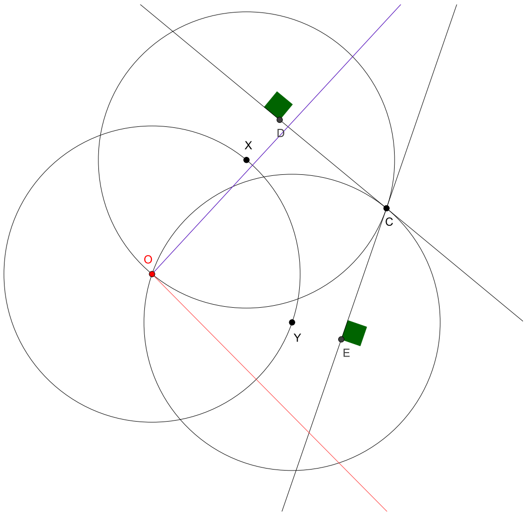


A seguir exibiremos a demonstração que a construção acima nos fornece, realmente, a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.

Observemos que os triângulos ΔOXC e ΔOCY são congruentes (LLL comum) assim $\widehat{COX} \equiv \widehat{COY}$ (figura abaixo).



Consideremos as retas perpendiculares aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ que passam pelo ponto C, que interceptarão os mesmos nos pontos D e E, respectivamente (figura abaixo).



Os triângulos ΔODC e ΔOCE são congruentes (L comum AA oposto ao lado comum, que é reto)) logo $CD \equiv CE$ mostrando que o ponto C está na bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.

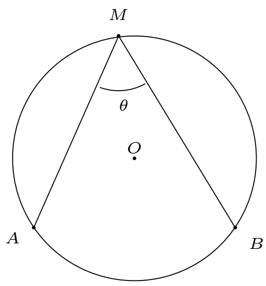
Falta mostrar que todo ponto da semi-reta que contém os pontos O e C é equidistante dos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do ângulo $\widehat{BOA}$. Isso será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

□

Exercício 1.5.1 *Mostre que a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{BOA}$.*

1.6 Arco Capaz

Consideremos os pontos A e B, distintos, de uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto O.



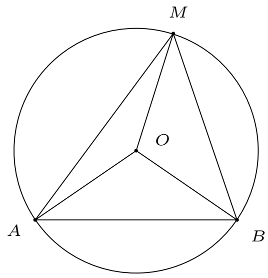
Afirmamos que para todo ponto M sobre um dos arcos da circunferência $\mathcal{C}$ determinados pelos pontos A e B o ângulo $\theta \doteq \widehat{AMB}$ é constante.

De fato, observemos que (veja figura abaixo):

$$\begin{aligned}
&\Delta OAM \text{ é um triângulo isóceles } \Rightarrow \alpha \doteq \widehat{OAM} = \widehat{AMO}\\
&\Delta AOB \text{ é um triângulo isóceles } \Rightarrow \beta \doteq \widehat{BAO} = \widehat{OBA}\\
&\Delta BOM \text{ é um triângulo isóceles } \Rightarrow \gamma \doteq \widehat{MBO} = \widehat{OMB}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\theta = \widehat{AMO} + \widehat{OMB} = \alpha + \gamma.$$



Do triângulo ΔAOB temos que

$$\pi = \widehat{BAO} + \widehat{AOB} + \widehat{OBA} = 2\beta + \widehat{AOB} \tag{1.2}$$

Do triângulo ΔAMB temos que

$$\begin{aligned}\pi &= \widehat{AMB} + \widehat{MBA} + \widehat{BAM} = (\alpha+\gamma) + (\gamma+\beta) + (\beta+\alpha)\\ &= 2[(\alpha+\gamma)+\beta] \overset{[\alpha+\gamma=\theta]}{=} 2\theta + 2\beta\end{aligned} \tag{1.3}$$

Comparando (1.2) com (1.3) teremos que

$$2\beta + \widehat{AOB} = \pi = 2\theta + 2\beta,$$

ou seja, $2\theta = \widehat{AOB}$ o que implicará

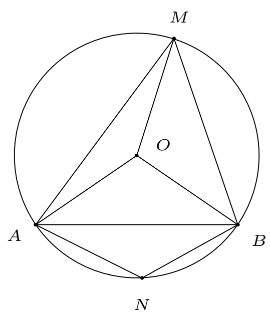
$$\theta = \frac{\widehat{AOB}}{2},$$

, ou seja, o ângulo θ será constante, como queríamos demonstrar.

Definição 1.6.1 *O arco $A\overset{\frown}{M}B$ será denominado* **<u>arco capaz do ângulo $\theta = \widehat{AMB}$</u>** *sobre o segmento $\overline{AB}$.*

Observação 1.6.1

1. *Podemos concluir que um observador que anda sobre o arco determinado pelos pontos A e B da circunferência $\mathcal{C}$ (o arco capaz) vê o segmento $\overline{AB}$ sempre sob um mesmo ângulo (o ângulo θ).*
2. *Se um ponto N está sobre o outro arco da circunferência $\mathcal{C}$ determinado pelos pontos A e B então o ângulo $\widehat{BNA}$ também será constante e, além disso, será igual a $\pi - \theta$.*

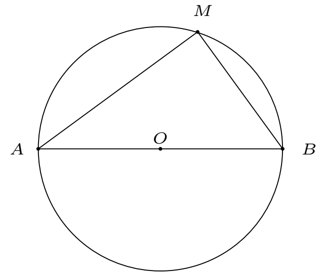


De fato, sabemos que o ângulo $\widehat{AOB} = 2\theta$ e que o ângulo $2\,\widehat{BNA}$ é igual ao suplementar do ângulo $\widehat{AOB}$ (pelo arco capaz $A\overset{\frown}{N}B$), ou seja,

$$2\,\widehat{BNA} = 2\pi - 2\theta, \qquad \textit{ou ainda} \qquad \widehat{BNA} = \pi - \theta.$$

3. *Um caso particular importante é quando o segmento $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência. Neste caso temos que o ângulo $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, o triângulo ΔAMB é retângulo no vértice M.*

   Com isto acabamos de demonstrar que uma triângulo que tenha como um de seus lados o diâmetro de uma circunferência e o outro vértice sobre um dos arcos da semi-circunferência deverá ser um triângulo retângulo e o ângulo reto corresponderá ao oposto ao lado que é o diâmetro da circinferência (na figura abaixo o ângulo $\widehat{M}$).

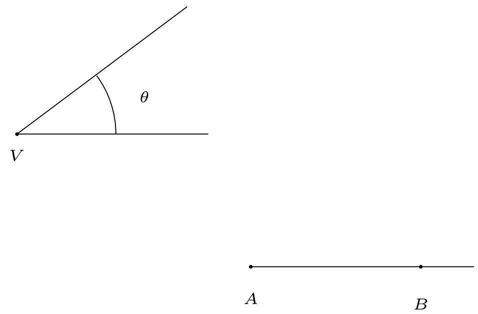


4. *Devido ao fato acima, uma semi-circunferência será chamada de* **arco capaz do ângulo** $\dfrac{\pi}{2}$.

Nosso objetivo é construir, geometricamente, o arco capaz de um ângulo dado.
Para isto precisamos saber como transportar, geometricamente, ângulos.

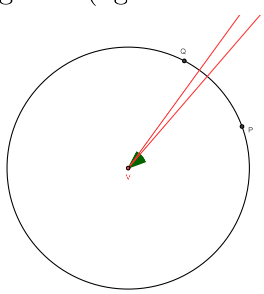
1.6.1 Transporte de ângulos

Consideremos um ângulo θ com vértice em V e dois pontos distintos A, B dados.
Queremos encontrar um ponto X de tal modo que o $\widehat{BAX} = \theta$.

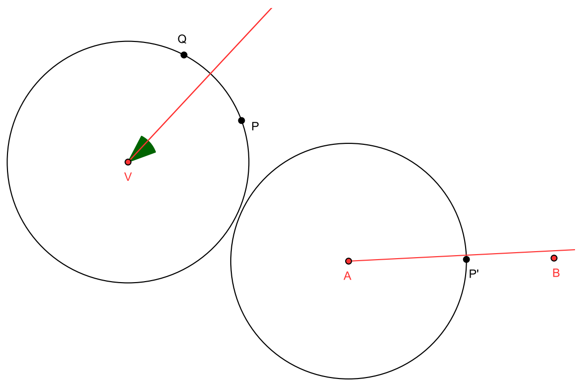


Neste caso agiremos da seguinte forma:

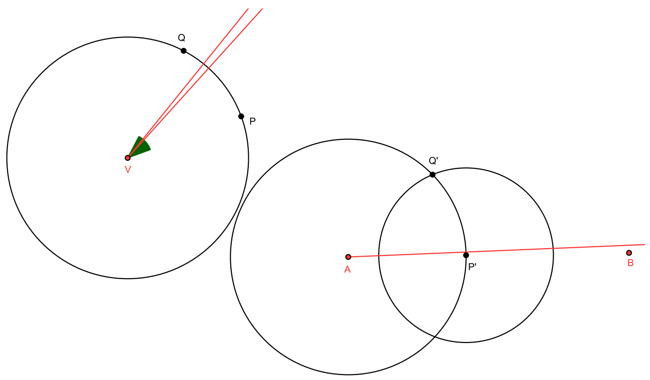
1. Traçamos uma circunferência $\mathcal{C}$ centrada no ponto V com raio qualquer, que determinará os pontos P e Q sobre os lados do ângulo θ (figura abaixo);



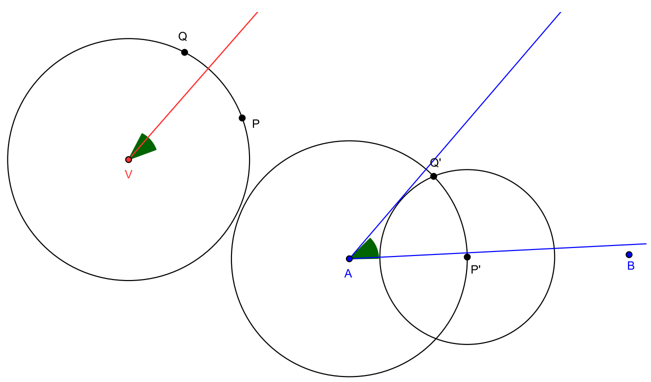
2. Traçamos uma circunferência $\mathcal{C}\,'$ centrada no ponto A com o mesmo raio da circunferência $\mathcal{C}$ do item 1., que determinará o ponto P' sobre a semi-reta determinada pelos pontos A e B que tem como extremo o ponto A (figura abaixo);



3. Traçamos por B uma circunferência centrada no ponto P' com o raio igual a PQ que interceptará a circunferência $\mathcal{C}\,'$ do item 2. no ponto Q' (na verdade temos um outro ponto que poderia ser escolhido) (figura abaixo).



4. Com isto afirmamos que $\widehat{P'AQ'} = \widehat{PVQ} = \theta$, ou seja, transportamos, geometricamente, o ângulo θ.

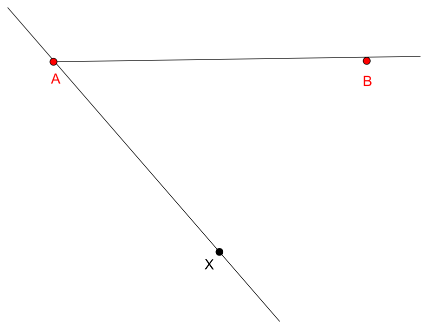


Para mostrar isto, observemos que, por construção, os triângulos ΔPVQ e $\Delta P'AQ'$ são conguentes (caso LLL), em particular, teremos $\widehat{P'AQ'} = \widehat{PVQ}$, com queríamos demonstrar.

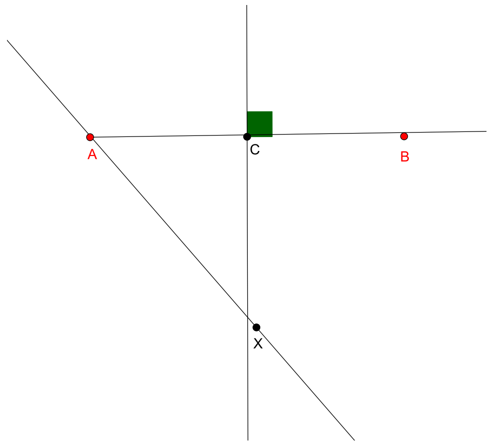
1.6.2 Construção do arco capaz

A seguir faremos a construção do arco capaz do ângulo θ associado ao segmento $\overline{AB}$ dados.

1. Suponhamos que o ponto X seja de tal modo que $\widehat{XAB} = \theta$ (aqui usamos o transporte do ângulo θ - veja figura abaixo).

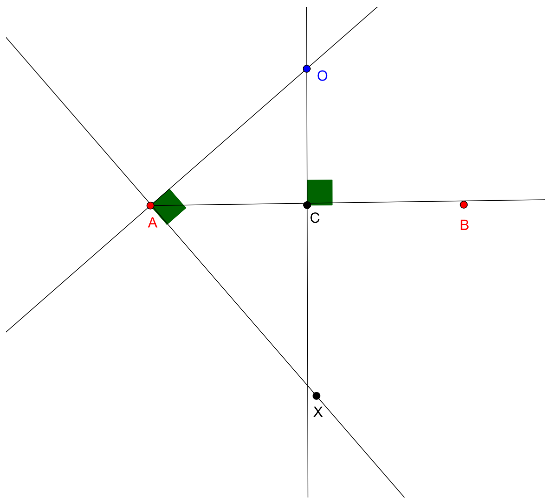


2. Tracemos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ que encontra o segmento $\overline{AB}$ no seu ponto médio C (veja figura abaixo).

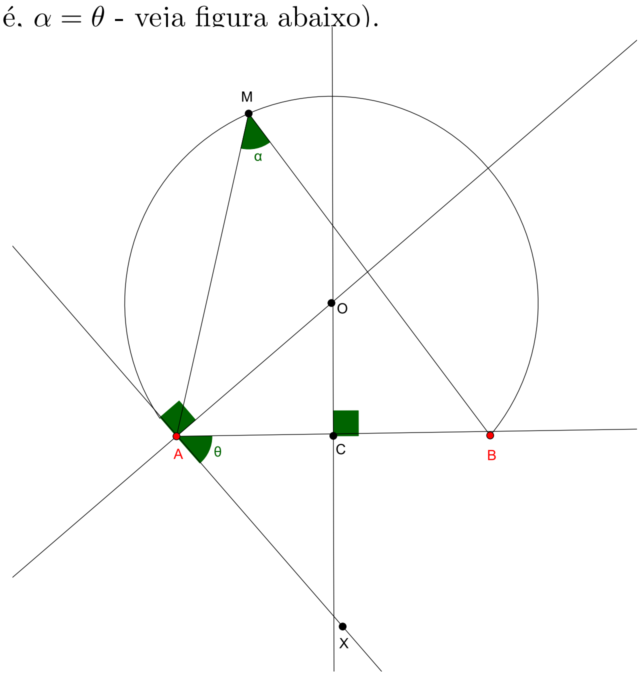


3. Tracemos a reta perpendicular à reta que contém os pontos A e X pelo ponto A.

   Esta encontrará a mediatriz do item 2. no ponto O que afirmamos ser o centro do arco capaz do segmento $\overline{AB}$ (veja figura abaixo).

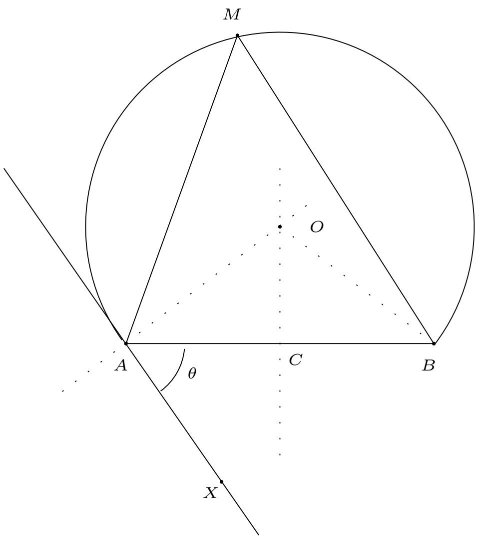


4. O arco capaz do ângulo θ associado ao segmento $\overline{AB}$ será o arco da circunferência de centro em O e raio $\overline{OA}$ situado no semi-plano oposto ao ponto X relativamente à reta que contém os pontos A e B (isto é, $\alpha = \theta$ - veja figura abaixo).



Mostremos que realmente $\alpha = \theta$, ou seja, o arco de circunferência obtido acima é o arco capaz do ângulo θ associado ao segmento $\overline{AB}$.

Para isto, observemos que os triângulos ΔAOC e ΔBCO são congruentes (caso LL L comum - veja figura abaixo).



Logo

$$\widehat{AOC} = \widehat{COB}, \quad \text{ou seja,} \quad \widehat{AOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} \overset{[\text{arco capaz}]}{=} \widehat{AMB} \tag{1.4}$$

Do triângulo ΔAOC temos que

$$\pi = \widehat{OCA} + \widehat{CAO} + \widehat{AOC} \overset{[\widehat{OCA}=\frac{\pi}{2}]}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \widehat{AOC},$$

isto é,

$$\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CAO}. \tag{1.5}$$

No ponto A temos que

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \widehat{XAC} \overset{[\widehat{XAC}=\theta]}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{CAO} + \theta, \quad \text{isto é,} \quad \frac{\pi}{2} - \widehat{CAO} = \theta. \tag{1.6}$$

Logo de (1.5) e (1.6) temos que $\widehat{AOC} = \theta$.

Portanto $\overbrace{\widehat{AMB}}^{=\alpha} \overset{(1.4)}{=} \widehat{AOC} = \theta$, ou seja, $\alpha = \theta$, ou ainda, $A\overset{\frown}{M}B$ arco capaz do ângulo θ sobre o segmente $\overline{AB}$, como queríamos demonstrar.

1.7 Divisão de um Segmento em Partes Iguais

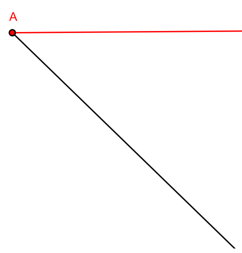
Sejam A, B dois pontos distintos.

Apresentaremos, a seguir, um método muito simples de dividir um segmento $\overline{AB}$ dado em $\underline{n}$ partes iguais, onde $n \in \mathbb{N}$.

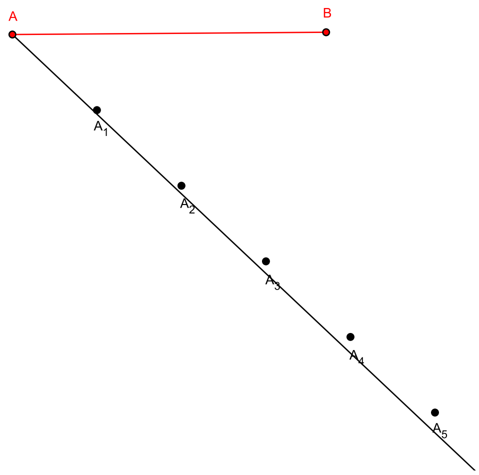
Para ilustrar, consideraremos o caso em que $n = 5$, ou seja, dividiremos o segmento $\overline{AB}$ em 5 segmentos justapostos onde todos estes têm mesmo comprimento.

Agimos da seguinte forma:

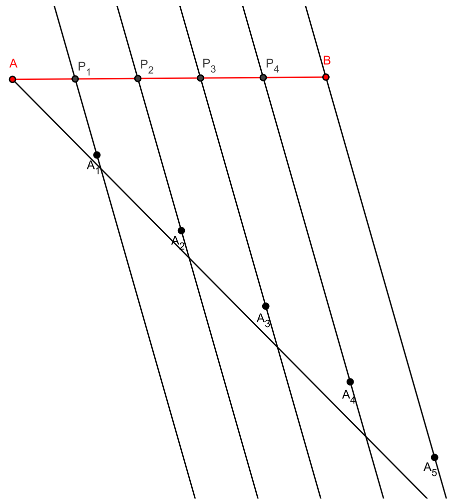
1. Tracemos uma semireta qualquer com extremo no ponto A, distinta da que contém o ponto B (veja figura abaixo);



2. Sobre esta semireta construímos, com uso do compasso, 5 segmentos justapostos, de mesmo comprimento, que denominaremos por: $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$ (veja figura abaixo);



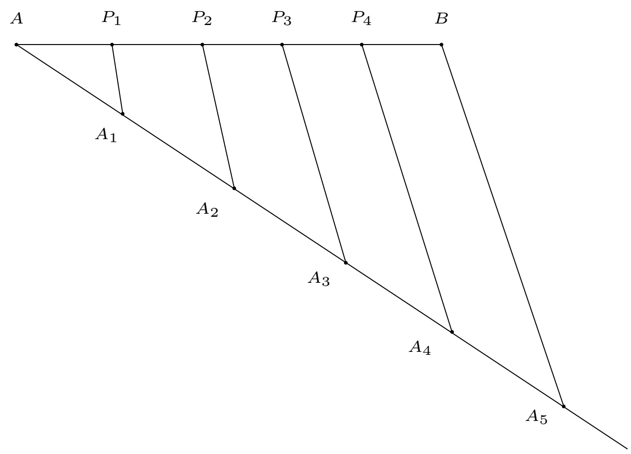
3. Tracemos as retas paralelas à reta que contém os pontos B e A_5 pelos pontos A_1, A_2, A_3 e A_4, que encontrarão o segmento de reta $\overline{AB}$ nos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 (veja figura abaixo);



4. Afirmamos que os segmentos $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4B}$ têm mesmo comprimento e assim dividem o segmento $\overline{AB}$ em 5 partes iguais.

Mostremos que isto realmente é verdade.

Para isto, observemos que os triângulos ΔAP_1A_1 e ΔAP_2A_2 são semelhantes, pois à reta que contém os pontos P_1 e A_1 é paralela à reta que contém os pontos P_2 e A_2 (caso AAA - veja figura abaixo).



Logo, pelo Teorema de Thales, temos que a razão entre os comprimentos de lados correspondentes dos triângulos acima deverão ser iguais, em particular, teremos:

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{AA_1}{AA_2} \overset{AA_2=2.AA_1}{=} \frac{AA_1}{2.AA_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow AP_2 = 2AP_1 \Rightarrow P_1P_2 = AP_2 - AP_1 = 2AP_1 - AP_1 = AP_1,$$

portanto

$$P_1P_2 = AP_1. \tag{1.7}$$

De modo semelhante, os triângulos ΔAP_1A_1 e ΔAP_3A_3 são semelhantes, pois à reta que contém os pontos P_1 e A_1 é paralela à reta que contém os pontos P_3 e A_3 (caso AAA).

Novamente, pelo Teorema de Thales, teremos que a razão entre o comprimento de lados correspondentes dos triângulos acima deverão ser iguais, em particular, teremos:

$$\frac{AP_1}{AP_3} = \frac{AA_1}{AA_3} \overset{AA_3=3.AA_1}{=} \frac{AA_1}{3.AA_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow AP_3 = 3.AP_1$$
$$\Rightarrow P_2P_3 = AP_3 - AP_1 - P_1P_2 \overset{(1.7)}{=} 3AP_1 - AP_1 - AP_1 = AP_1,$$

logo

$$P_2P_3 = AP_1$$

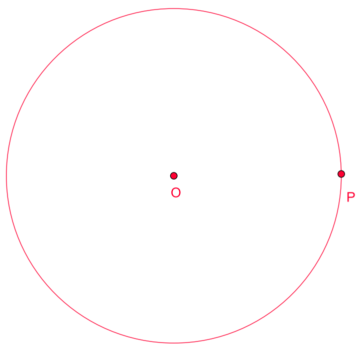
e assim por diante.

Com isto obtemos a divisão do semgento $\overline{AB}$ em 5 segmentos justapostos, sendo que todos estes têm o mesmo comprimento.

1.8 Traçado de Tangentes a uma Circunferência

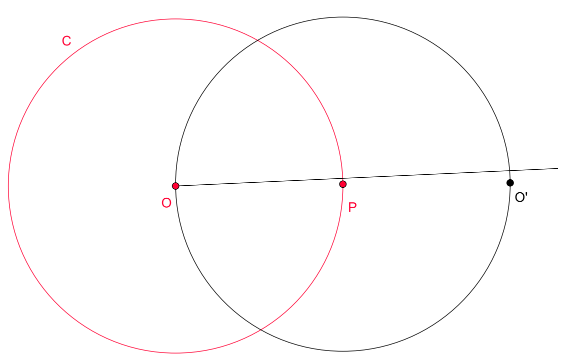
1.8.1 Reta tangente a uma circunferência por um ponto da mesma

A primeira situação que consideraremos é de encontrar, geometricamente, a reta tangente a uma circunferência $\mathcal{C}$, de centro em O, que contém um ponto P (distinto do ponto O - veja figura abaixo).

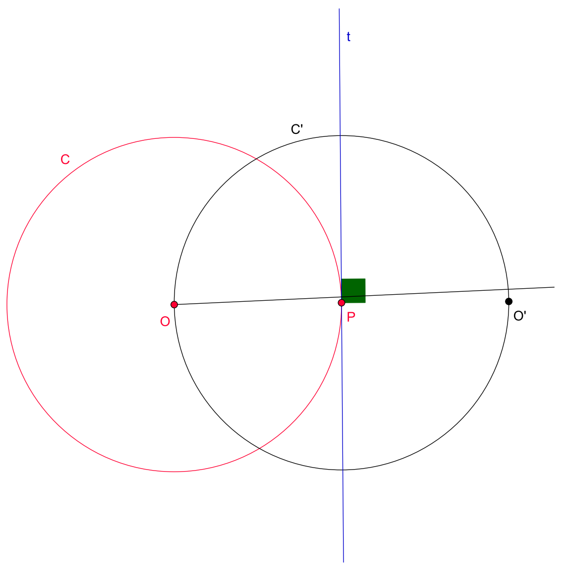


Para este fim agiremos da seguinte forma:

1. Tracemos uma circunferência $\mathcal{C}'$, de centro no ponto P e raio PO que encontrará a reta que contém os pontos O e P no ponto O', diferente do ponto O (veja figura abaixo);



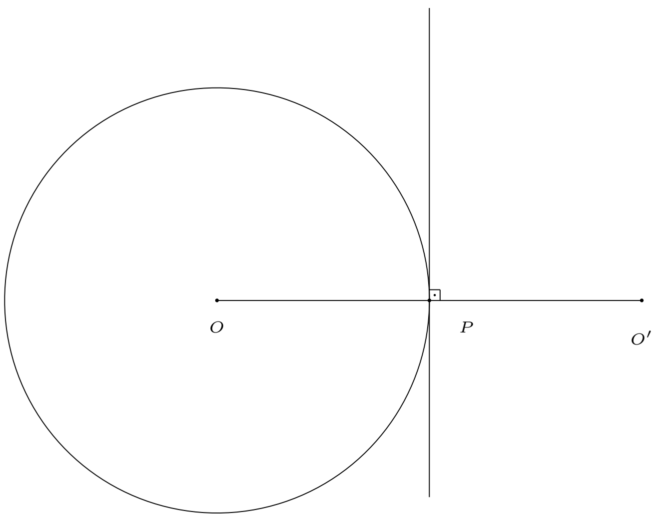
2. Tracemos a mediatriz do segmento $\overline{OO'}$ (que, por construção, tem o ponto P como seu ponto médio) (figura abaixo);



3. Afirmamos que a mediatriz obtida no item 2. é a reta tangente $\underline{t}$ a circunferência $\mathcal{C}$ pelo ponto P (figura abaixo).

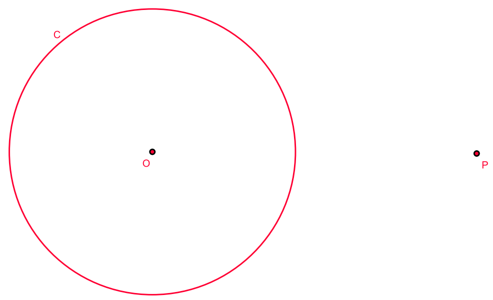
Mostremos que isto é realmente verdade.

Para isto, observemos que como a mediatriz obtida no item 2. acima é perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ (e contém o ponto P) segue que ela deverá ser, necessariamente, a reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ que contém o ponto P (veja figura abaixo).



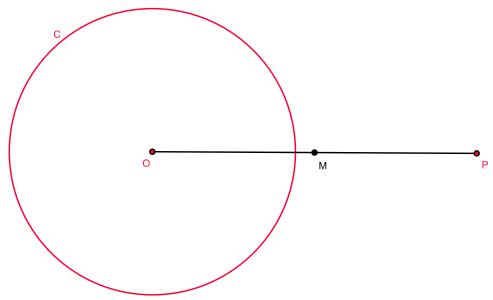
1.8.2 Reta tangente a uma circunferência por um ponto exterior a mesma

A segunda situação que consideraremos é de encontrar, geometricamente, a reta tangente a uma circunferência $\mathcal{C}$, de centro em O, que contenha um ponto P que está no exterior do círculo determinado pela circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



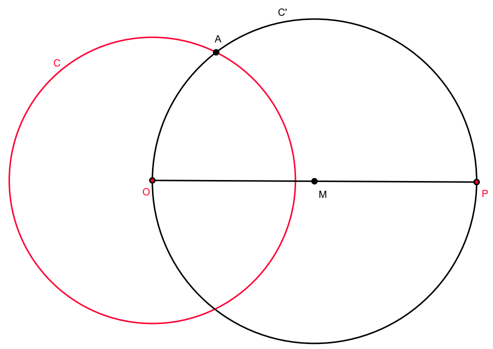
Para este fim agiremos da seguinte forma:

1. Por meio da construção da mediatriz do segmento $\overline{OP}$, encontremos o ponto médio, M, do segmento $\overline{OP}$ (figura abaixo);

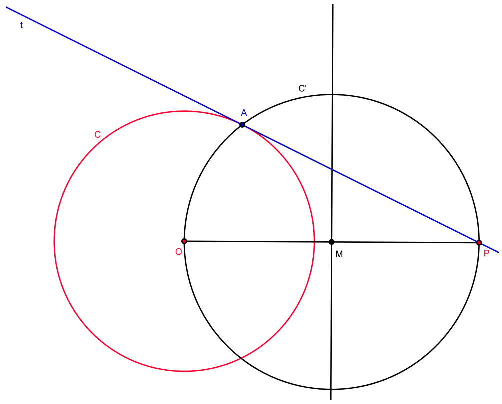


2. Tracemos a circunferência, $\mathcal{C}'$, de centro em M e raio MO (que é igual a MP).

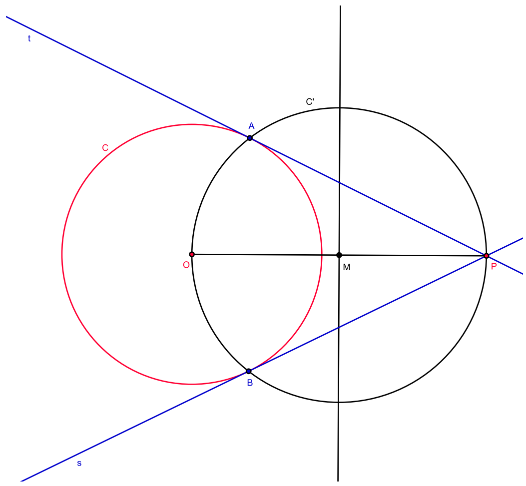
   Esta circunferência intercepta a circunferência inicial no ponto A (e um outro ponto B) (figura abaixo);



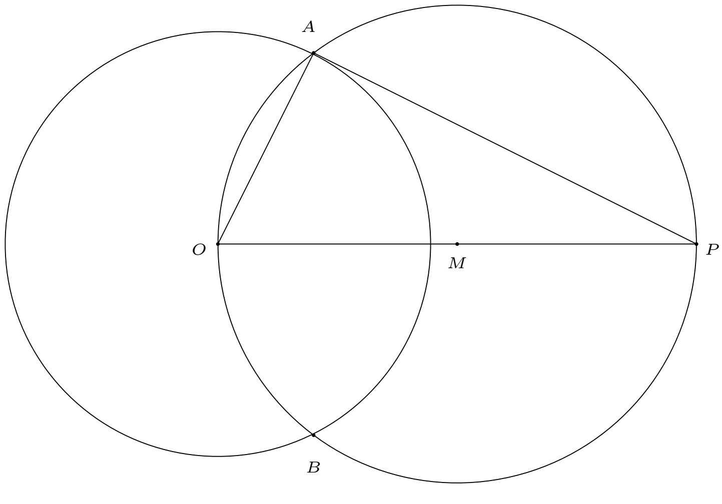
3. Afirmamos que a reta $\underline{t}$ que contém os pontos A e P é uma reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto A (a outra reta tangente será a que contém o ponto P e o ponto B) (figuras abaixo).



Notemos que teremos uma outra reta tangente que será a que contém o ponto P e o ponto B (figura abaixo).



De fato, o ângulo $\widehat{OAP}$ é $\dfrac{\pi}{2}$, isto é, é reto pois ele é o ângulo do arco capaz associado ao segmento $\overline{PO}$ que é diâmetro da circunferência de centro em M e raio MP, logo o ângulo $\widehat{OMP} = \pi$ (figura abaixo).



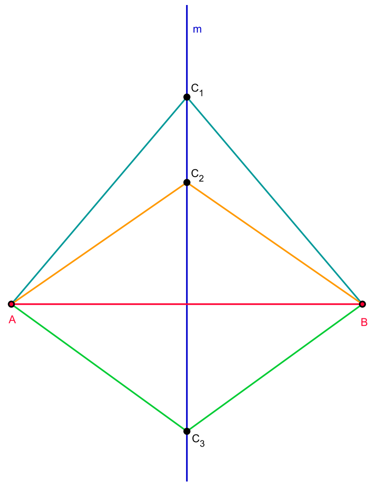
Portanto a reta que contém os pontos P e A é uma reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ no ponto A (pois o segmento $\overline{OA}$ que é raio da circunferência $\mathcal{C}$ é perpendicular o segmento $\overline{AP}$).

De modo semelhante obtemos que a reta que contém os pontos B e P também será uma reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ no ponto B.

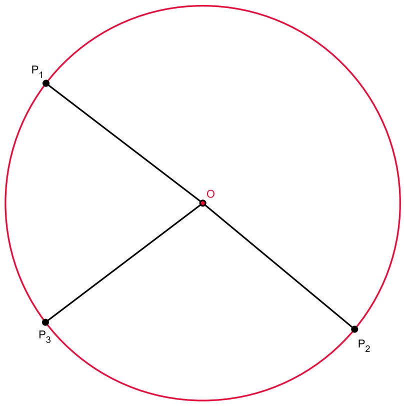
1.9 Exemplos

Lembremos que a expressão **lugar geométrico no plano** corresponde ao conjunto formado pelos pontosdo plano que satisfazem a uma determinada propriedade.

Por exemplo, a **mediatriz** é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos distintos fixados (figura abaixo);



De modo semelhante a **circunferência** é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à uma distância fixada de um ponto fixado (figura abaixo).

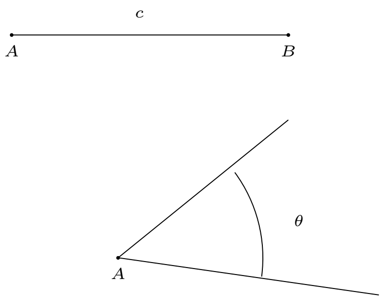


Ao dizermos que uma figura geométrica $\mathcal{F}$ é o lugar geométrico dos pontos que possuem uma determinada propriedade $\mathcal{P}$, queremos dizer que todos os pontos do conjunto $\mathcal{F}$ possuim a propriedade $\mathcal{P}$ e nenhum ponto fora do conjunto $\mathcal{F}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$.

Por exemplo, nos dois exemplos acima, a mediatriz de um segmento e a circunferência de centro em um ponto e raio fixados, geometricamente, as figuras acima representam os únicos conjuntos dos pontos do plano geométrico que satisfazem as correspondentes propriedades que determinam a mediatriz de um segmento e a circunferência de centro em um ponto e raio fixados, respectivamente.

A seguir consideraremos alguns exemplos relacionados com a situação acima.

Exemplo 1.9.1 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento dos lados $AB = c$, $BC = a$ e o ângulo $\widehat{A} = \theta$ dados, geometricamente, como na figura abaixo.*

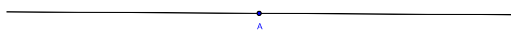


Resolução:

Temos várias possibilidade para a construção de um triângulo ΔABC com as três propriedades acima.

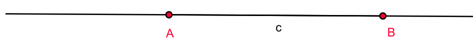
Vamos apresentar uma das possíveis construções:

1. Escolha uma reta e um ponto da mesma que chamaremos de A (figura abaixo);

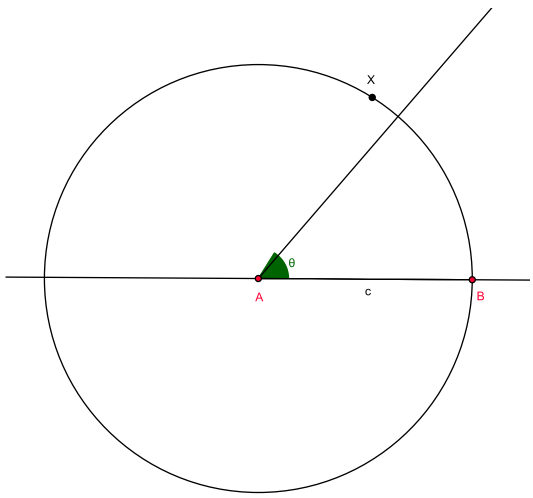


2. Traçando uma circunferência de centro em A e raio $AB = c$ obteremos o ponto B na intersecção desta circunferência com a reta.

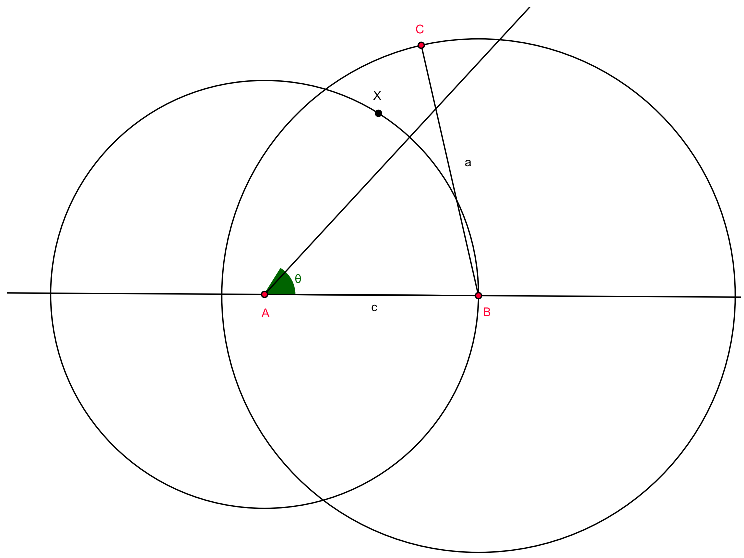
   Notemos que teremos um outro ponto com a mesma propriedade que dará origem a um outro triângulo congruente ao que iremos construir (figura abaixo).



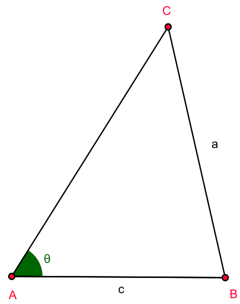
3. Encontremos um ponto X de tal modo que $\widehat{BAX} = \theta$ (transporte do ângulo $\widehat{A}$) (figura abaixo).



4. Tracemos a circunferência de centro em B e raio $BC = a$ que interceptará a semireta que contém o ponto A (como extremo) e o ponto X no ponto C (figura abaixo);



5. A, B e C são os vértices do triângulo procurado. (figura abaixo);



Na verdade há uma infinidade de triângulos que podem ser construídos com as três propriedades acima.

Deixaremos como exercício para o leitor a construção de outros casos.

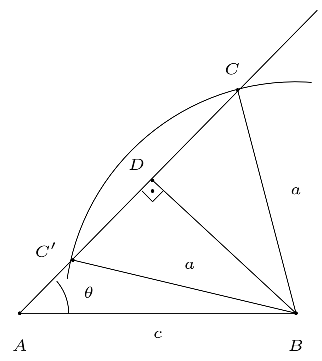
Observação 1.9.1

1. *Observemos que se fixarmos os lados do ângulo* $\widehat{A}$ *e* $c\,\mathrm{sen}(\theta) < \mathrm{a} < \mathrm{c}$ *então teremos apenas duas soluções para o nosso problema.*

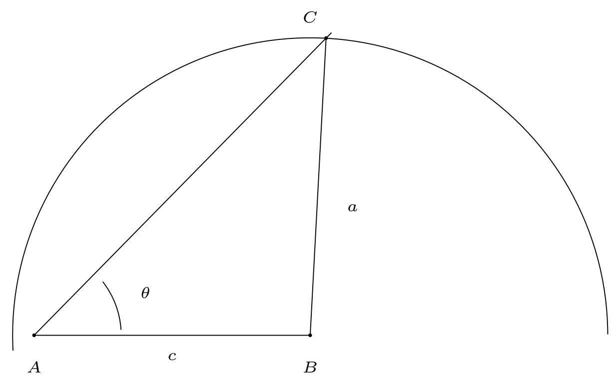
   De fato, o valor $c\,\mathrm{sen}(\theta)$ *deve ser o valor mínimo para o raio* $\underline{a}$*, para que a circunferência centrada em* B *com esse raio intercepte a reta que contém* A *e* X*, pois sabemos que*

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{c}}, \quad \textit{logo} \quad \mathrm{BD} = \mathrm{c}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Portanto, se $c\,\mathrm{sen}(\theta) < \mathrm{a} < \mathrm{c}$*, poderemos construir dois triângulos com as propriedades requeridas (na figura abaixo:* ΔABC *e* $\Delta ABC'$*).*



2. *Se* $a > c$ *então a solução será única, pois neste caso a circunferência centrada em* B *e raio* $\underline{a}$ *só interceptará a semireta que cotém o ponto* A *em um único ponto (figura abaixo: só teremos o triângulo* ΔABC *como solução para o problema).*



3. *A construção acima mostra porque as três propriedade (dados: ângulo* $\widehat{A}$*, lados* AB *e* BC*) acima* **não** *necessariamente implicam em congruência de triângulos já que os triângulos* ΔACB *e* $\Delta AC'B$ *do item 1. possuem as três propriedades e mas* **não** *são congruentes.*

4. *Acrescentando uma propriedade adicional às três acima poderemos ter um novo caso de congruência, a saber:*

   Se dois triângulos ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$ *tem as seguintes propriedades:*

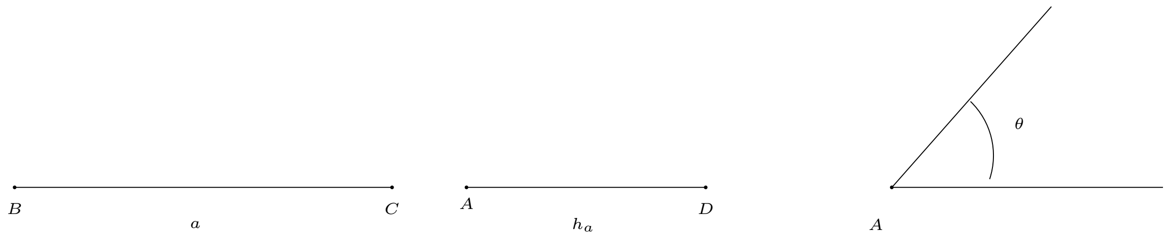
$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad AB = A'B', \quad BC = B'C' \quad \text{e} \quad BC > AB$$

   então os triângulos são, necessariamente, congruentes.

   Para provar isto basta notar que na Observação acima item 2. que a circunferência centrada no ponto B *e raio* $a = BC$ *só encontra a semireta em um único ponto, no caso o ponto* C*.*

   Logo só podemos construir um, e somente um, triângulo (ou seja, um único) com as propriedade requeridas se fixarmos o ângulo $\widehat{A}$ *e os comprimentos* $BC = a$ *e* $AB = c$*.*

Exemplo 1.9.2 *Construir um triângulo ΔABC sendo dados o lado $BC = a$, a altura h_a relativa a esse lado e o ângulo $\widehat{A} = \theta$.*



Resolução:

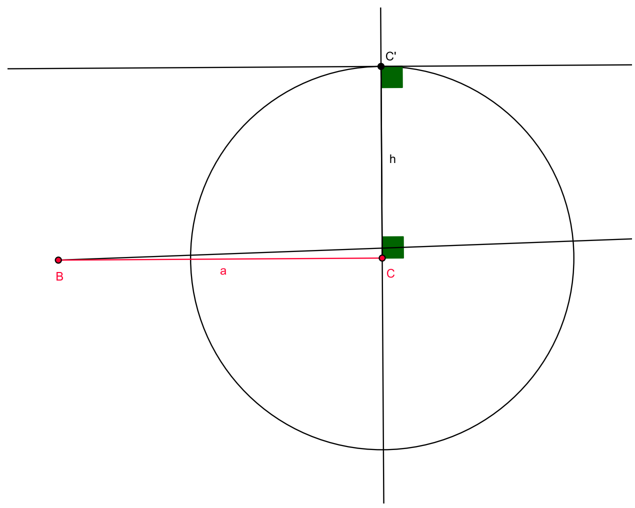
Vamos a uma possui construção:

1. Escolhamos uma semireta com extremo no ponto B e encontremos o ponto C sobre a mesma de tal modo que $BC = a$ (utilizando o compasso para transportar a medida do segmento $\overline{BC}$ - figura abaixo)).

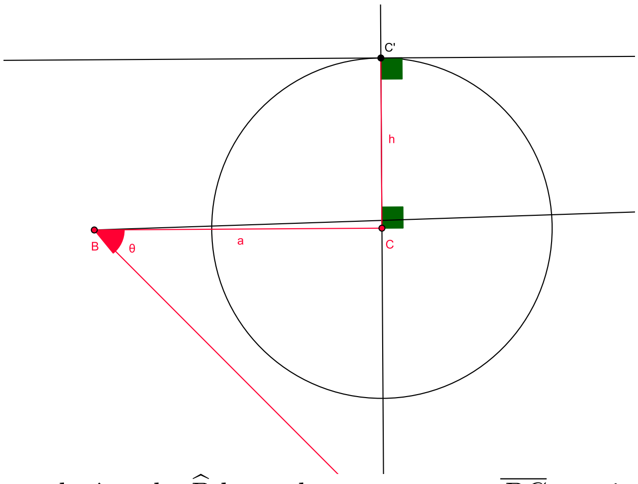
2. Encontremos uma reta paralela a semireta do item 1. que dista da mesma h_a.

   Podemos fazer isto construindo-se, por exemplo, a reta perpendicular $\underline{t}$ à semireta do item 1. pelo ponto C e, com ajuda do compasso, encontramos o ponto C' sobre essa perpendicular de tal modo que $CC' = h_a$ (na verdade existem dois pontos sobre a perpendicular que distam h_A do ponto C).

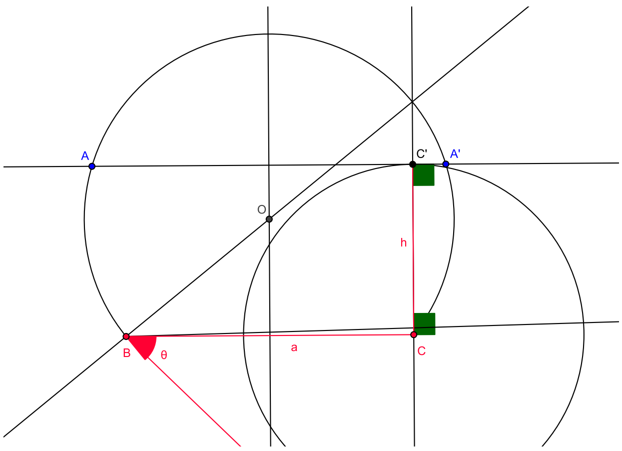
   Depois traçamos a reta perpendicular a reta $\underline{t}$ pelo ponto C' (figura abaixo).



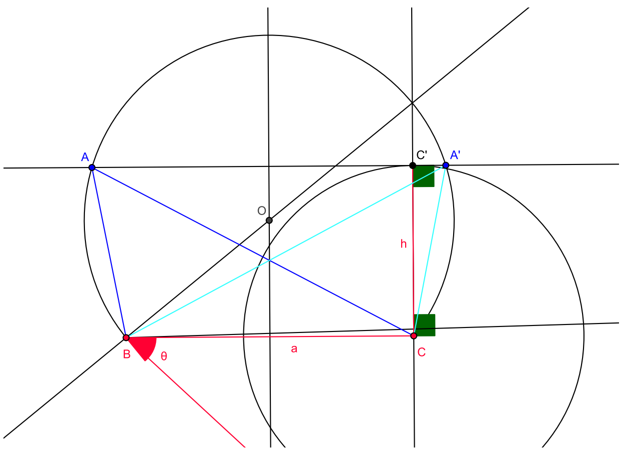
3. Transportemos o ângulo $\widehat{A}$ para o ângulo $\widehat{B}$ de tal modo que um lado do ângulo seja o segmento $\overline{BC}$ e o outro esteja contido no semiplano determinado pela reta que contém os pontos B e C e não contenha o ponto C' (figura abaixo).



4. Tracemos o arco capaz do ângulo $\widehat{B}$ baseado no segmento $\overline{BC}$ que interceptará a reta paralela do item 2. em A (e possivelmente em outro ponto A').



5. O triângulo ΔACB satisfaz as condições requeridas.



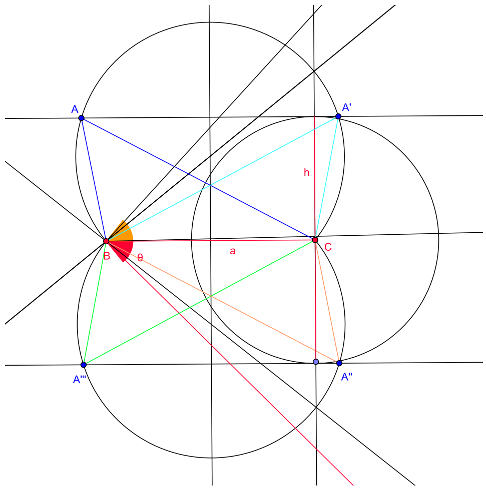
Observação 1.9.2

1. *No exemplo acima, fixado o lado $\overline{BC}$ e um dos semiplanos determinado pela reta que contém os pontos B e C, temos duas soluções possíveis, a saber os triângulos ΔACB e $\Delta A'CB$ (como na figura acima).*

   Vale observar que eles são congruentes (caso LAL) (um é imagem do outro por uma reflexão em relação a mediatriz do segmento $\overline{BC}$).

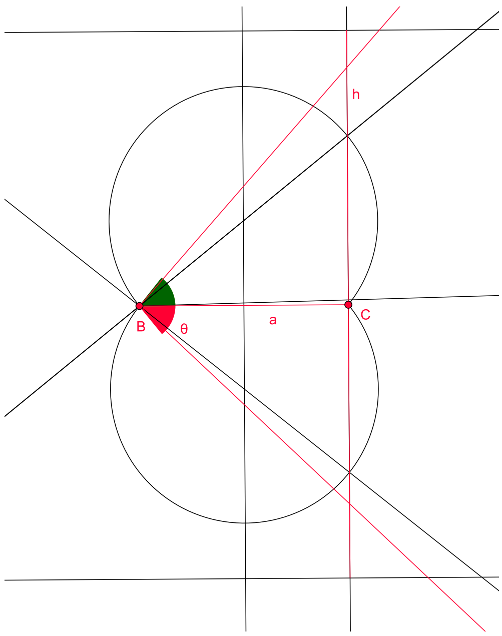
   Por abuso de notação, diremos que a solução é única (pois todas as soluções são congruentes duas a duas).

   Na verdade poderemos ter 4 soluções, todas congruentes duas a duas (na figura abaixo temos os triângulos ΔACB, $\Delta A'CB$, $\Delta A''CB$ e $\Delta A'''CB$).



2. *Dependendo das escolhas dos valores de a, h_a e $\widehat{A}$ podemos **não** ter necessariamente solução para o problema.*

   *Por exemplo, se h_a for muito grande a reta paralela a semireta que contém os pontos B e C que dista h_a da mesma não interceptará o arco capaz do ângulo $\widehat{A}$ associado ao segmento $\overline{BC}$. Nestes caso **não** existirá nenhum triângulo com as propriedades requeridas (figura abaixo).*



Exercício 1.9.1 *Mais precisamente, na situação acima se*

$$h_a > \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\widehat{\mathrm{A}}} + \frac{1}{\mathrm{tg}\widehat{\mathrm{A}}}\right)$$

não *existirá tal triângulo.*

Antes de exibirmos o próximo exemplo iremos estabelecer as seguintes notações:

Notação 1.9.1 *Consideremos o triângulo ΔABC, onde são dados:*

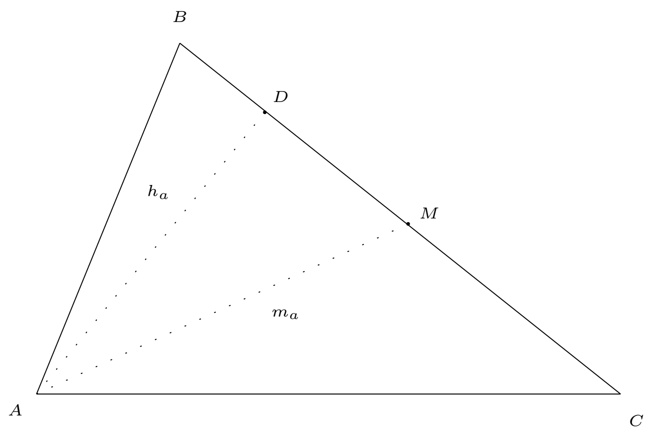
$$AB = c, \quad AC = b \quad e \quad BC = a.$$

Seja M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.
A **mediana relativa ao lado $\overline{BC}$** *será o segmento de reta $\overline{AM}$.*
Denotaremos o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ por m_a (figura abaixo), isto é,

$$m_a \doteq AM.$$

Seja D o ponto de intersecção da reta perpendicular ao lado $\overline{BC}$ que contém o ponto A com o segmento $\overline{BC}$.
O segmento $\overline{AD}$ será denominado **altura do triângulo ΔABC relativamente ao lado $\overline{BC}$**.
Denotaremos por h_a o comprimento da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ (figura abaixo), isto é,

$$h_a \doteq AD.$$



De modo semelhante denotamos os comprimentos das medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ por

$$m_c \quad e \quad m_b,$$

respectivamente, e os comprimentos das alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ por

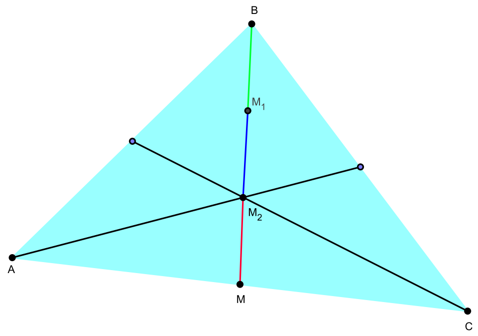
$$h_c \quad e \quad h_b,$$

respectivamente.

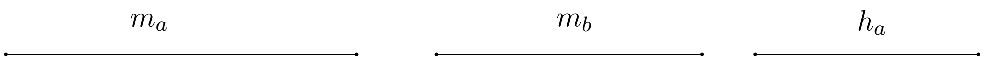
Para o próximo exemplo precisaremos do

Exercício 1.9.2 *Mostre que num triângulo qualquer, as medianas interceptam-se em um mesmo ponto (denominado* **baricentro***) e além disso, dividem cada uma delas na razão $2:1$, ou se, na figura abaixo:*

$$BM_1 = M_1M_2 = M_2M = \frac{1}{3}BM.$$

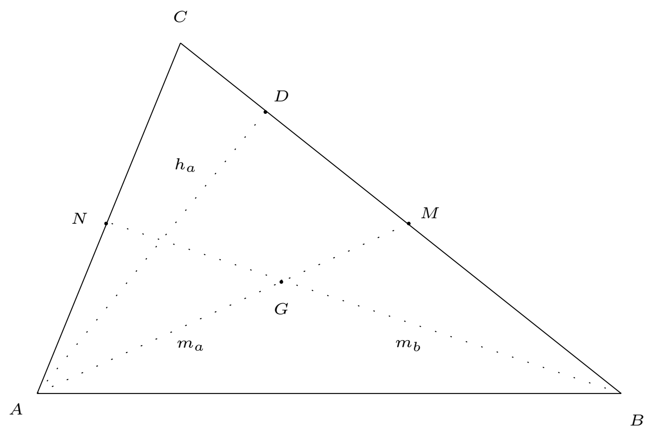


Exemplo 1.9.3 *Construir um triângulo ΔABC sendo dados os comprimentos das medianas, m_a, m_b e a medida da altura h_a.*



Resolução:

Para ajudar a entendermos o problema façamos uma ilustração dos elementos dados pelo problema na figura abaixo.



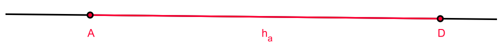
Do exercício acima temos num triângulo qualquer, as medianas cortam-se em um mesmo ponto e dividem cada uma delas na razão 2 : 1.

Como conhecemos $AM = m_a$ podemos determinar o ponto G (baricentro do triângulo ΔACB) sobre o semgmento $\overline{AM}$, pois

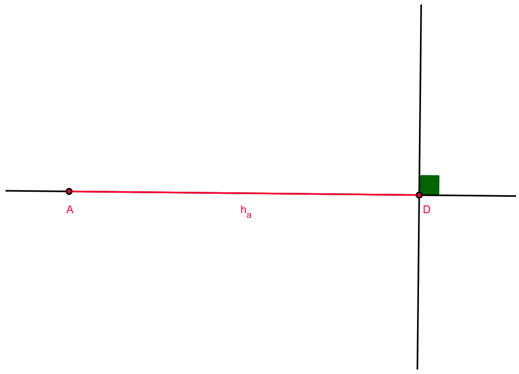
$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}m_a.$$

Para isto agiremos da seguinte forma:

1. Escolhamos sobre uma reta o segmento $\overline{AD}$ tal que $AD = h_a$ (figura abaixo).

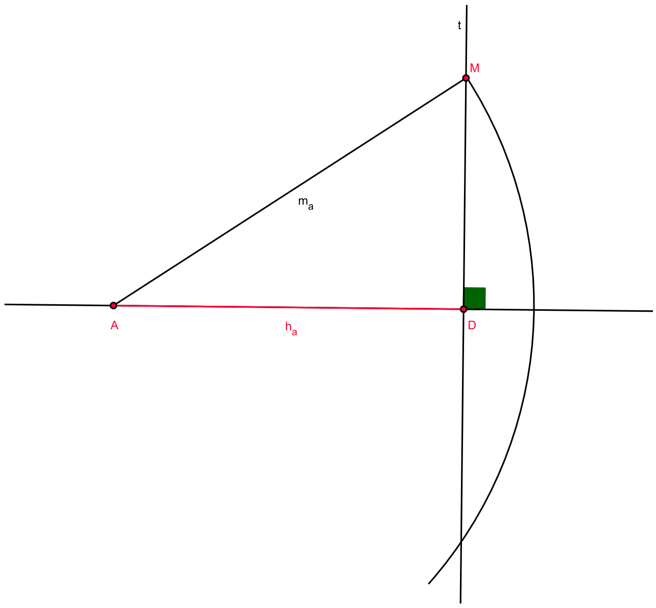


2. Tracemos a reta $\underline{t}$, perpendicular a reta que contém os pontos A e D pelo ponto D (figura abaixo).



Observemos que os vértices B e C deverão pertencer à reta t obtida acima (pois o triângulo deverá ter altura relativa ao lado $\overline{BC}$ igual a h_a).

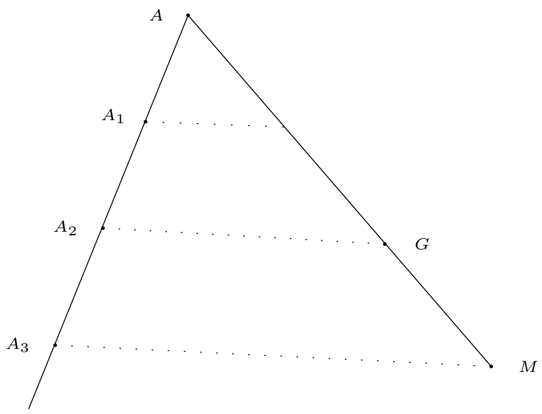
3. Como conhecemos $AM = m_a$, utilizando o compasso, podemos encontrar um ponto M sobre a reta $\underline{t}$ obtida no item 2. (este pode não ser único - figura abaixo).



4. Como $AM = m_a$ podemos determinar o ponto G (intersecção das medianas) sobre o segmento $\overline{AM}$, pois

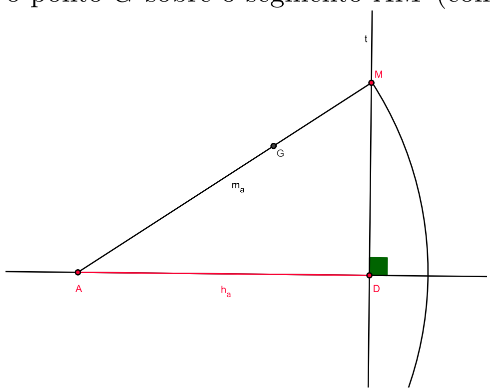
$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}m_a.$$

Para isto precisamos dividir o segmento $\overline{AM}$ em três partes iguais, ou seja, utilizaremos o processo desenvolvido na seção 1.2.



$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$

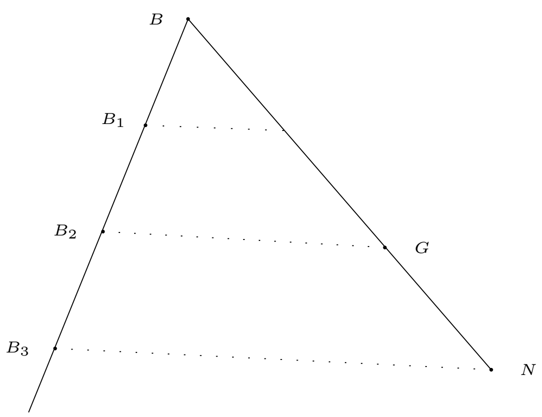
Deste modo encontramos o ponto G sobre o segmento $\overline{AM}$ (com o uso do compasso).



5. Sabemos que (ver figura do início da resolução)

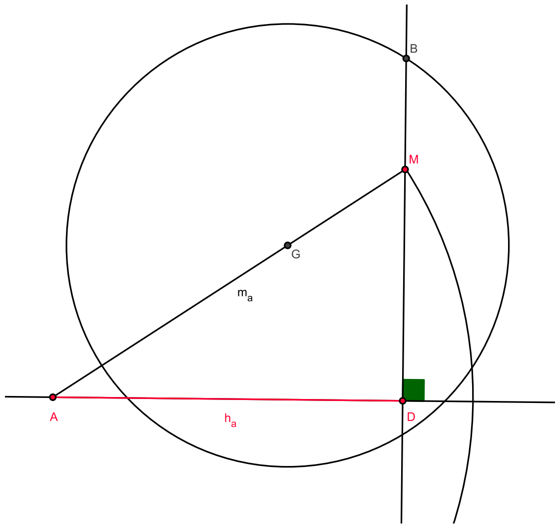
$$BG = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}m_b.$$

Por um processo análogo ao do item 4. podemos encontrar o comprimento BG (figura abaixo).

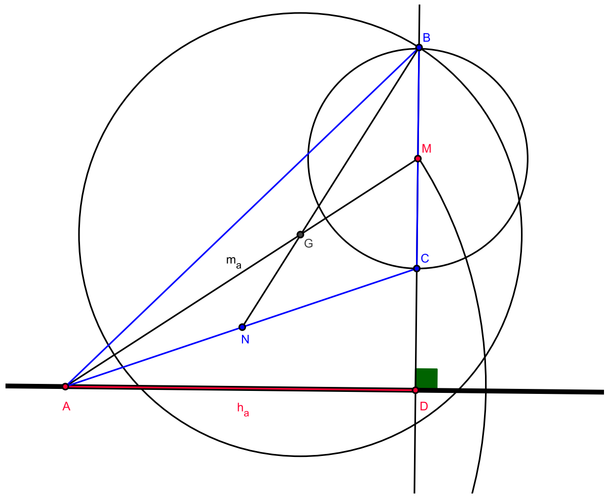


$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

6. O vértice B é obtido da intersecção da reta que contém D e M (isto é, a reta $\underline{t}$) com a circunferência de centro em G e raio $GB = BG$ obtido no item 5. acima (podemos ter dois pontos de intersecção, escolhamos um deles - figura abaixo).



7. O vértice C está sobre a reta que contém os pontos D e M e é obtido usando-se o fato que $BM = MC$ (pois o ponto M deverá ser o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ - figura abaixo).



Observação 1.9.3 *Dá construção acima podemos observar que o triângulo obtido poderá* **não** *ser único.*

As relações entre os dados do exemplo que tornam a construção possível, e/ou única, pode ser um exercício interessante mas trabalhoso.

Exemplo 1.9.4 *Dados uma circunferência $\mathcal{C}$, de centro no ponto O e raio $r > 0$, um ponto P no exterior da circunferência e um segmento de comprimento $\underline{a}$ traçar pelo ponto P um reta que determine na circunferência uma corda de comprimento exatamente igual a $\underline{a}$.*

Resolução:

Observemos que em uma dada circunferência todas as cordas de mesmo comprimento são tangentes a uma outra circunferência de mesmo centro que a primeira.

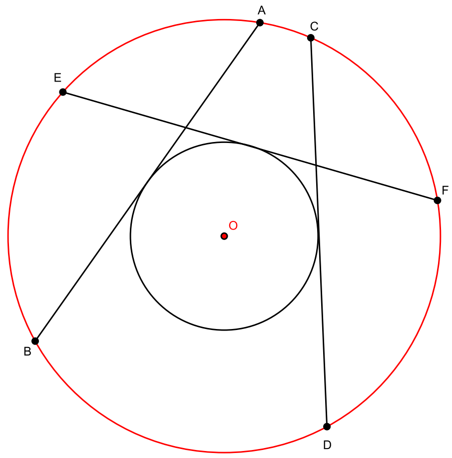
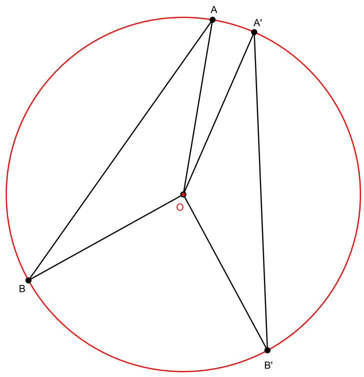
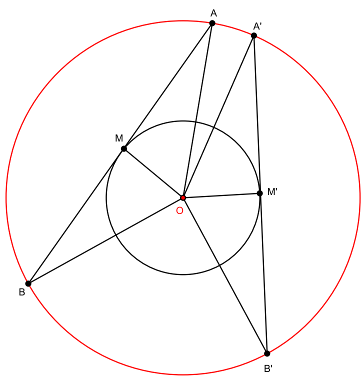


Figura 1.1: $AB = CD = EF$

De fato, para quaisquer cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ de mesmo comprimento na circunferência de centro no ponto O, os triângulos ΔAOB e $\Delta A'B'O$ são congruentes pois $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$ são raios, AB e $A'B'$ são os comprimentos das cordas (que estamos supondo serem iguais, assim teremos o caso LLL de congruência).



Logo suas alturas relativas ao lado $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ terão mesmos comprimentos e se denotarmos "pé" destas alturas por M e M', respectivamente, então eles pertecerão a uma mesma circunferência de centro em O, mostrando a afirmação.



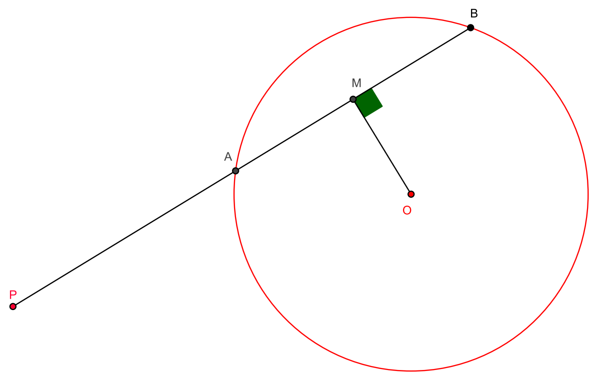
Observemos que neste caso os pontos M e M' serão os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, respectivamente, pois os triângulos ΔAOM e ΔOBM são congruentes (eles têm dois lados de mesmo comprimento e dois ângulos iguais).

Notemos também que se a reta que contém os pontos P e B é tal que o segmento $\overline{AB}$ tem comprimento $\underline{a}$ e é secante a circunferência $\mathcal{C}$ e M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ então o segmento $\overline{OM}$ deverá ser perpendicular ao segmento $\overline{PB}$.

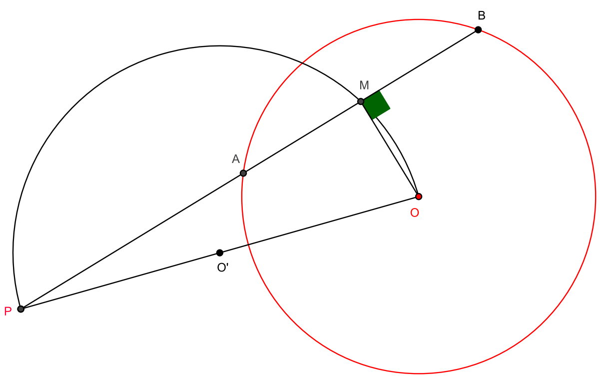
De fato, pois os triângulos ΔAMO e ΔOMB são congruentes (pelo caso LLL), assim

$$\widehat{AMO} = \widehat{OMB}, \quad \text{mas} \quad \widehat{AMO} + \widehat{OMB} = \pi,$$

implicando que $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.

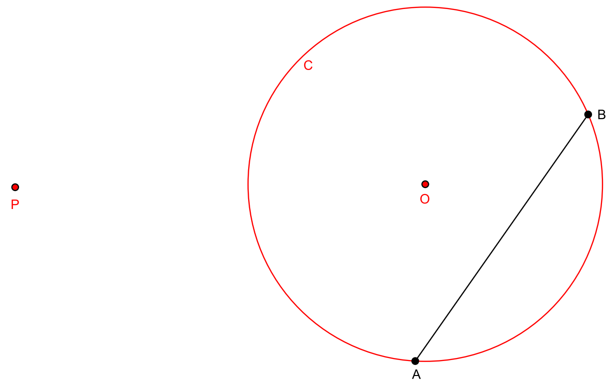


Assim o ponto M deverá pertencer ao arco capaz do ângulo $\dfrac{\pi}{2}$ associado ao segmento $\overline{PO}$, pois $\widehat{PMO} = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, deverá estar inscrito na semi-circunferência de diâmentro $\overline{PO}$.

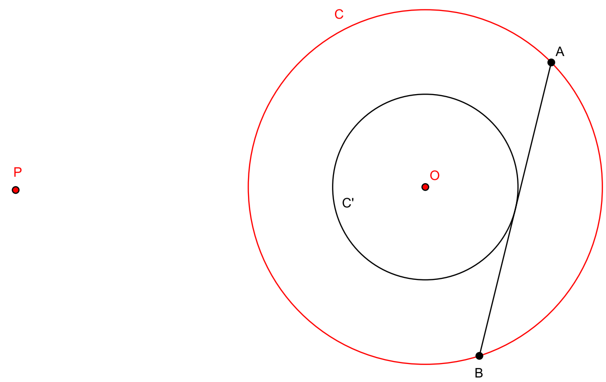


Podemos agora fazer a construção, como veremos a seguir:

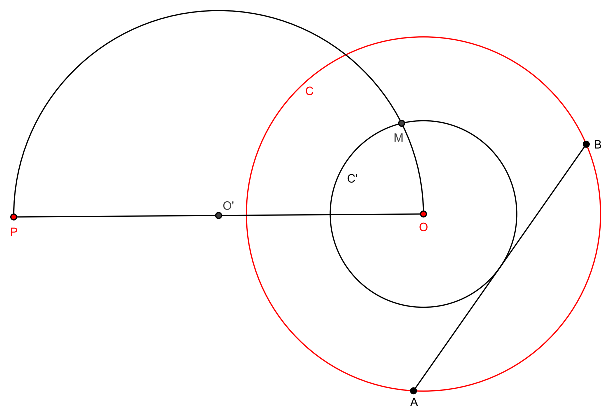
1. Traçamos na circunferência $\mathcal{C}$ uma corda $\overline{AB}$ qualquer de comprimento a (usamos o compasso para tanto - figura abaixo).



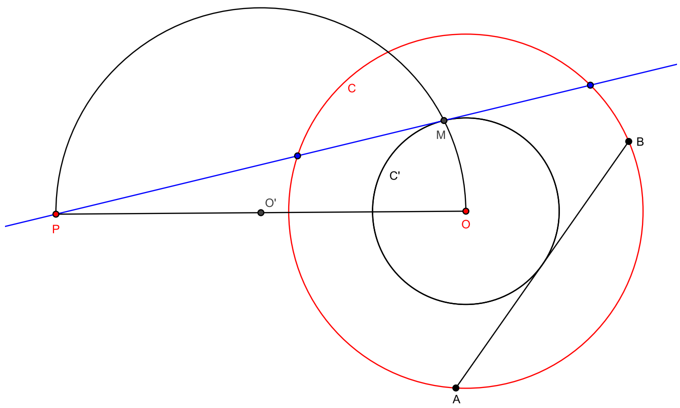
2. A seguir traçamos uma circunferência $\mathcal{C}'$ de centro em O tangente à corda $\overline{AB}$ do item 1. (figura abaixo).



3. Construímos a circunferência $\mathcal{C}''$ de diâmentro $\overline{PO}$ que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto M (e em outro ponto - figura abaixo).

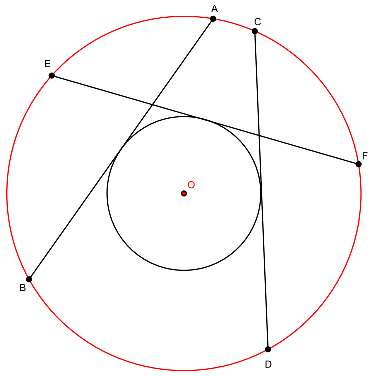


4. A reta que contém os pontos P e M é a reta procurada (figura abaixo).

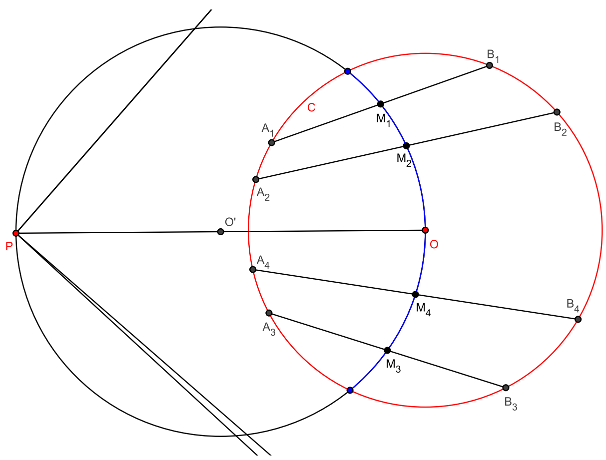


Observação 1.9.4 *Na resolução do exemplo acima descobrimos dois lugares geométricos interessantes, a saber:*

1. *O lugar geométrico das cordas de uma circunferência de centro no ponto O que possuem o mesmo comprimento são os segmentos de reta que tem extremos na circunferência dada e que são tangentes a uma circunferência de centro no ponto O e tangente a uma das cordas de comprimento igual ao comprimento dado (figura abaixo).*



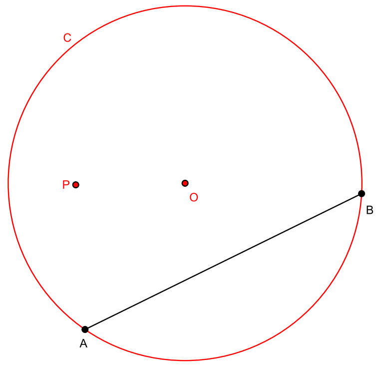
2. *Na situação do exemplo acima, o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da circunferência $\mathcal{C}$ cujas retas que as contém passam pelo ponto P estará contido na circunferência de centro no ponto O', ponto médio do segmento PO, e raio $\dfrac{PO}{2}$ (figura abaixo).*



3. *O ponto P poderia ser dado no interior da crcunferência de centro em O.*

   A análise é semelhante a que tratamos acima e será deixada como exercício.

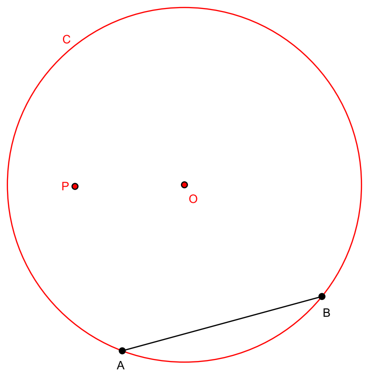
Exercício 1.9.3 *Faça o mesmo estudo que fizemos acima para o caso em que o ponto P está no interior da circunferência $\mathcal{C}$.*



Observação 1.9.5 *Vale observar que o comprimento da corda $\overline{AB}$ não pode ser qualquer.*

Mais precisamente, a distância da corda $\overline{AB}$ até o centro O da circunferência $\mathcal{C}$ não pode ser maior que a distância do ponto P ao ponto O.

Por exemplo, na figura abaixo, não existe nenhuma corda da circunferência $\mathcal{C}$ que tenha comprimento AB cuja reta que a contenha passe pelo ponto P (tente fazer a construção para este caso e verifique que não é possível!)

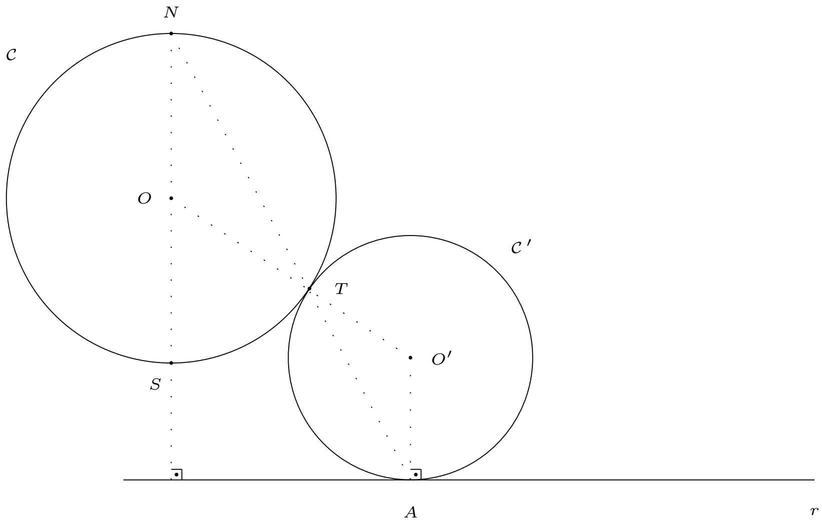


Exemplo 1.9.5 *Dados uma circunferência $\mathcal{C}$, uma reta $\underline{r}$ e um ponto A sobre a reta $\underline{r}$ construir uma circunferência $\mathcal{C}'$, tangente, exteriormente, a circunferência C e tangente a reta $\underline{r}$ no ponto A.*

Resolução:

Suponhamos que o problema está resolvido, ou seja, tenhamos obtido a figura abaixo.

Sejam $\mathcal{C}'$ a circunferência procurada, de centro em O', e T o ponto de tangência das circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.

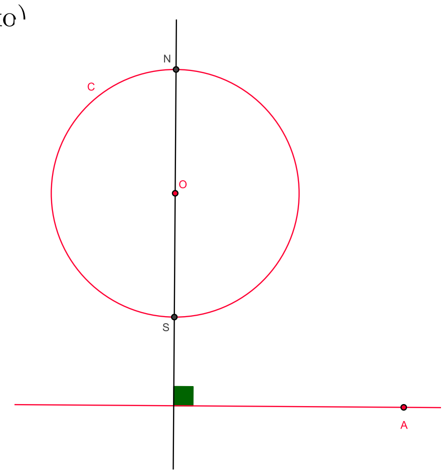


Sabemos que o segmento OO' contém o ponto T (pois as circunferências são tangentes no ponto T).

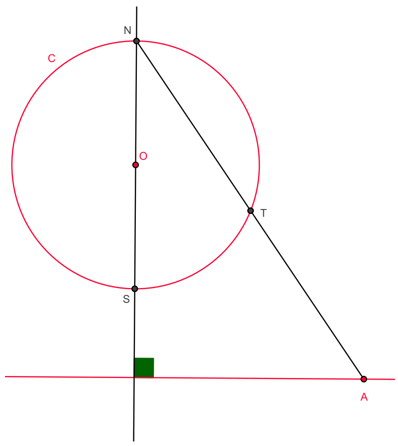
Além disso, o segmento $O'A$ é perpendicular a reta $\underline{r}$, pois a circunferência $\mathcal{C}'$ é tangente a reta $\underline{r}$ no ponto A.

Baseado nesses fatos agiremos da seguinte forma:

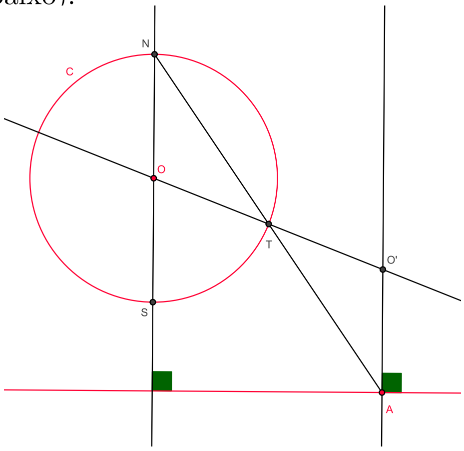
1. Tracemos pelo ponto O a reta perpendicular a reta $\underline{r}$, que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ nos pontos N e S (figura abaixo).



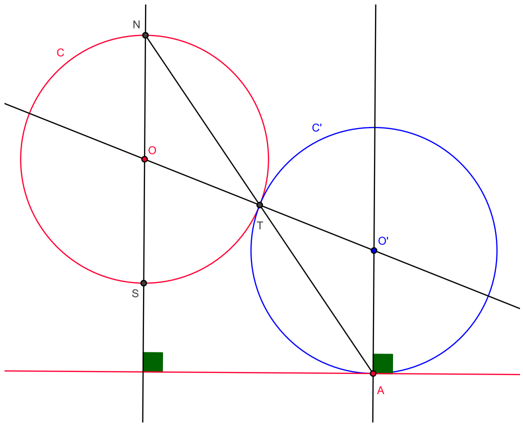
2. Tracemos o segmento $\overline{AN}$ que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto T (figura abaixo).



3. Tracemos a perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto A que encontrará a reta que contém os pontos O e T no ponto O' (figura abaixo).

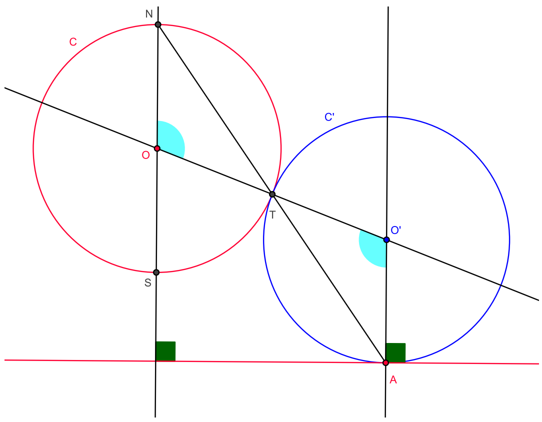


Afirmamos que a circunferência procurada tem centro em O' e raio $O'A = O'T$ (figura abaixo).

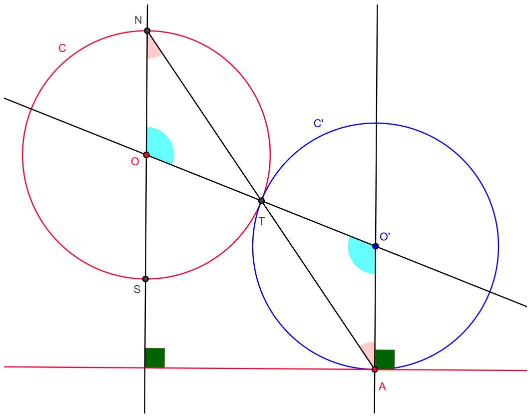


Para provar isto observemos que:

i. Os ângulos $\widehat{TON}$ e $\widehat{TO'A}$ são iguais pois são ângulos alternos internos das retas paralelas que contém os pontos N, O e os pontos O', A, respectivamente (figura abaixo).



ii. De modo análogo, os ângulos $\widehat{ONT}$ e $\widehat{O'AT}$ são iguais pois também são alternos internos das retas paralelas que contém os pontos N, O e os pontos O', A, respectivamente.



iii. Logo, pelo caso AAA, segue os triângulos ΔNTO e $\Delta TO'A$ são semelhantes.

iv. Da semelhança acima, segue que

$$\frac{O'T}{O'A} = \frac{OT}{ON} \overset{[OT=ON]}{=} 1, \quad \text{isto é,} \quad O'T = O'A.$$

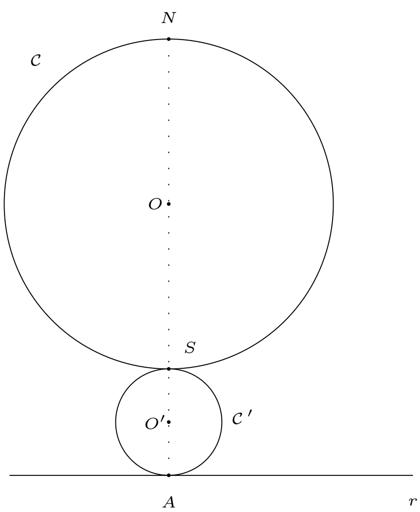
Assim T e A estão sobre a circunferência de centro em O' e raio $O'T = O'A$.

v. Além disso a circunferência $\mathcal{C}'$, de centro em O' e raio $O'T$, será tangente à reta r, pois o segmento $O'A$ é perpendicular a reta $\underline{r}$ no ponto A, e também será tangente a circunferência $\mathcal{C}$, pois o ponto T, ponto de intersecção das circunferências, está sobre o segmento que une os centros, O e O', das circunferências o que implicará que elas são tangentes, completando a demonstração da afirmação.

Observação 1.9.6

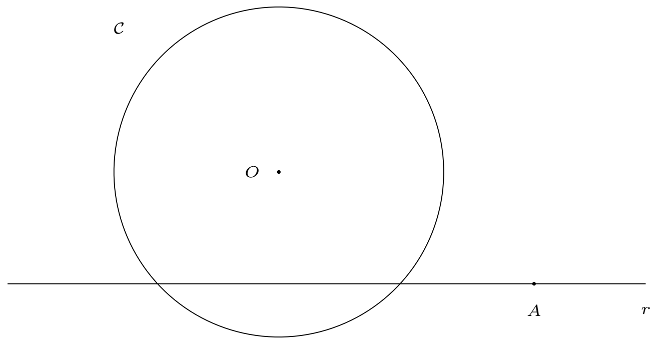
1. *Vale observar que na situação acima, ou seja, se $\underline{r}$ não intercepta a circunferência $\mathcal{C}$, o problema terá sempre solução para qualquer ponto A escolhido sobre a reta r.*

   De fato, se o ponto A for, por exemplo, o "pé" da reta perpendicular à reta $\underline{r}$ pelos pontos N e O então o ponto O' será o ponto médio do segmento $\overline{SA}$ (figura abaixo).



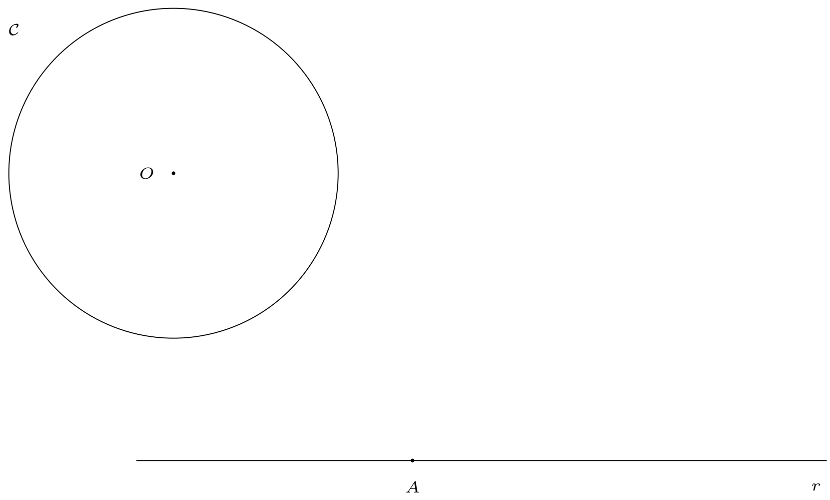
Em qualquer outra posição que se encontre o ponto A sobre a reta $\underline{r}$ a construção será a que apresentamos anteriormente.

2. *Se a reta $\underline{r}$ for secante à circunferência $\mathcal{C}$ e o ponto A for exterior a circunferência $\mathcal{C}$ teremos quatro possíveis soluções (figura abaixo).*



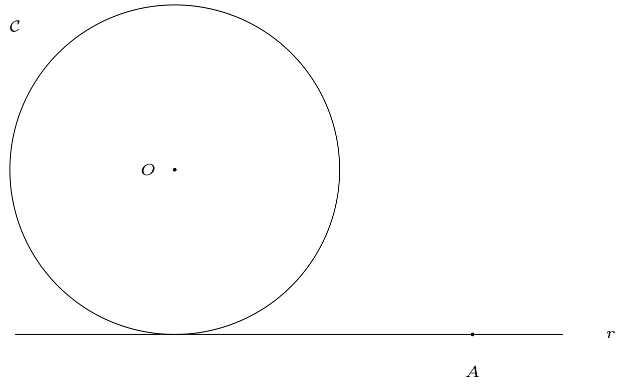
Isto será deixado como exercício (a seguir) para o leitor.

3. *O item 2. nos sugere um outro problema: construir uma circunferência $\mathcal{C}''$ que seja tangente, interiormente à circunferência $\mathcal{C}$, ou seja, $\mathcal{C}$ esteja contida no interior de $\mathcal{C}''$, e também tangente à reta r no ponto A (figura abaixo).*



A resolução será deixada como exercício (a seguir) para o leitor.

4. *Uma última possibilidade seria a circunferência $\mathcal{C}$ ser tangente a reta r (figura abaixo).*



A situação é semelhante aos casos anteriores e sua análise será deixada como exercício (a seguir) para o leitor.

Exercício 1.9.4 *Fazer as construções do item 2. da observação acima.*

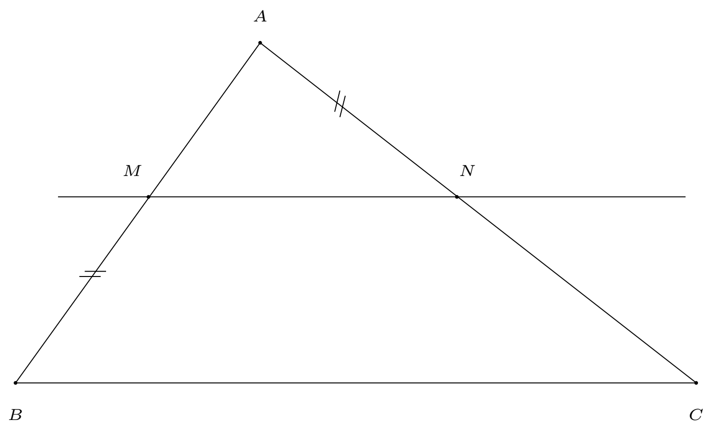
Exercício 1.9.5 *Fazer as construções do item 3. da observação acima.*
Sugestão: considere o ponto S no lugar do ponto N na construção feita anteriormente.

Exercício 1.9.6 *Fazer as construções do item 4. da observação acima.*

Exemplo 1.9.6 *Dado um triângulo ΔABC, traçar uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ que deverá interceptar o lado $\overline{AB}$ num ponto M e o o lado $\overline{AC}$ num ponto N de forma que $AN = MB$.*

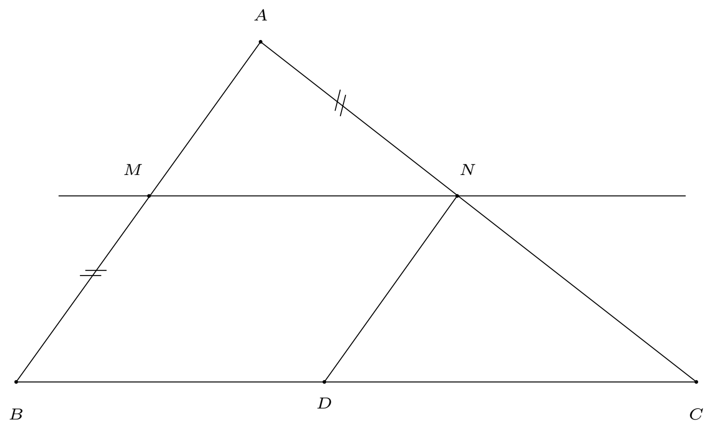
Resolução:

A situação que se apresenta é ilustrada na figura abaixo (onde a reta que contém os pontos M,N é paralela a reta que contém os pontos B, C):



Supondo que já tenhamos feito a construção.

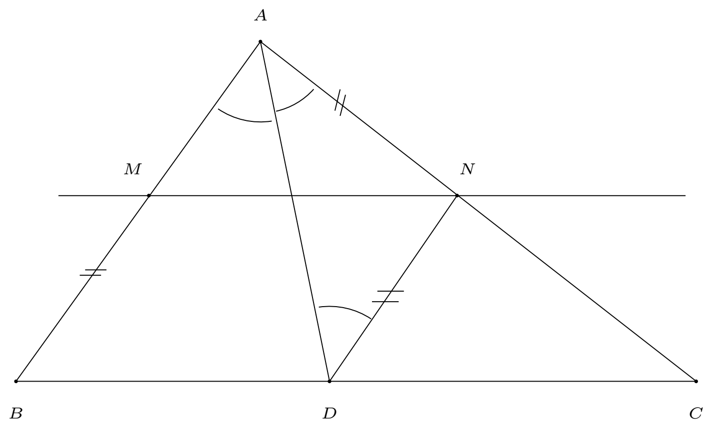
1. Encontremos o ponto D de tal modo que a reta que contém os pontos N, D seja paralela a reta que contém os pontos M, B (figura abaixo);



2. O quadrilátero $MNDB$ é um paralelogramo, pois os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{BD}$ e o segmentos $\overline{BM}$, $\overline{DN}$ são paralelos, respectivamente.

   Logo $AN = ND$, pois $ND = MB$ e, por hipótese, $AN = MB$ (figura acima).

3. Logo o triângulo ΔAND é isósceles, pois $NA = ND$, e assim $\widehat{NDA} = \widehat{DAN}$ (figura abaixo);

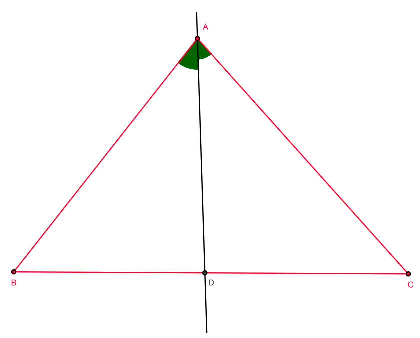


4. Como as retas que contém os pontos N, D e os pontos A e B são paralelas temos que $\widehat{NDA} = \widehat{BAD}$ (pois são ângulos alternos internos relativos à reta que contém os pontos A, D).

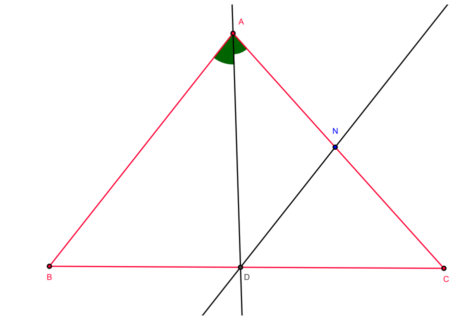
   Logo segue que a reta que contém os pontos A, D é bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$.

Com isto podemos estamos prontos para fazer a construção, como veremos seguir:

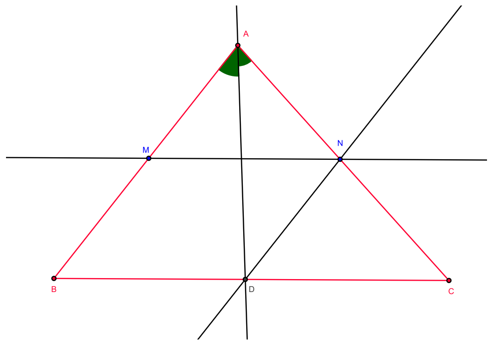
i. Tracemos a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$ que intercepta o lado $\overline{BC}$ no ponto D (figura abaixo);



ii. Tracemos a reta paralela à reta que contém os pontos A, B pelo ponto D que intercepta o lado $\overline{AC}$ no ponto N (figura abaixo);



iii. Traçando a reta paralela à reta que contém os pontos B, C pelo ponto N obtemos o ponto M na intersecção da mesma com o lado $\overline{AB}$, terminando a construção (figura abaixo).



Observemos que, os pontos M e N encontrados acima satisfazem as propriedades requeridas no exemplo.

De fato, pois como a reta que contém os pontos A e D é a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$ então $\widehat{NAD} = \widehat{MAD}$.

Além disso a reta que contém os pontos N e D é paralela à reta que contém os pontos M e A segue que $\widehat{NDA} = \widehat{MAD} \overset{(*)}{=} \widehat{NAD}$, ou seja, o triângulo ΔAND é um triângulo isóceles.

Em particular, $AN = ND$.

Como os segmentos $\overline{BM}$, $\overline{DN}$ são paralelos e os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{BD}$ também são paralelos segue que $BMND$ é um paralelogramo logo

$$MB = DN = AN,$$

como pedido no exemplo.

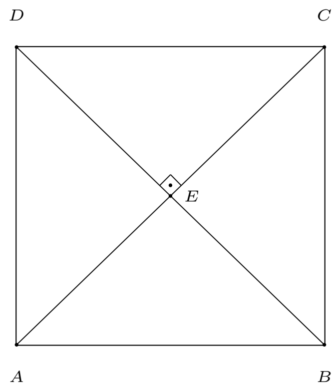
A seguir exibiremos a resolução de vários exercícios utilizando as técnicas desenvolvidas neste capíulo.

1.10 Exercícios resolvidos e propostos

Exercício 1.10.1 *Construir um quadrado $\square ABCD$ conhecendo-se o comprimento de sua diagonal $\overline{AC}$.*

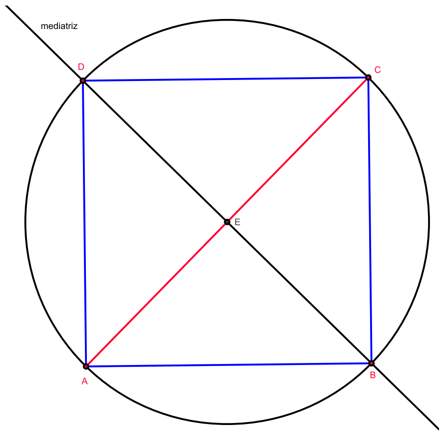
Resolução:

Observemos a figura abaixo:



Sabemos que as digonais de um quadrado interceptam-se perpendicularmente nos seus pontos médios (pois é um caso particular de losango).

Logo, se E é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ então os outros dois vértices, B e D, estarão na intersecção da circunferência de centro no ponto E e raio $AE = EC$ com a reta mediatriz do segmento $\overline{AC}$ (que tem E como intersecção com a reta que contém os pontos A e C - figura acima).



Mostremos que isto é realmente verdade.

Para isto observemos que o triângulo ΔAED será isóceles, pois $EA = ED$, assim

$$\widehat{EAD} = \widehat{ADE}. \tag{1.8}$$

Mas, no triângulo ΔAED temos

$$\pi = \widehat{DEA} + \widehat{EAD} + \widehat{ADE} \overset{[\widehat{DEA}=\frac{\pi}{2}]}{=} \frac{\pi}{2} + \widehat{EAD} + \widehat{ADE} \overset{(1.8)}{=} \frac{\pi}{2} + 2\,\widehat{EAD}.$$

ou seja,

$$\widehat{EAD} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizando-se o mesmo raciocínio para o triângulo ΔAEB segue que

$$\widehat{BAE} = \widehat{EBA} = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto

$$\widehat{BAD} = \widehat{EAD} + \widehat{BAE} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

De modo análogo (utilizando-se os triângulos ΔAEB, ΔBEC e ΔCED) podemos mostrar que (será deixado como exercício para o leitor)

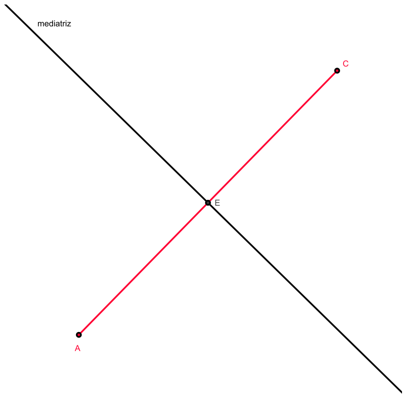
$$\widehat{CBA} = \widehat{DCB} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2},$$

isto é, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

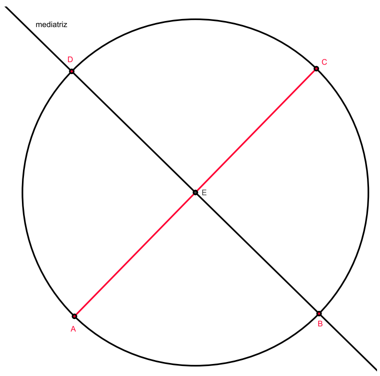
Além disso, os triângulos , ΔAEB, ΔBEC e ΔCED são triângulos congruentes (caso LAL) mostrando com isto que o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado.

Vamos obtê-lo geometricamente.

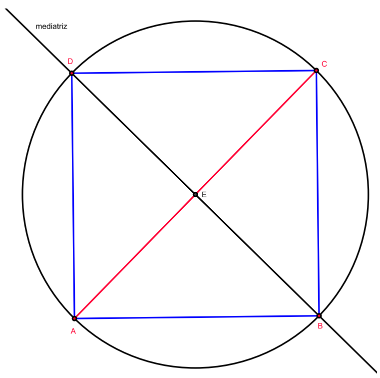
1. Encontremos a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ que intercepta o segmento $\overline{AC}$ no ponto E (seu ponto médio - figura abaixo);



2. Tracemos a circunferência centrada no ponto E de raio $\overline{EA}$ que encontra a mediatriz obtida no item 1. nos pontos B e D (figura abaixo);



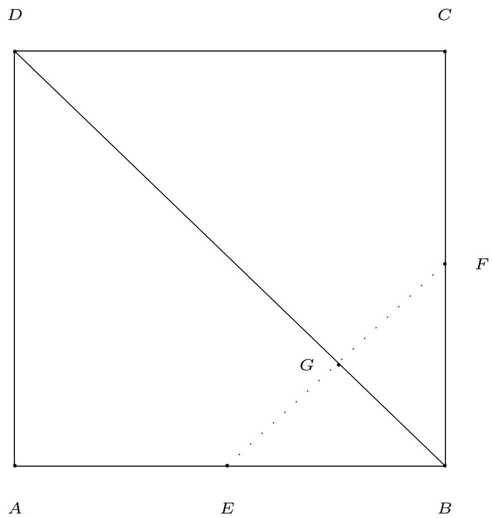
3. Os pontos A, B, C e D formam um quadrado cuja diagonal é o segmento $\overline{AC}$ dado (figura abaixo).



Exercício 1.10.2 *Construir um quadrado conhecendo-se os pontos médios de dois lados adjacentes.*

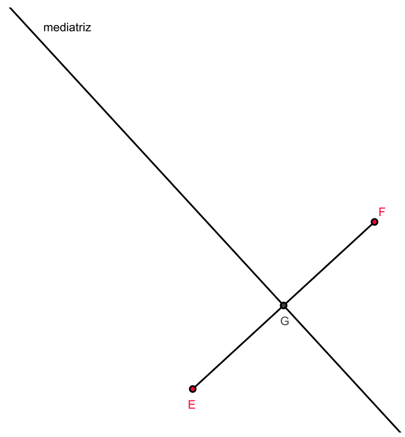
Resolução:

Para ilustrar o problema consideremos a figura abaixo:



Suponhamos que sejam dados os pontos médios, E e F, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

1. Começaremos traçando a mediatriz do segmento $\overline{EF}$ (figura abaixo);



Observemos que os vértices B e D do quadrado $\square ABCD$ estão sobre esta mediatriz.

De fato, se G é o ponto de intersecção do segmento de reta $\overline{BD}$ com o segmento de reta $\overline{EF}$ então os triângulos ΔBEG e ΔFBG são congruentes (caso LLL, pois, por hipótese temos $EB = FB$, $\overline{GB}$ é um lado comum aos dois triângulos e G é ponto médio do segmento $\overline{EF}$).

Em particular,

$$\widehat{EGB} = \widehat{BGF} \tag{1.9}$$

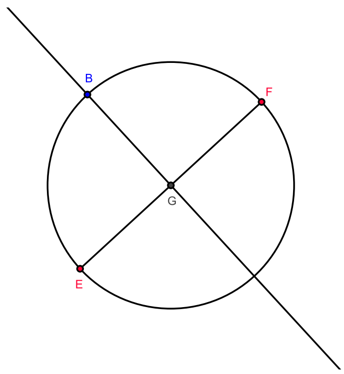
e no vértice G temos

$$\widehat{EGB} + \widehat{BGF} = \pi, \quad \text{assim, (1.9) implicará} \quad \widehat{EGB} = \widehat{BGF} = \frac{\pi}{2}$$

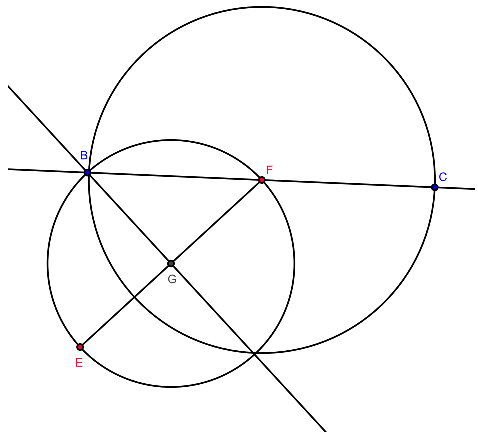
mostrando que o segmento de reta $\overline{BD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{EF}$, ou seja, deverá estar contido na mediatriz do segmento $\overline{EF}$.

2. A semi-circunferência de centro em G e raio $\overline{EG} = \overline{GF}$ interceptará a mediatriz do item 1. no ponto B (na verdade encontra em outro ponto que não será usado - figura abaixo);

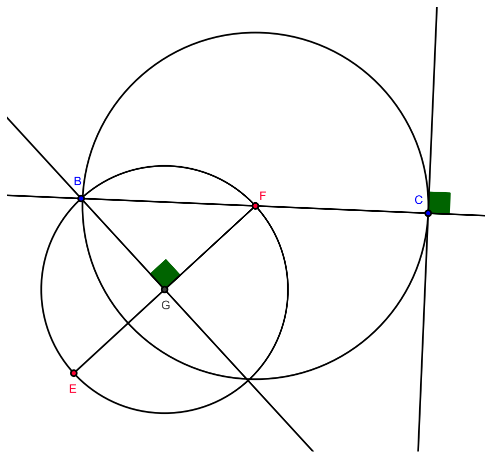
   O ponto B é um dos vértices do quadrado $\square ABCD$ (o ângulo $\widehat{EBF} = \dfrac{\pi}{2}$ pois o triângulo ΔEBF está inscrito na semi-circunferência de centro em G e diâmetro $\overline{EF}$).



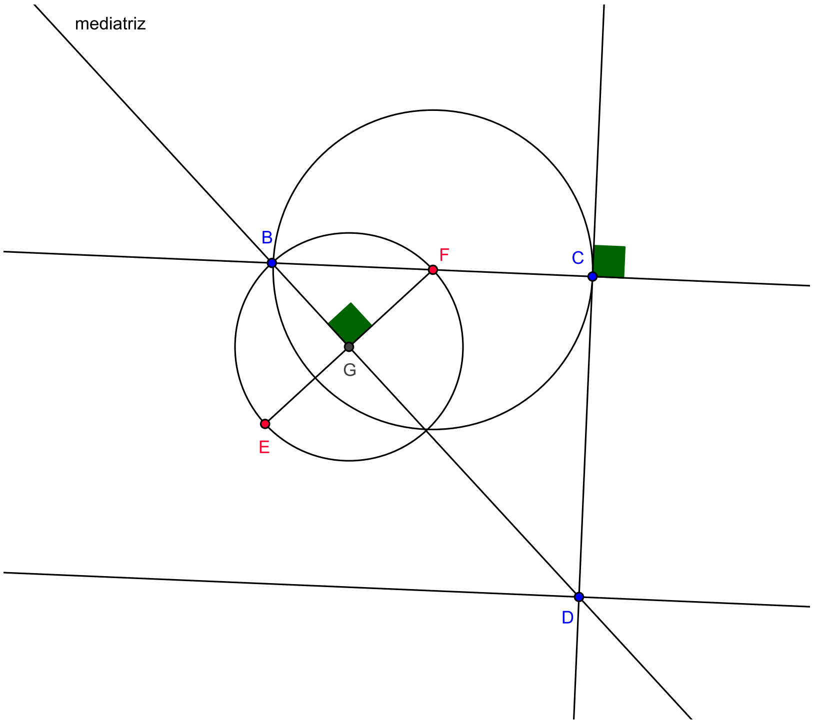
3. A circunferência centrada em F e raio BF encontrará a reta que contém os pontos F e B no ponto C (e no ponto B) que será o outro vértice do quadrado $\square ABCD$ (figura abaixo);



4. Pelo ponto C tracemos a reta perpendicular a reta que contém o segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);

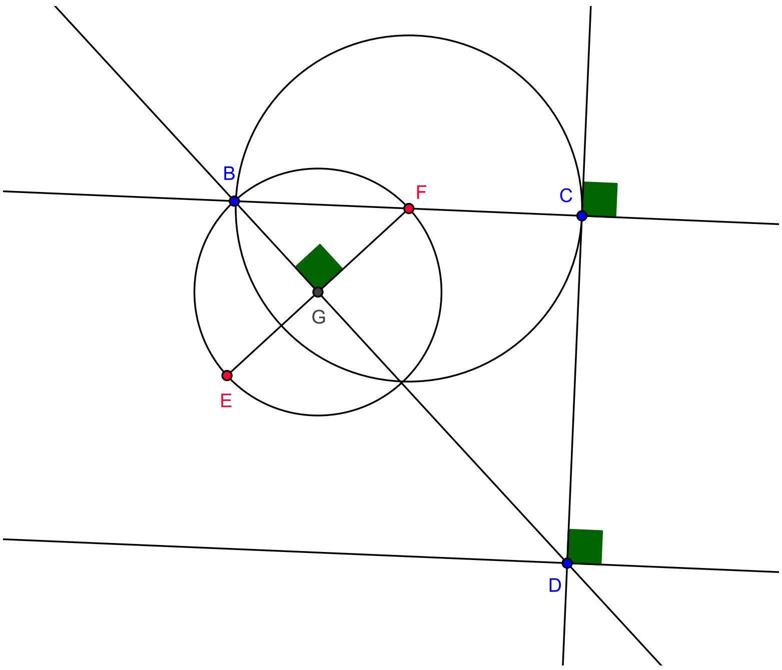


5. A mediatriz do segmento $\overline{EF}$ encontrará a reta perpendicular obtida no item 4. no ponto D que está no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos B e C e contém o ponto E (figura abaixo);

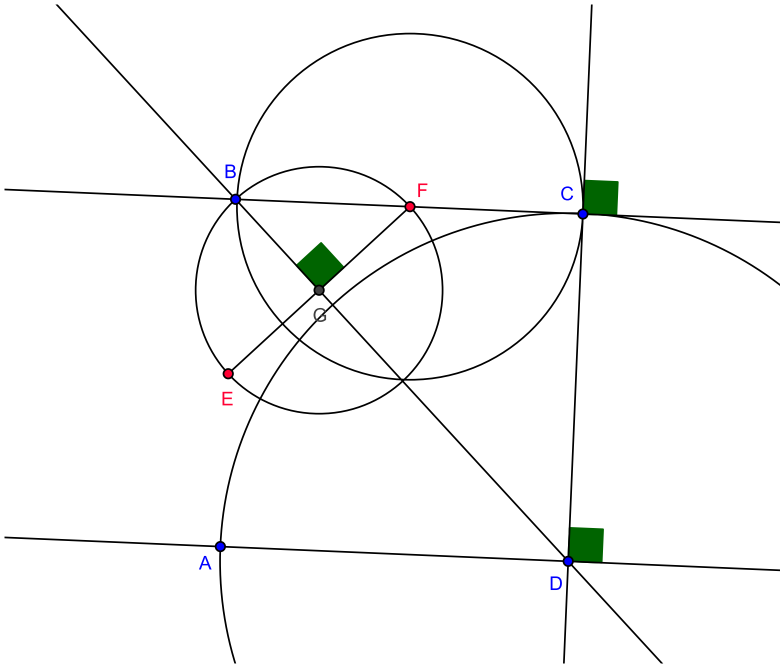


O ponto D é outro vértice do quadrado $\square ABCD$, pois os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e $CD = BC$ por construção.

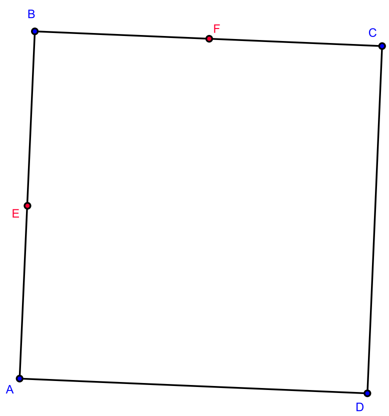
6. Pelo ponto D tracemos a reta perpendicular a reta que contém o segmento $\overline{CD}$.



7. A circunferência de centro em D e raio $BC = CD$ encontrará a reta perpendicular obtida no item 6. no ponto A que está no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos C e D e contém o ponto E.



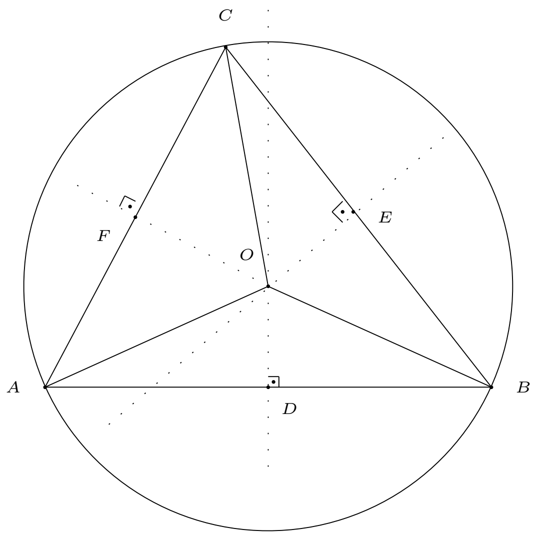
O ponto A é o último vértice do quadrado $\square ABCD$, pois os segmentos de reta $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ são perpendiculares, $AB = AD = DC = BC$ e portanto os lados do quadrilátero $ABCD$ são dois a dois paralelos, de mesmo comprimento e os pontos E e F são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, completando a construção do quadrado $\square ABCD$.



Exercício 1.10.3 *Dado um triângulo ΔABC construir uma circunferência circunscrita ao mesmo.*

Resolução:

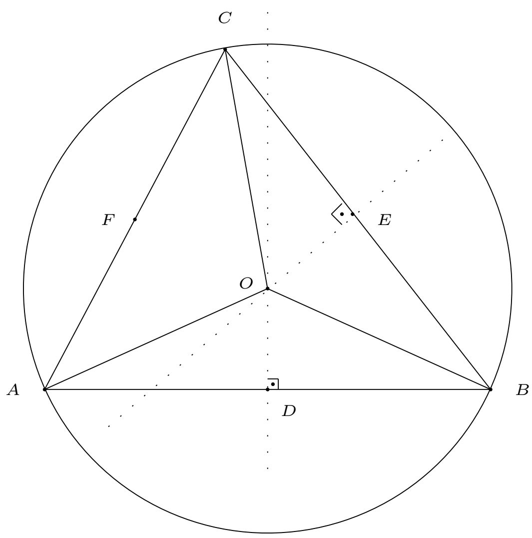
Basta encontrar a intersecção das mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ΔABC (que coincidirá com a intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AC}$ como veremos na observação a seguir).



Mostremos que isto é realmente é verdade.

Para isto precisamos mostrar que $OA = OB = OC$, onde o ponto O é o ponto de interseção das mediatriz relativas aos lados do triângulo ΔABC (as três mediatrizes encontram-se em um único ponto!).

Sejam D, E e F os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente e O o ponto de interseção das mediatrizes relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (figura abaixo).



Pelo caso LAL comum, os triângulos ΔAOD e ΔBDO são congruentes (pois $AD = DB$, $\widehat{ODA} = \widehat{BDO} = \dfrac{\pi}{2}$).

Logo

$$AO = OB.$$

De modo análogo, os triângulos ΔBOE e ΔCEO são congruentes (pois $BE = EC$, $\widehat{OEB} = \widehat{CEO} = \dfrac{\pi}{2}$).

Logo

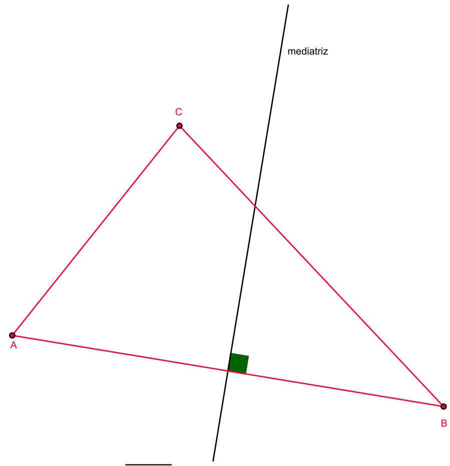
$$OB = OC.$$

Logo podemos concluir que

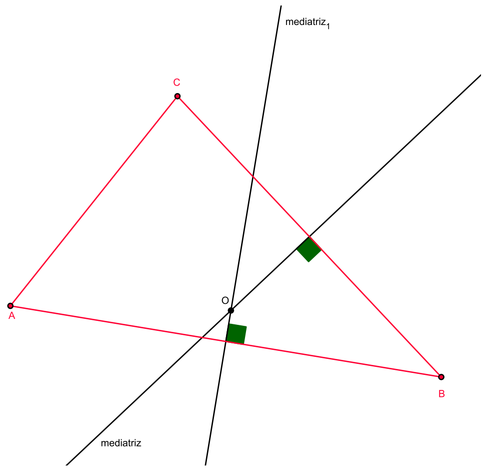
$$OA = OB = OC.$$

Portanto o triângulo ΔABC estará circunscrito na circunferência de centro no ponto O e raio $\overline{OA}$. Geometricamente procedemos da seguinte forma:

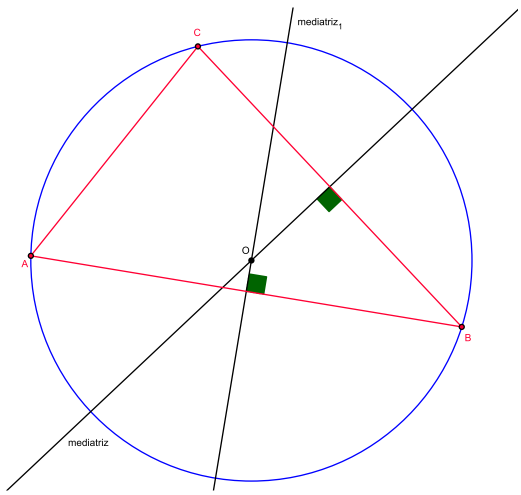
1. Tracemos a mediatriz pelo lado AB (figura abaixo);



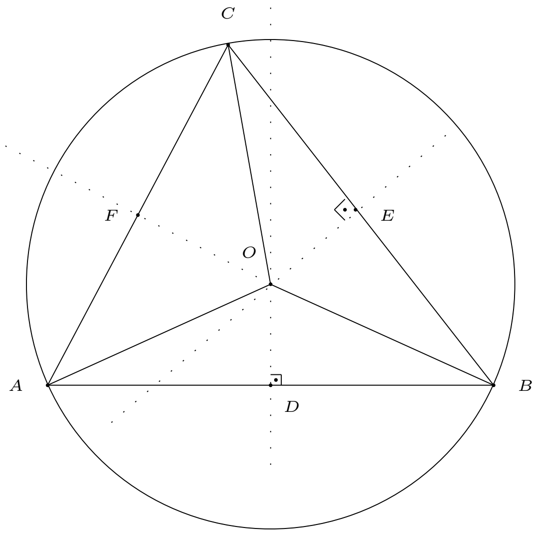
2. Observemos que a mediatriz do lado $\overline{BC}$ encontrará a mediatriz acima no ponto O;



3. A circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC tem centro no ponto O e raio $\overline{OA}$.



Observação 1.10.1 *Como conseqüência temos que o ponto de intersecção das mediatrizes pelos lado* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *também será o ponto* O*.*

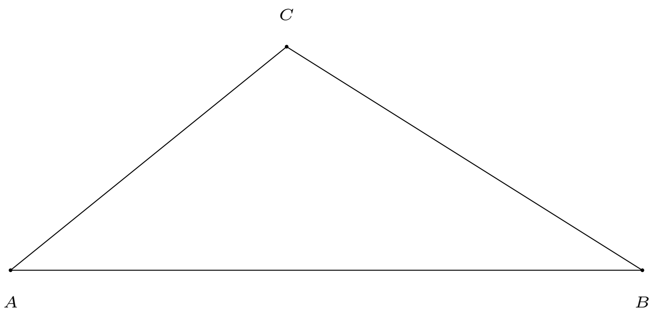


De fato, os triângulos ΔAFO *e* ΔCOF *são congruentes (caso LLL comum) assim* $\widehat{AFO} = \widehat{OFC}$*. Mas*

$$\widehat{AFO} + \widehat{OFC} = \pi, \quad \text{logo} \quad \widehat{AFO} = \widehat{OFC} = \frac{\pi}{2}$$

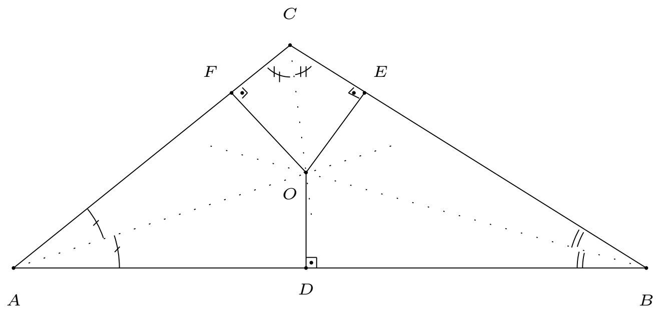
mostrando que o ponto O *está sobre a mediatriz relativamente ao lado* $\overline{AC}$*.*

Exercício 1.10.4 *Dado um triângulo construir uma circunferência inscrita ao mesmo.*



Resolução:

Basta encontrar a intersecção das bissetrizes dos ângulos $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$ do triângulo ΔABC (que coincidirá com a intersecção da bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$ como veremos na observação a seguir).



Seja o ponto O de intersecção das bissetriz dos ângulos do triângulo ΔABC (que estamos supondo que seja único, como será visto na observação a seguir).

Consideremos os pontos D, E e F os pontos de intersecção das perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente que passam pelo ponto O.

Se mostrarmos que $OD = OE = OF$ então a circunferência centrada em O e raio OD estará inscrita no triângulo ΔABC (pois será tangente aos lados do triângulo).

Para mostrar isto observemos que, pelo caso AAL comum, os triângulos ΔOBD e ΔOEB são congruentes (pois $\widehat{BDO} = \widehat{OEB} = \frac{\pi}{2}$ e o lado $\overline{BO}$ é comum).

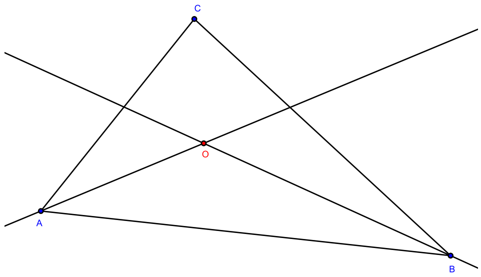
Logo $OD = EO$.

De modo análogo os triângulos ΔAOD e ΔAFO são congruentes (pois $\widehat{ODA} = \widehat{AFO} = \frac{\pi}{2}$ e o lado $\overline{AO}$ é comum) o que implica que $OD = OF$.

Portanto $EO = OD = OF$ como queríamos mostrar.

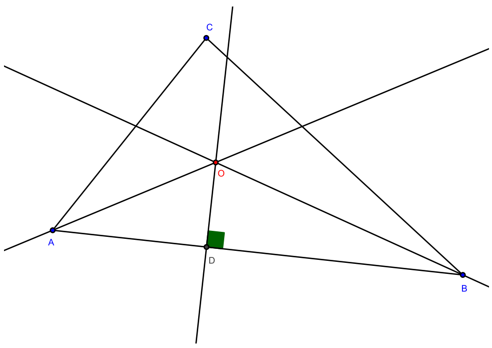
Para a construção geométrica temos:

1. Encontremos as bissetrizes dos ângulos $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$ que se encontram no ponto O (figura abaixo);

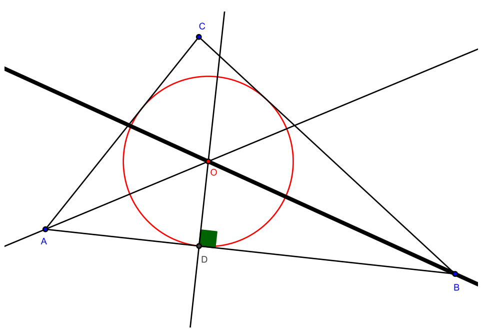


2. Encontremos a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto O.

   Esta reta interceptará a reta que contém os pontos A e B num ponto D (figura abaixo);



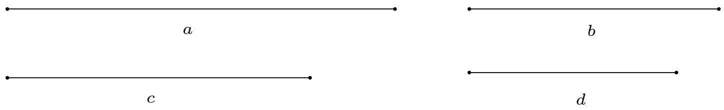
3. A circunferência de centro em O e raio OD é a circunferência inscrita no triângulo ΔABC.



Observação 1.10.2 *Afirmamos que o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos* $\widehat{BAC}$ *e* $\widehat{ACB}$ *também será o ponto* O*.*

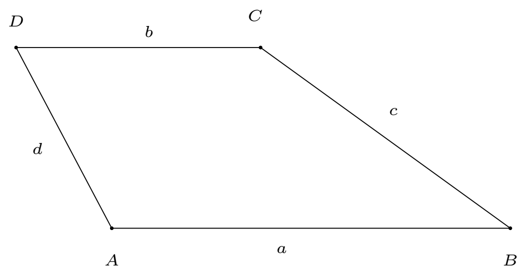
De fato, os triângulos ΔCOF *e* ΔCEO *são congruentes (pois* $\widehat{OFC} = \frac{\pi}{2} = \widehat{CEO}$*,* $FO = EO$*,* $\overline{CO}$ *é comum) assim* $\widehat{FCO} = \widehat{OCE}$ *mostrando que a semi-reta que contém os pontos* C *e* O *é bissetriz do ângulo* $\widehat{ACB}$*).*

Exercício 1.10.5 *Construir um trapézio* $ABCD$ *onde comprimento das bases maior e menor são* $AB = a$ *e* $CD = b$*, respectivamente, e os outros dois lados têm comprimento* $CB = c$ *e* $AD = d$*.*



Resolução:

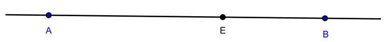
Consideremos sobre uma reta r dois pontos A e B tais que $AB = a$.



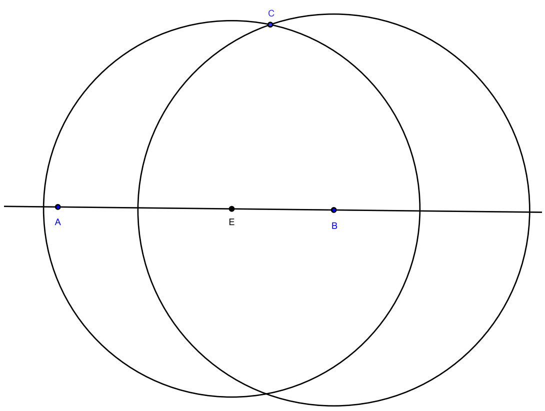
Sabemos que num trapézio $ABCD$ os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.

Com isto podemos fazer a construção, da seguinte forma:

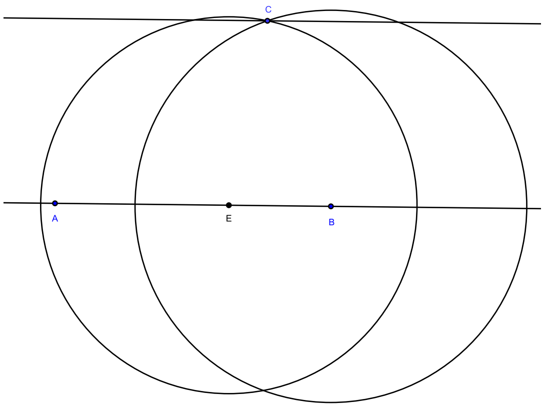
1. Seja E o ponto sobre o segmento $\overline{AB}$ tal que $AE = b$ (ou seja, $AE = CD$) (figura abaixo);



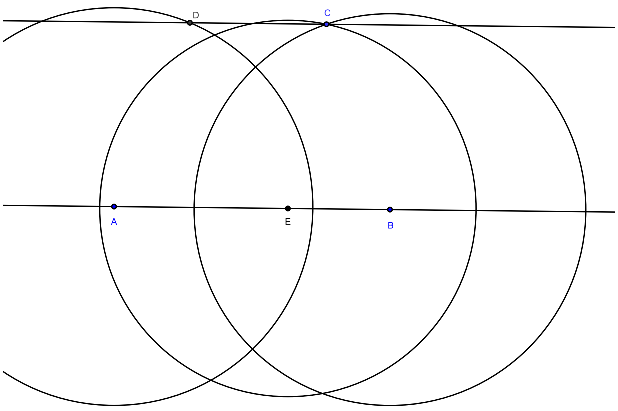
2. Considere C o ponto de intesecção da circunferência centrada em E e raio d com a circunferência centrada em B e raio c (na verdade temos um outro ponto na interseção - figura abaixo);



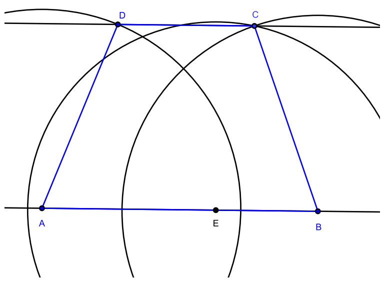
3. Obtenha a reta paralela à reta que contém os pontos A e B que passa pelo ponto C (figura abaixo);



4. Seja D o ponto de interseção da circunferência centrada no ponto A e raio d com a a reta do item 3. (figura abaixo);

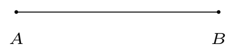


5. Os vértices do trapézio são A, B, C e D.



De fato, observemos que na construção acima temos $AB = a$, $BC = c$ e $AD = d$.
Além disso, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.
Só falta mostrar que $CD = b$.
Mas isso segue do fato que $ADCE$ é um paralelogramo (pois o segmento $\overline{AE}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e segmento $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{EC}$ por construção).

Exercício 1.10.6 *Construir um hexágono regular $ABCDEF$ conhecendo-se o lado $\overline{AB}$.*



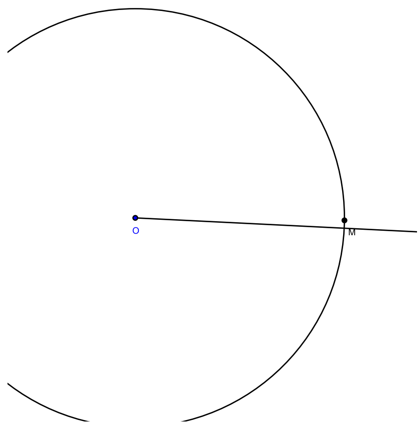
Resolução:

Para construí-lo basta lembrar que os ângulos internos de um hexágono regular são todos iguais a $\dfrac{2\pi}{3}$ (pois a soma dos ângulos internos do mesmo é 4π).

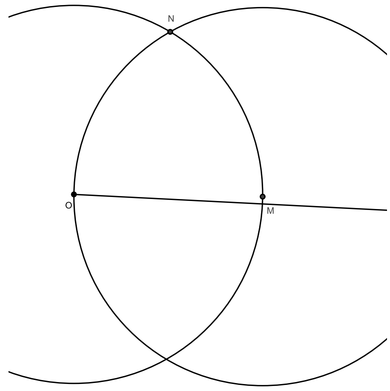
Além disso, lembremos que basta sabermos construir um ângulo que tenha medida $\dfrac{\pi}{3}$ radianos, ou seja um triângulo equilátero e assim teremos $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$.

Para isto agimos da seguinte forma:

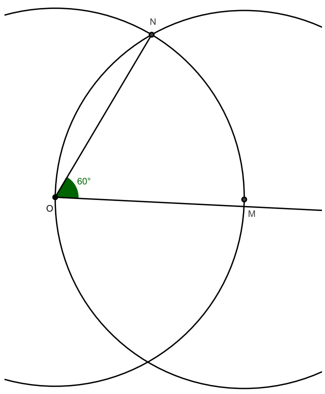
1. Fixemos uma semi-reta com extermidade no ponto O.
2. Tracemos uma circunferência de centro em O e raio qualquer fixado que encontrará a semi-reta acima num ponto M (figura abaixo);



3. Tracemos uma outra circunferência de centro em M e raio igual ao acima que encontrará a circunferência acima num ponto N (na verdade temos um outro ponto - figura abaixo);

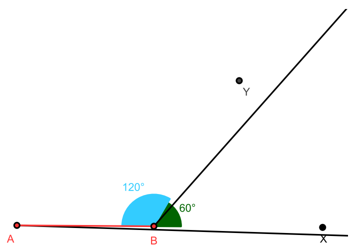


Então o ângulo $\widehat{MON}$ tem medida $\dfrac{\pi}{3}$ radianos (pois os pontos O, M e N são vértices de um triângulo equilátero já que $OM = ON = MN$).

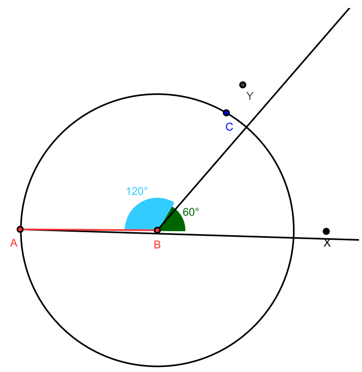


A construção do hexágono basea-se, excencialmente, no transporte conveniente do ângulo $\widehat{MON}$ obtido acima.

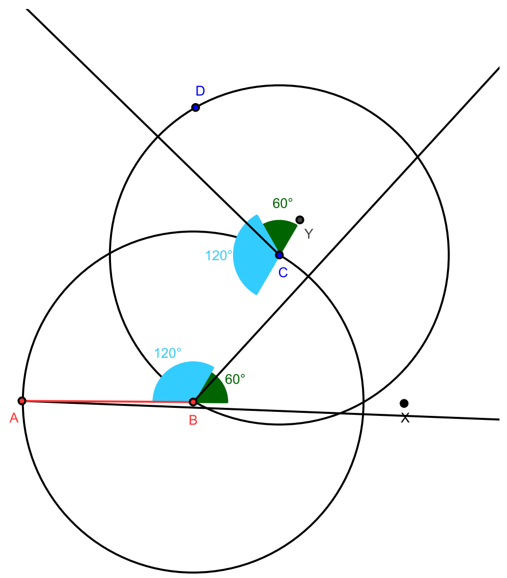
1. Transportemos o ângulo $\widehat{MON}$ para o vértice B, mais precisamente, encontremos os pontos Y e X, sendo este último sobre a semi-reta que contém os pontos A e B, tal que $\widehat{XBY} = \widehat{MON}$ (Y deverá ser obtido - figura abaixo);



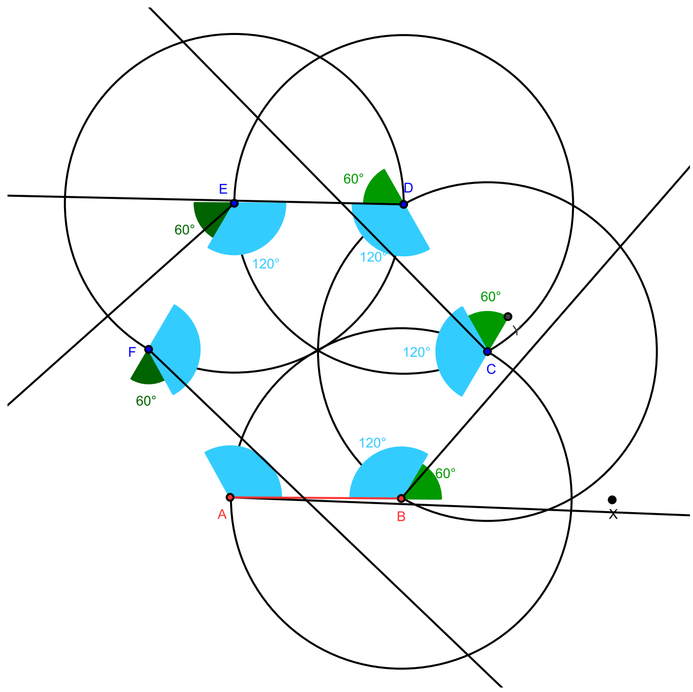
2. Sobre o lado $\overline{BY}$ do ângulo $\widehat{XBY}$ encontre o ponto C de tal modo que $BC = AB$ (figura abaixo);



3. Repita o processo acima no vértice C, ou seja, trocando o segmento $\overline{AB}$ pelo segmento $\overline{BC}$ para encontrar o ponto D (cuidado no transporte do ângulo $\frac{\pi}{3}$!; o ponto D deverá estar no semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos B e C que contém o ponto A - figura abaixo).



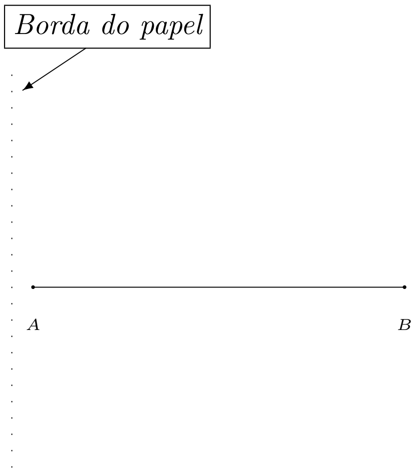
Prosseguindo a construção obteremos o hexágono regular cujo lado $\overline{AB}$ é dado.



Observação 1.10.3 *Lembremos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n-lados é dado por $(n-2)\pi$.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Exercício 1.10.7 *Construir uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto A, estando este ponto muito próximo da borda do papel (veja figura abaixo).*

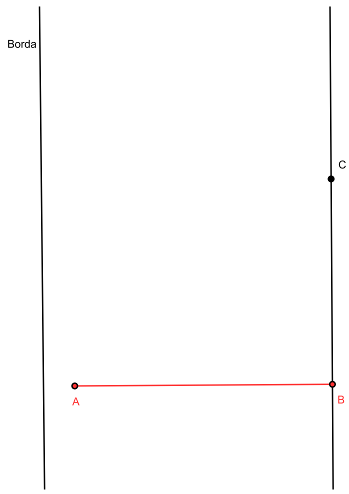


Resolução:

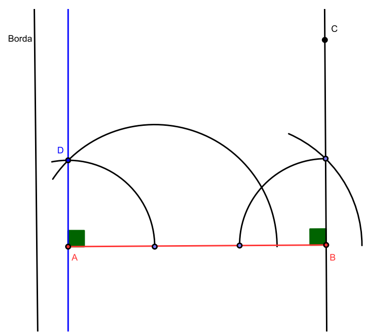
Neste caso podemos agir da seguinte forma:

1. Tracemos a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto B.

   Escolhamos C um ponto da perpendicular obtida acima, diferente do ponto B (figura abaixo);

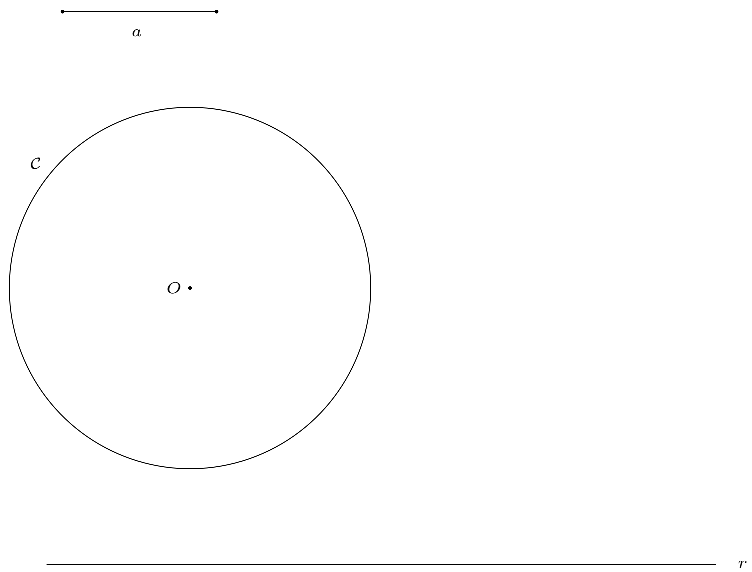


2. Trasportemos o ângulo $\widehat{CBA} = \dfrac{\pi}{2}$ para de tal sorte que um lado do ângulo transportado seja a semi-reta de extremidade no ponto A e que contém o ponto B (isso é possível sem ultrapassar a borda do papel);



3. A reta que contém o outro lado do ângulo transportado (isto é, a reta que contém os pontos A e D) será a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto A.

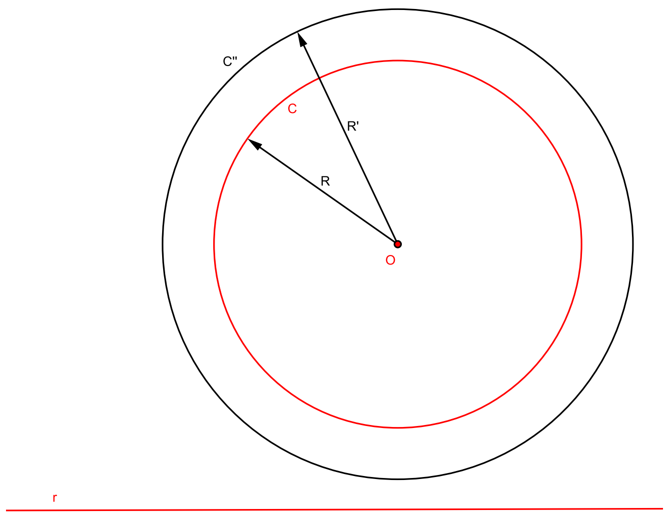
Exercício 1.10.8 *Dadas uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio $R > 0$ e uma reta $\underline{r}$ construir uma circunferência $\mathcal{C}\,'$, de raio $a > 0$ dado, tangente a reta $\underline{r}$ e tangente, exteriormente, a circunferência $\mathcal{C}$.*



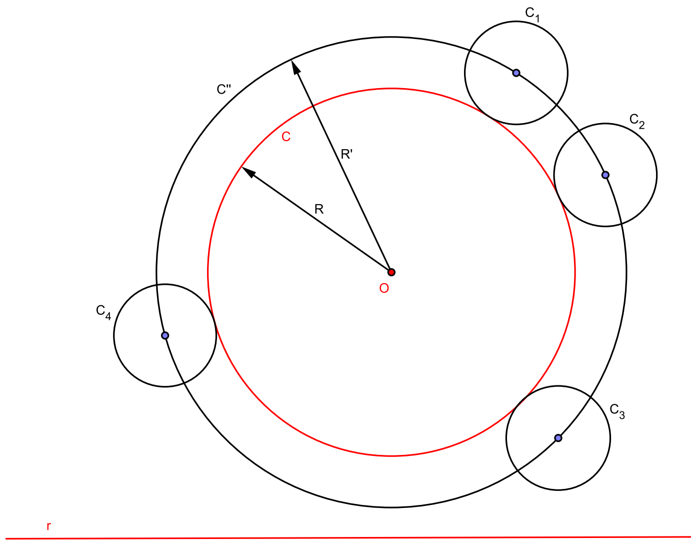
Resolução:

Um modo de encontrar geometricamente a circunferência $\mathcal{C}\,'$ é a seguinte:

1. Tracemos uma circunferência $\mathcal{C}\,''$, de centro em O e raio $R' \doteq R + a$ (figura abaixo);

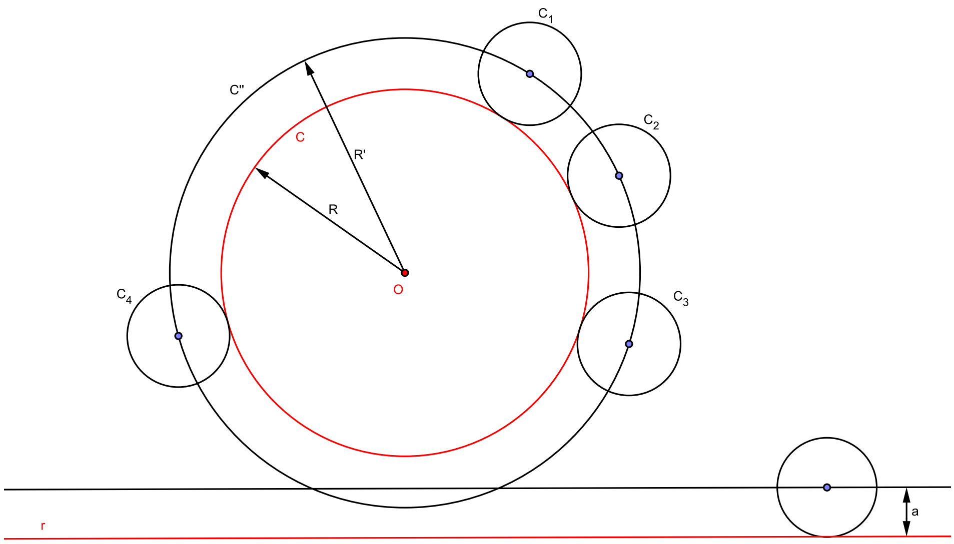


Observemos que todas as circunferência tangentes à circunferência $\mathcal{C}$ têm seus centros sobre a circunferência $\mathcal{C}\,''$ (as circunferência $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ na figura abaixo são tangentes à circunferência $\mathcal{C}$);

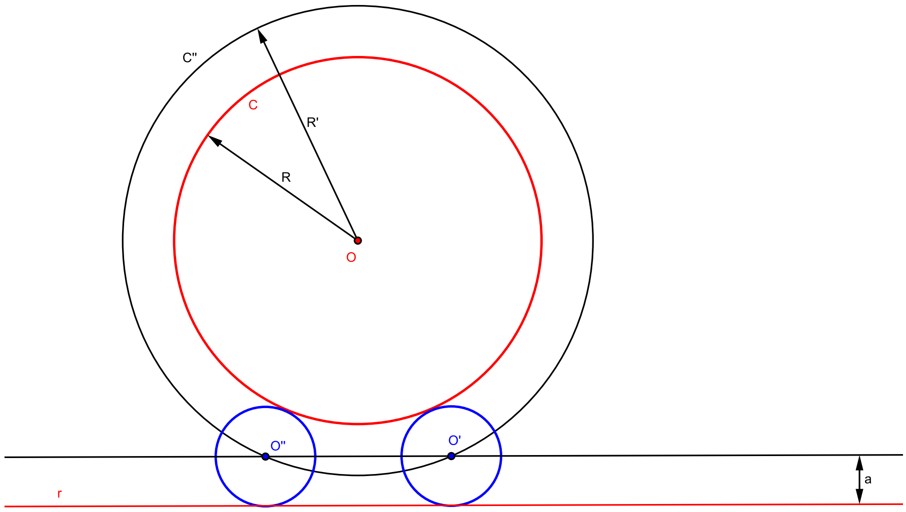


2. Encontremos a(s) reta(s) paralela(s) à reta $\underline{r}$ que dista(m) $\underline{a}$ da mesma.

   Observemos que para a circunferência $\mathcal{C}\,'$, de raio $\underline{a}$, ser tangente à reta $\underline{r}$ ela ter seu centro sobre uma das retas paralelas obtidas acima (figura abaixo);



3. Na intersecção da circunferência, $\mathcal{C}\,''$, obtida no item 1., com a reta paralela do item 2. obteremos o centro, O' (teremos um outro ponto), da circunferência $\mathcal{C}$ procurada, que pode ser traçada utlizando-se o raio $\underline{a}$ (figura abaixo).

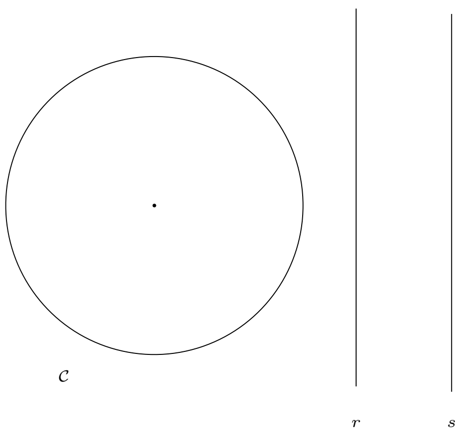


Exercício 1.10.9 *Dadas as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ e a circunferência $\mathcal{C}$, determinar, geometricamente, os pontos da circunferência $\mathcal{C}$ que são equidistantes da reta $\underline{r}$ e da reta $\underline{s}$. Qual o número máximo de soluções?*

<u>**Resolução:**</u>

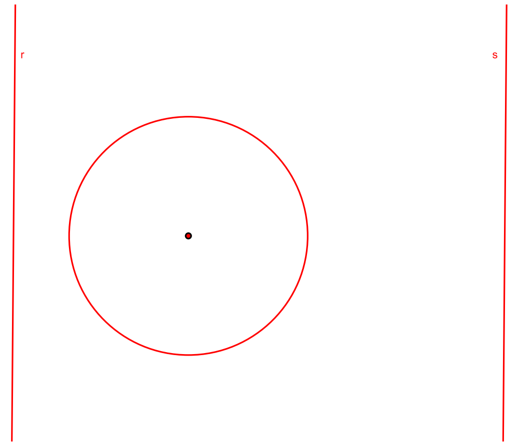
Ieremos que eestudar as várias possibilidades, a saber:

I. As retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são paralelas, distintas e a circunferência $\mathcal{C}$ está num dos semi-planos determinado por uma das retas (digamos a reta $\underline{r}$) que não contém a reta $\underline{s}$ (figura abaixo):



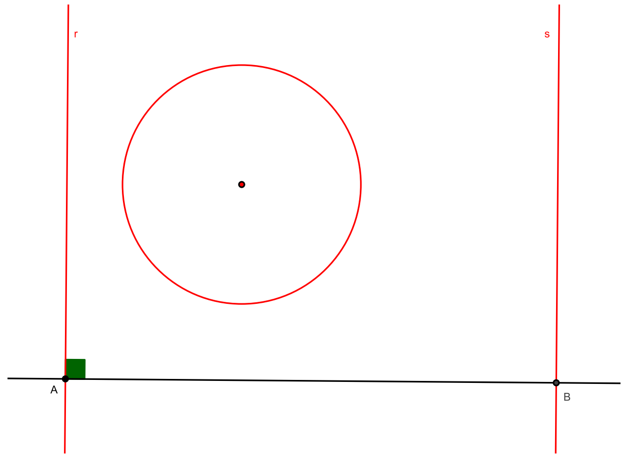
Neste caso o lugar geométrico para o problema será vazio, pois os pontos que são equidistantes da circunferência $\mathcal{C}$ e da reta $\underline{r}$ estarão a uma distância da reta $\underline{s}$ estritamente maior que à distância à reta $\underline{r}$.

II. As retas r e s são paralelas, distintas e a circunferência $\mathcal{C}$ está na faixa delimitada pelas duas retas (vide figura abaixo):

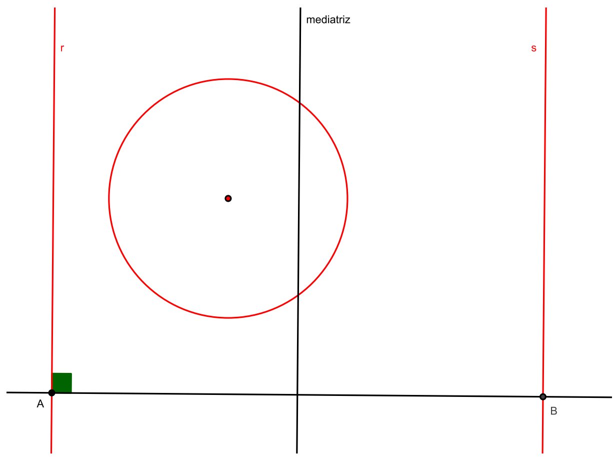


Passemos a resolução, geométrica, do problema.

II.1. Considere a reta perpendicular à reta $\underline{r}$ por um ponto A da mesma, que interceptará a reta $\underline{s}$ num ponto B. Notemos que esta reta será perpendicular à reta $\underline{s}$ (figura abaixo);



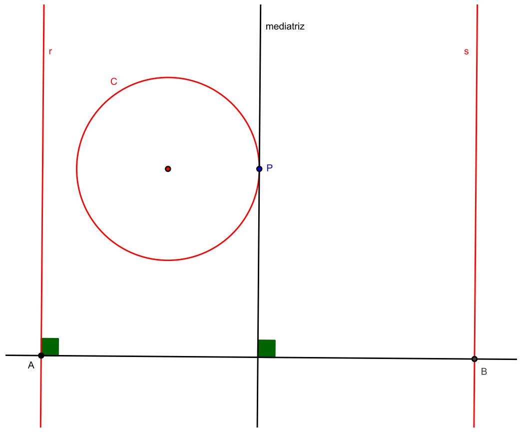
II.2. Considere a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
Esta mediatriz é o lugar geométrico de todos os ponto que são equidistantes das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ (figura abaixo);



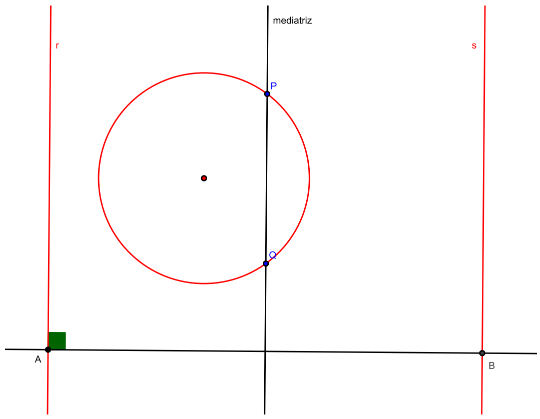
II.3. Portanto, cada ponto de intersecção da reta mediatriz do item 2. com a circunferência $\mathcal{C}$ será equidistante das retas $\underline{r}$, $\underline{s}$.

Neste caso, podemos ter as seguinte situações:

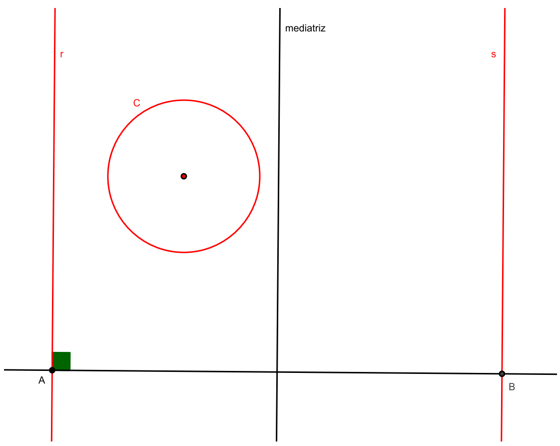
i. uma única solução, o ponto P, caso a mediatriz do item 2. seja tangente a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo):



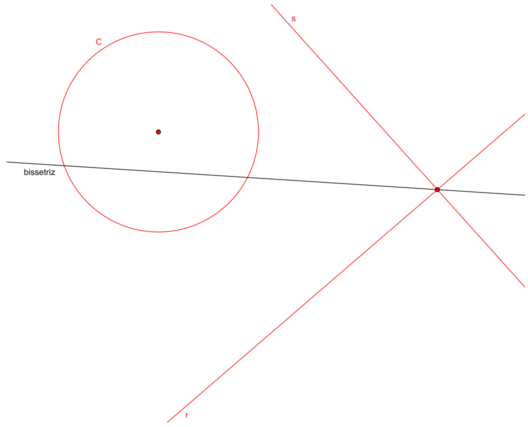
ii. duas soluções distintas, ou seja, os pontos P e Q, caso a mediatriz do item 2. seja secante a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo):



iii. ou nenhuma solução, isto é, conjunto vazio, caso a mediatriz do item 2. não intercepte a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo):

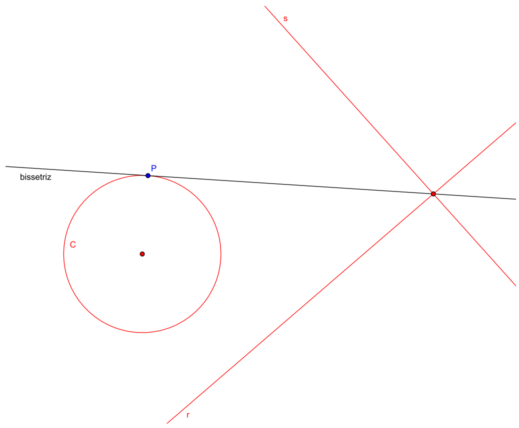


III. Se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ forem concorrentes (não coincidentes) sabemos que o lugar geométrico dos pontos equidistantes das mesmas será a bissetriz dos ângulos determinados pelas mesmas (figura abaixo).

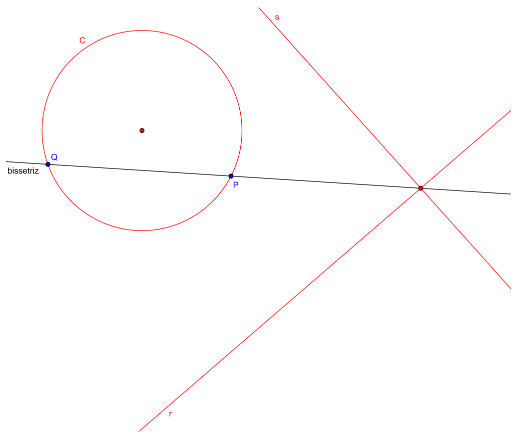


Neste caso, geometricamente, podemos ter as seguinte situações:

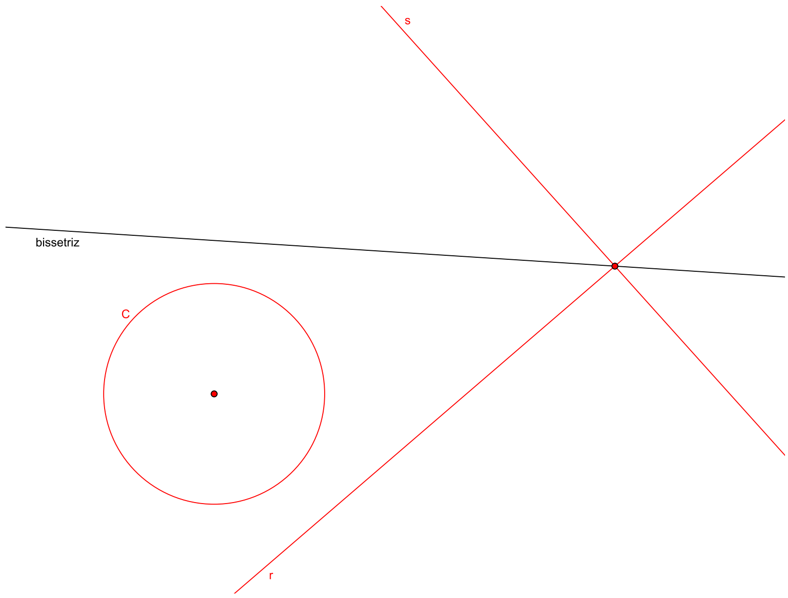
(a) uma única solução, o ponto P, se a reta bissetriz for uma reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ (ficgura abaixo);



(b) duas soluções distintas, isto é, dois pontos P e Q, se a reta bissetriz for secante a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo);

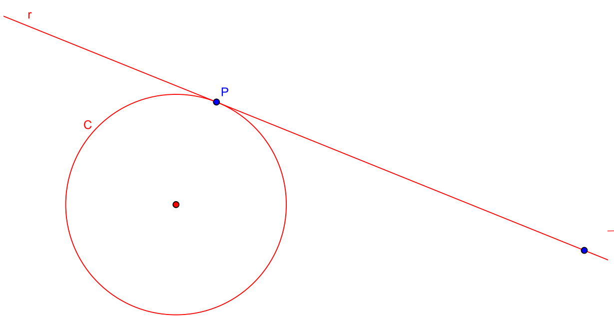


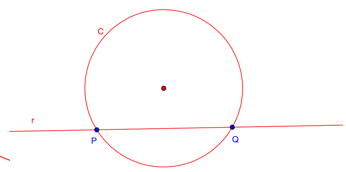
(c) nenhuma solução, isto é, o conjunto vazio, se a reta bissetriz não interceptar a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



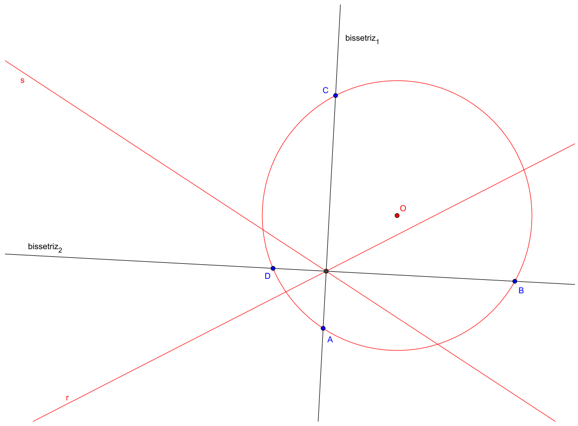
Observação 1.10.4 *No exercício acima se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *forem concorrentes e, por exemplo, a reta* $\underline{r}$ *é secante a circunferência* $\mathcal{C}$ *então teremos apenas duas possibilidades:*

1. *se a reta* $\underline{s}$ *coincide com a reta* $\underline{s}$ *então o conjunto procurado é formado pelos pontos de interseção da reta* $\underline{r}$ *com a circunferência* $\mathcal{C}$ *(que pode ser um único ponto se a reta* $r = s$ *for tangente a circunferência* $\mathcal{C}$ *ou dois pontos distintos se a a reta* $r = s$ *for secante a circunferência* $\mathcal{C}$ *(figuras abaixo);*

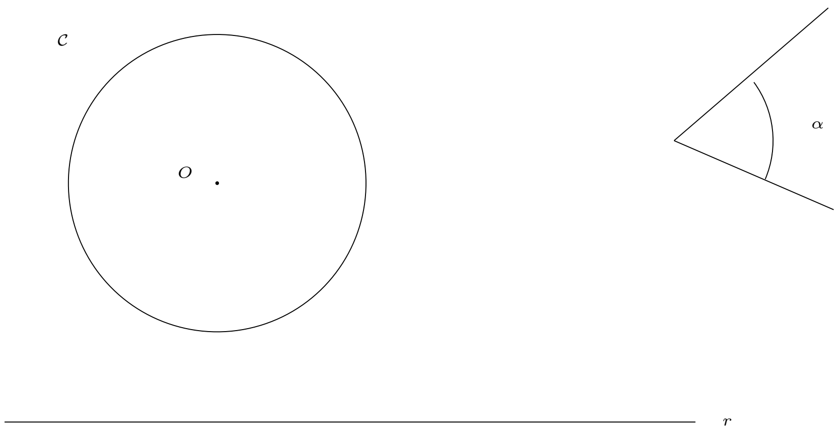




2. *se a reta* $\underline{s}$ *não for coincidente com a reta* $\underline{s}$ *então o lugar geométrico dependerá, como num caso anterior, se a circunferência* $\mathcal{C}$ *intercepta ou não as retas bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas concorrentes* r *e* s *(podemos ter até 4 soluções - figura abaixo);*

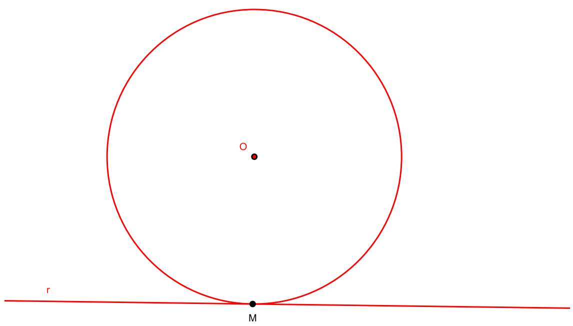


Exercício 1.10.10 *Dadas a circunferência $\mathcal{C}$ e um reta $\underline{r}$, determinar um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de forma que as retas tangentes traçadas pelo ponto P à circunferência $\mathcal{C}$ formem um ângulo α dado.*

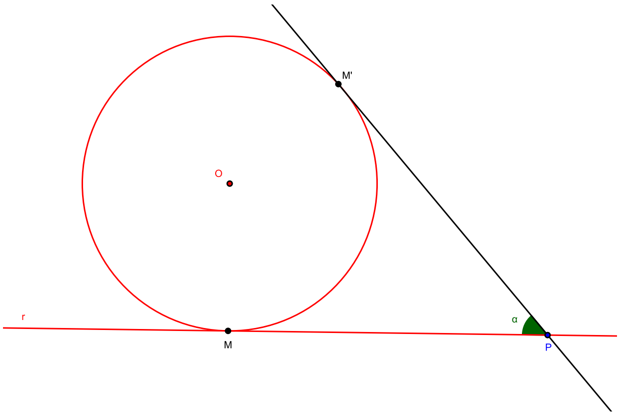


Resolução:

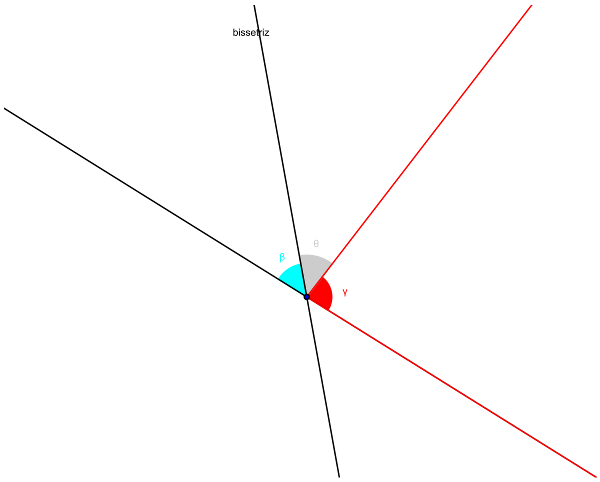
I. Consideremos primeiramente o caso em que a reta $\underline{r}$ é tangente a circunferência $\mathcal{C}$ num ponto M (figura abaixo).



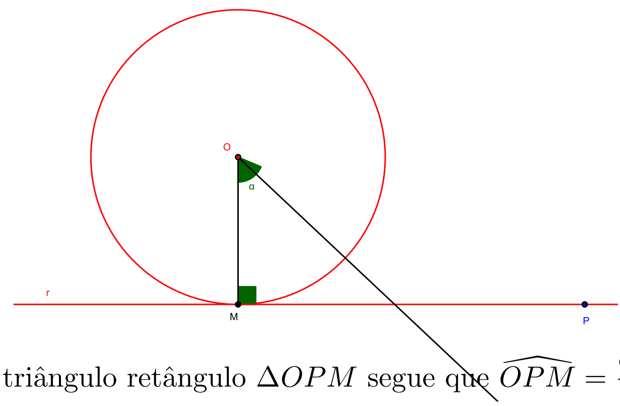
Neste caso podemos obter, geometricamente, um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ (exitirá outro) de tal modo que $\widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2}$ (figura abaixo).



Para isto, obtenhamos um ângulo de medida $\theta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$ (notemos que figura abaixo, temos que $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \alpha$ e $\beta + \alpha + \dfrac{\pi}{2} = \pi$).

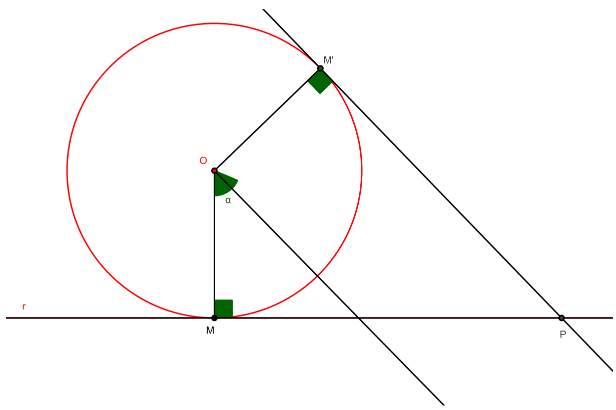


Façamos o transporte do ângulo $\theta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$ obtido acima de tal modo que um dos lados do mesmo seja a semi-reta que tem origem no ponto O e que contenha o ponto M que encontrará a reta $\underline{r}$ no ponto P (figura abaixo);



Observemos que do triângulo retângulo ΔOPM segue que $\widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2}$.

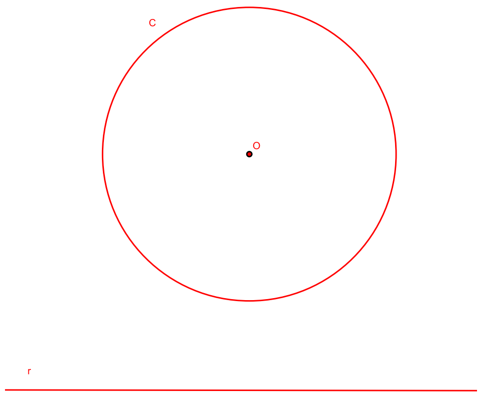
Seja M' o ponto de tangência da outra reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ pelo ponto P (figura abaixo);



Observemos que $\widehat{M'PO} = \widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2}$, pois os triângulos ΔOPM e $\Delta OM'P$ são congruentes (caso ALA).

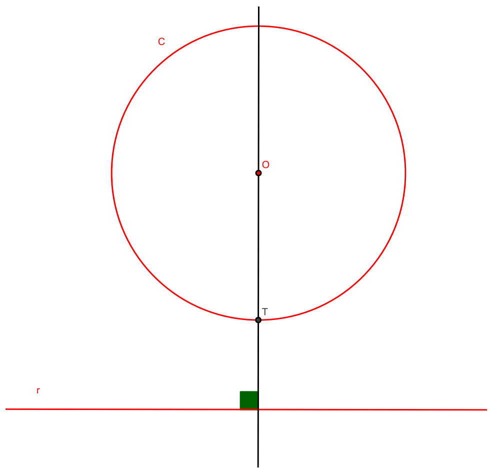
Logo $\widehat{M'PM} = \widehat{M'PO} = \widehat{OPM} = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \alpha$ como pedido no exercício.

II. Consideremos agora o caso em que a circunferência $\mathcal{C}$ e a reta $\underline{r}$ não se interceptam (figura abaixo).

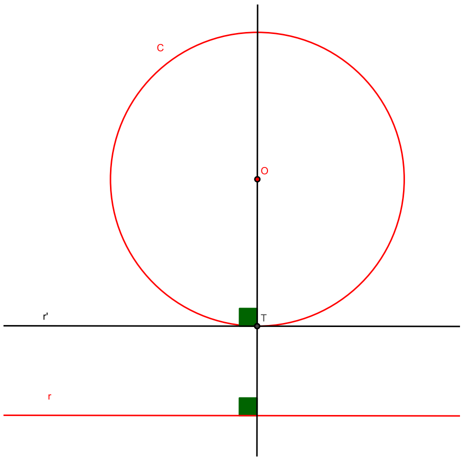


Neste caso consideraremos uma reta, $\underline{r}'$, paralela a reta $\underline{r}$ que seja tangente a circunferência $\mathcal{C}$.

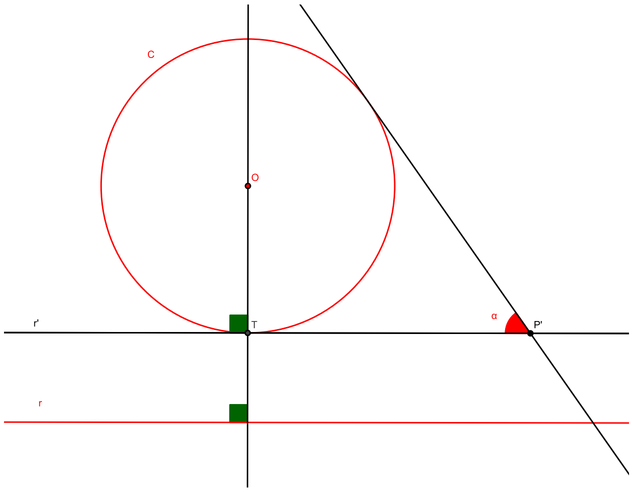
Para obtê-la traçamos a reta perpendicular a reta $\underline{r}$ que passa pelo ponto O, que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto T (figura abaixo).



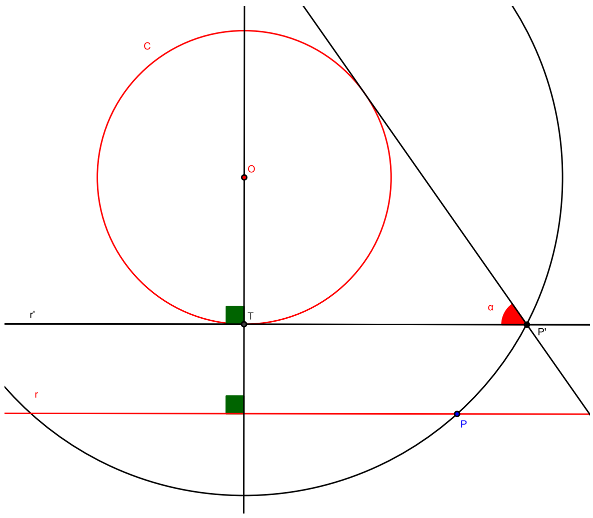
A seguir traçamos a reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ pelo ponto T (figura abaixo).



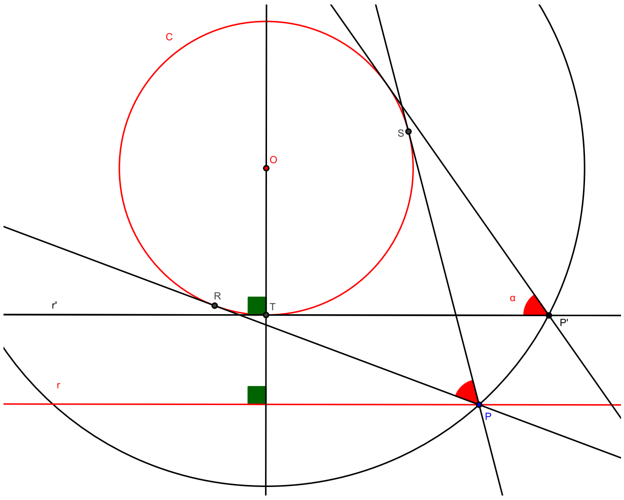
Agimos como no item I para obter um ponto P' sobre a reta $\underline{r'}$ com a propriedade requerida (figura abaixo).



Consideremos a circunferência, $\mathcal{C}\,'$, de centro em O e raio $\overline{OP'}$ que interceptará a reta r num ponto P (e em um outro, eventualmente - figura abaixo).

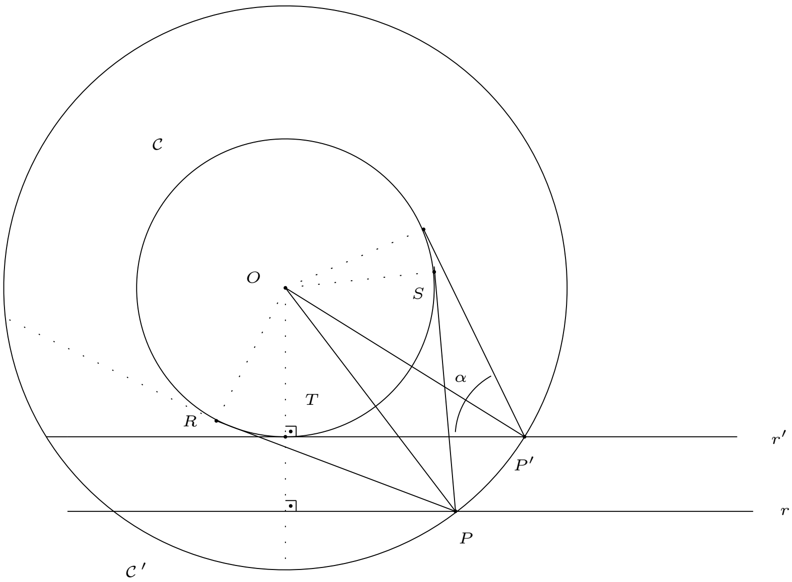


Afirmamos que o ponto P tem a propriedade que queremos, ou seja, as semi-retas tangentes à circunferência $\mathcal{C}$ que contém o ponto P formam ângulo de medida α (figura abaixo).



Para isto basta mostrar que o ângulo $\widehat{SPR} = \alpha$.

Como $\widehat{OPR} = \widehat{SPO}$ (pois a semi-reta $\overline{PO}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{SPR}$) e $\widehat{OP'T} = \dfrac{\alpha}{2}$ (pois a semi-reta $\overline{P'O}$ é bissetriz do ângulo α) segue que basta mostrar que $\widehat{OPR} = \widehat{OP'T}$ (ver figura abaixo).



Para isto observemos que os triângulos ΔOPR e $\Delta OP'T$ são congruentes pelo caso LLL.

De fato, pois $OP = OP'$, $OR = OT$ e os segmentos $\overline{PR}$ e $\overline{P'T}$ correspondem a metade das cordas da circunferência $\mathcal{C}\,'$ que são tangentes a circunferência $\mathcal{C}$ nos pontos R e T, logo essas cordas têm mesmo comprimento e seus pontos médios serão R e S, respectivamente, ou seja os pontos de tangência das cordas da circunferência $\mathcal{C}\,'$ com a circunferência $\mathcal{C}$, logo, $PR = P'T$.

Em particular, $\widehat{OPR} = \widehat{OP'T}$ completando a prova deste caso.

III. Consideremos o último caso em que a reta $\underline{r}$ é secante à circunferência $\mathcal{C}$.

Neste caso agimos de modo semelhante ao utilizado no item II. e será deixado como exercício para o leitor.

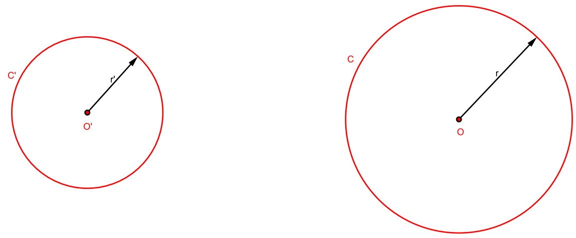
Exercício 1.10.11 *Construir uma reta tangente comum às circunferência $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ dadas.*

Resolução:

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas circunferências de centro em O e O' com raios r e r', respectivamente.

Temos as seguintes possibilidades:

I. As circunferências são exteriores uma da outra (ou seja, distância entre os centros O e O' é maior que a soma dos raios r e r' - figura abaixo).

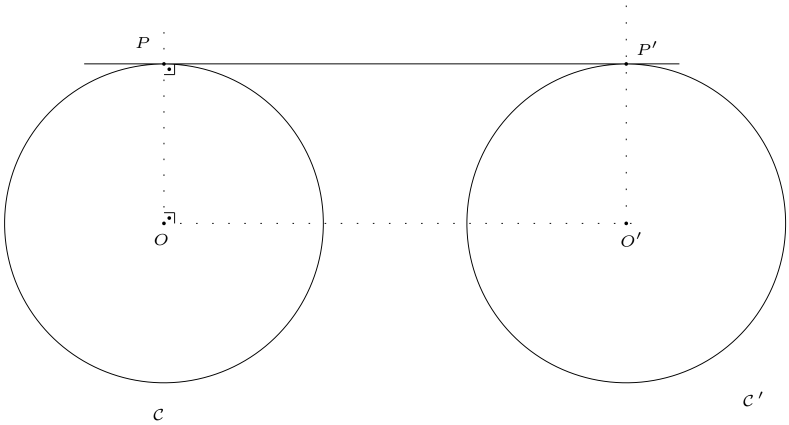


Dividiremos o estudo deste caso em duas situações: $r = r'$ e a outra será $r > r'$.

(a) Caso que $r = r'$.

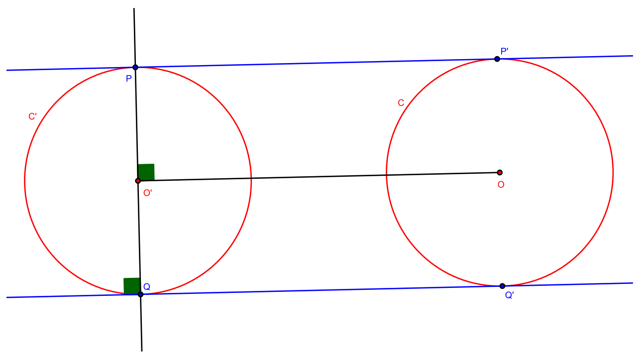
Neste consideramos a reta perpendicular a ao segmento $\overline{OO'}$ pelo ponto O que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto P.

A reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ pelo ponto P é uma reta tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.



De fato, o segmento $\overline{O'P'}$ (cujo comprimento é o raio da circunferência $\mathcal{C}'$) é perpendicular ao segmento $\overline{PP'}$ no ponto P' que está na circunferência $\mathcal{C}'$ (lembremos que $OP = O'P'$).

Observemos que, neste caso, temos uma outra reta tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ (figura abaixo).

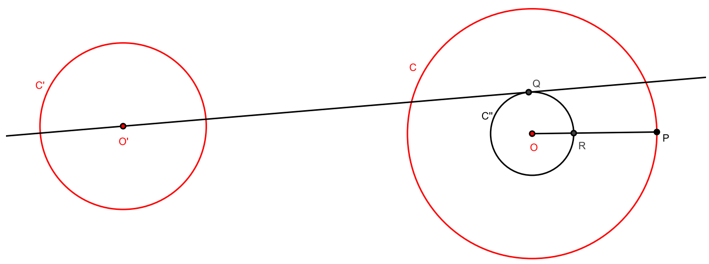


(b) Se $r > r'$ agiremos da segunte forma:

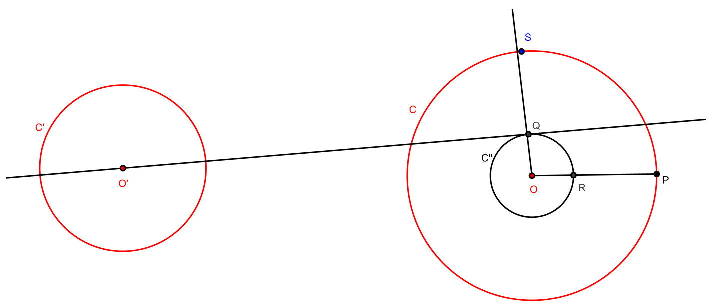
Consideremos $\overline{OP}$ um segmento que nos dá o raio da circunferência $\mathcal{C}$.

Encontremos o ponto R sobre o segmento $\overline{OP}$ de tal modo que $PR = r'$ e tracemos a circunferência $\mathcal{C}''$ de centro em O e raio OR (ou seja, o raio da circunferência $\mathcal{C}''$ será $r - r'$ - figura abaixo).

Encontremos a reta tangente a circunferência $\mathcal{C}''$ que passa pelo ponto O' com ponto de tangência $Q \in \mathcal{C}''$ (na verdade temos retas tangentes distinas - figura abaixo).



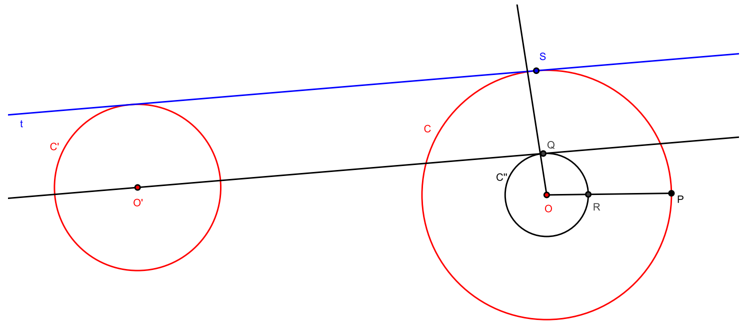
Consideremos a semi-reta com extremidade no ponto O que contém o ponto Q, que interceptará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto S (figura abaixo).



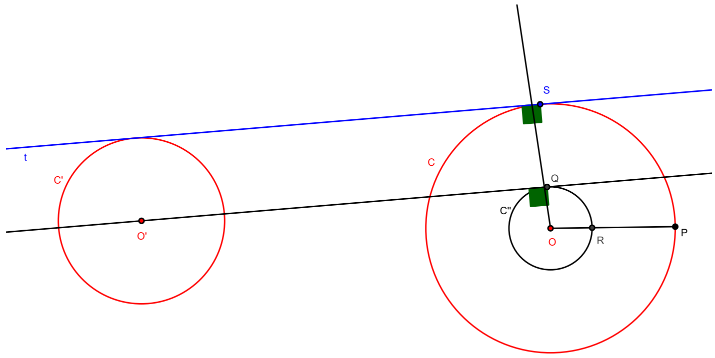
Encontremos a reta paralela à reta que contém os pontos Q e O' passando pelo ponto S (figura abaixo).

Esta reta, t, será, como mostraremos a seguir, a reta tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, completando assim a construção.

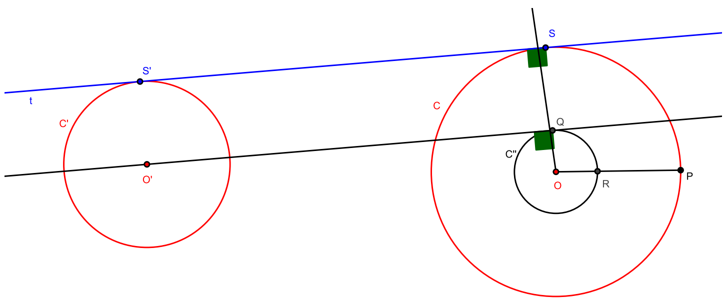
Observemos que, realmente, a reta $\underline{t}$ é tangente às circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.



De fato pois a reta que contém os pontos O' e Q é tangente à circunferência $\mathcal{C}''$, logo $\widehat{O'QO} = \dfrac{\pi}{2}$ e como a reta $\underline{t}$ é uma reta paralela a reta que contém os pontos O' e Q teremos $\widehat{S} = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, a reta $\underline{t}$ é uma reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



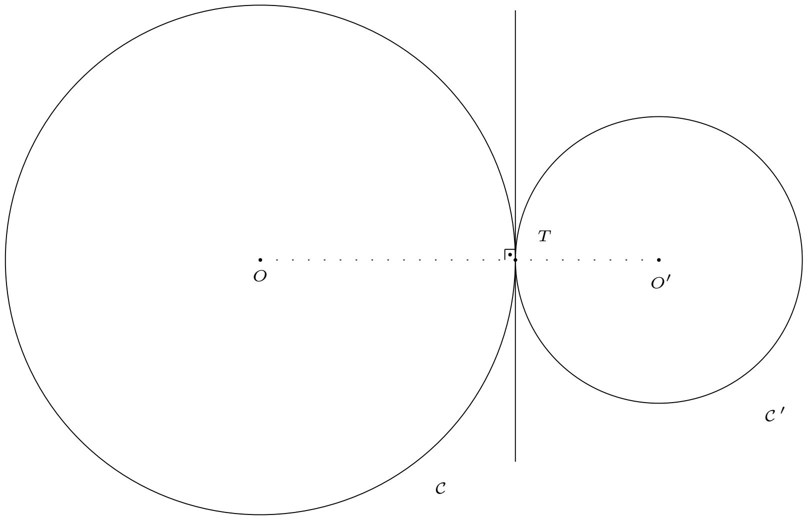
Seja S' o ponto da reta $\underline{t}$ tal que o quadrilátero $O'S'SQ$ seja um paralelogramo.
Neste caso temos que $O'S' = QS = RP = r'$, ou seja S' está sobre a circunferência $\mathcal{C}'$ (figura abaixo).



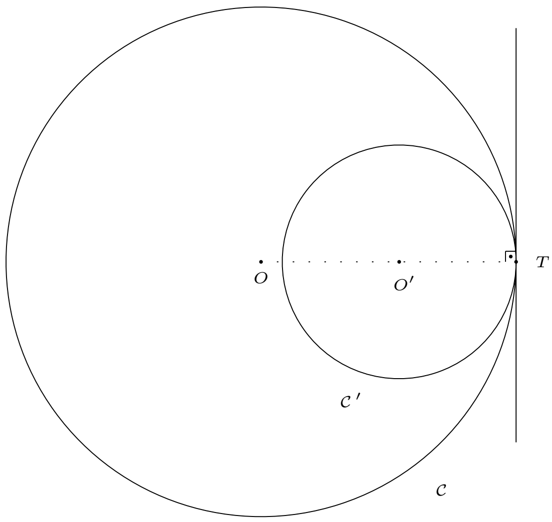
Para finalizar, mostremos que a reta $\underline{t}$ é a reta tangente a circunferência $\mathcal{C}'$ no ponto S', ou seja, que o segmento de reta $\overline{SS'}$ é perpendicular ao segmento $\overline{O'S'}$.
Para verificar isto observamos que os segmentos $\overline{QS}$ e $\overline{O'S'}$ são paralelos e que o ângulo $\widehat{S'SQ}$ é um ângulo reto implicando que o ângulo $\widehat{O'S'S}$ também é deverá ser um ângulo reto.
Portanto os segmentos $\overline{O'S'}$ e $\overline{S'S}$ são perpendiculares em S', mostrando que a reta que contém o segmento SS' (ou seja, a reta $\underline{t}$) é uma reta tangente às circunferência $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ (nos pontos S e S', respectivamente) como queríamos demonstrar.

II. As circunferências são tangentes.

Podemos ter uma tangência entre as circunferências e as duas serem exteriores uma da outra (ou seja, a distância entre os centros O e O' é igual a soma dos raios r e r' - figura abaixo).



Outra possibilidade seria termos uma tangência entre as circunferências e uma delas ser interior a outra, por exemplo $\mathcal{C}'$ está no interior de $\mathcal{C}$ (ou seja, a distância entre os centros O e O' seria a diferença dos raios r e r' - figura abaixo).

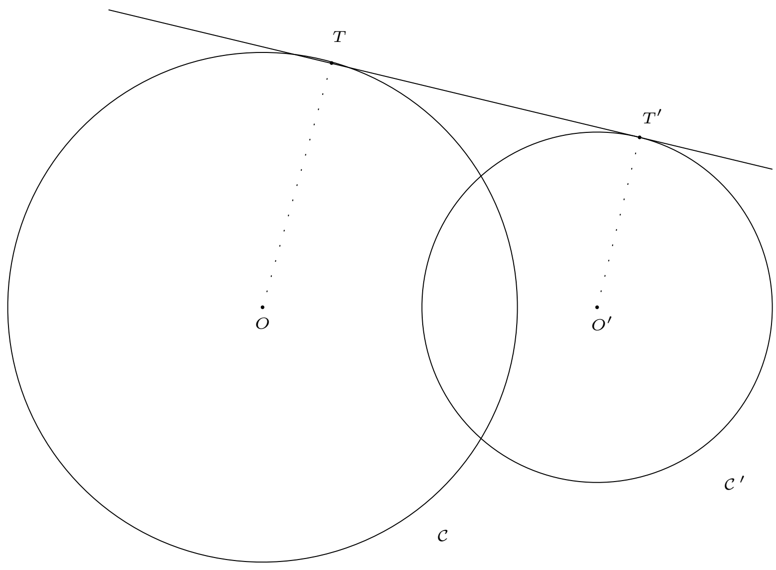


Em qualquer um dos casos acima, a reta tangente comum às duas circunferências será a reta tangente a uma delas no ponto de intersecção das mesmas.

III. As circunferências são secantes.

Neste caso agiremos de modo semelhante ao do item I.

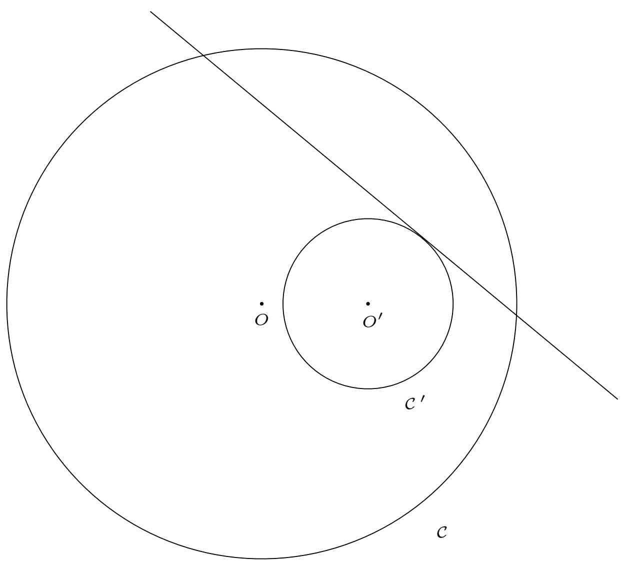
Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.



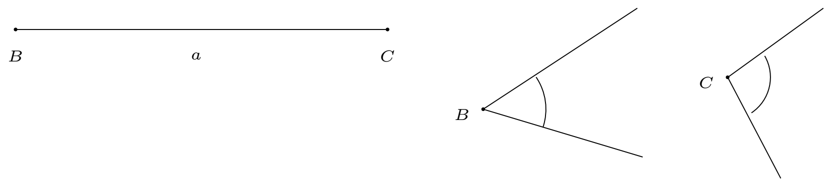
IV. Uma das circunferências está no interior da outra.

Suponhamos que a circunferência $\mathcal{C}$ contenha, no seu interior, a circunferência $\mathcal{C}'$.

Neste caso não existirá uma reta tangente comum pois toda reta tangente a circunferência $\mathcal{C}'$ será secante a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).

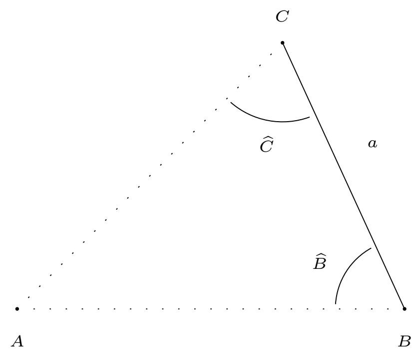


Exercício 1.10.12 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o lado as medidas do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, dos ângulos $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ e $\widehat{C} = \widehat{ACB}$.*



Resolução:

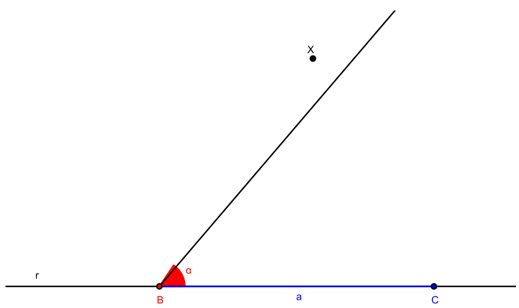
Um esboço da situação do problema acima é dado na figura abaixo:



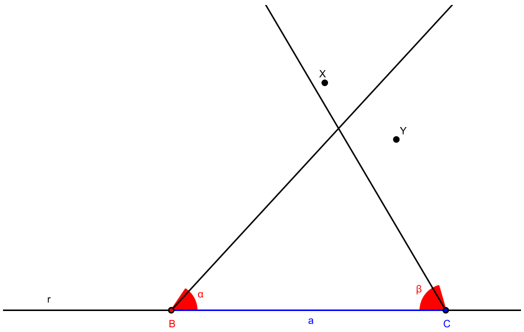
A construção pode ser feita da seguinte maneira:

1. Escolha um ponto B sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos o ponto C sobre a mesma de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

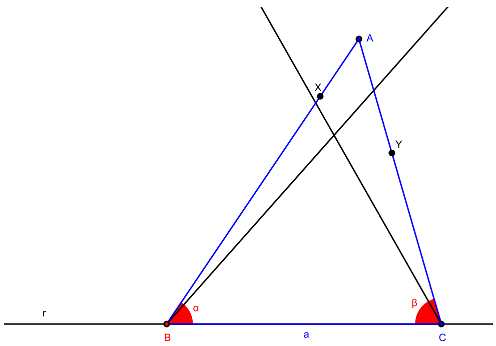
2. Encontremos um ponto X tal que o ângulo $\widehat{CBX} = \widehat{B}$ (transportamos o ângulo $\alpha \doteq \widehat{B}$ - figura abaixo);



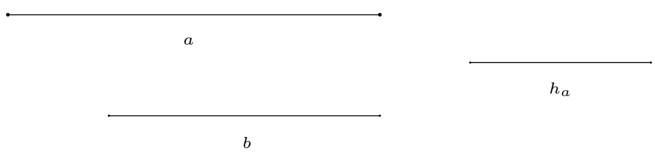
3. Encontremos um ponto Y no mesmo semi-plano determinado pela reta que contém o segmento $\overline{BC}$ e o ponto X, de tal modo que o ângulo $\widehat{YCB} = \widehat{C}$ (transportamos o ângulo $\beta \doteq \widehat{C}$ - figura abaixo);



4. A intesercção das semi-retas com extremidade nos pontos B e e no ponto C que contém os pontos X e Y, respectivamente, estará o outro vértice, A, do triângulo ΔABC, terminando a construção.

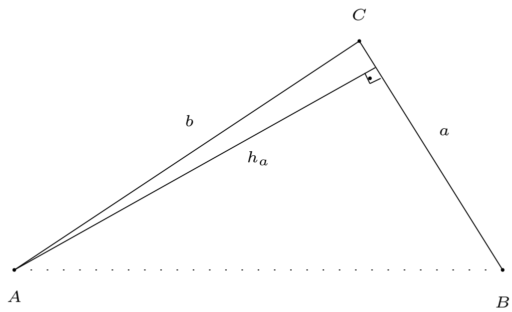


Exercício 1.10.13 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, isto é, $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, e o comprimento h_a da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.*



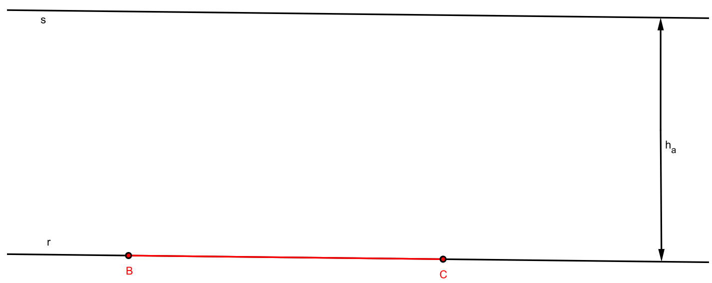
Resolução:

Um esboço da situação é dado pela figura abaixo:

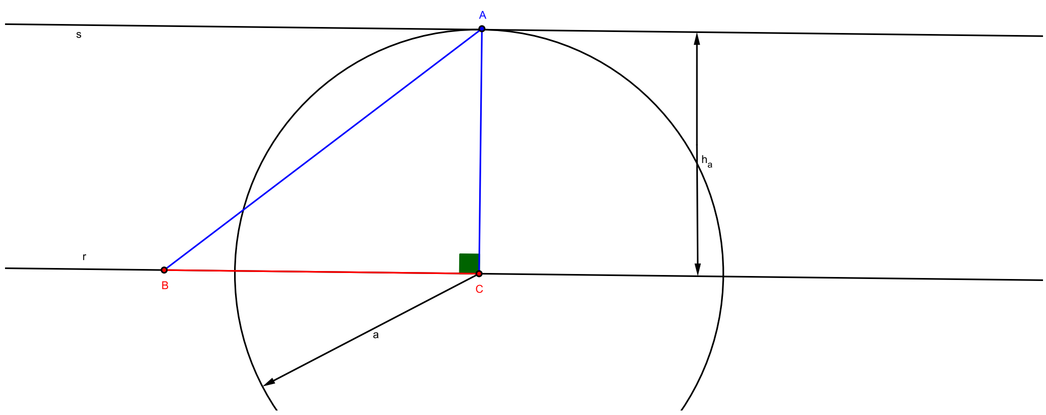


1. Escolhamos um ponto B sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos um ponto C sobre a mesma de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

2. Tracemos uma reta $\underline{s}$, paralela a reta $\underline{r}$ que dista h_a da reta $\underline{r}$ (figura abaixo);

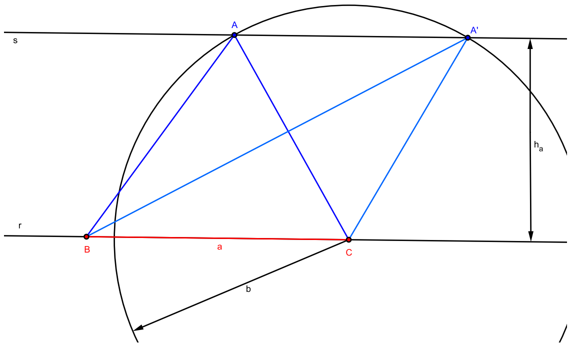


3. Tracemos a circunferência de centro no ponto C e raio $\underline{b}$ que encontrará a reta $\underline{s}$ num ponto que será o vértice A do triângulo ΔABC (figura abaixo).

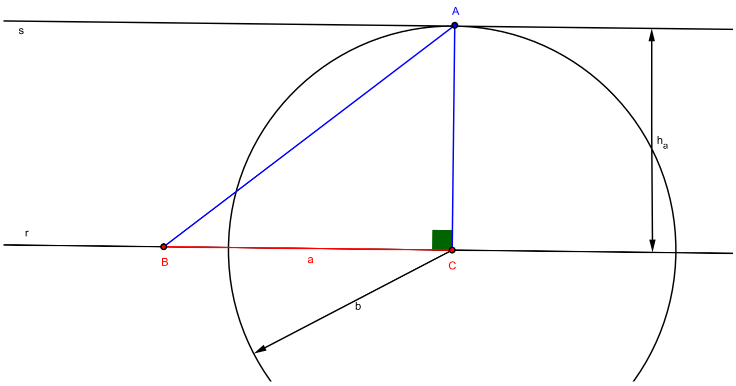


Observação 1.10.5 *Observemos que poderemos ter:*

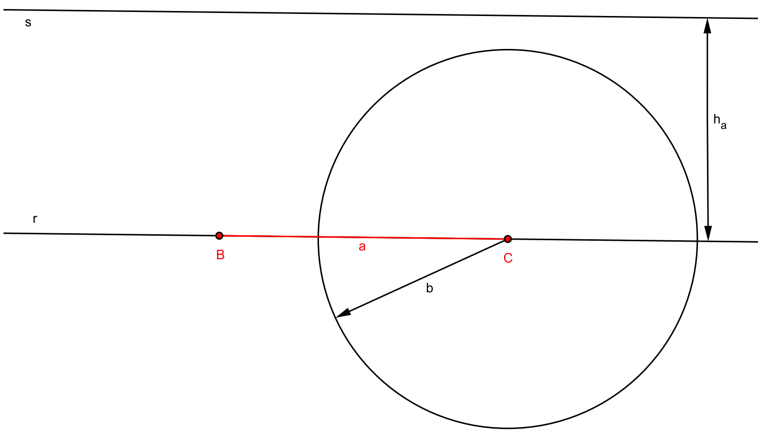
1. *dois pontos, A e A', se $h_a < b$, , ou seja, dois triângulos, ΔABC e $\Delta A'BC$, com as propriedades requeridas (figura abaixo);*



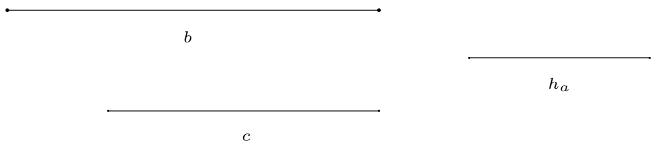
2. *um único ponto A, se $h_a = b$, ou seja, um único triângulo ΔABC (que será retângulo no vértice C) com as propriedades requeridas (figura abaixo);*



3. *nenhum ponto se $h_a > b$, ou seja, nenhum triângulo ΔABC com as propriedades requeridas (figura abaixo).*

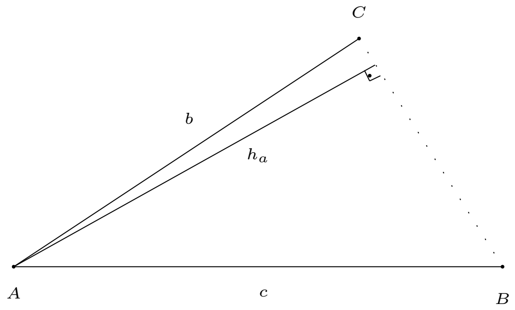


Exercício 1.10.14 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos dos lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, ou seja, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ e o comprimento h_a da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.*



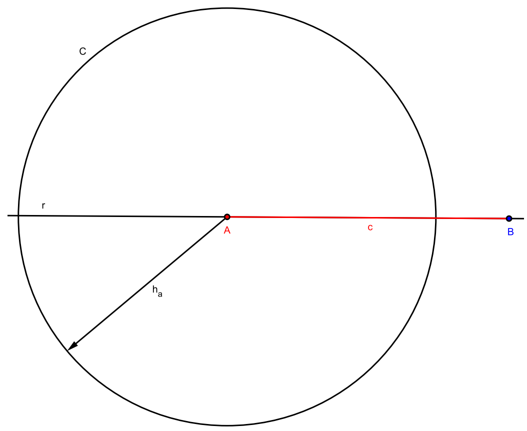
Resolução:

Um esboço da situação é dado pela figura abaixo:

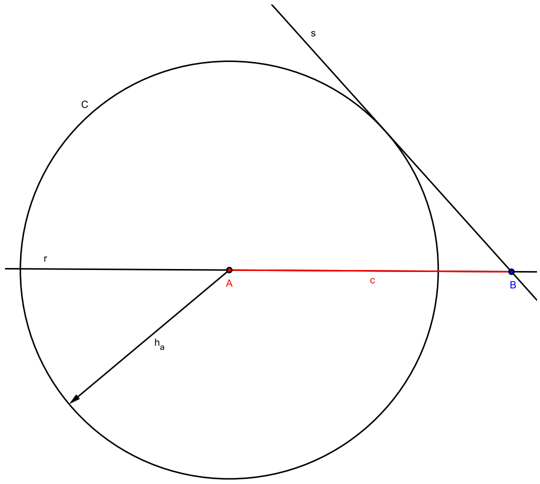


1. Escolhamos um ponto A sobre uma reta $\underline{r}$ e encontremos um ponto B sobre a mesma de tal modo que $AB = c$ (figura abaixo);

2. Tracemos a circunferência $\mathcal{C}$, de centro no ponto A e raio h_a (figura abaixo);

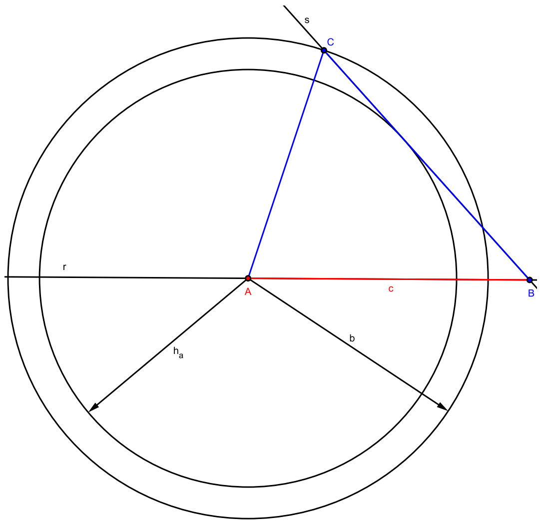


3. Encontremos a reta $\underline{s}$ tangente a circunferência $\mathcal{C}$ e que contém o ponto B (figura abaixo);



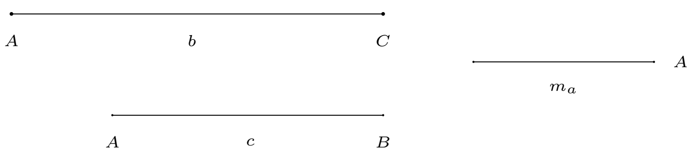
4. Tracemos a circunferência $\mathcal{C}'$ de centro no ponto A e raio b.

   O vértice C estará na intersecção da reta $\underline{s}$ com a circunferência $\mathcal{C}'$ (pode existir um outro ponto), com isto obtemos o triângulo ΔABC é o triângulo procurado (figura abaixo).



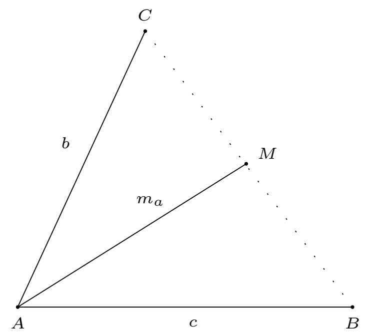
Observemos que de fato, o triângulo encontrado tem as propriedades requeridas pois: por construção temos que $AB = c$, $AC = b$, além disso o segmento $\overline{BC}$ é tangente a circunferência $\mathcal{C}$ de centro em A e raio h_a assim segue que a altura relativamente ao vértice A (ou ao lado $\overline{BC}$) será h_a.

Exercício 1.10.15 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos dos lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, ou seja, $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente, e a mediana m_a relativa ao lado $\overline{BC}$.*

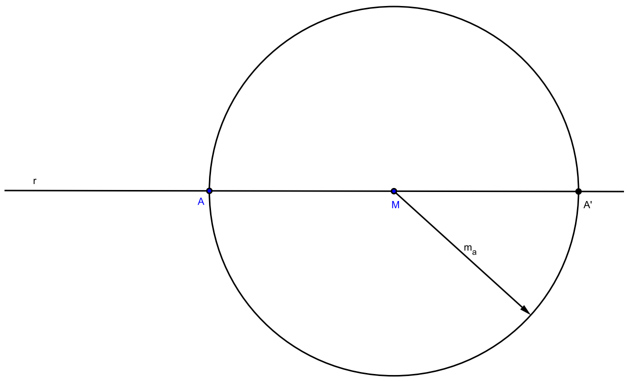


Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

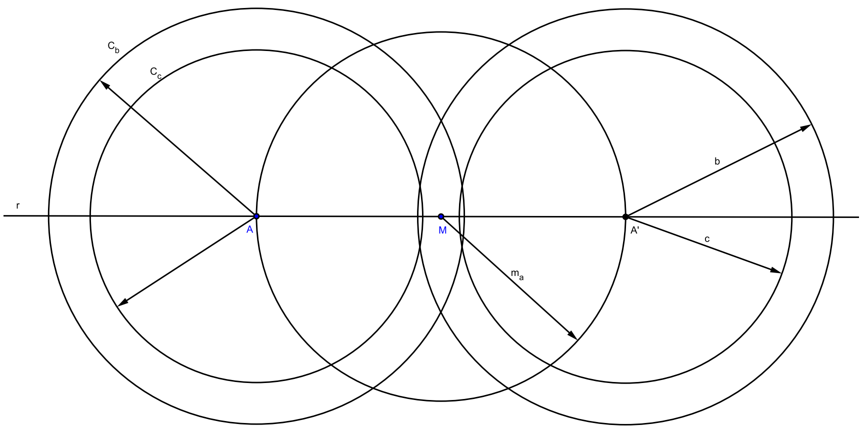


1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ o ponto M e os pontos, A e A', de tal M é o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$ e $AM = A'M = m_a$ (figura abaixo);

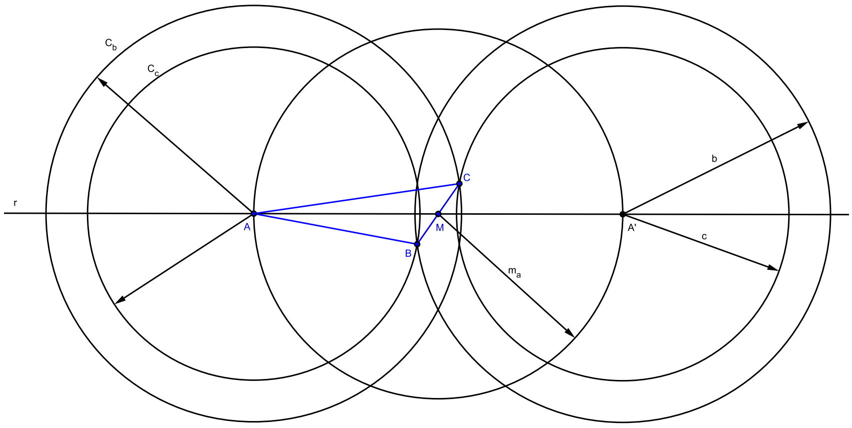


2. Tracemos as circunferências, $\mathcal{C}_b$ e $\mathcal{C}_c$ de centro em A e raios $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente.

   De modo análgo tracemos as circunferências, $\mathcal{C}'_b$ e $\mathcal{C}'_c$ de centro em A' e raios $\underline{b}$ e $\underline{c}$, respectivamente (figura abaixo);



3. Na intersecção das circunferências $\mathcal{C}_b$ com $\mathcal{C}'_c$ obtemos o vértice C e na intersecção das circunferências $\mathcal{C}_c$ com $\mathcal{C}'_b$ obtemos o vértice B, onde os pontos B e C são escolhidos nos semi-planos opostos relativamente à reta $\underline{r}$ (figura abaixo).



Observemos que o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas pois, por construção, temos que $AC = b$, $AB = c$ e $AM = m_a$.

Além disso, M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, pois $ACA'B$ é um paralelogramo já que os triângulos $\Delta ACA'$ e $\Delta AA'B$ são congruentes (caso LLL) e assim suas diagonais cruzam-se nos seus respectivos pontos médios.

Exercício 1.10.16 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, a medida do ângulo $\widehat{A}$ e o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a.*

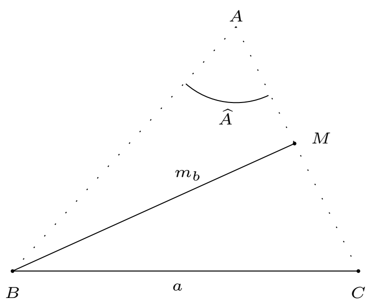
Exercício 1.10.17 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos $BC = a$, $AC = b$ e o ângulo $\widehat{A}$.*

Resolução:

Exercício 1.10.18 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos do lado $\overline{BC}$, a saber, $\underline{a}$, a medida do ângulo $\widehat{A}$ e o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$, isto é, m_b.*

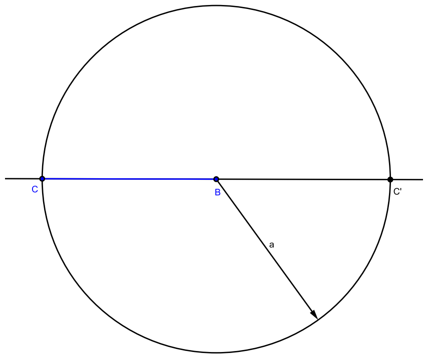
Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

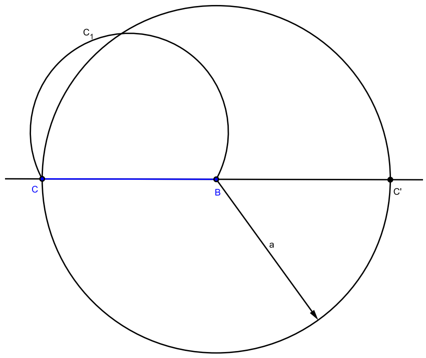


Neste caso podemos agir da seguinte forma:

1. Sobre uma reta $\underline{r}$, consideremos os pontos B, C e C' de tal modo que o ponto B seja o ponto médio do segmento $\overline{CC'}$ e $C'B = BC = a$ (figura abaixo):



2. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}_1$ do ângulo $\widehat{A}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



3. A circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto C' e raio $2m_b$ intercepta o arco capaz $\mathcal{C}_1$ no ponto A e assim obtemos o triângulo ΔABC com as propriedades requeridas (figura abaixo).

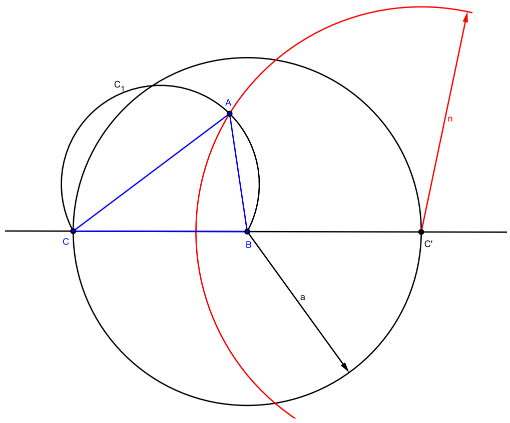
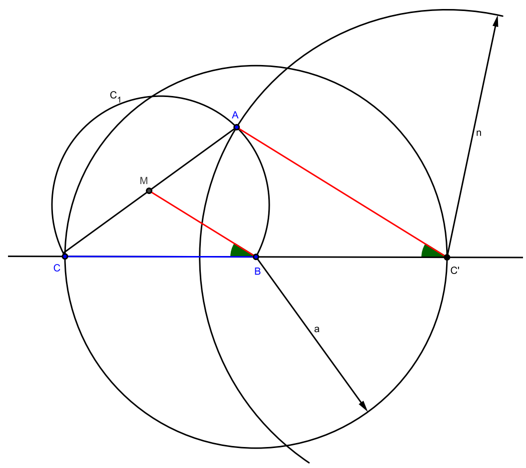


Figura 1.2: $C'A = 2m_b$

Mostremos que o triângulo acima ΔABC têm as propriedades requeridas.
Observemos que $BC = a$ e $\widehat{A}$ são os valores dados, por construção.
Para completar, seja M um ponto sobre o segmento $\overline{AC}$ tal que $\widehat{MBC} = \widehat{AC'B}$ (figura abaixo).



Logo os triângulo $\Delta AC'C$ e ΔMBC são semelhantes (pois as retas que contém os pontos M, B e os pontos A, C' são paralelas) assim lados correspondentes guardam a mesma relação.

Em particular:

$$\frac{MB}{AC'} = \frac{BC}{C'C} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \overset{[AC'=2m_b]}{\Longrightarrow} \quad \frac{MB}{2m_b} = \frac{1}{2},$$

ou seja, $MB = m_b$.

Por outro lado,

$$\frac{MC}{AC} = \frac{BC}{C'C} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad MC = \frac{AC}{2},$$

ou seja, M é ponto médio do segmento $\overline{AC}$, mostrando que o triângulo ΔABC obtido acima satisfaz as propriedades requeridas.

Exercício 1.10.19 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, ou seja, $\underline{a}$ e os comprimentos das medianas m_b e m_c relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.*

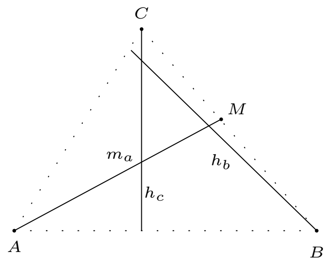
Exercício 1.10.20 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, e os comprimentos das alturas, h_b e h_c, relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.*

Exercício 1.10.21 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a e o comprimento das alturas relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, ou seja, h_a e h_b, respectivamente.*

Exercício 1.10.22 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a, e o comprimento das alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, ou seja, h_b e h_c, respectivamente.*

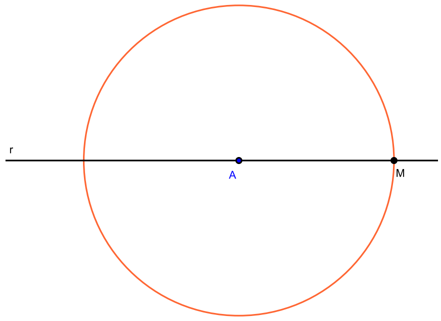
Resolução:

Geometricamente, temos a seguinte situação:

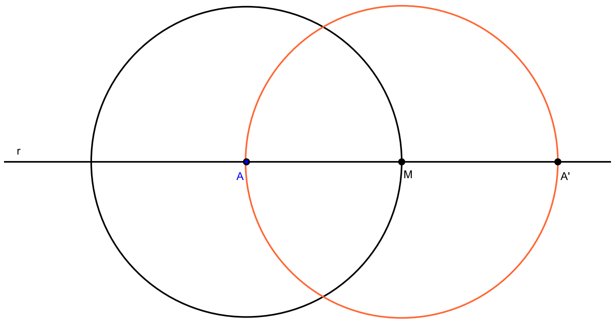


Passemos a construção:

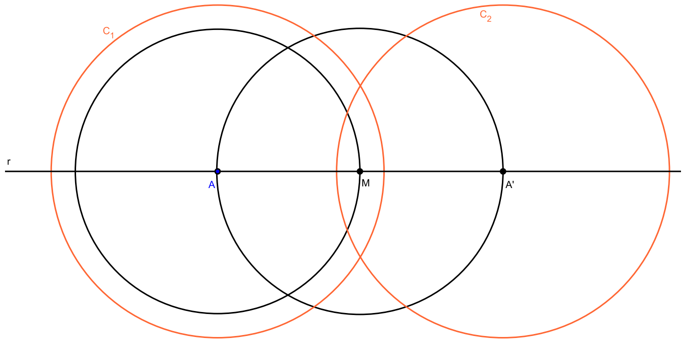
1. Consideremos, sobre uma reta $\underline{r}$, os pontos A e M de tal modo que $AM = m_a$ (figura abaixo);



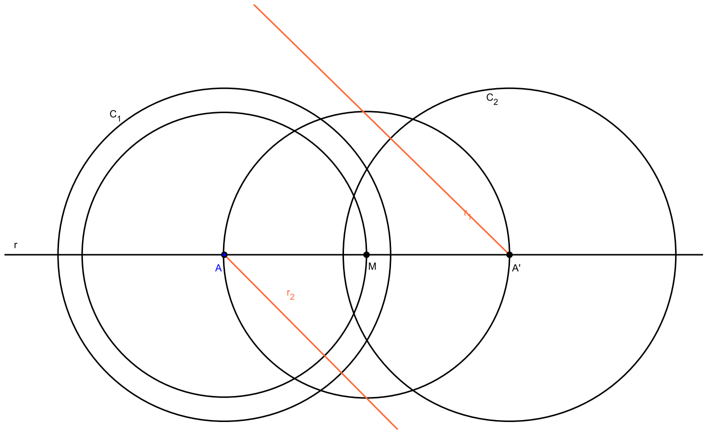
2. Encontremos o ponto A' sobre a reta $\underline{r}$ tal que $A'M = AM$ (ou seja, o ponto A' é o simétrico do ponto A em relação ao ponto M - figura abaixo);



3. Consideremos as circunferências, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, de centros em A e A' e raio h_b (figura abaixo);

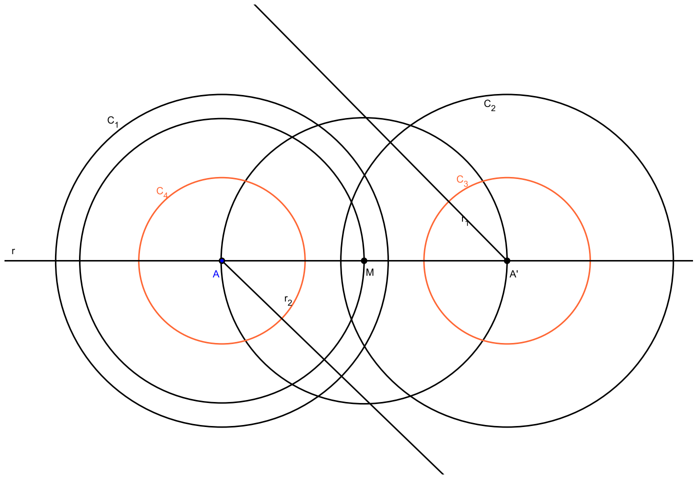


4. Tracemos as semireta-retas, r_1, tangente a circunferência $\mathcal{C}_1$ que tem extremo no ponto A' e r_2, tangente a circunferência $\mathcal{C}_2$ que tem extremo no ponto A de tal modo que r_1 e r_2 estejam em semi-planos opostos relativamente à reta $\underline{r}$ (figura abaixo);

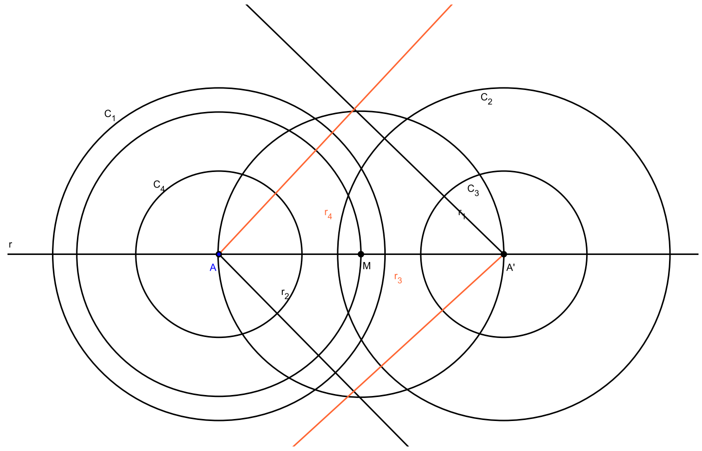


Sabemos que o vértice B deverá estar sobre a reta r_1 e o vértice C deverá estar sobre a reta r_2, pois deste modo a altura relativamente ao lado $\overline{AC}$ será h_b e além disso sobre um segmento que contenha o ponto M pois deste modo o ponto M será ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

5. Consideremos as circunferências, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$, de centros em A e A' de raio h_c (figura abaixo);

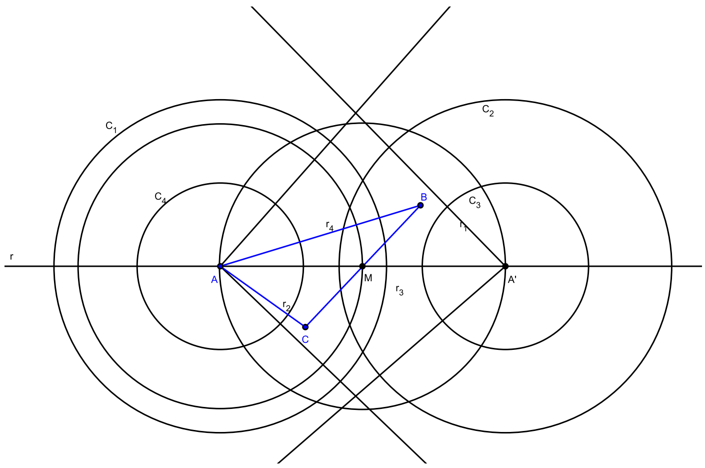


6. Tracemos às semi-retas reta, r_3, tangente a circunferência $\mathcal{C}_3$ que tem extremidade no ponto A' e r_4, tangente a circunferência $\mathcal{C}_4$ que tem extremidade no ponto A de tal modo que as semi-retas r_1, r_4 estejam em um mesmo semi-plano relativamente à reta $\underline{r}$ e o mesmo ocorra com as semi-retas r_2 e r_3 (figura abaixo);



Sabemos que o vértice B deverá estar sobre a reta r_3 e o vértice C deverá estar sobre a reta r_4, pois deste modo a altura relativamente ao lado $\overline{AB}$ será h_c e sobre um segmento que contenha o ponto M pois deste o ponto M será ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

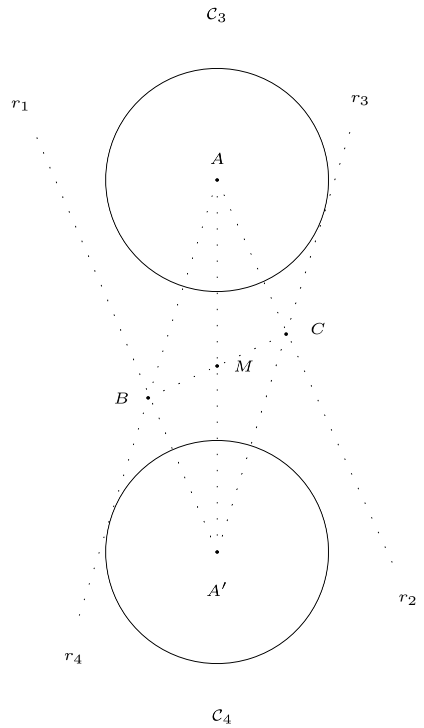
7. Na intersecção das retas r_1 e r_4 temos o vértice B e na intersecção das retas r_2 e r_3 temos o vértice C;



O triângulo ΔABC tem as propriedades pedidas pois, $ACA'B$ é um paralelogramo (as retas r_1, r_2 são paralelas assim como as retas r_3 e r_4).

Logo o ponto M é ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e assim $AM = m_a$ será o comprimento da mediana relativamente ao lado $\overline{BC}$.

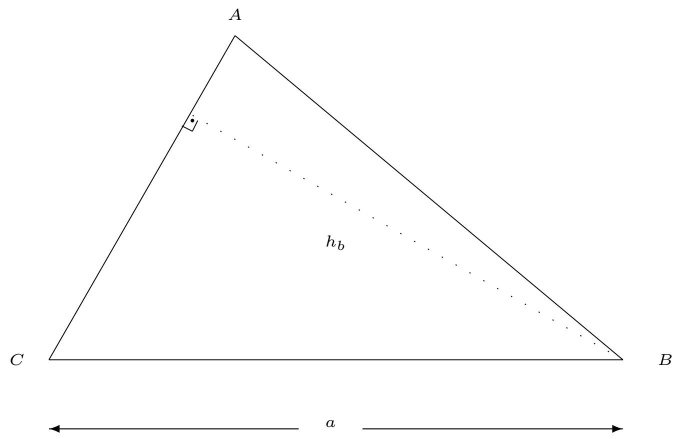
A altura relativamente ao lado $\overline{AC}$ é h_b, pois as retas r_1 e r_2 são paralelas e distam h_b e a altura relativamente ao lado $\overline{AB}$ é h_c, pois as retas r_3 e r_4 são paralelas e distam h_c, logo o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas.



Exercício 1.10.23 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, a soma dos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, isto é, $s = b + c$, e a altura relativamente ao lado $\overline{AC}$, ou seja h_b.*

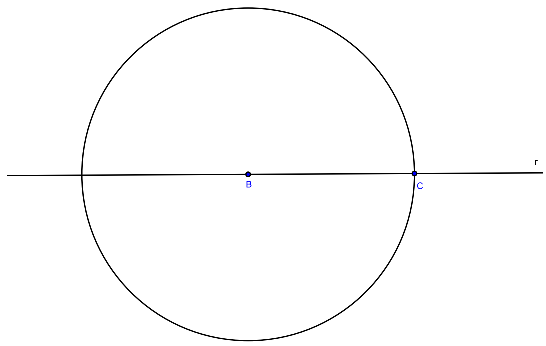
Resolução:

Geometricamente temos a seguinte situação:

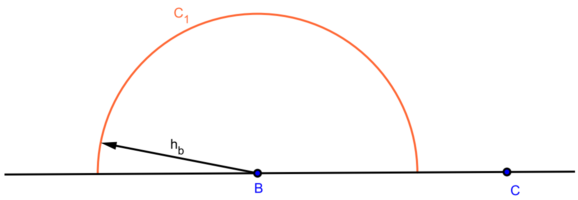


Considermos a seguinte construção:

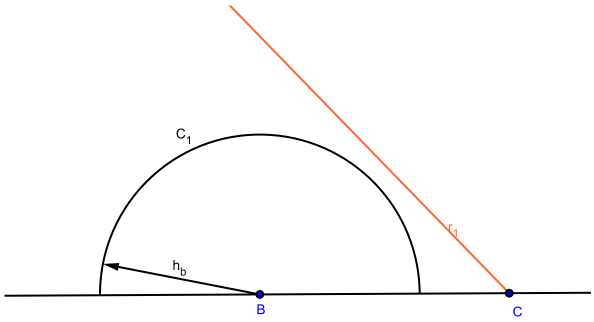
1. Sobre uma reta $\underline{r}$ escolhamos os pontos B e C de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);



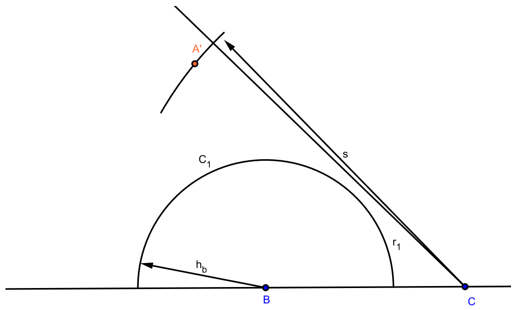
2. Tracemos a semi-circunferência $\mathcal{C}_1$ de centro no ponto B e raio h_b (figura abaixo);



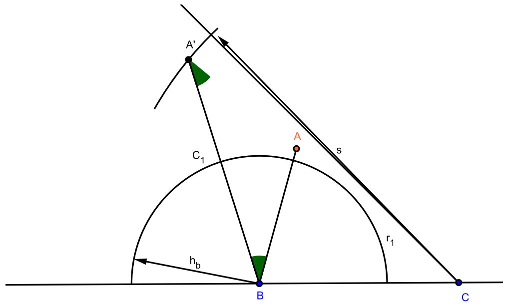
3. Pelo ponto C tracemos a semi-reta r_1 tangente a semi-circunferência $\mathcal{C}_1$ (que estará contida no mesmo semi-plano da semi-circunferência - figura abaixo);



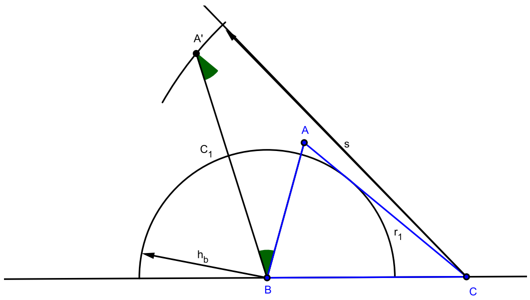
4. Sobre a semi-reta r_1 acima, encontremos o ponto A' de modo que $CA' = s$ (figura abaixo);



5. Trasportemos o ângulo $\widehat{BA'C}$ para o vértice B, mais claramente, encontremos o ponto A sobre a semi-reta r_1 tal que $\widehat{ABA'} = \widehat{BA'C}$ (figura abaixo);



Com isto o triângulo $\Delta A'AB$ será isóceles, ou seja, $AB = AA'$ e o triângulo procurado será ΔABC (figura abaixo).



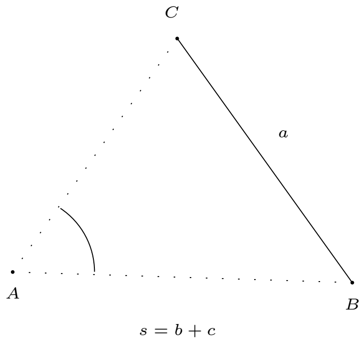
De fato, o triângulo ΔABC terá as propriedades requeridas pois, por construção $BC = a$, a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ é h_b (pois a reta r_1 é tangente à circunferência $\mathcal{C}_1$) e

$$AC + AB \overset{[AB=AA']}{=} CA + AA' = b + c = s.$$

Exercício 1.10.24 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, a soma dos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, isto é, $s = c + b$ e o ângulo $\widehat{A} = \widehat{BAC}$.*

Resolução:

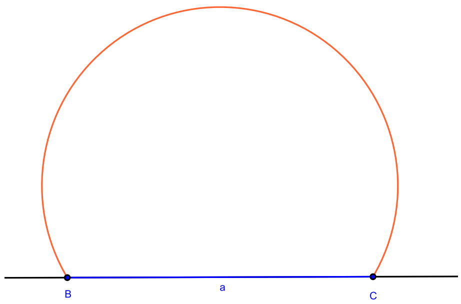
Geometricamente temos a seguinte situação:



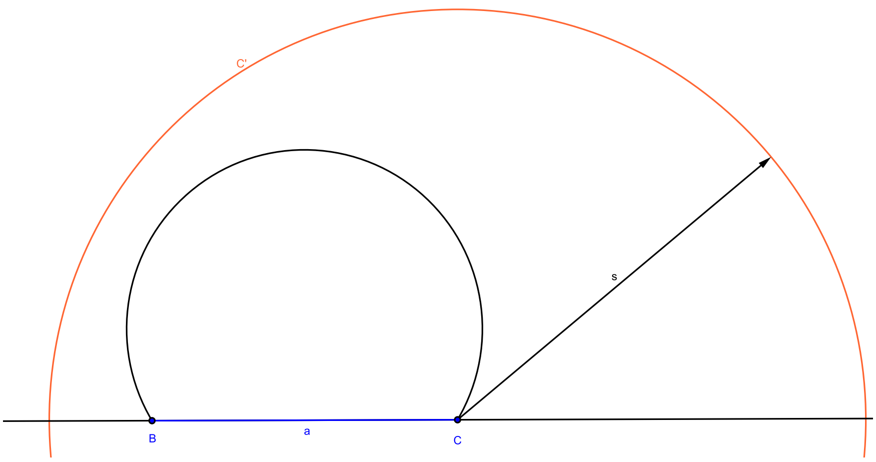
Passemos a construção:

1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos B e C de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

2. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}$, do ângulo $\widehat{A}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



3. Consideremos a circunferência, $\mathcal{C}'$ de centro no ponto C e raio $s = b + c$ (figura abaixo);



4. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}''$, do ângulo $\dfrac{\widehat{A}}{2}$ associado ao segmento $\overline{BC}$;

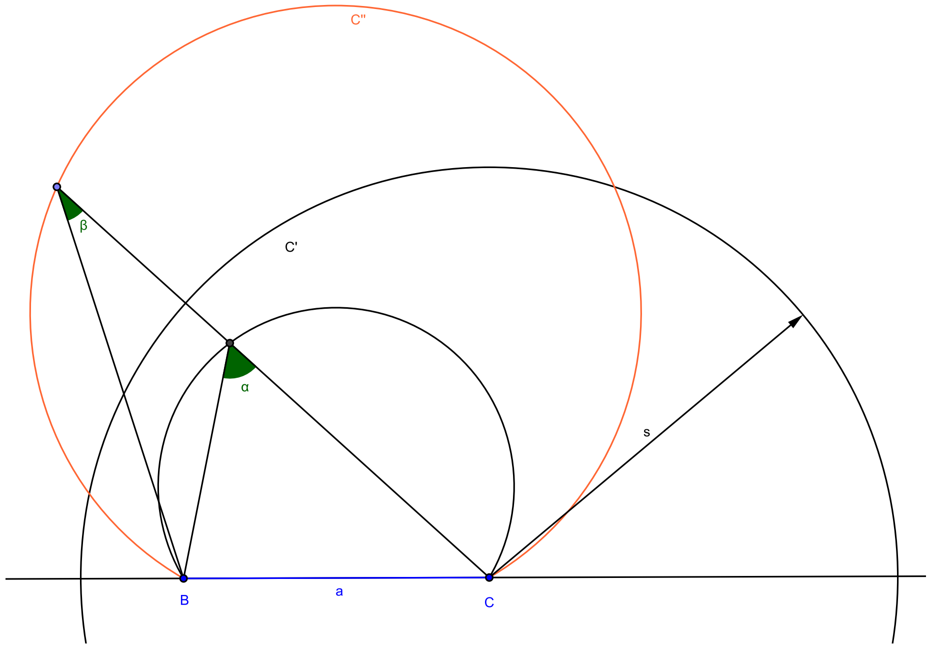
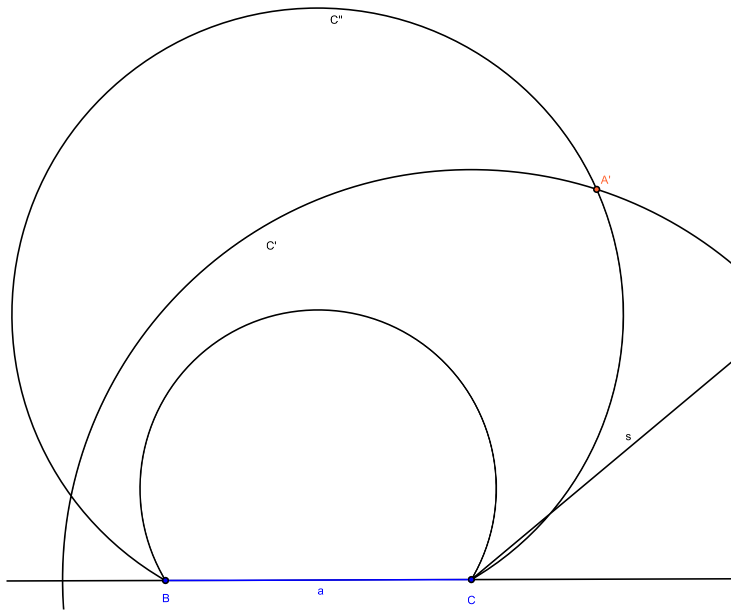
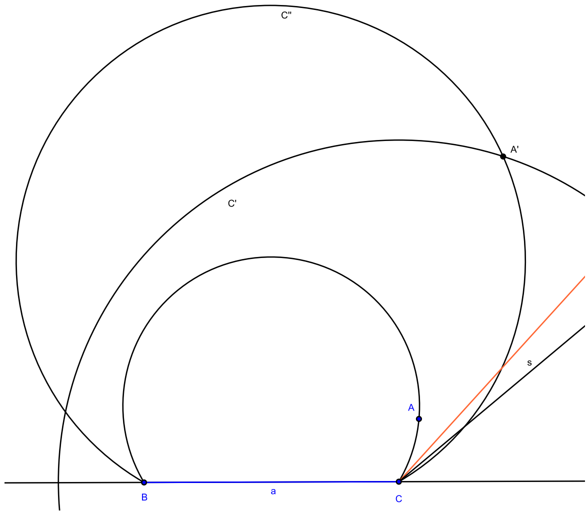


Figura 1.3: $\beta = \frac{\alpha}{2}$

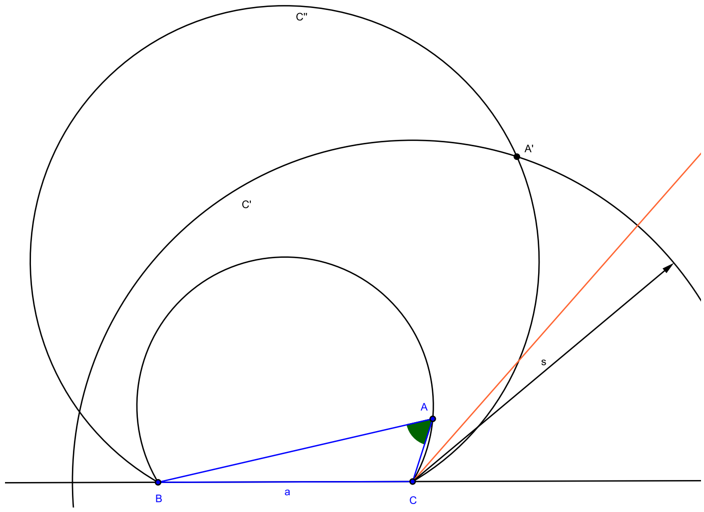
5. Consideremos o ponto A' obtido da intersecção do arco capaz do ângulo $\dfrac{\widehat{A}}{2}$ associado ao segmento $\overline{BC}$, $\mathcal{C}''$, com a circunferência $\mathcal{C}'$ (figura abaixo);



6. A reta que passa pelos pontos A' e C interceptará o arco capaz $\mathcal{C}$ no ponto A (figura abaixo);



O triângulo ΔABC têm as propriedades requeridas (figura abaixo).



Para mostrar isto, observemos que $\widehat{A'AB} = \pi - \widehat{A}$ (figura acima).

Mas, por construção, $\widehat{BA'A} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ (figura abaixo).

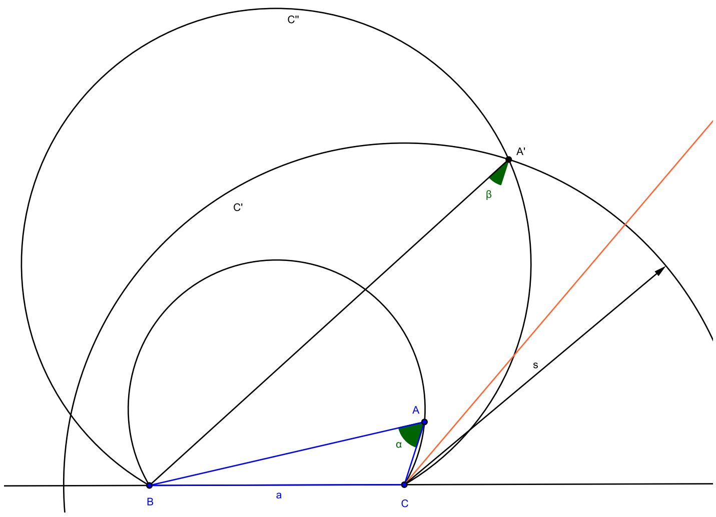


Figura 1.4: $\beta = \frac{\alpha}{2}$

Logo

$$\widehat{ABA'} = \pi - \left[\widehat{BA'A} + \widehat{A'AB}\right] = \pi - \left\{\frac{\widehat{A}}{2} + \left[\pi - \widehat{A}\right]\right\} = \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{BA'A}$$

o que mostra que o triângulo $\Delta A'AB$ é isóceles, logo temos $AB = A'A$.

Portanto

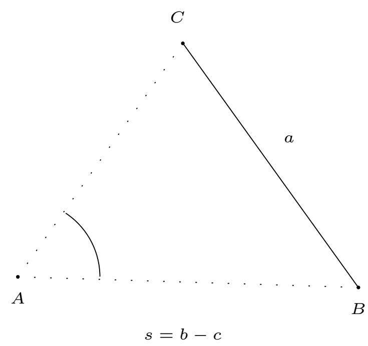
$$BA + AC = A'A + AC = s,$$

ou seja, o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas.

Exercício 1.10.25 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é $\underline{a}$, o ângulo $\widehat{A}$ e a diferença dos comprimentos dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, isto é, $s = b - c$.*

Resolução:

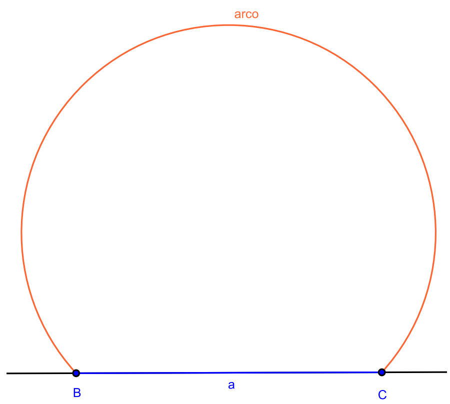
Geometricamente temos a seguinte situação:



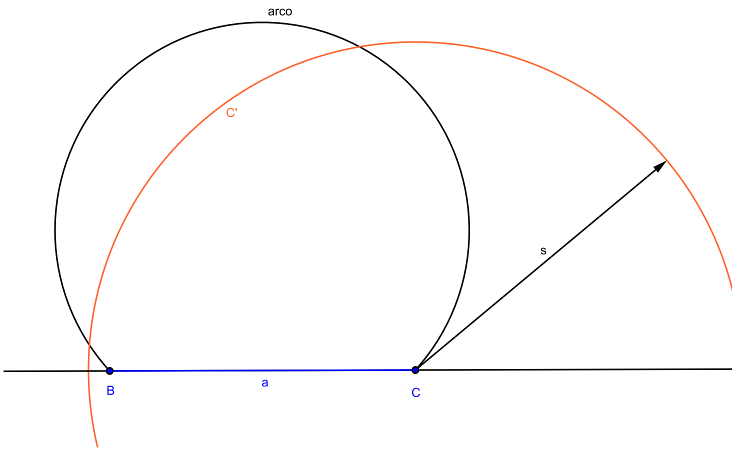
Passemos a construção:

1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos B e C de tal modo que $BC = a$ (figura abaixo);

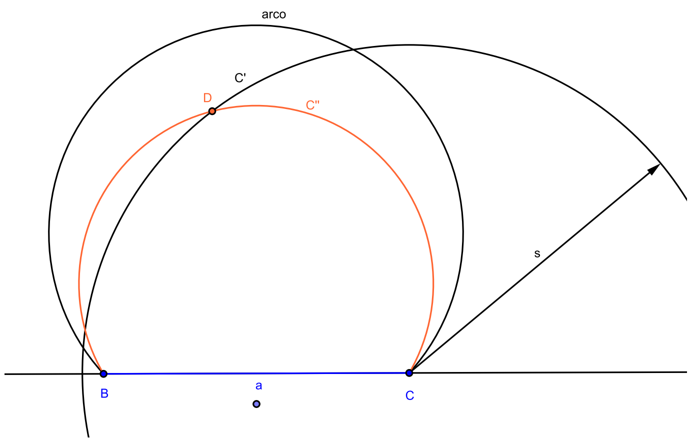
2. Construamos o arco capaz, $\mathcal{C}$, do ângulo $\widehat{A}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



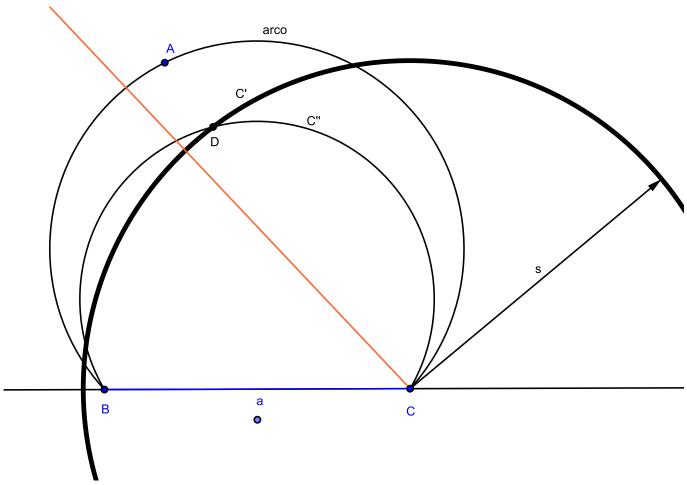
3. Tracemos a circunferência, $\mathcal{C}\,'$, de centro no ponto C e raio $s = b - c$ (figura abaixo);



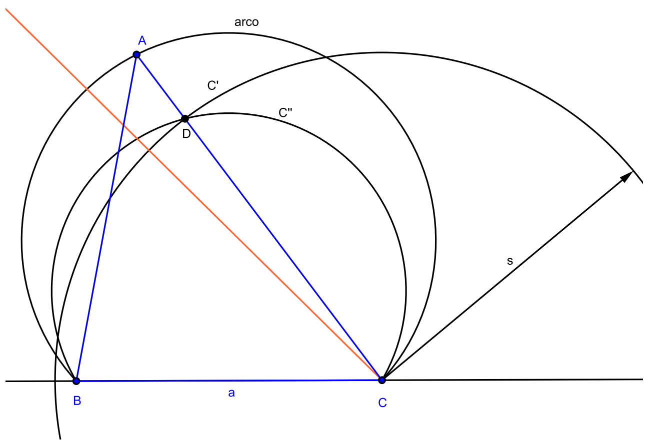
4. Tracemos o arco capaz, $\mathcal{C}''$, do ângulo $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$ associado ao segmento $\overline{BC}$ que encontrará a circunferência $\mathcal{C}'$ no ponto D (figura abaixo);



5. A reta que passa pelos pontos C e D encontrará o arco capaz do ângulo $\widehat{A}$, isto é, $\mathcal{C}$, no ponto A (figura abaixo);



Afirmamos que o triângulo ΔABC tem as propriedades requeridas.



De fato, por construção $BC = a$.

Observemos que (veja figura abaixo)

$$\widehat{ADB} = \pi - \widehat{BDC} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Logo

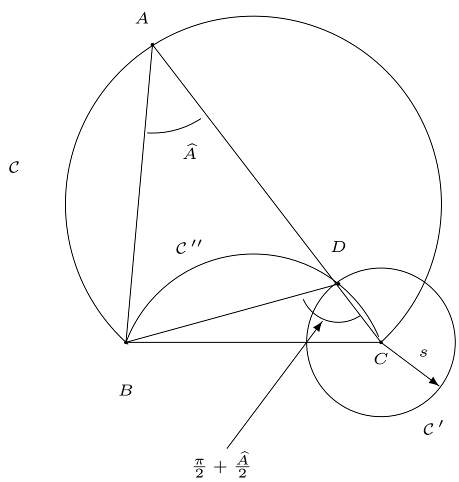
$$\widehat{ABD} = \pi - \widehat{BAD} - \widehat{ADB} = \pi - \widehat{A} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2},$$

ou seja, o triângulo ΔABD é isósceles.

Logo $AB = AD$, assim

$$AC - AB = AC - AD = DC = s$$

dado, concluindo a verificação.



Exercício 1.10.26 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o perímetro $AB + BC + CA = 2p$ e as medidas dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.*

Exercício 1.10.27 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o perímetro $AB + BC + CA = 2p$ e a medida do ângulo $\widehat{A}$ e o comprimento da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a.*

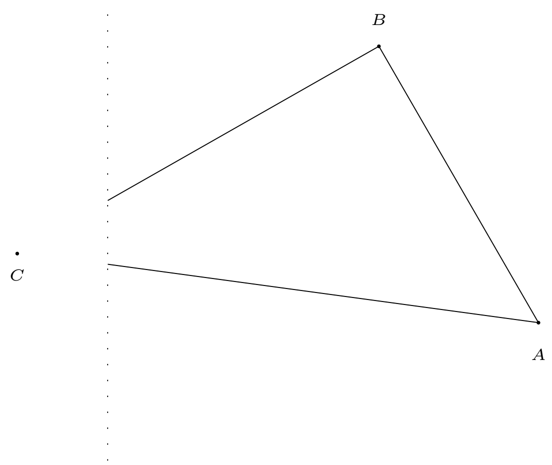
Exercício 1.10.28 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se o comprimento do lado $\overline{BC}$, isto é, $\underline{a}$, o comprimento da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a, e a medida do raio R da circunferência circunscrita no mesmo.*

Exercício 1.10.29 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a, da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a e a medida do raio R da circunferência circunscrita no mesmo.*

Exercício 1.10.30 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se a medida do ângulo $\widehat{A}$, o comprimento do lado $\overline{AC}$, isto é, $\underline{b}$, e a medida do raio $\underline{r}$ da circunferência inscrita no mesmo.*

Exercício 1.10.31 *Construir um triângulo ΔABC conhecendo-se os comprimentos da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, h_a, da mediada relativa ao lado $\overline{BC}$, isto é, m_a e da bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.*

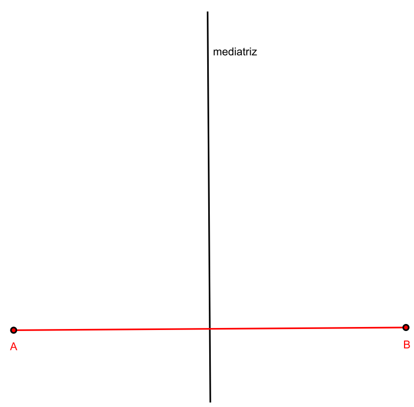
Exercício 1.10.32 *Determinar o raio de uma circunferência circunscrita o triângulo ΔABC cujo vértice C é inacessível (figura abaixo).*



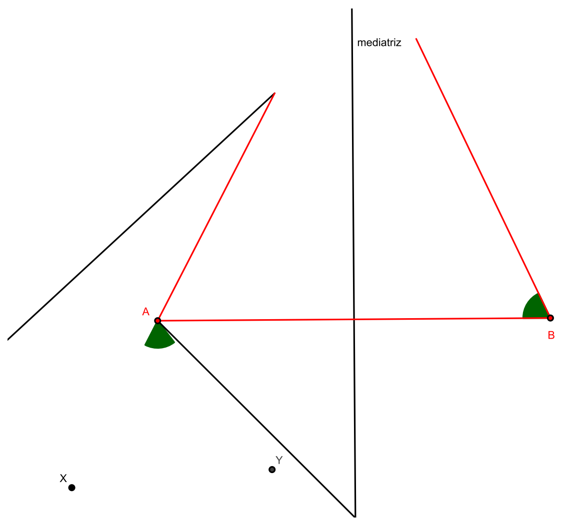
Resolução:

Neste caso agiremos da seguinte forma:

1. Encontremos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo);



2. Encontre o ponto X na semi-reta que está contida na reta que contém os pontos A e C, de extremidade no ponto A, que não contém o ponto C e um ponto Y no semi-plano determinado pela reta que passa pelos pontos A e C que contém o ponto B de tal modo que o ângulo $\widehat{YAX} = \widehat{B}$ (tranporte do ângulo $\widehat{B}$ - figura abaixo);



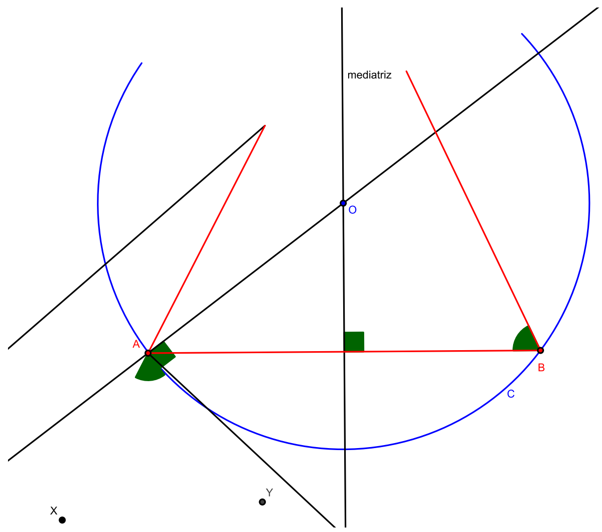
Como conseqüência temos que o ângulo $\widehat{BAY} = \widehat{C}$.

De fato, pois a soma dos ângulo internos do triângulo ΔABC é π, mas

$$\widehat{A} + \widehat{BAY} + \widehat{YAX} = \pi = \underbrace{\widehat{BAC}}_{\widehat{A}} + \widehat{BAY} + \underbrace{\widehat{YAX}}_{\widehat{B}}, \quad \text{assim} \quad \widehat{BAY} = \widehat{C}.$$

Deste modo obtivemos a medida do ângulo $\widehat{C}$;

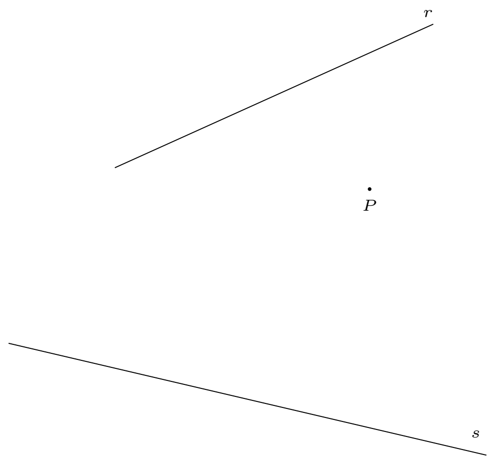
3. Encotremos o centro O do arco capaz, $\mathcal{C}$, do ângulo $\widehat{BAY} = \widehat{C}$ associado ao segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo);



O centro, O, da circunferência que determina o arco capaz acima (obtido da intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a perpendicular a reta que passa pelos pontos A e Y pelo ponto A) será o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC.

A demonstração é imediata já que o vértice deverá estar sobre o arco capaz $\mathcal{C}$.

Exercício 1.10.33 *Traçar por um ponto P uma reta que passe pelo ponto de interseção (inacessível) das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$.*

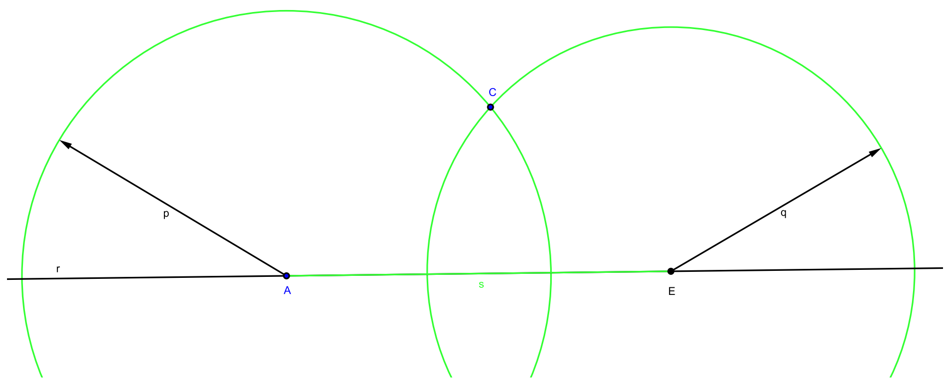


Exercício 1.10.34 *Construir um trapézio $ABCD$ conhecendo-se a soma das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, isto é, $AB + CD = s$, o comprimento das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, isto é, $AC = p$ e $BD = q$ e o comprimento do lado $\overline{AD}$, ou seja, $AD = a$.*

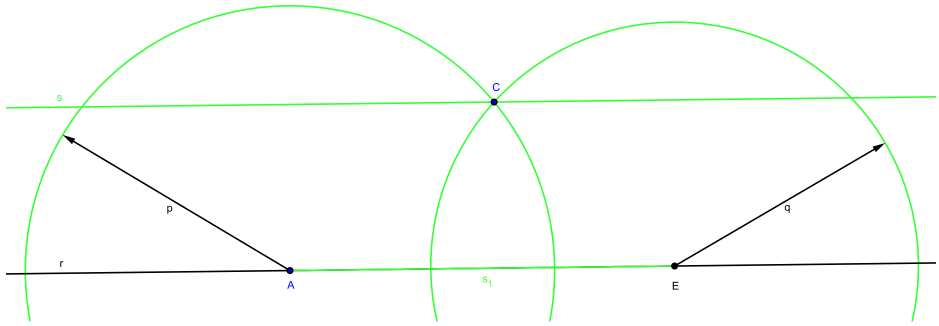
Resolução:

1. Consideremos sobre uma reta $\underline{r}$ dois pontos A e E de tal modo que $AE = s$ (figura abaixo);

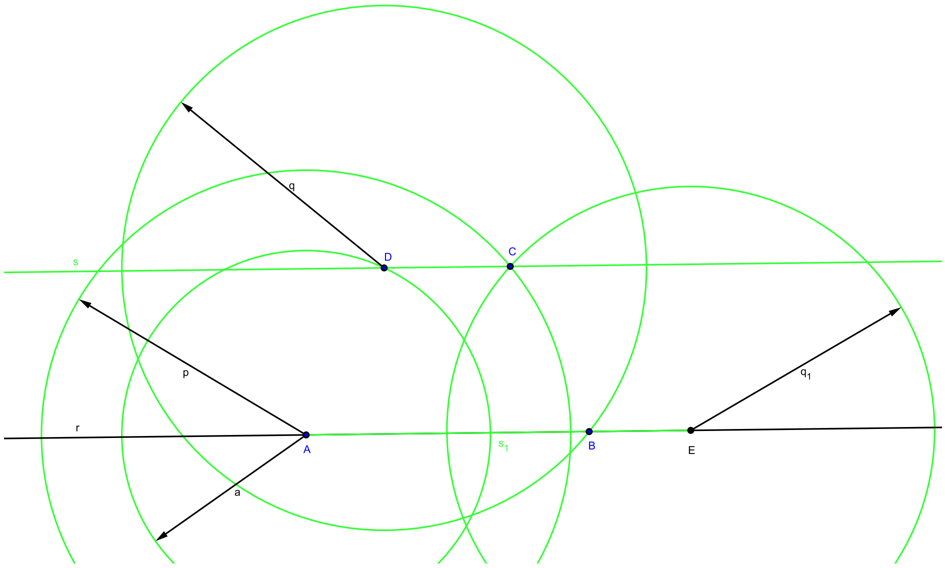
2. Consideremos o ponto C que é intersecção das circunferências de centros em A e E e raios p e q, respectivamente (figura abaixo);



3. Tracemos a reta $\underline{s}$ paralela à reta $\underline{r}$ pelo ponto C (figura abaixo);



4. A circunferência de centro no ponto A e raio $\underline{a}$ encontra a reta $\underline{s}$ no ponto D e a circunferência de centro no ponto D e raio $\underline{q}$ encontra a reta $\underline{r}$ no ponto B (figura abaixo);



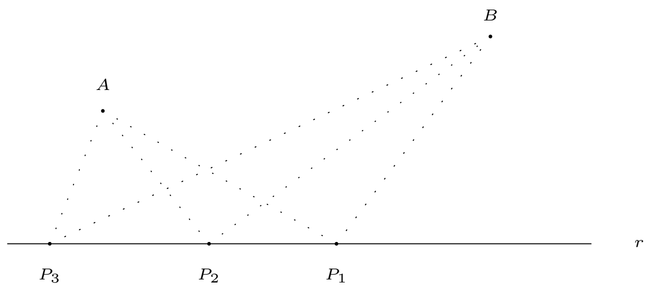
O trapézio $ABCD$ obtido é o procurado pois, $AD = a$, $AC = p$, $BD = q$.
Além disso temos que $CD = BE$ (pois $BECD$ é um paralelogramo), assim

$$AB + CD = AB + BE = s.$$

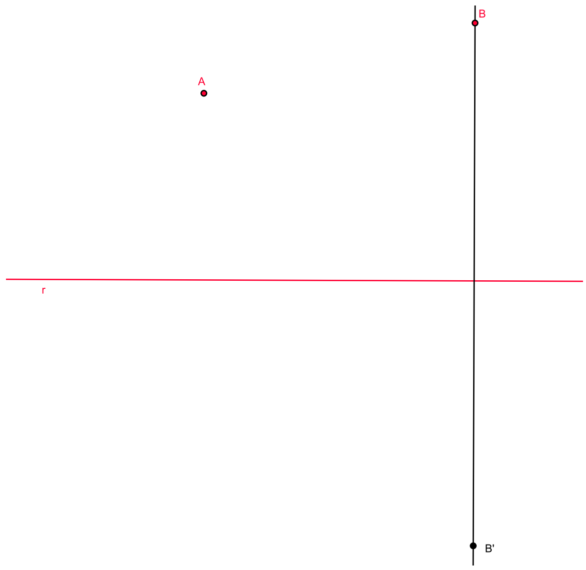
Exercício 1.10.35 *Dados os pontos A e B em um mesmo semi-plano determinado pela reta r determinar o ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de forma que $PA + PB$ seja o menor valor possível.*

Resolução:

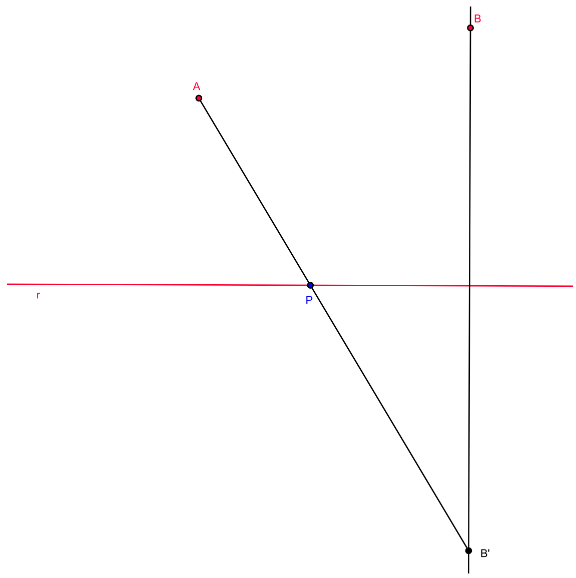
Observemos a figura:



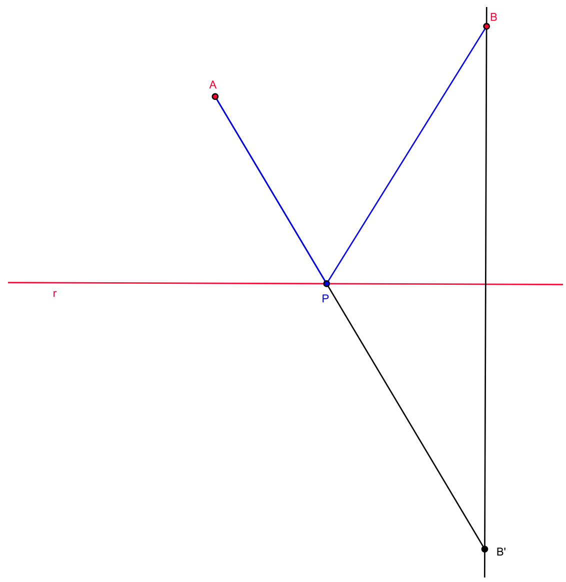
1. Seja B' o ponto simétrico de B em relação a reta r (obtido traçando-se a perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B, que encontra a reta $\underline{r}$ no ponto C; assim podemos encontrar o ponto B' sobre a sem-reta obtida da perpendicular com extremidade em C que não contém B tal que $CB' = CB$ - figura abaixo);



2. Tracemos o segmento $\overline{AB'}$ que intercepta a reta $\underline{r}$ no ponto P (figura abaixo);



3. Afirmamos que o ponto P tem a propriedade de $PA + PB$ ser o menor valor da expressão $AX + XB$ para todo ponto X na reta $\underline{r}$ (figura abaixo).



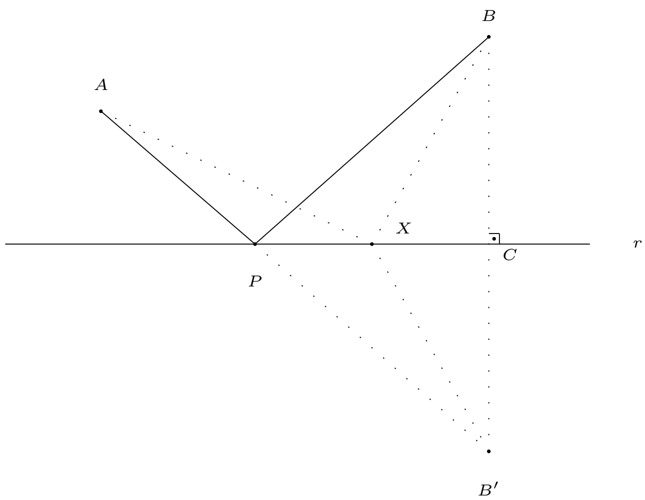
De fato, para qualquer X sobre a reta $\underline{r}$ temos que

$$AX + XB \geq AP + PB$$

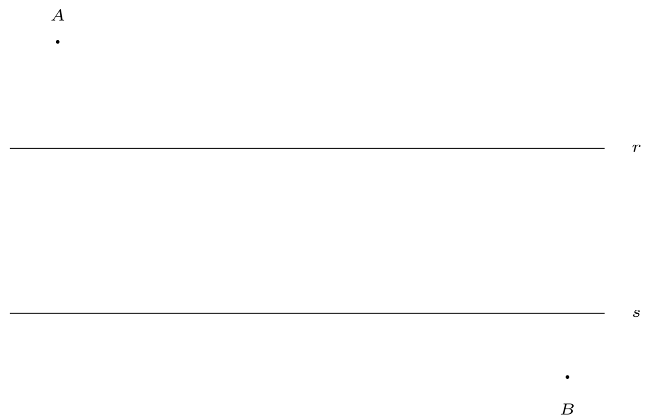
pois os pontos A, P e B' são colineares e se $X \neq P$ temos que os pontos A, X e B' não serão colineares, ou seja,

$$AX + XB = AX + XB' \geq AP + PB' = AP + PB,$$

mostrando que este valor é o menor possível (figura abaixo).



Exercício 1.10.36 *Suponhamos que as retas paralelas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são as margens de um rio e os pontos A e B representam cidade em lados opostos da margem desse rio (vide figura abaixo).*



Deseja-se construir uma ponte $\overline{PQ}$ (onde $P \in r$ e $Q \in s$) perpendicular às margens de forma que construindo-se as estradas $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ o percurso total da cidade A até a cidade B seja o menor possível.

Deteminar a posição da ponte.

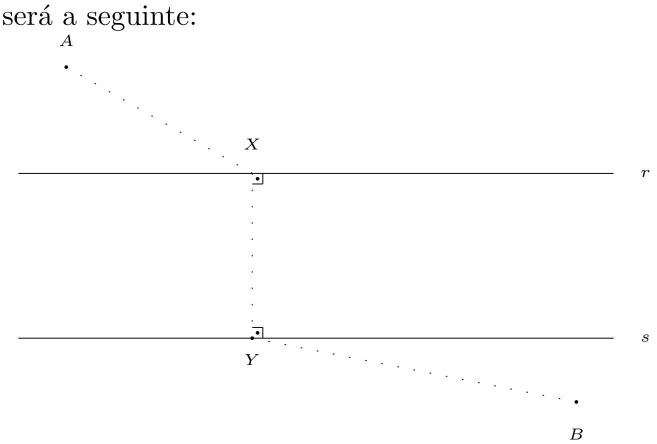
Resolução:

Na verdade devemos determinar onde deverá ficar o ponto P para que

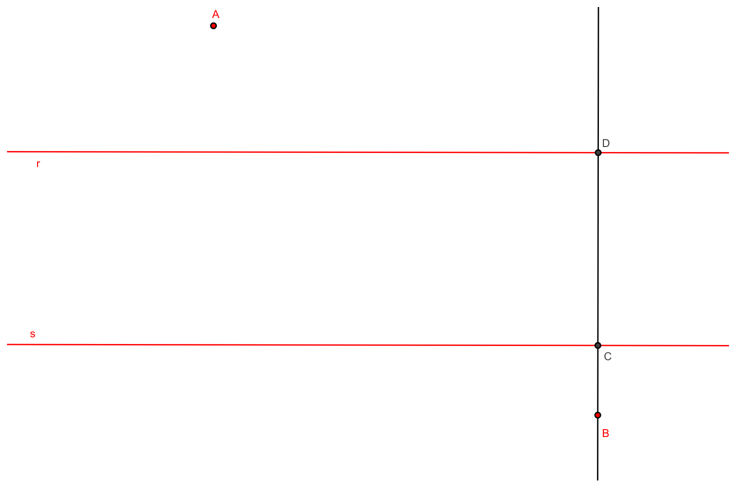
$$AP + PQ + QB$$

seja o menor valor possível com P e Q sobre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente.

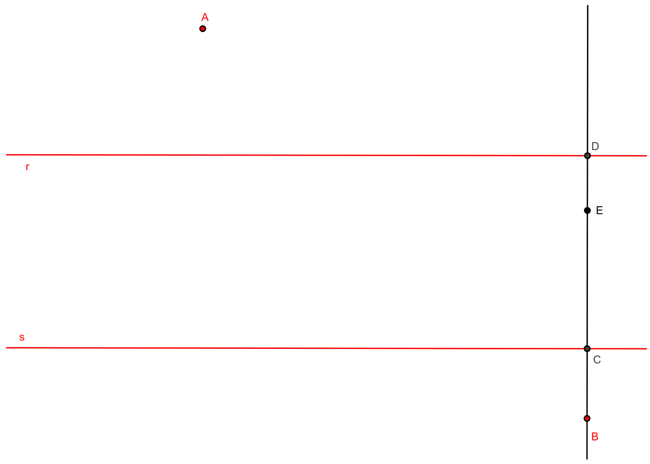
Em geral a situação será a seguinte:



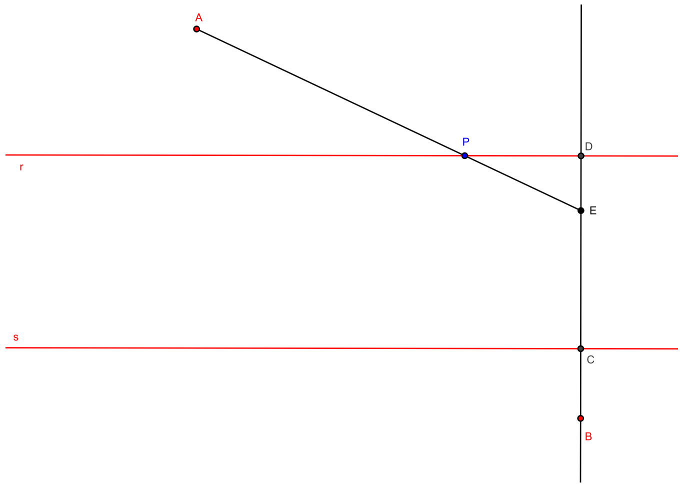
1. Encontremos a perpendicular a reta $\underline{r}$ (ou $\underline{s}$) que passa pelo ponto B; ela encontra a reta $\underline{s}$ no ponto C e a reta $\underline{r}$ no ponto D (figura abaixo);



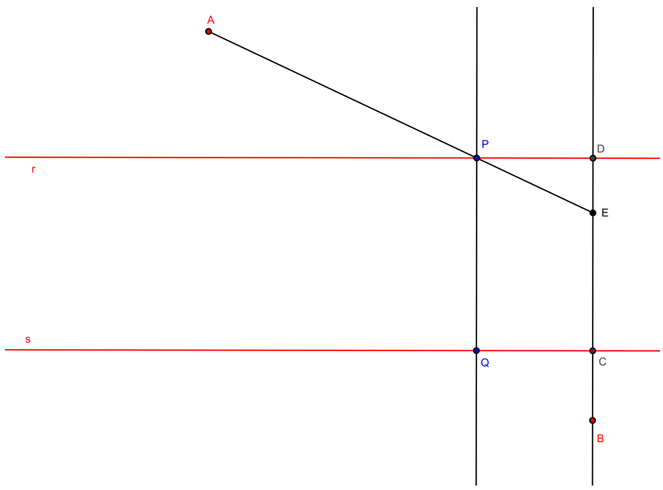
2. Encontre o ponto E sobre o segmento $\overline{BD}$ do item 1. tal que $BE = CD$ (figura abaixo);



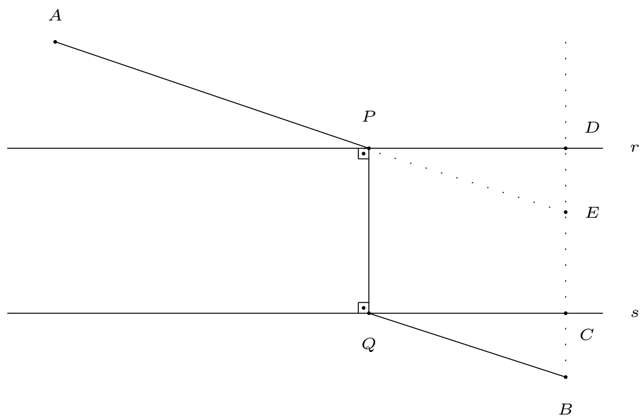
3. Tracemos o segmento de reta $\overline{AE}$ que encontra a reta $\underline{r}$ no ponto P (figura abaixo);



4. A reta perpendicular a reta $\underline{r}$ (ou $\underline{s}$) pelo ponto P encontra a reta $\underline{s}$ no ponto Q (figura abaixo);



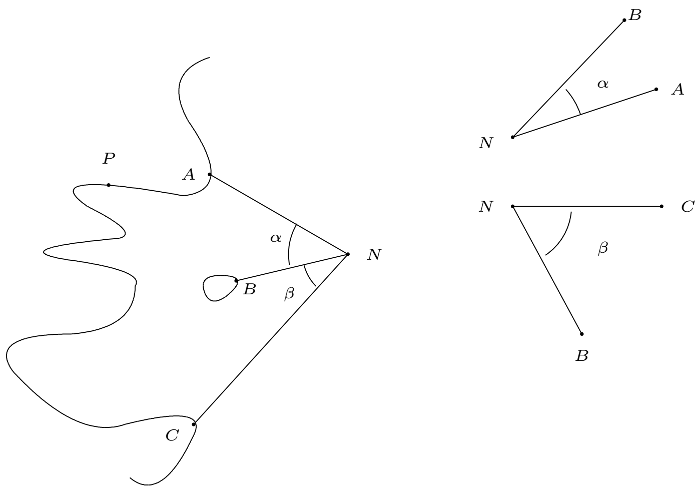
5. O caminho $\overline{AP} \cup \overline{PQ} \cup \overline{QB}$ será o caminho procurado (ou seja é o menor valor procurado).



A demonstração desse fato é semelhante a do exercício 35. (se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ fossem coincidentes seria exatamente o caso do exercício 35.) e será deixada como exercício para o leitor.

Exercício 1.10.37 *Um navio N deseja atingir o porto P da carta náutica mostrada na figura abaixo. Em derto instante, o capitão avista os faróis A, B e C (não colineares) e mede os seguintes ângulos $\widehat{ANB}$, $\widehat{BNC}$.*

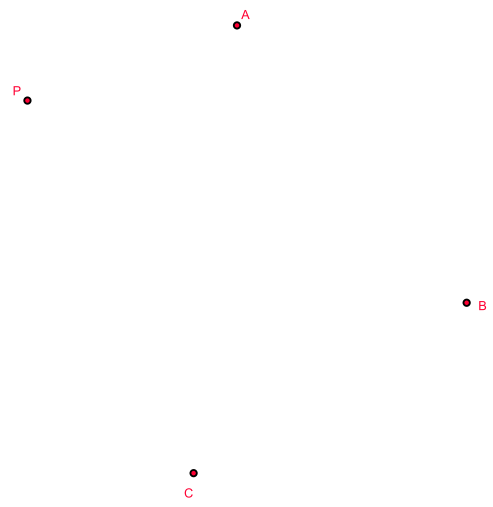
Usando a régua é o compasso determine a posição do navio e sua distância ao porto. A escala da carta náutica é $1 : 10.000$.

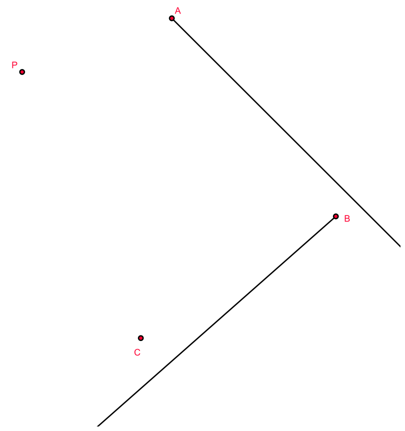


Resolução:

Vamos a resolução:

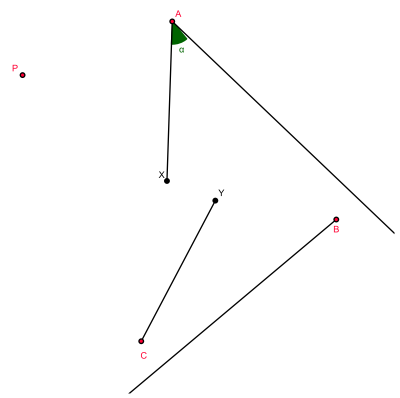
1. Consideremos a semi-reta que contém o segmento $\overline{AB}$ com extremidade em A, denotada por $\overset{\mapsto}{AB}$ e a semi-reta que contém o segmento $\overline{BC}$ com extremidade em B, denotada por $\overset{\mapsto}{BC}$ (figura abaixo);



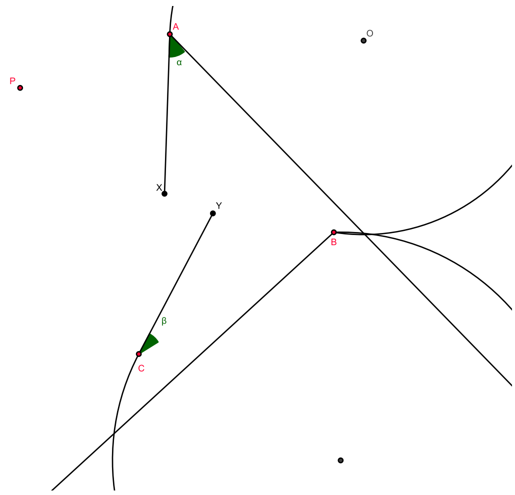


2. Encontremos o ponto X no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ que comtém o ponto P, de tal modo que $\widehat{XAB} = \alpha$ (ver figura abaixo).

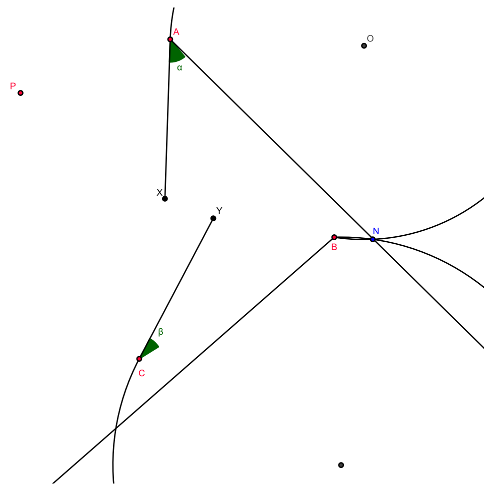
   De modo semelhante podemos encontrar o ponto Y no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ que contém o ponto P, de tal modo que $\widehat{YCB} = \beta$ (figura abaixo).



3. Tracemos o arco capaz dos ângulos $\alpha = \widehat{BAX}$ relativamente ao segmento $\overline{AB}$ e o arco capaz do ângulo $\beta = \widehat{BCY}$ relativamente ao segmento $\overline{BC}$ (figura abaixo);



4. Na interseção dos arcos capazes encontra-se o ponto N, ou seja, o ponto de localização na carta náutica do navio. O outro ponto de intersecção das duas circunferência é o ponto B;



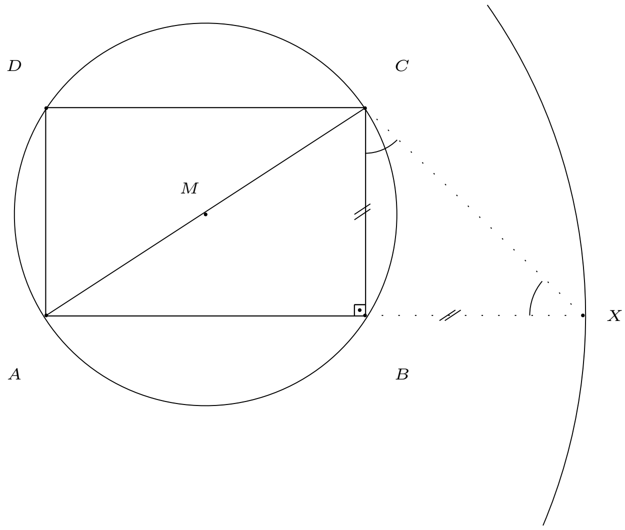
5. Tendo a localização do ponto podemos utilizar uma régua enumerada para medir a distância do ponto N ao ponto P que multiplicada por 10.000 nos dará a distância real do navio ao porto.

Exercício 1.10.38 *Construir um triângulo ΔABC sabendo-se que o comprimento $AB = 5,3\,cm$, $\cos(\widehat{A}) = 0,6$ e que o lado $\overline{BC}$ é o menor possível.*

Exercício 1.10.39 *Construir um retângulo comprimento de uma diagonal, por exemplo, $AC = d$, e de seu semi-perímetro $AB + BC = p$.*

<u>**Resolução:**</u>

Suponhamos que o problema está resolvido.



Observemos que se X é um ponto de intersecção da circunferência de centro em A e raio $\underline{p}$ com a reta que passa pelos pontos A e B então o triângulo ΔXBC é isóceles, pois

$$AB + BC = p = AB + BX, \quad \text{logo} \quad BX = BC.$$

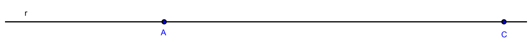
Assim $\widehat{BCX} = \widehat{CXB}$.

Mas o ângulo
$$\widehat{XBC} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2},$$
logo, da soma dos ângulos internos do triângulo ΔBCX ser igual a π, segue que
$$\widehat{BCX} = \widehat{CXB} = \frac{\pi}{4}.$$

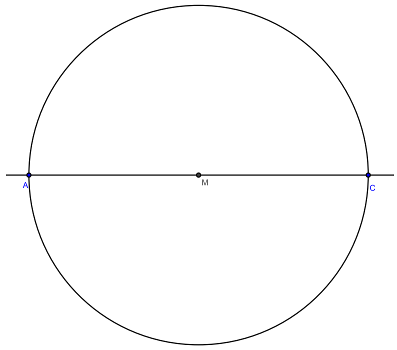
Portanto o ponto X está na intersecção da circunferência de centro no ponto A e raio $\underline{p}$ com o arco capaz do ângulo $\frac{\pi}{4}$ associado ao segmento $\overline{AC}$ e assim podemos construir o retângulo pedido.

Vamos a construção geométrica:

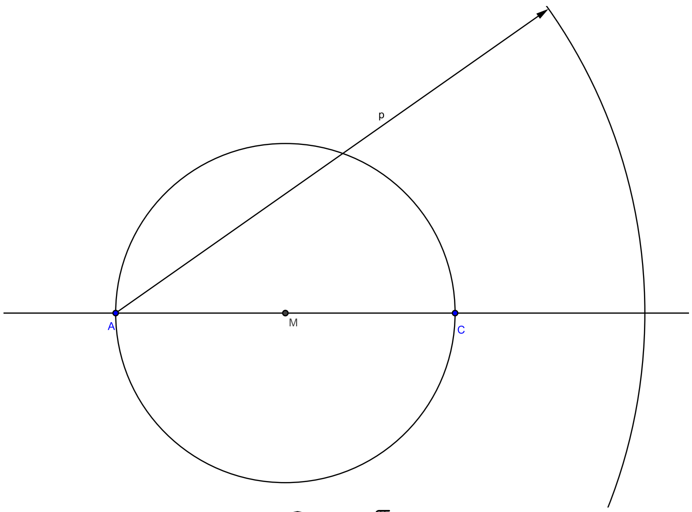
1. Dada uma reta $\underline{r}$ e um ponto A sobre a mesma encontremos um ponto C de tal modo que $AC = d$ (figura abaixo);



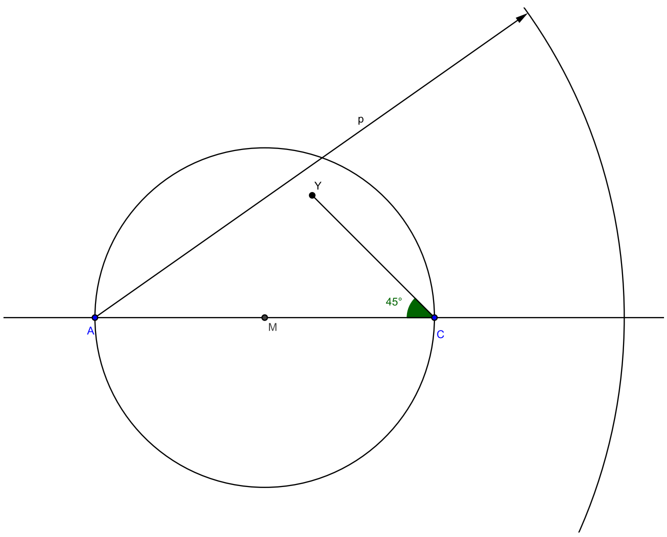
2. Encontremos o ponto médio M do segmento AC e tracemos uma circunferência, de centro em M, que contenha os pontos A e C (isto é, seu raio é $MA = MC$), que será indicada por $\mathcal{C}$(figura abaixo);



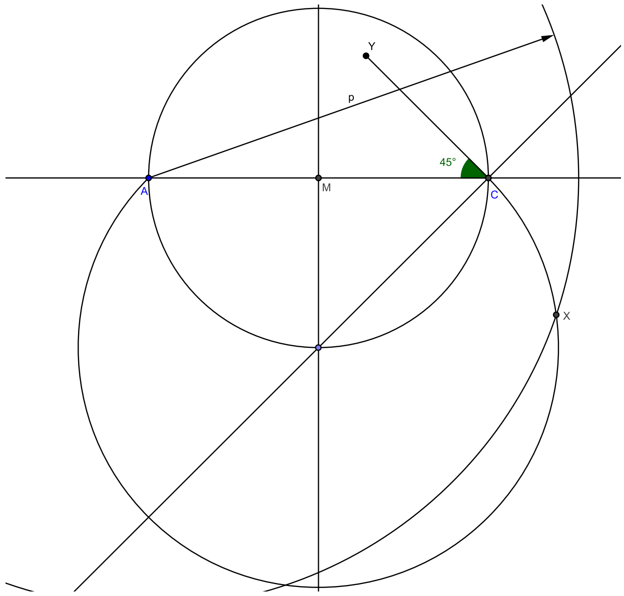
3. Tracemos uma circunferência, de centro em A de raio p, que será indicada por $\mathcal{C}'$ (figura abaixo);



4. Encontremos o ponto Y de modo que $\widehat{YCA} = \dfrac{\pi}{4}$ (figura abaixo);

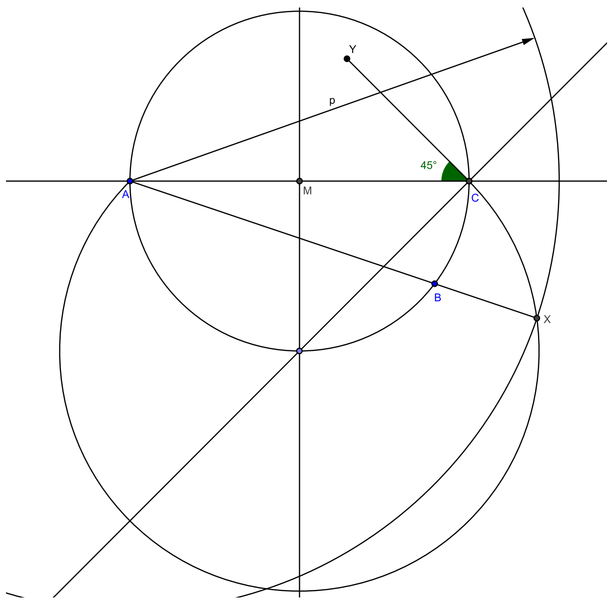


5. Tracemos o arco capaz do ângulo acima sobre o segmento $\overline{AC}$.
   Este arco encontrará a circunferência $\mathcal{C}'$ no ponto X (podemos ter outro ponto - figura abaixo);



6. O segmento de reta $\overline{AX}$ intercepta a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto B.

   O ponto B é um dos vértice do retângulo procurado (figura abaixo);



De fato, temos que o triângulo ΔABC é retângulo no ângulo $\widehat{B}$ pois o ponto B está na circunferência $\mathcal{C}$ (cuja hipotenusa é o segmento $\overline{AC}$).

Como o triângulo ΔBXC é isósceles (na verdade $\widehat{BXC} = \dfrac{\pi}{4}$ e como $\widehat{XBC} = \dfrac{\pi}{2}$ temos que $\widehat{XCB} = \dfrac{\pi}{4}$) temos que $BX = BC$.

Assim

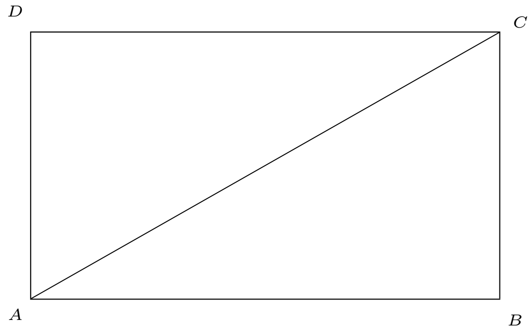
$$AB + BC = AB + BX = p,$$

pois os pontos A, B e X são colineares e $AX = p$ é raio da circunferência $\mathcal{C}'$.

Os outros vértices podem ser obtidos encontrando-se a intersecção das circunferências de centros nos pontos A e C e raios BC e AB, respectivamente.

Observação 1.10.6 *Podemos obter uma solução algébrica, como veremos a seguir:*

Suponhamos que o retângulo $ABCD$ tenha as propriedades requeridas.



Sabemos que

$$\begin{aligned}
&AC = d \\
&2.AB + 2.BC = 2p \Rightarrow AB + BC = p \Rightarrow BC = p - AB \quad (*) \\
&AB^2 + BC^2 = d^2 \Rightarrow AB^2 = d^2 - BC^2 \overset{(*)}{\Rightarrow} AB^2 = d^2 - (p - AB)^2 \Rightarrow \\
&\quad AB^2 = d^2 - (p^2 - 2.p.AB + AB^2) \Rightarrow AB^2 - p.AB - \frac{p^2 - d^2}{2} = 0 \Rightarrow \qquad (1.10) \\
&\quad AB = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4\frac{p^2 - d^2}{2}}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Como

$$3p^2 - 2d^2 > p^2,$$

(pois $p = AB + BC > AC = d$) temos duas soluções algébricas para o problema acima mas só uma pode ser obtida geometicamente, a saber,

$$AB = \frac{p + \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2},$$

pois $\sqrt{3p^2 - 2d^2} > p$.

Algebricamente temos que

$$x_2 \doteq p - AB = p - \frac{p + \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2} = \frac{p - \sqrt{3p^2 - 2d^2}}{2} < 0$$

será a outra solução da equações do segundo grau acima.

Tendo o valor de AB podemos obter geometricamente o retângulo com as propriedades requeridas bastando para isto executar os itens abaixo:

1. *Encontremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos A e B tal que o segmento AB tenha comprimento AB obtido acima;*

2. *Tracemos pelo ponto A a circunferência de centro em A e raio $d = (AC)$;*

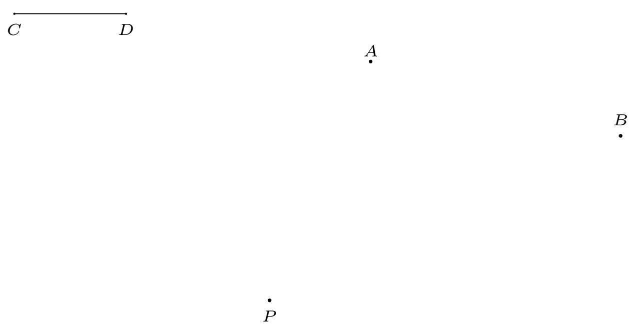
3. *A reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto B encontrará a circunferência acima no ponto C;*

4. *Tracemos as circunferência de centros em A e C e raios BC e AB, respectivamente.*

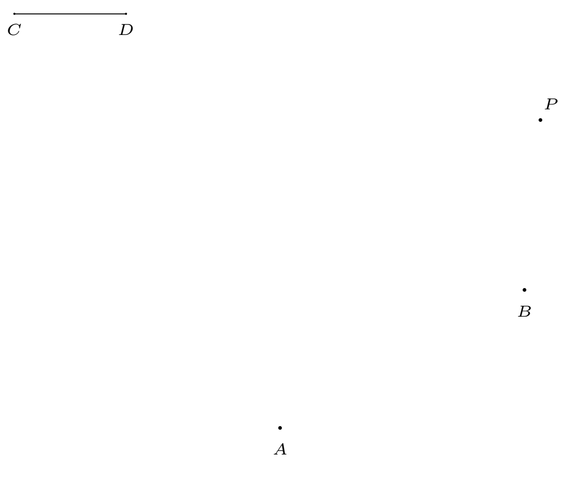
   Na intersecção das duas circunferências (que estiverem no mesmo semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$) encontraremos o vértice D.

Como veremos no próximo capítulo, em algumas situações as soluções algébricas podem ser mais simples de serem obtidas do que as soluções geométricas (via regra e compasso).

Exercício 1.10.40 *Dados em posição os pontos A, B e P e dado um segmento $\overline{CD}$, traçar pelo ponto P uma reta $\underline{r}$ de modo que os pontos A e B estejam num mesmo semi-plano determinado pela reta $\underline{r}$ e que a soma das distâncias dos pontos A e B à reta $\underline{r}$ sejam iguais a $2CD$ (ver figura abaixo).*

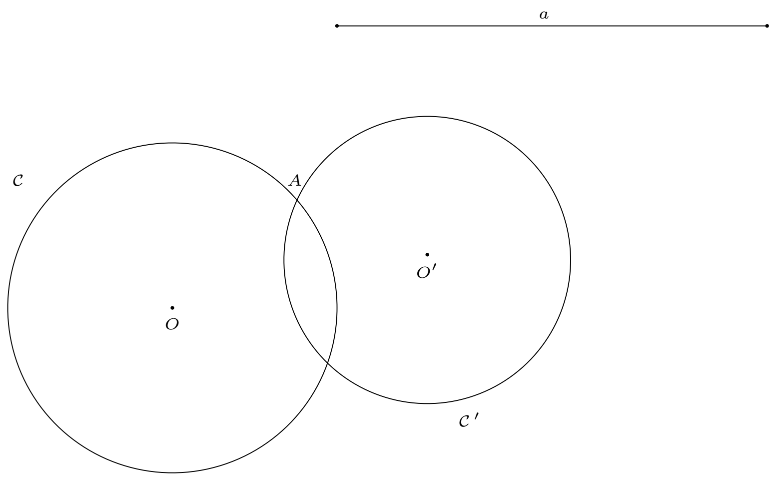


Exercício 1.10.41 *Dados em posição os pontos A, B e P e dado um segmento $\overline{CD}$, traçar pelo ponto P uma reta $\underline{r}$ de modo que os pontos A e B estejam em lados opostos dos semi-planos determinado pela reta $\underline{r}$ e que a soma das distâncias dos pontos A e B à reta $\underline{r}$ sejam iguais a CD (ver figura abaixo).*



Exercício 1.10.42 *Nos problemas 40. e 41. substitua a palavra "soma" por "diferença".*

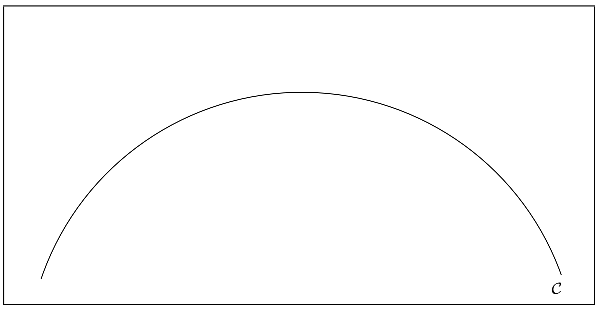
Exercício 1.10.43 *Dados as circunferências $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}'$, o ponto A e $a > 0$, como na figura abaixo, traçar pelo ponto A uma reta secante que passa pelos pontos A, $P \in \mathcal{C}$ e $Q \in \mathcal{C}'$ de forma que tenhamos $PQ = a$.*



Exercício 1.10.44 *Utilizando a figura acima, encontrar os pontos $P \in \mathcal{C}$ e $Q \in \mathcal{C}'$ tal que os pontos P, A e Q sejam colineares e o segmento $\overline{PQ}$ tenha o maior comprimento possível.*

Exercício 1.10.45 *Utilizando a figura acima, encontrar os pontos $P \in \mathcal{C}$ e $Q \in \mathcal{C}'$ tal que os pontos P, A e Q sejam colineares e $PA = AQ$.*

Exercício 1.10.46 *Conhecemos de uma circunferência $\mathcal{C}$ apenas a parte que se vê na figura abaixo. Limitando-se ao espaço disponível, determine o raio da circunferência $\mathcal{C}$.*



Exercício 1.10.47 *Construir um quadrado conhecendo-se um ponto em cada um dos lados do mesmo.*

Exercício 1.10.48 *Sejam A, B, C e D pontos, distintos, sobre uma reta $\underline{r}$, distribuidos sobre a mesma nessa orldem. Traçar pelos pontos A e B duas retas paralelas e pelos pontos C e D outras duas retas paralelas de modo que as interseções dessas retas formem um quadrado.*

Exercício 1.10.49 *Sejam A e B dois pontos que pertecem um mesmo semi-plano determinado por uma reta $\underline{r}$. Determinar um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de modo que o ângulo formado pela reta $\underline{r}$ e pelo segmento $\overline{PB}$ seja o dobro do o ângulo formado pela reta $\underline{r}$ e pelo segmento $\overline{PA}$.*

Exercício 1.10.50 *Sejam A e B dois pontos que pertecem um mesmo semi-plano determinado por uma reta $\underline{r}$. Determinar um ponto P sobre a reta $\underline{r}$ de modo que a medida do ângulo $\widehat{APB}$ seja o maior possível.*

Capítulo 2

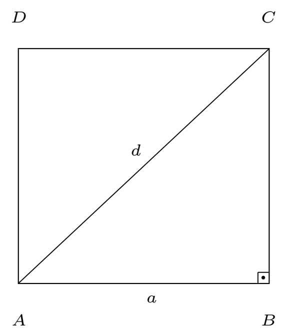
Expressões Algébricas

2.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de problemas de construções geométricas via resolução de **equações algébricas** e vice-versa.

Como motivação consideremos o seguinte problema:

Exemplo 2.1.1 *Construir um quadrado $\square ABCD$ conhecendo-se a soma da diagonal com um dos lados, por exemplo, $AC + AB$ é dado.*



Resolução:

Se $AB = a$ (não conhecemos este comprimento) e $\underline{d}$ é a diagonal (que também não conhecemos) então como o triângulo ΔABC (figura acima) é retângulo e isósceles, do Teorema de Pitágoras, segue que

$$d^2 = AB^2 + BC^2 \overset{[CD=AB=a]}{=} 2a^2 \quad \Rightarrow \quad d = a\sqrt{2}. \tag{2.1}$$

Assim

$$d = a\sqrt{2} + a$$

é conhecido, digamos $\underline{s}$, ou seja, temos que resolver a equação algébrica

$$d + a = s \quad \overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad a\sqrt{2} + a = s \quad \Rightarrow \quad a = \frac{s}{\sqrt{2}+1},$$

ou ainda,

$$a = \frac{s}{\sqrt{2}+1}\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{s\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = s\left(\sqrt{2}-1\right),$$

ou seja,

$$a = s(\sqrt{2}-1).$$

Portanto temos uma fórmula para encontrar o comprimento de um dos lados (e portanto todos) do quadrado e podemos tentar traçá-lo geometricamente (deixaremos como exercício para o leitor traçá-lo).

Veremos, mais adiante, como essa solução pode ser construída geometricamente.

2.2 A $4.^a$ Proporcional

Definição 2.2.1 *Sejam $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ o comprimento de três segmentos.*

Diremos que $\underline{x}$ é a **$4.^a$ proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$** *se*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Observação 2.2.1

1. *A relação acima é equivalente a igualdade*

$$ax = bc$$

que apareceu no Exemplo (1.1.1) no início do curso onde obtivemos a sua resolução geométrica, utilizando as ideías dos gregos.

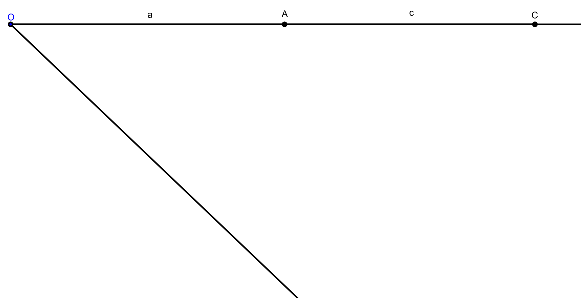
2. *Vamos obter $\underline{x}$, geometricamente, de uma outra maneira, utilizando o* **Teorema de Tales**.

Para isto:

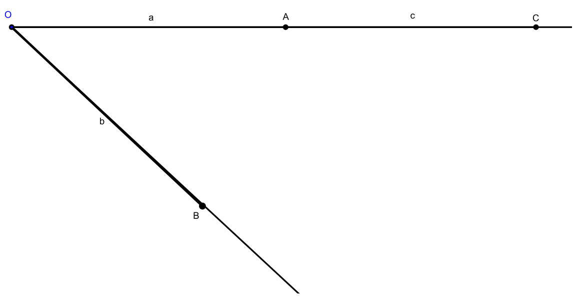
(a) *Consideremos um ângulo qualquer (não raso, isto é, não igual a π) com vértice no ponto O (ver figura abaixo).*

(b) *Sobre um dos lados do ângulo encontremos os pontos A e C de tal modo que (ver figura abaixo)*

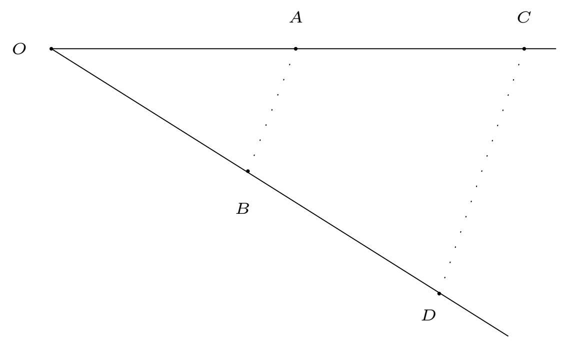
$$OA = a \quad \text{e} \quad AC = c.$$



(c) *Sobre o outro lado do ângulo encontremos o ponto B de tal modo que $OB = b$ (figura abaixo).*



(d) *Tracemos pelo ponto C uma reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$, que intercepta a semi-reta $\overrightarrow{OB}$ no ponto D (figura abaixo).*



(e) *Afirmamos que $x \doteq BD$, isto é, a solução da 4.ª proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.*

De fato, como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, os triângulos ΔOAB e ΔOCD são semelhantes (caso AAA).

Logo lados correspondentes guardam uma mesma proporção, por exemplo:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

ou seja,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA + AC}{OB + BD},$$

ou ainda,

$$\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + x}, \quad \text{isto é,} \quad a(b + x) = b(a + c),$$

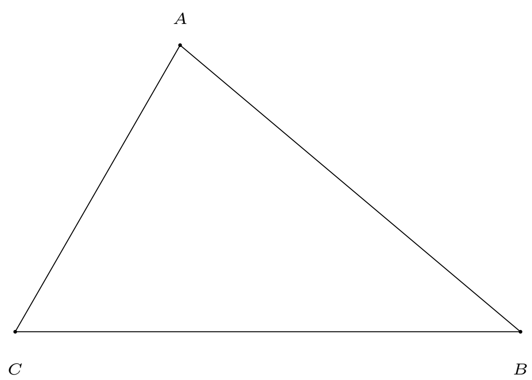
que implicará (observemos que $ab = ba$)

$$ax = bc, \quad \text{ou, equivalentemente} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

mostrando que $x = BD$ é a 4.a proporcional entre $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.

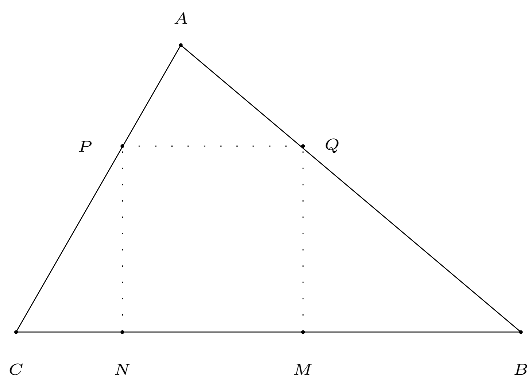
Trataremos a seguir de vários exemplos que mostrarão como esta noção poderá ser útil em construções geométricas.

Exemplo 2.2.1 *Inscrever no triângulo ΔABC dado um quadrado com um lado sobre o segmento $\overline{BC}$.*



Resolução:

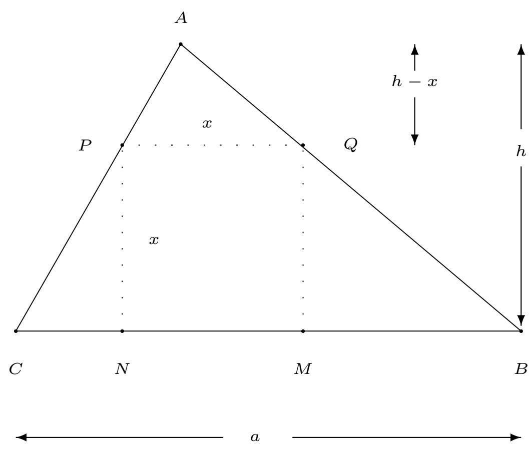
Suponhamos que o problema foi resolvido (figura abaixo).



Observemos que o quadrado $\square MNPQ$ está inscrito no triângulo ΔABC com lado $\overline{MN}$ sobre o lado $\overline{BC}$.

Consideremos $BC = a$ e o comprimento da altura do triângulo ΔABC igual a $\underline{h}$, relativamente ao lado $\overline{BC}$ (isto é $h = h_a$).

Seja $\underline{x}$ o comprimento do lado do quadrado $\square MNPQ$ (figura abaixo).



Observemos que os triângulos ΔAQP e ΔABC são semelhante (caso AAA, pois as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{CB}$ são paralelas).

Logo elementos correspondentes guardam a mesma proporção, em particular:

$$\frac{h-x}{h} = \frac{QP}{BC} = \frac{x}{a}.$$

Logo

$$xh = ah - ax, \quad \text{ou seja,} \quad ax + xh = ah$$

e assim

$$x = \frac{ah}{a+h}. \tag{2.2}$$

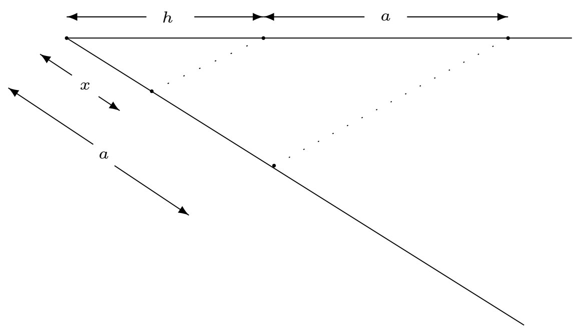
Portanto temos uma fórmula que nos dá o valor $\underline{x}$ em função dos valores $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

Para construirmos o quadrado observemos que a relação (2.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{a+h}{a} = \frac{h}{x},$$

isto é, $\underline{x}$ é a 4.^{a} proporcional entre $a+h$, $\underline{a}$ e $\underline{h}$.

Logo podemos obter um segmento de comprimento $\underline{x}$ utilizando a construção a seguir:



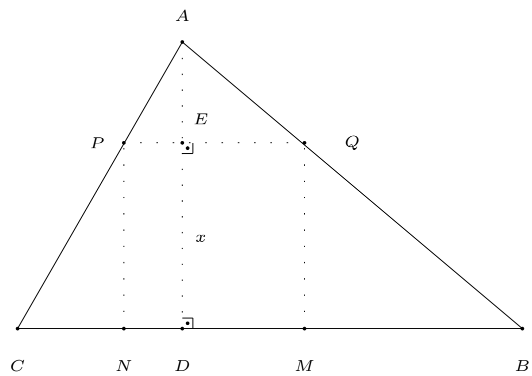
Conhecido o valor $\underline{x}$, gemometricamente, podemos traçar quadrado $\square MNPQ$ da seguinte forma:

1. Tracemos a altura $\overline{AD}$ do triângulo ΔABC (basta encontrar a perpendicular a reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto A);

2. Sobre o segmento $\overline{AD}$, encontrar o ponto E tal que $DE = x$;

3. A reta paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto E interceptará os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos Q e P, respectivamente;

4. Traçando-se as retas perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{QP}$ pelos pontos Q e P obtermos, na intersecção com a reta $\overleftrightarrow{BC}$, os outros dois vértices M e N, respectivamente (figura abaixo).



5. O quadrilátero $MNPQ$ é um quadrado (verifique!) inscrito no triângulo ΔABC com o lado $\overline{MN}$ sobre o lado $\overline{BC}$, como queríamos.

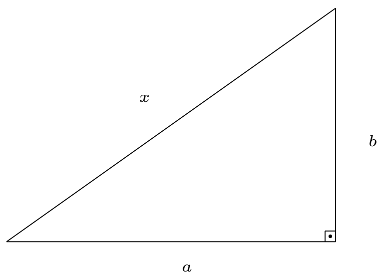
2.3 Sobre a Equação $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$

Observação 2.3.1 *Sejam $\underline{a}$ e $\underline{b}$ comprimentos de dois segmentos.*

1. *Então o número real (maior que zero)*

$$x \doteq \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

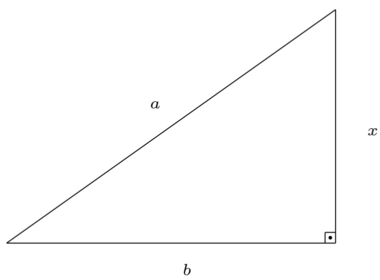
pode ser interpretado, pelo Teorema de Pitágoras, como sendo o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



2. *De modo semelhante, o número real (maior que zero)*

$$x \doteq \sqrt{a^2 - b^2}$$

pode ser interpretado, pelo Teorema de Pitágoras, como o valor do comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo que tem hipotenusa com comprimento $\underline{a}$ e outro cateto com comprimento $\underline{b}$ (figura abaixo).



3. *Mais geralmente, expressões do tipo*

$$\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \underbrace{\cdots}_{\text{número finito de parcelas}}}$$

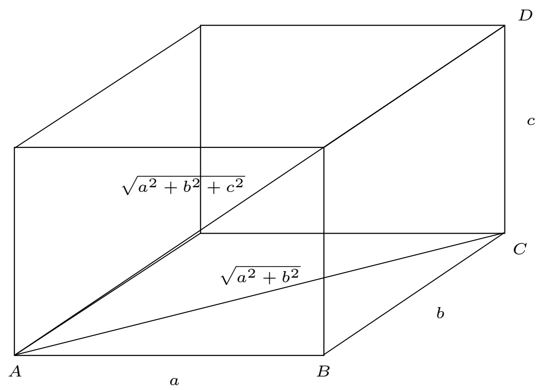
podem ser construídas geometricamente utilizando várias vezes os procedimentos acima, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.1 *Construir a diagonal de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$.*

Resolução:

Sabemos que o comprimento diagonal de um paralelepípedo reto cujos comprimentos das arestas que o determinam são: $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ é dada por (basta aplicar o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos ΔABC e ΔACD - ver figura abaixo):

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Seja

$$m \doteq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

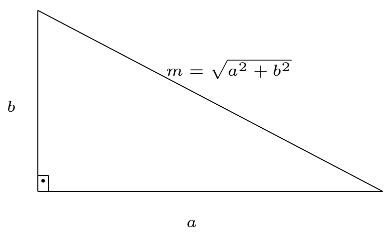
Deste modo

$$x = \sqrt{m^2 + c^2}$$

e assim determinamos o comprimento da diagonal, geometricamente, utilizando-se duas vezes o procedimento definido anteriormente, a saber:

1. Construimos o triângulo retângulo de catetos com comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

   Logo sua hipotenusa tem comprimento $\underline{m}$ (figura abaixo);

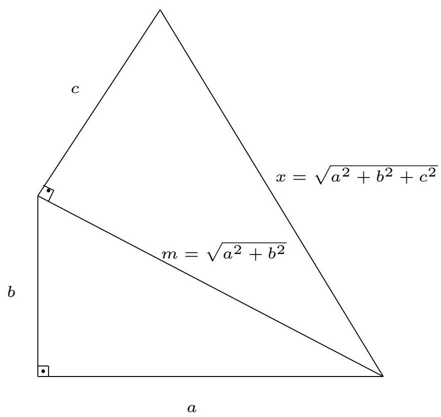


2. Depois construimos o triângulo retângulo com um cateto de comprimento $\underline{c}$ e o outro cateto com comprimento m.

   Assim sua hipotenusa terá comprimento

$$\sqrt{c^2 + m^2} \overset{[m^2 = a^2 + b^2]}{=} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = x$$

   como queríamos (figura abaixo).



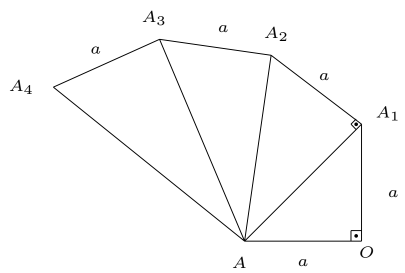
2.4 A Expressão $a\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$

Observação 2.4.1

1. *Dado $\underline{a}$, o comprimento de um segmento, podemos construir segmentos cujos comprimentos são*

$$a\sqrt{2}, \quad a\sqrt{3}, \quad a\sqrt{4}, \cdots, a\sqrt{n}, \cdots$$

por meio da seguinte construção:



De fato, aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔOAA_1 temos

$$AA_1^2 = OA_1^2 + OA^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

logo

$$AA_1 = a\sqrt{2}.$$

Aplicando-se novamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔAA_1A_2 temos

$$AA_2^2 = AA_1^2 + A_1A^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2,$$

logo

$$AA_2 = a\sqrt{3}.$$

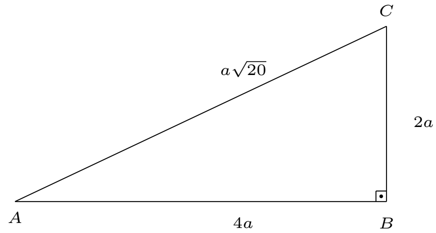
Logo, por indução, podemos mostrar que:

$$AA_1 = a\sqrt{2} = \quad AA_2 = a\sqrt{3}, \quad AA_3 = a\sqrt{4}, \quad AA_4 = a\sqrt{5}, \cdots$$

2. *Se $\underline{n}$ for muito grande podemos, algumas vezes, encontrar um caminho mais rápido para construir o segmento com o valor pedido.*

   Por exemplo, se queremos construir um segmento de comprimento $a\sqrt{21}$ podemos agir da seguinte forma:

   (a) *Construimos um triângulo retângulo com catetos de comprimentos $4a$ e $2a$.*
   Logo sua hipotenusa, pelo Teorema de Pitágoras, terá comprimento $a\sqrt{20}$ (figura abaixo).

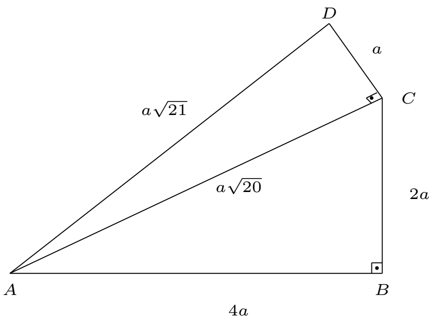


De fato, pois aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔABC obteremos

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = a\sqrt{20},$$

com isto obtemos um segmento de comprimento $a\sqrt{20}$, a saber, o segmento $\overline{AC}$.

(b) Em seguida construimos um triângulo retângulo com catetos de comprimento $a\sqrt{20}$ e $\underline{a}$. Deste modo sua hipotenusa terá comprimento $a\sqrt{21}$ (figura abaixo).



De fato, pois aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔACD obteremos

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{20a^2 + a^2} = a\sqrt{21},$$

com isto obtemos um segmento de comprimento $a\sqrt{21}$, a saber, o segmento $\overline{AD}$.

Um outro de exemplo que podemos aplicar as idéias acima é dado pelo:

Exemplo 2.4.1 *Construir um quadrado conhecendo-se a soma, $\underline{s}$, do comprimento da diagonal com o comprimento de um lado do mesmo.*

Resolução:

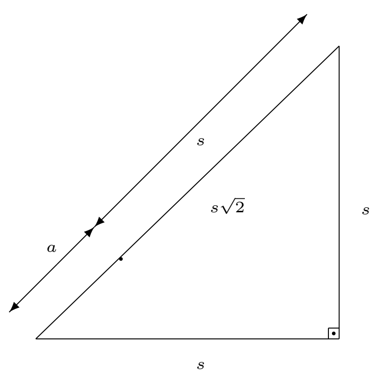
Se $\underline{a}$ é o comprimento do lado do quadrado procurado sabemos (do Exemplo (2.1.1)) que

$$a = s(\sqrt{2} - 1) = s\sqrt{2} - s.$$

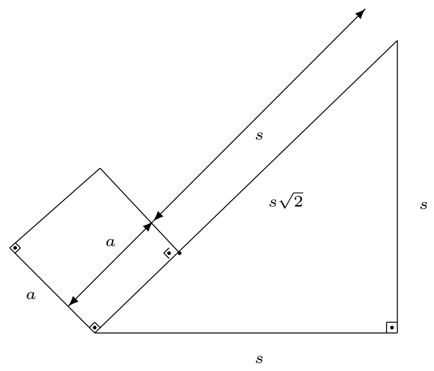
Para obtê-lo geométricamente construimos um triângulo retângulo isóceles com comprimento dos catetos iguais a $\underline{s}$.

Logo sua hipotenusa terá comprimento $s\sqrt{2}$.

Subtraindo-se $\underline{s}$ do valor acima obteremos o valor $\underline{a}$, e portanto um segmento de comprimento $\underline{a}$ (figura abaixo).



Com isto podemos construir nosso quadrado a partir desse lado de comprimento conhecido (figura abaixo).



2.5 A Média Geométrica

Definição 2.5.1 *Dados os números reais positivos* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*, definimos a sua* **média aritmética***, indicada por* m_a*, como sendo:*

$$m_a \doteq \frac{a+b}{2}.$$

Sua **média geométrica***, indicada por* m_g*, será definida como:*

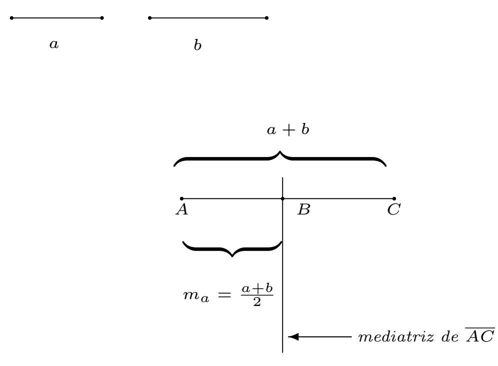
$$m_g \doteq \sqrt{ab}.$$

Sua **média Pitagórica***, indicada por* m_p*, como sendo:*

$$m_p \doteq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Observação 2.5.1

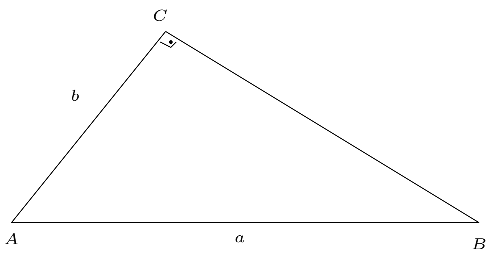
1. *A construção da média aritmética é simples, para isto basta encontrar o ponto médio do intervalo de comprimento* $a+b$ *(via mediatriz - figura abaixo);*



Ou seja, AB *é a média aritmética de* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$*.*

2. *A construção da média geométrica aparece em um triângulo retângulo.*

   Suponhamos que um triângulo retângulo ΔABC *tem um cateto de comprimento* $\underline{b}$ *e hipotenusa de comprimento* $\underline{a}$ *(figura abaixo).*



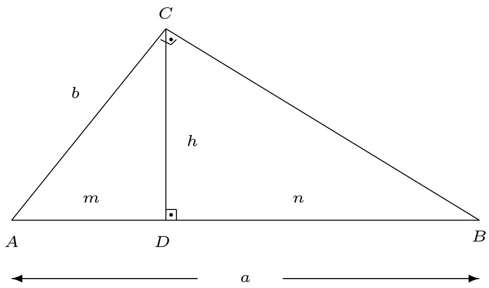
Se $\underline{h}$ *é o comprimento da altura relativa a hipotenusa* $\overline{AB}$ *então temos as seguintes relações (cuja verificação será deixada como exercício para o leitor):*

$$h^2 = m\,n \tag{2.3}$$
$$b^2 = a\,m, \tag{2.4}$$

onde

$$m = AD, \quad n = DB$$

e D *é o ponto de interseção da reta perpendicular à reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *pelo ponto* A *com a reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *(figura abaixo).*



Assim, (2.3) nos diz que o comprimento da altura do triângulo ΔABC *relativamente ao lado* $\overline{AB}$ *(ou seja, à hipotenusa do mesmo, ou ainda,* $\underline{h}$*) é a média geométrica entre os comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, isto é,*

$$h = \sqrt{m\,n}.$$

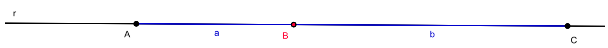
Já (2.4) nos diz que o comprimento de um cateto é a média geométrica dos comprimentos da sua projeção sobre a hipotenusa e o comprimento da própria, ou seja,

$$b = \sqrt{a\,m}.$$

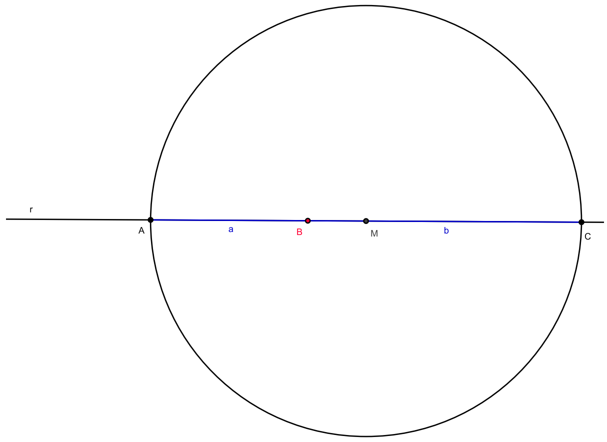
A construção da média geométrica pode ser feita de várias maneiras.
Exibiremos três modos distintos de fazê-la:

1.a construção:

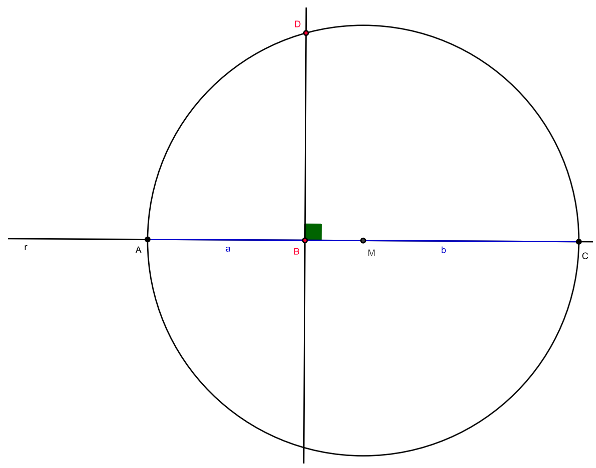
(a) Sobre uma reta $\underline{r}$ obtenha três pontos A, B e C de tais modo que $AB = a$ e $BC = b$, com o ponto B no segmento $\overline{AC}$ (figura abaixo);



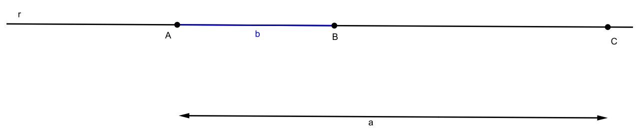
(b) Construa a semi-circunferência de centro no ponto médio, M, do segmento $\overline{AC}$ e raio $\dfrac{AC}{2}$(figura abaixo);



(c) Encontre a reta perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B que encontra a circunferência obtida no item (b) no ponto D (figura abaixo);



(d) Temos $BD = \sqrt{a\,b}$, ou seja, BD é a média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).

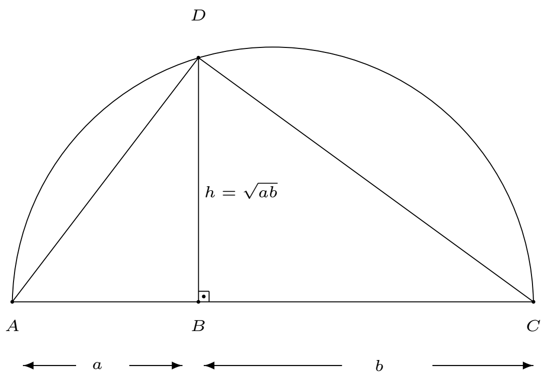


De fato, pois o triângulo ΔADC é um triângulo retângulo no vértice D.

Logo, do item 2. desta observação, segue que o comprimento da altura do triângulo ΔADC, $\underline{h}$, relativamente a hipotenusa $\overline{AC}$ será dada por $a.b$, isto é,

$$BD = h = \sqrt{ab},$$

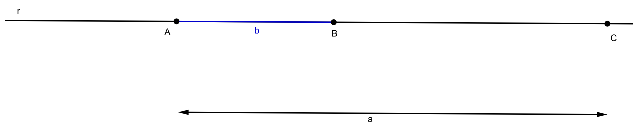
ou seja, BD será média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



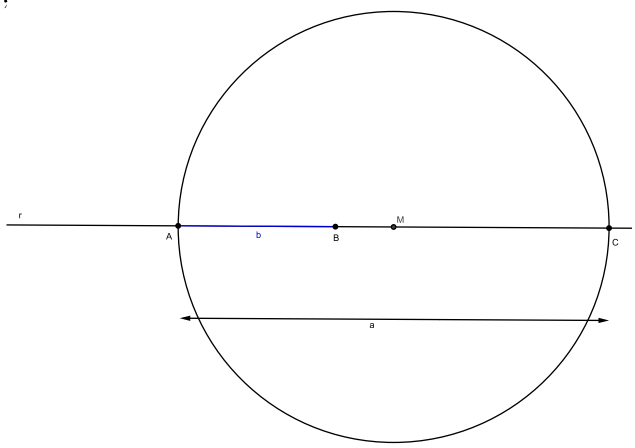
2.a construção:

Suponhamos que $a > b$.

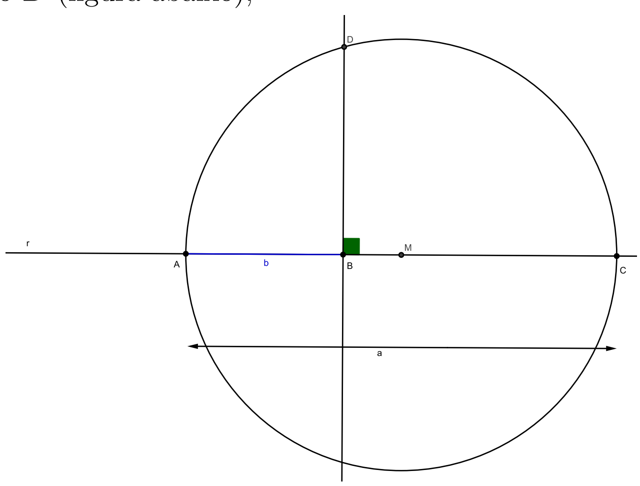
(a) Encontremos sobre uma reta $\underline{r}$ os pontos A, B e C de modo que $AC = a$, $AB = b$, com o ponto B no segmento $\overline{AC}$ (figura abaixo);



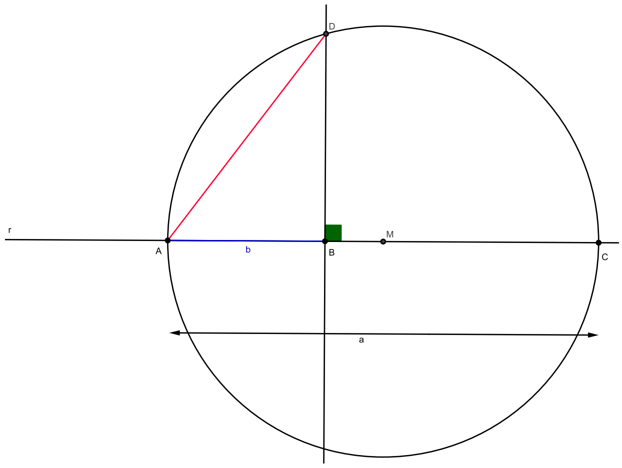
(b) Tracemos a semi-circunferência de centro no ponto médio, M, do segmento $\overline{AC}$ e raio $\dfrac{AC}{2}$ (figura abaixo);



(c) Encontremos a reta perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B que encontra a sem-circunferência acima no ponto D (figura abaixo);



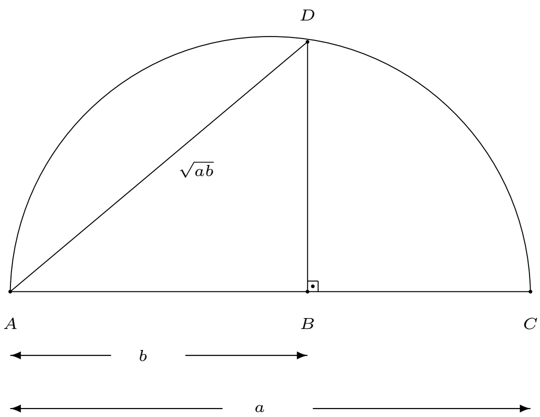
(d) Com isto temos que $AD = \sqrt{ab}$, ou seja a média geométrica entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



De fato, do item 2. da observação acima temos que $AD^2 = ab$, isto é,

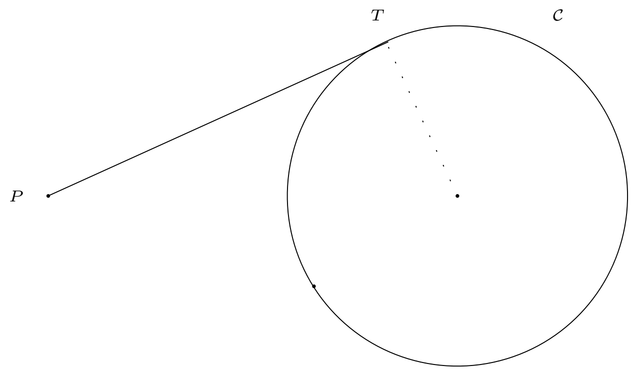
$$AD = \sqrt{ab},$$

ou seja, AD será média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (figura abaixo).



III. A terceira delas utilizará a noção de potência de um ponto relativamente a uma circunferência que será introduzida a seguir.

Definição 2.5.2 *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ e um ponto P exterior a circunferência $\mathcal{C}$ definimos a* **potência do ponto P relativamente à circunferência $\mathcal{C}$** *como sendo o comprimento do segmento $\overline{PT}$ elevado ao quadrado (isto é, PT^2) onde o ponto T é um ponto de tangência da reta tangente a circunferência $\mathcal{C}$ que contém o ponto P (figura abaixo).*

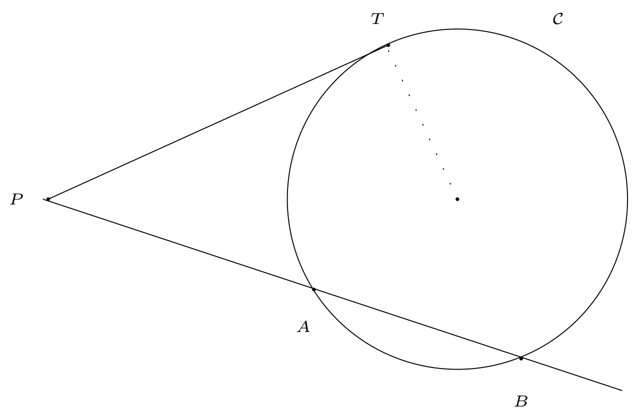


O Teorema abaixo nos dá um outro modo de construir a média geométrica.

Teorema 2.5.1 (Teorema da Secante-Tangente) *Sejam P é um ponto exterior a uma circunferência $\mathcal{C}$, $\overleftrightarrow{PT}$ e $\overleftrightarrow{PAB}$ as retas tangente e secante a circunferência $\mathcal{C}$, respectivamente (o ponto T é o ponto de tangência da reta $\overleftrightarrow{PT}$ com a circunferência $\mathcal{C}$, A e B estão sobre a circunferência $\mathcal{C}$ e sobre a reta secante - figura abaixo).*

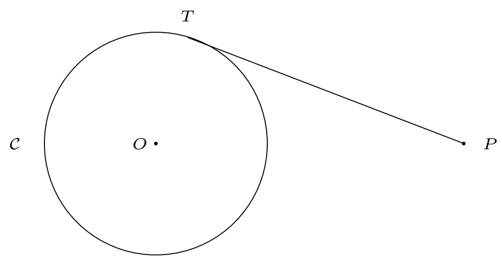
Então

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

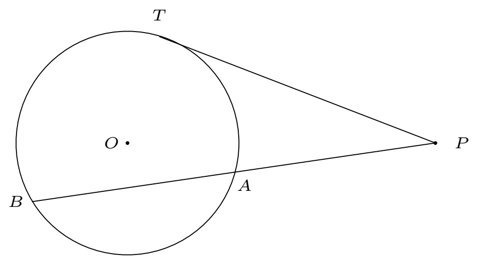


Demonstração:

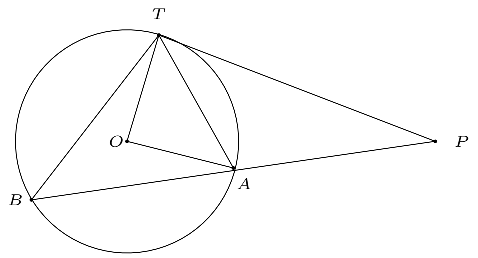
Suponhamos que a circunferência $\mathcal{C}$ tem centro no ponto O e raio OT, onde o ponto T é o ponto de tangência da reta que contém o ponto P com a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



Consideremos um ponto A sobre a circunferência $\mathcal{C}$ e o ponto B obtido da interseção da reta que contém o segmento $\overline{PA}$ com a circunferência $\mathcal{C}$ (figura abaixo).



Com isto, em particular, obtemos os seguintes triângulos ΔPBT e ΔPAT.



Afirmamos que os triângulos ΔPBT e ΔPAT são semelhantes
De fato, consideremos:

$$\alpha \doteq \widehat{PBT}, \quad \beta \doteq \widehat{BTP}, \quad \gamma \doteq \widehat{TPB},$$
$$y \doteq \widehat{TAO}, \quad x \doteq \widehat{ATP}, \quad z \doteq \widehat{PAT}.$$

Como o triângulo ΔOTA é isóceles ($OT = OA$ é o raio da circunferência $\mathcal{C}$) segue que

$$\widehat{OTA} = \widehat{TAO} = y \quad \text{e} \quad \widehat{AOT} = 2\,\widehat{PBT} = 2\,\alpha.$$

Assim, do triângulo ΔOTA segue que

$$\widehat{AOT} + \underbrace{\widehat{OTA} + \widehat{TAO}}_{=2y} = \pi \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + 2y = \pi, \quad \text{ou seja} \quad \alpha + y = \frac{\pi}{2}. \tag{2.5}$$

Observemos também que

$$\widehat{OTP} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{logo} \quad x + y = \widehat{ATP} + \underbrace{\widehat{TAO}}_{=\widehat{OTA}} = \widehat{ATP} + \widehat{OTA} = \widehat{PTO} = \frac{\pi}{2}. \tag{2.6}$$

Das equações (2.5) e (2.6) acima segue que

$$x = \alpha \quad \text{ou seja,} \quad \widehat{ATP} = \widehat{PBT}. \tag{2.7}$$

Do triângulo ΔPBT segue que

$$\widehat{PBT} + \widehat{BTP} + \widehat{TPB} = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{2.8}$$

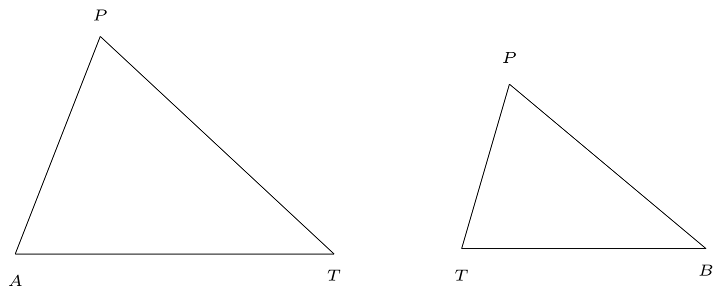
e do triângulo ΔPAT segue que

$$\widehat{PAT} + \widehat{ATP} + \widehat{TPA} = \pi \quad \overset{[\widehat{TPA} = \widehat{TPB}]}{\Rightarrow} \quad z + \underbrace{x}_{\overset{(2.7)}{=}\alpha} + \gamma = \pi \quad \Rightarrow \quad z + \alpha + \gamma = \pi. \tag{2.9}$$

Comparando (2.8) e (2.9) segue que

$$z = \beta \quad \Rightarrow \quad \widehat{PAT} = \widehat{BTP}$$

o que implica que os triângulos ΔPAT e ΔPBT são semelhantes (caso AAA).



Logo elementos correspondentes dos dois triângulos guardam a mesma proporção, em particular temos que a seguinte identidade

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}, \qquad \text{isto é,} \qquad PA \cdot PB = PT^2,$$

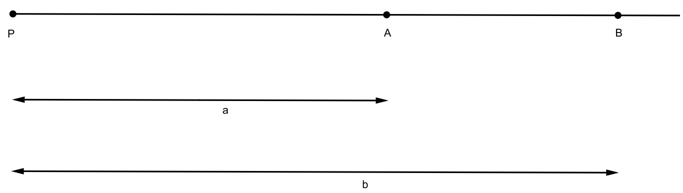
concluindo a demonstração do resultado.

□

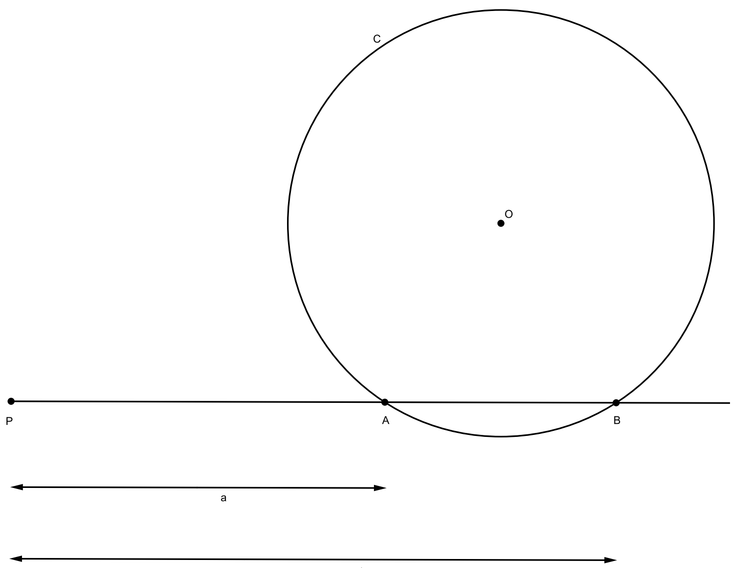
Observação 2.5.2

1. *Para obter geometricamente a média geométrica pelo terceiro modo, agiremos da seguinte forma:*

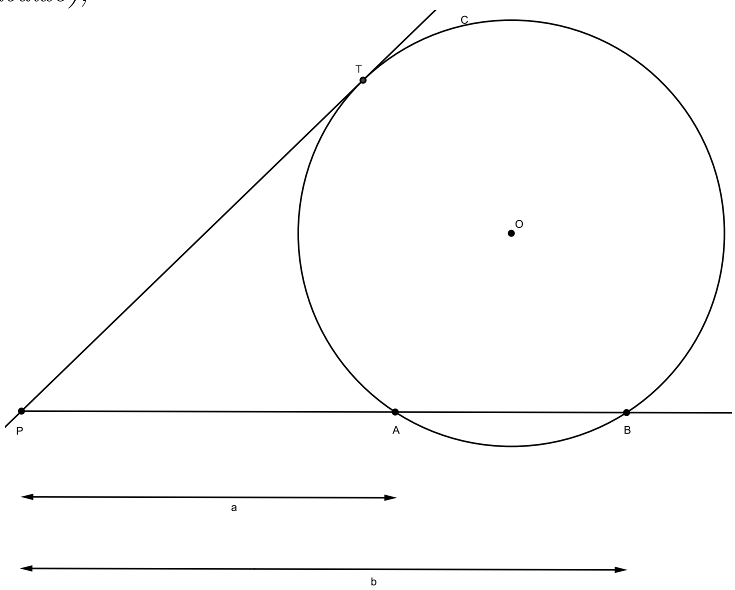
   (a) *Dados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ encontremos três pontos A, B e P sobre uma semi-reta com extremidade no ponto P tal que $PA = a$ e $PB = b$ (figura abaixo);*



   (b) *Encontremos uma circunferência $\mathcal{C}$ que passe pelos pontos A e B (seu centro estará na mediatriz do segmento overlineAB - figura abaixo);*



(c) *Encontre o ponto T de tangência da reta tangente à circunferência $\mathcal{C}$, que contém o ponto P (figura abaixo);*



(d) *Com isto temos que PT é a média geométrica de $\underline{a}$ e $\underline{b}$.*

De fato, do Teorema da Secante-Tangente, segue que

$$PT^2 = PA.PB, \quad \text{ou seja,} \quad PT = \sqrt{PA.PB} = \sqrt{ab},$$

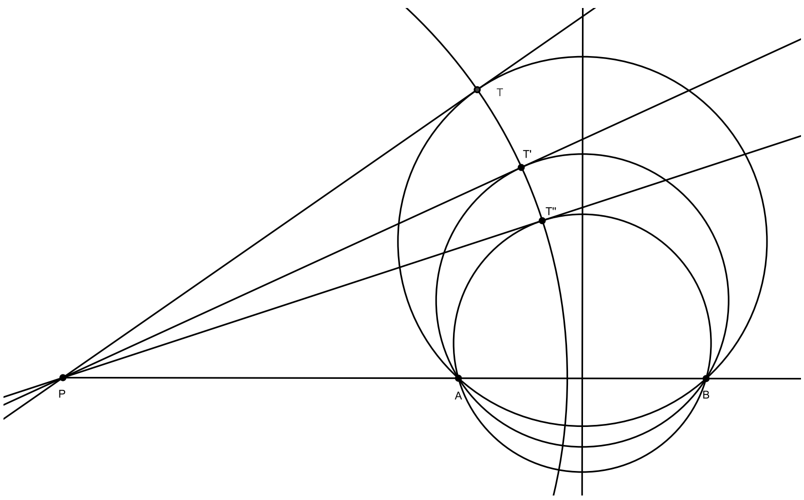
mostrando-se que PT é a média gemométrica entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

2. *Se no último caso, escolhermos uma outra circunferência $\mathcal{C}'$, o ponto de tangência T' irá mudar porém o comprimento do segmento $\overline{PT'}$ não se alterará, ou seja,*

$$PT = PT'.$$

3. *Na verdade o que mostramos é que o lugar geométrico formado pelos pontos de tangência das retas tangentes, que contenham o ponto P, às circunferências que passam pelos pontos A e B estão sobre a circunferência de centro em P e raio PT, onde o ponto T foi escolhido com anteriormente.*

   Isto segue do fato que PT é constante, a saber, $PT = \sqrt{ab}$ - (figura abaixo).



Exemplo 2.5.1 *Dados $a, b > 0$, resolver, geometricamente, a equação do 2.o grau*

$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são números reais não negativos.

Resolução:

Observemos que para a equação do 2.o grau acima ter solução real deveremos ter

$$\Delta = (-a)^2 - 4.1.b^2 > 0 \quad \iff \quad a \geq 2b.$$

Observemos que se $a = 2b$ então, a equação do 2.o grau acima tornar-se-á

$$(x - b)^2 = 0,$$

cuja única solução será $x = b$.
Logo um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $\underline{b}$ será a solução do problema.
A seguir consideraremos o caso $a > 2b$.

1.^{a} Solução:

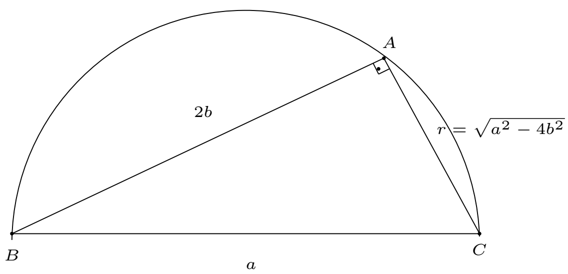
Algebricamente sabemos que

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Observemos que

$$r \doteq \sqrt{a^2 - 4b^2} < \sqrt{a^2} = a$$

será o comprimento do cateto do triângulo retângulo ΔABC cuja hipotenusa $\overline{AB}$, tem comprimento $\underline{a}$ e o outro cateto $\overline{AC}$ tem comprimento $2b$ (figura abaixo).



Logo a construção poderá ser feita e as raízes

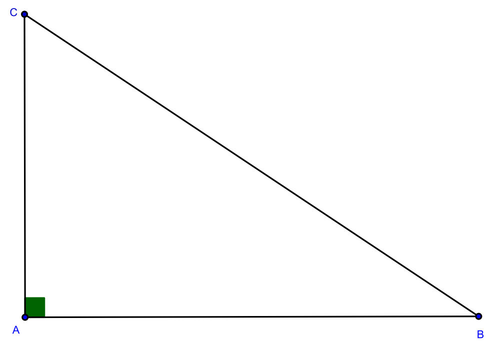
$$x_1 = \frac{a - r}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a + r}{2}$$

podem ser obtidas, geometricamente, de modo simples, como veremos a seguir.

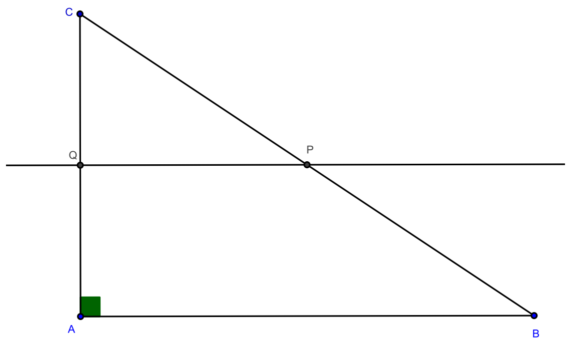
1. Construa um triângulo retângulo ΔABC, com ângulo reto no vértice A, de tal modo que

$$AB = 2b \quad \text{e} \quad BC = a.$$

   Deste modo obtemos $AC = r$ (figura abaixo);



2. Pelo ponto médio, P, do segmento $\overline{BC}$ traçamos a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que intercepta o segmento $\overline{AC}$ no ponto Q (figura abaixo);



Observemos que os triângulos ΔCBA e ΔCPQ são semelhantes (caso AAA) logo os comprimentos de lados correspondentes quardam uma mesma proporção, em particular:

$$\frac{QC}{AC} = \frac{PC}{BC} \overset{[AC=r,\, PC=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}]}{\Rightarrow} \frac{QC}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{a}.$$

Logo

$$QC = \frac{r}{2}.$$

3. A circunferência de centro no ponto C e raio $\overline{QC}$ encontrará a reta $\overleftrightarrow{BC}$ nos pontos M e N.

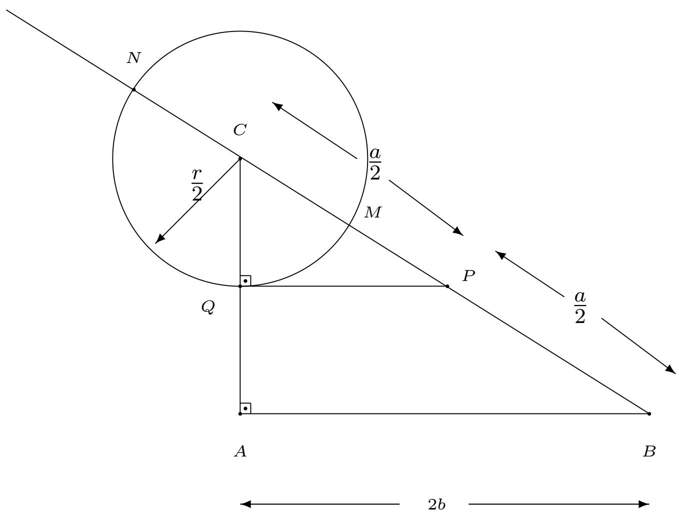
Logo

$$x_1 \doteq PM = PC - MC = PC - QC = \frac{a}{2} - \frac{r}{2} = \frac{a-r}{2}$$

e

$$x_2 \doteq PN = PC + CN = PC + QC = \frac{a}{2} + \frac{r}{2} = \frac{a+r}{2}$$

serão as raízes da equação do 2.o grau do problema (figura abaixo).



2.^{a} Solução:

Se x_1 e x_2 são soluções então deveremos ter que a soma das raízes deverá ser $\underline{a}$, isto é,

$$x_1 + x_2 = a$$

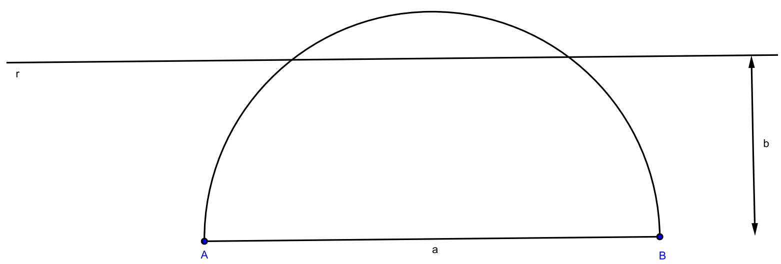
e o produto das raízes deverá ser $\underline{b^2}$, isto é,

$$x_1 x_2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_1 x_2} = b.$$

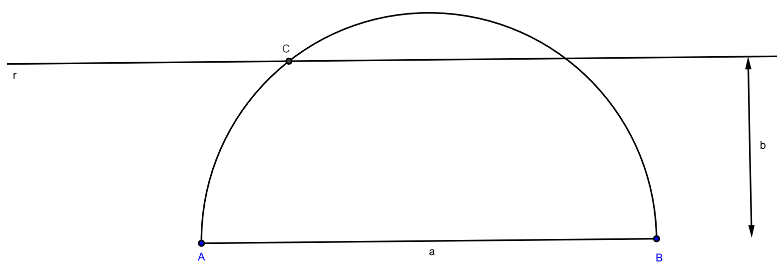
Logo, devemos encontrar dois segmentos cuja soma dos seus comprimentos seja $\underline{a}$ e cuja média geométrica dos seus comprimentos seja b.

Para isto temos a seguinte constução:

1. Consideremos uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ que tem comprimento $\underline{a}$ e um reta, $\underline{r}$, paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, que dista $\underline{b}$ da mesma (figura abaixo);



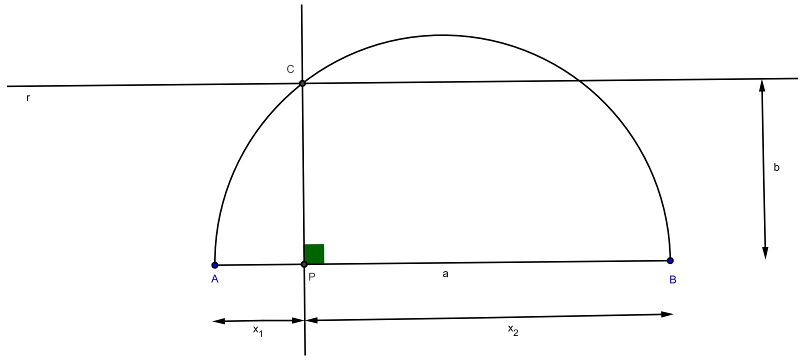
2. A reta $\underline{r}$ obtida acima determinará um ponto C sobre a semi-circunferência (figura abaixo);



3. A projeção do ponto C sobre o segmento $\overline{AB}$ nos dará um ponto P tal que

$$x_1 \doteq PA \quad e \quad x_2 \doteq PB$$

serão as soluções da equação do 2.o grau do problema (figura abaixo).

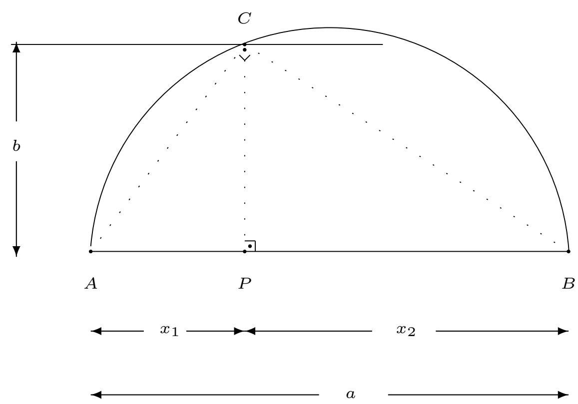


Para mostrar que a afirmação é verdadeira basta observar que o triângulo ΔABC é retângulo no vértice C.

Logo do item 2. da Observação (2.5.1), sabemos que o comprimento da altura $\overline{CP}$ relativa a hipotenusa $\overline{AB}$ (isto é, $CP = b$) satisfaz

$$b^2 = x_1 x_2,$$

ou seja, obtivemos, geometricamente, as soluções da equação do 2.o grau dada no problema.



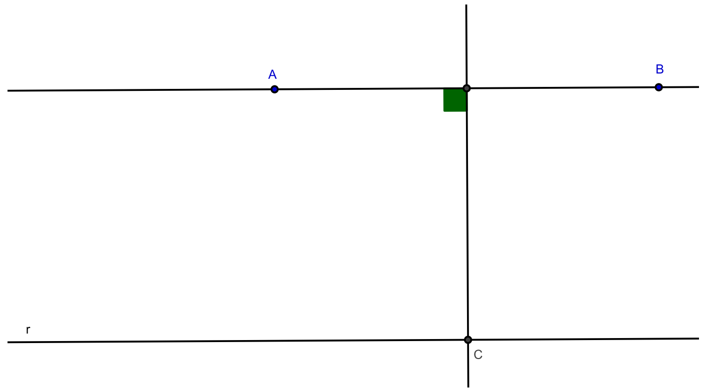
Exemplo 2.5.2 *Dados os pontos distintos A e B em um mesmo semi-plano determinado por uma reta $\underline{r}$ construir, geometricamente, uma circunferência que contenha os pontos A e B e seja tangente a reta $\underline{r}$.*

Resolução:

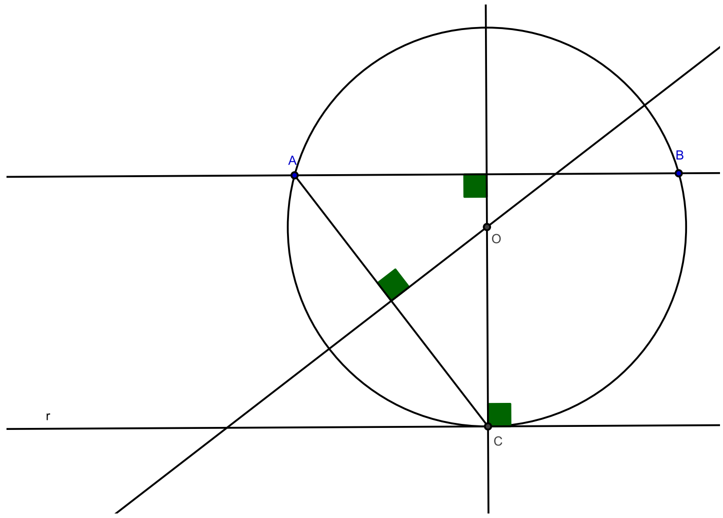
1.o Caso: A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a reta $\underline{r}$.

Neste caso agiremos da seguinte forma:

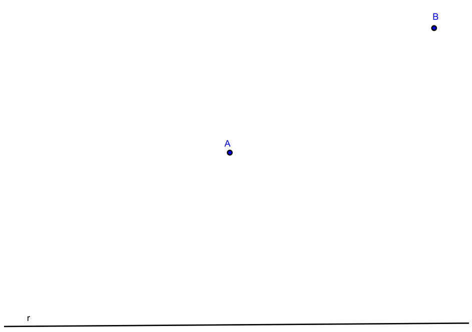
(a) Consideramos a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$ que interceptará a reta $\underline{r}$ num ponto C (figura abaixo).



(b) A circunferência procurada será a que passa pelos pontos A, B e C.
Para traçá-la, bastará encontrar a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ e na intersecção da mesma com a mediatriz obtida acima teremos o centro da circunferência procurada, que denotaremos por O.
O raio será $\overline{OC}$ (ou $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$ (figura abaixo).

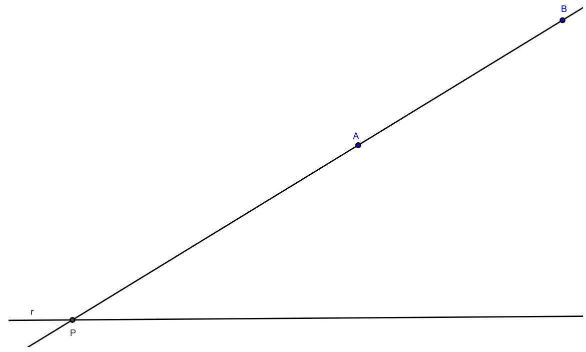


2.o Caso: A reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é paralela a reta $\underline{r}$ (figura abaixo).

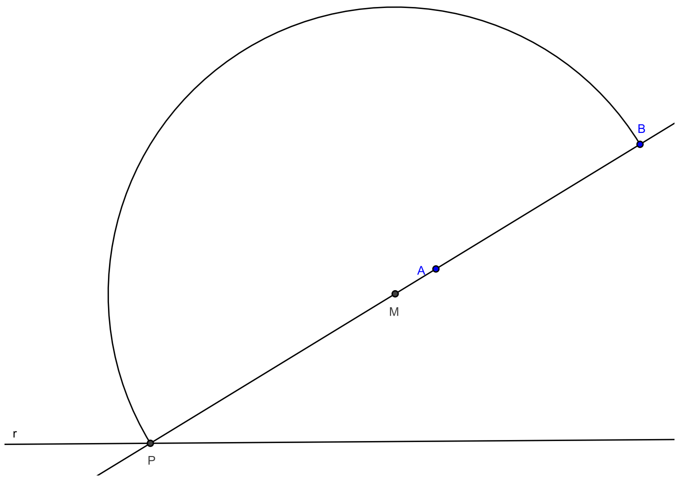


Neste caso agiremos da seguinte forma:

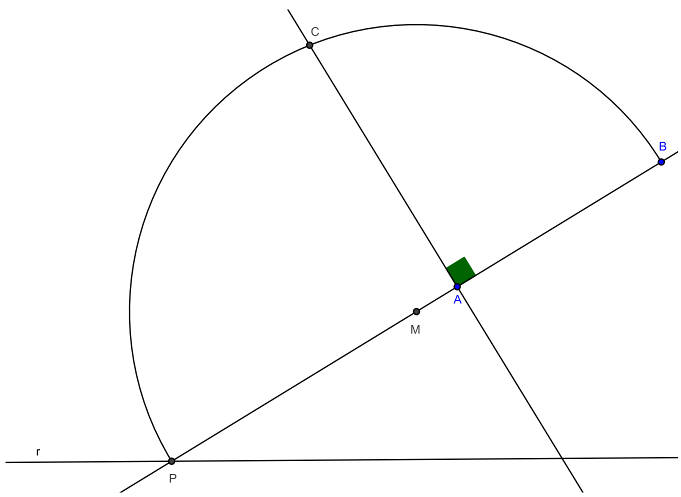
(a) Como as retas $\underline{r}$ e a reta pelos pontos A e B não são paralelas, existirá um ponto P na interceção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a reta r, que chamaremos de P (figura abaixo).



(b) Consideremos a semi-circunferência de centro no ponto médio, M, do segmento $\overline{PB}$ (estamos supondo que $PA < PB$) e raio $\dfrac{PB}{2}$ (figura abaixo).



(c) Seja C o ponto da intersecção da reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto A com a semi-circunferência do item (b) acima (figura abaixo).



Do item 2. da Observação (2.5.1), sabemos que

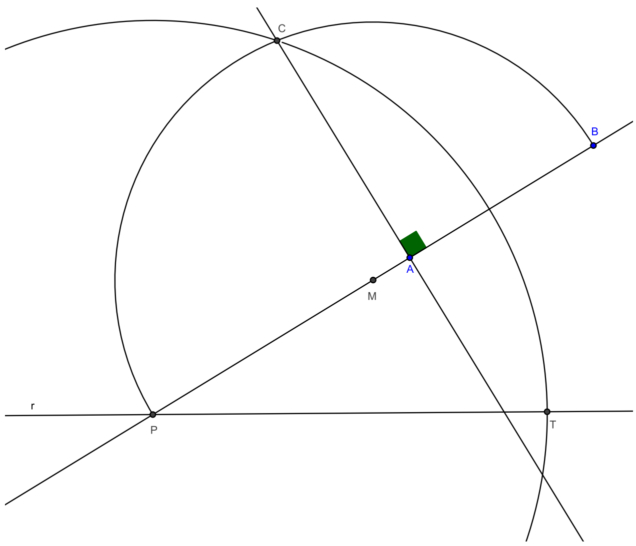
$$PC^2 = PA.PB$$

pois o triângulo ΔPCB é retângulo no vértice C.
Observemos que se T é o ponto de tangência da circunferência procurada com a reta $\underline{r}$ então, do Teorema da Secante-Tangente teremos

$$PT^2 = PA.PB,$$

ou seja, PT é a média geométrica entre PA e PB, assim, $PT = PC$.

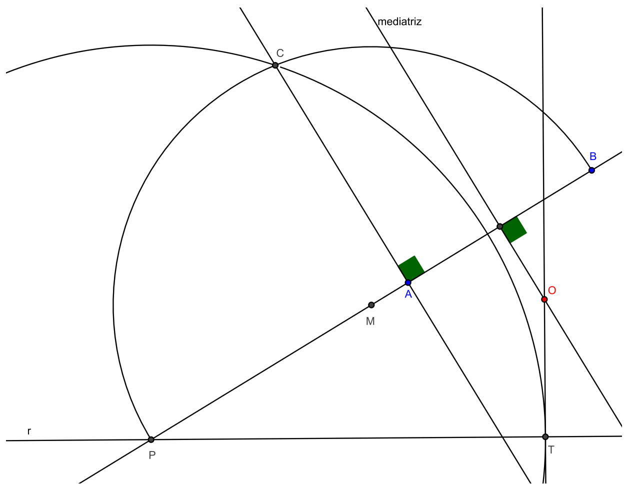
(d) A circunferência de centro em P e raio $\overline{PC}$ interceptará a reta $\underline{r}$ no ponto T (que está no semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{PC}$ que contém o ponto A - figura abaixo).



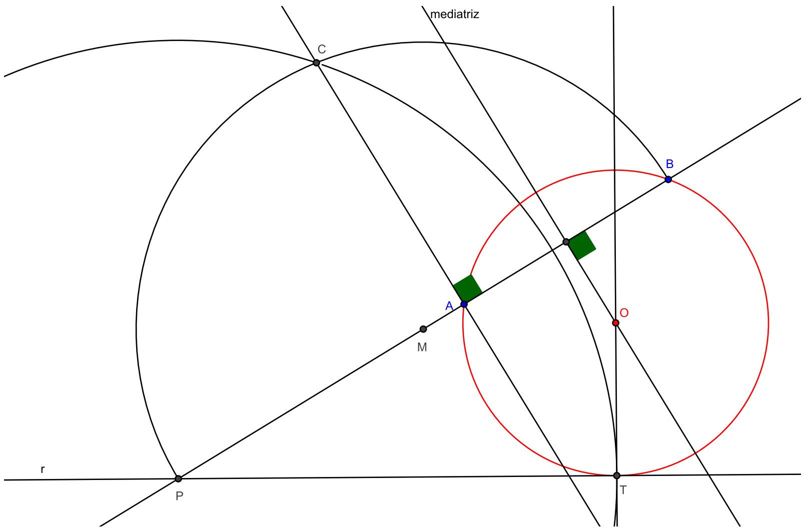
(e) A perpendicular à reta $\underline{r}$ pelo ponto T interceptará a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$ no ponto O (figura abaixo).
Afirmamos que

$$OT = OA = OB$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.



(f) A circunferência procurada terá centro no ponto O e seu raio será $\overline{OT}$ (ou $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$ - figura abaixo) .

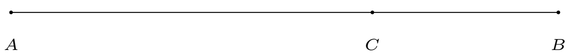


2.6 O Segmento Áureo

Consideremos um ponto C sobre o segmento $\overline{AB}$ (excetuando-se os extremos, isto é, $C \neq A$ e $C \neq B$) de tal modo que a razão entre os comprimentos dos segmentos de menor comprimento pelo comprimento outro (que tem maior comprimento) seja igual a razão entre este comprimento deste último pelo de comprimento total.

Para ilustrar se consideremos a figura abaixo teremos:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$



Definição 2.6.1 *Na situação acima o segmento $\overline{AC}$ será dito* **segmento áureo do segmento $\overline{AB}$**.

Observação 2.6.1

1. *O segmento $\overline{AC}$ é segmento áureo do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se,*

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

ou, equivalentemente, com $AB = a$ tivermos:

$$AC^2 = AB \cdot CB = a \cdot CB = a \cdot (AB - AC) = a \cdot CB = a \cdot (a - AC) = a^2 - a \cdot AC,$$

ou seja,

$$AC^2 + a.AC - a^2 = 0,$$

que é uma equação do 2.o grau (na variável AC) cujas raízes são

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} < 0 \quad e \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = a\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2} > 0.$$

A raiz $x_1 < 0$ será descartada (não representa comprimento de um segmento), logo

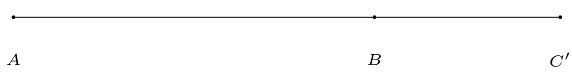
$$AC = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

1. *Esse número apararece em várias situações no desenvolvimento da Matemática, por exemplo, ele é o comprimento do lado de um decágono regular inscrito numa circunferência de raio* $\underline{a}$.

   A demonstração disso será deixada como exercício para o leitor.

2. *Suponhamos que C' sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é um ponto exterior ao segmento $\overline{AB}$ com a seguinte propriedade (vide figura abaixo):*

$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'}.$$



Neste caso temos a:

Definição 2.6.2 *O segmento $\overline{AC'}$ será dito* **segmento áureo externo ao segmento** $\overline{AB}$.

Observação 2.6.2

1. *O segemnto $\overline{AC'}$ é segmento áureo externo ao segmento $\overline{AB}$ se, e somente se,*

$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'},$$

ou, equivalentemente, com $AB = a$ tivermos:

$$AC' \cdot BC' = a^2,$$

ou ainda

$$a^2 = AC' \cdot (AC' - AB) = AC'^2 - a \cdot AC'.$$

Logo

$$AC'^2 - a \cdot AC' - a^2 = 0.$$

A equação acima é uma equação do 2.o grau (na variável AC') e neste caso a solução que nos interessa será (a outra será descartada pois é $a\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ que é negativa):

$$AC = a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

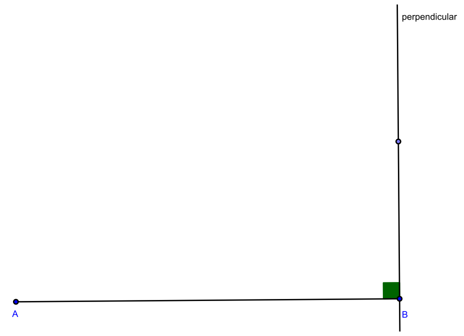
2. *Observemos que na situação acima teremos*

$$AC \cdot AC' = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a\frac{\sqrt{5}+1}{2} = a^2 = AB^{\,2},$$

ou seja, a média geométrica entre AC e AC' será AB.

3. *Dado o segmento $\overline{AB}$ daremos, a seguir, um modo de obter, geometricamente, a razão áurea do segmento $\overline{AB}$.*

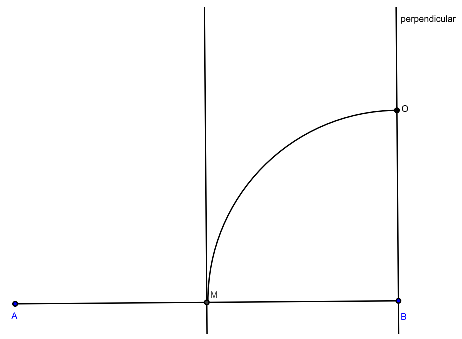
   (a) *Para isto escolhemos um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = a$ e tracemos a reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto B (figura abaixo);*



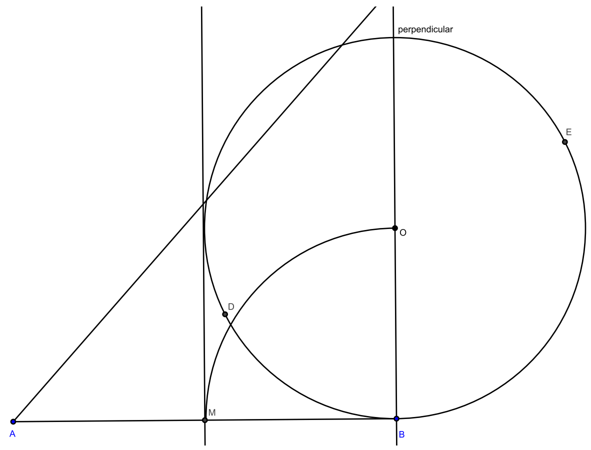
(b) Encontramos o ponto O sobre a perpendicular obtida acima de modo que

$$OB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

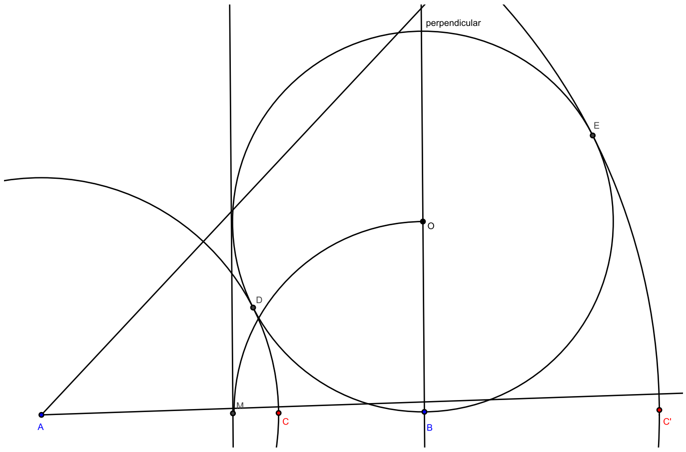
Observemos que existem dois pontos que tem a mesma propriedade, escolha um deles (figura abaixo).



(c) A circunferência de centro em O e raio $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$ intercepta a reta $\overleftrightarrow{AO}$ nos pontos D e E (figura abaixo);



(d) As circunferências de centro em A e raios AD e AE interceptarão a semi-reta que tem extremidade no ponto A e contém o ponto B nos pontos C e C' (figura abaixo);



(e) *Com isto temos que*

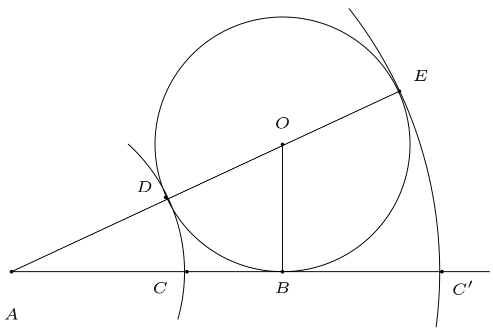
$$AC = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad e \quad AC' = a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

isto é, $\overline{AC}$ e $\overline{AC'}$ são segmentos áureo e áureo externos do segmento $\overline{AB}$, respectivamente.

De fato, para mostrar que isto é verdade basta observar que do Teorema da Secante-Tangente temos que

$$AB^2 = a^2 = \underbrace{AD}_{=AC} \cdot \underbrace{AE}_{=AC'} = AC \cdot AC',$$

pois o segmento $\overline{AB}$ é tangente a circunferência e o segmento $\overline{AE}$ é secante à circunferência nos pontos D e E (e $AD = AC$, $AE = AC'$ por construção).



2.7 Os Números: $\frac{1}{a}$, a^2 e $\sqrt{a}$

Nesta seção trataremos dos problemas relacionados a traçar geometricamente segmentos de comprimentos $\frac{1}{a}$, a^2 e $\sqrt{a}$, para $a > 0$.

Para isto precisaremos fixar um segmento com comprimento unitário 1.

Comecemos pela:

Observação 2.7.1

1. *Se $a > b > 0$ são comprimentos de dois segmentos então*

$$a \text{ soma}, \quad a + b, \quad e \text{ a diferença}, \quad a - b$$

podem ser obtidos geometricamente da seguinte maneira:

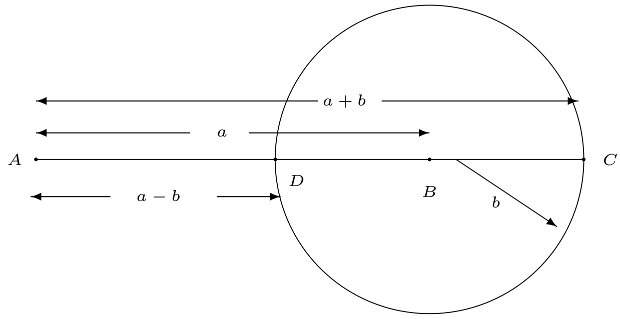
Escolher sobre uma reta $\underline{r}$ dois pontos A e B tal que $AB = a$.

A circunferência de centro no ponto B e raio $\underline{b}$ interceptará a reta $\underline{r}$ em dois pontos, que indicaremos por C e D, sendo o ponto C no exterior do segmento $\overline{AB}$ e o ponto D no interior do segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo).

Neste caso

$$AD = a - b \quad e \quad AC = a + b.$$

Geometricamente temos:



2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$ (comprimento de um segmento dado) podemos construir, geometricamente, segmentos de comprimentos $n \cdot a$, $\dfrac{a}{n}$ e $a\sqrt{n}$, como vimos anteriormente.*

3. *Uma questão interessante seria:*

   Dados $b > 0$ como dar um significado geométrico para a expressão $\dfrac{a}{b}$?

   Observemos que como estabelecemos um segmento como sendo a unidade de medida do comprimento (isto é, associamos a esse segmento o número real 1) a expressão $\dfrac{a}{b}$ poderá ser representada geometricamente por um segmento (ou seja, poderemos construir um segmento cujo comprimento seja $\dfrac{a}{b}$).

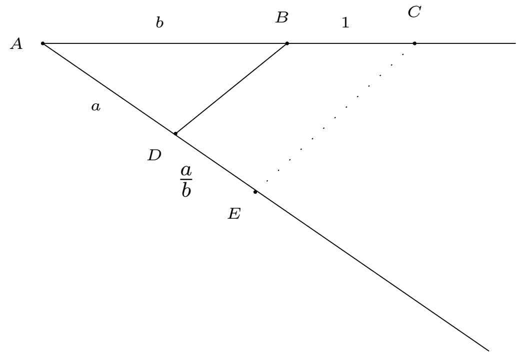
   De fato, se definirmos

$$x \doteq \frac{a}{b}$$

   poderemos escrever

$$x = \frac{a \cdot 1}{b}, \quad ou\ ainda, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{x},$$

   e assim $\underline{x}$ será a quarta proporcional entre os segmentos de comprimento $\underline{b}$, $\underline{a}$ e o segmento unitário (vide figura).



$AB = b,\ BC = 1,\ AD = a \ \Rightarrow\ DE = \frac{a}{b}$

Devido a isso, temos a:

Definição 2.7.1 *Na situação acima, estando estabelecido um segmento unitário, diremos que a expressão*

$$x = \frac{a}{b}$$

é **construtível**.

Observação 2.7.2

1. *O mesmo ocorre com as expressões* $\frac{1}{a}$, a^2, $\sqrt{a}$ *que, utilizando as idéias desenvolvidas anteriormente, podem representar comprimentos de segmentos, ou seja, também são* **construtíveis**.

2. *A seguir daremos uma construção alternativa de um segmento de comprimento* $\frac{1}{a}$ *(um modo de obtê-lo seria tomando-se* $a = 1$ *e* $b = a$ *na observação anterior):*

   (a) *Sejam* A *e* C *dois pontos sobre uma reta* $\underline{r}$ *tais que* $AC = a$*;*

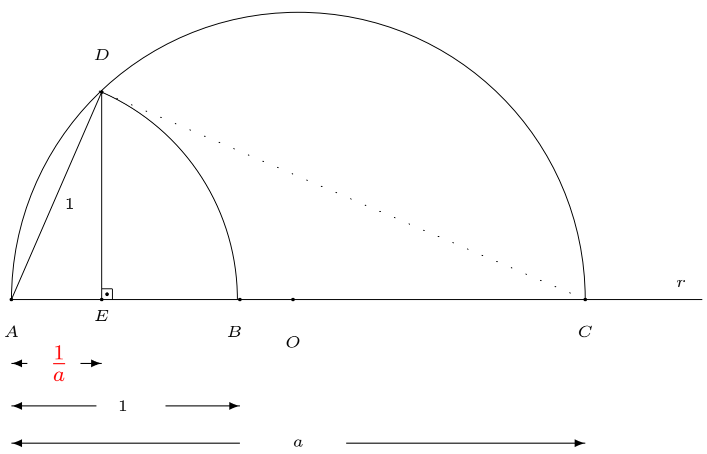
   (b) *Encontre o ponto médio,* O*, do segmento* $\overline{AC}$ *e trace a semi-circunferência,* $\mathcal{C}$*, de centro no ponto* O *e raio* $OA = OC$*;*

   (c) *Trace a circunferência de centro no ponto* A *e raio* 1 *que interceptará a semi-circunferência* $\mathcal{C}$ *do item acima no ponto* D *e à reta* $\underline{r}$ *no ponto* B*;*

   (d) *A reta perpendicular a reta* $\underline{r}$ *que passa pelo ponto* D *interceptará a reta* $\underline{r}$ *no ponto* E*;*

   (e) *Com isto temos que o (figura abaixo)*

$$AE = \frac{1}{a}.$$



$\boxed{AB = AD = 1,\ AC = a \Rightarrow AE = \frac{1}{a}}$

Para mostrar a afirmação acima observemos que o triângulo ΔADC *é retângulo no vértice* D*. Logo do item 2. da Observação (2.5.1) teremos que*

$$AD^2 = AC \cdot AE, \quad \text{ou seja,} \quad 1 = a \cdot AE,$$

que implicará

$$AE = \frac{1}{a}$$

como queríamos mostrar.

3. *Construção de um segmento de comprimento $\underline{a}^2$:*

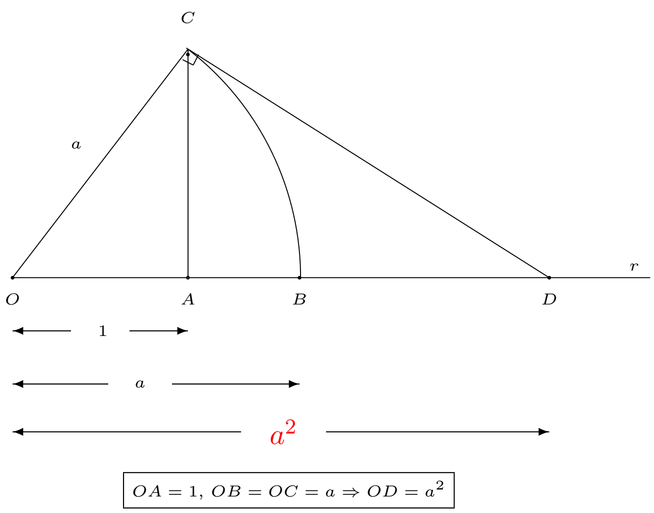
   (a) *Sejam O e A dois pontos sobre uma reta $\underline{r}$ tais que $OA = 1$;*

   (b) *A semi-circunferência de centro em O e raio $\underline{a}$ intercepta a reta perpendicular à reta $\underline{r}$ pelo ponto A no ponto C e a reta $\underline{r}$ no ponto B;*

   (c) *A reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OC}$, pelo ponto C, interceptará a reta $\underline{r}$ no ponto D;*

   (d) *Com isto temos que o (figura abaixo)*

$$OD = a^2.$$



Para mostrar a afirmação acima observemos que o triângulo ΔOCD é retângulo no vértice C. Logo do item 2. da Observação (2.5.1) teremos

$$OC^2 = OA \cdot OD, \quad \text{ou seja,} \quad a^2 = OD,$$

como queríamos mostar.

4. *Construção de um segmento de comprimento $\sqrt{a}$:*

   (a) *Sejam O, A e B três pontos sobre uma reta $\underline{r}$ tais que*

$$OA = 1, \quad OB = a$$

   com o ponto A pertencente ao segmento $\overline{OB}$ (ver figura abaixo);

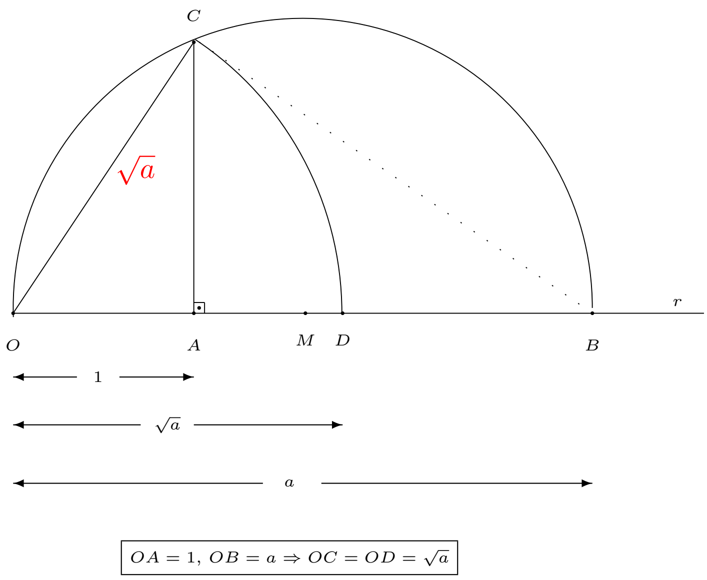
   (b) *Tracemos uma semi-circunferência, $\mathcal{C}$, de centro no ponto M, ponto médio do segmento $\overline{OB}$, e raio $OM = MB$;*

   (c) *A reta perpendicular à reta $\underline{r}$ pelo ponto A, interceptará semi-circunferência $\mathcal{C}$, obtida acima, no ponto C;*

(d) A circunferência de centro em O e raio OC encontrará o segmento $\overline{OB}$ no ponto D;

(e) Com isto temos que o (figura abaixo)

$$OD = \sqrt{a}.$$



Observemos que o triângulo ΔOCB é retângulo no vértice C.

Logo, do item 2. da Observação (2.5.1) teremos

$$OC^2 = OA \cdot OB = a, \quad \text{ou seja,} \quad OD = OC = \sqrt{a}.$$

2.8 Exercícios resolvidos e propostos

Para os exercícios que seguem vamos supor que esteja fixa uma unidade de comprimento, ou seja, um segmento de comprimento 1.

Exercício 2.8.1 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a\,b\,c}{d\,e},$$

onde a, b, c, d, e são comprimento de segmentos dados ($x \neq 0$).

Resolução:

Observemos que

$$x = \frac{abc}{de} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{de}{ab} = \frac{c}{x},$$

ou seja, $\underline{x}$ será a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{de}$, $\underline{ab}$, $\underline{c}$.

Precisamos construir segmentos de comprimentos

$$y = ab \quad \text{e} \quad z = de.$$

Observemos que isto é equivalente a constuir segmentos de comprimentos $\underline{b, a, y}$ e $\underline{e, d, z}$ tais que

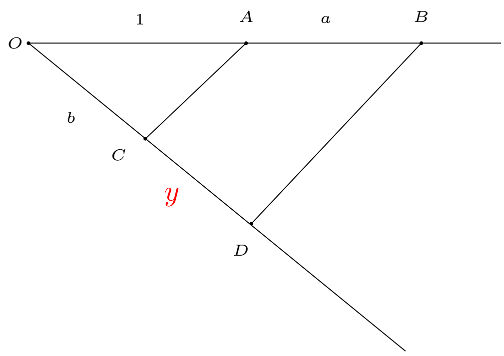
$$\frac{1}{b} = \frac{a}{y} \quad \text{e} \quad \frac{1}{e} = \frac{d}{z},$$

respectivamente, ou seja $\underline{y}$ e $\underline{z}$ deverão ser as quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{1, b, a}$ e $\underline{1, e, d}$, respectivamente.

Deste modo podemos construir segmentos de comprimentos $\underline{y}$ e $\underline{z}$ e, com estes, construirmos um de comprimento $\underline{x}$.

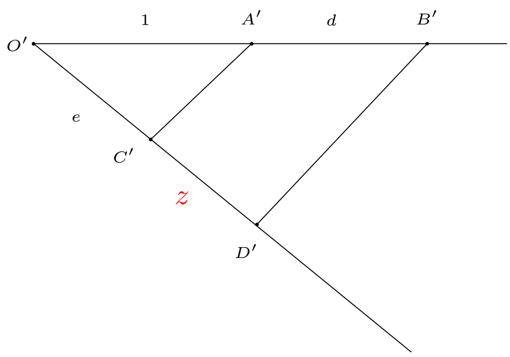
Vamos obter, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$.

1. Começamos obtendo um segmento de comprimento $\underline{y}$ (quarta proporcional do segmento de comprimento $\underline{1, b, a}$):



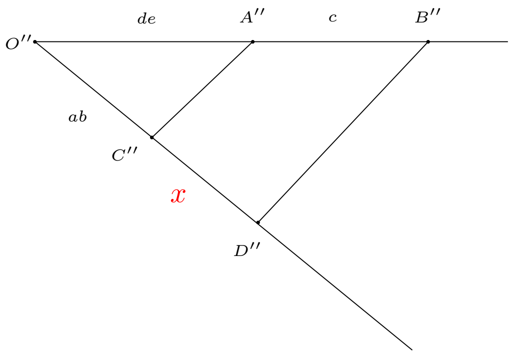
$$\boxed{\frac{1}{b} = \frac{a}{y} \Leftrightarrow y = ab}$$

2. De modo semelhante obtemos um segmento de comprimento $\underline{z}$ (quarta proporcional do segmento de comprimento $\underline{1, e, d}$):



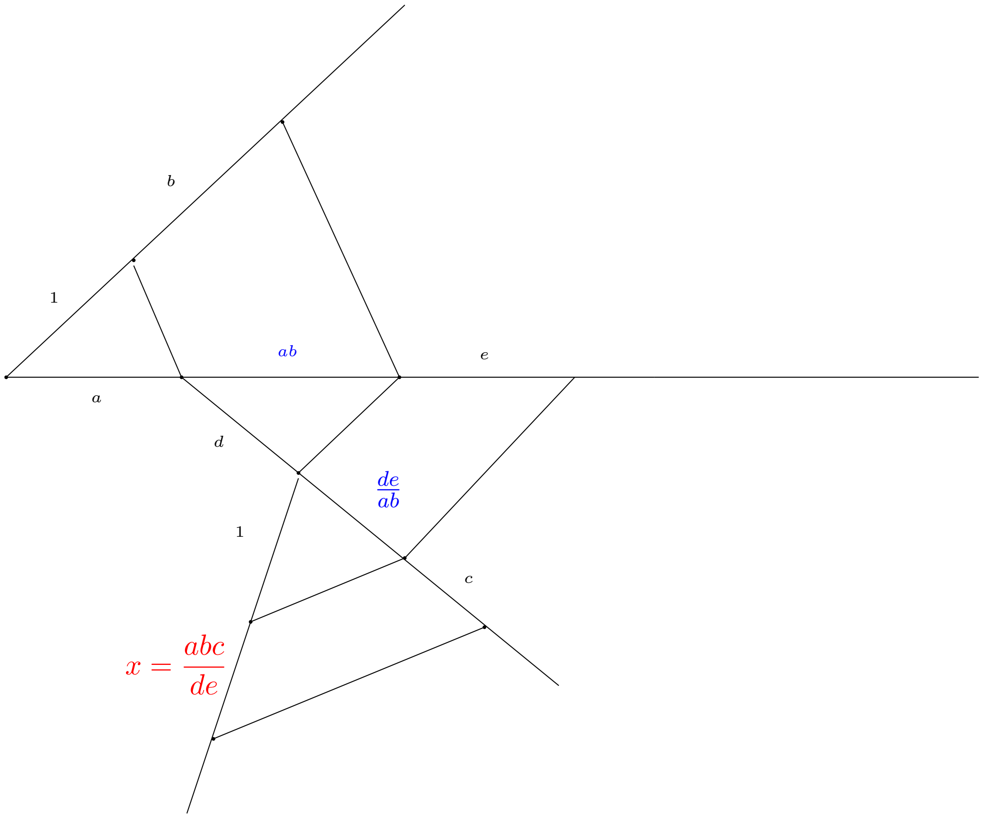
$$\boxed{\frac{1}{e} = \frac{d}{z} \Leftrightarrow z = de}$$

3. Com os comprimentos $y = ab$ e $z = de$ podemos obter $\underline{x}$ (quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\underline{de}$, $\underline{ab}$, $\underline{c}$):



$$\boxed{\frac{de}{ab} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow x = \frac{abc}{de}}$$

Um outro modo de obtermos, geometricamente, um segmento de compriumento $\underline{x}$ é dado pela figura abaixo:



Exercício 2.8.2 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são comprimentos de segmentos dados.

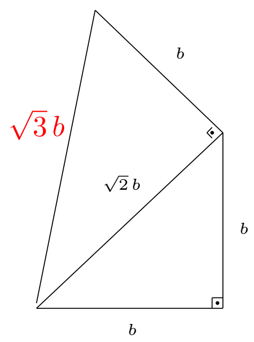
Resolução:

Observemos que

$$x = \sqrt{a^2 + 3b^2} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3}\,b)^2}.$$

Como sabermos construir $\sqrt{3}\,b$ poderemos construir $\underline{x}$ da seguinte forma:

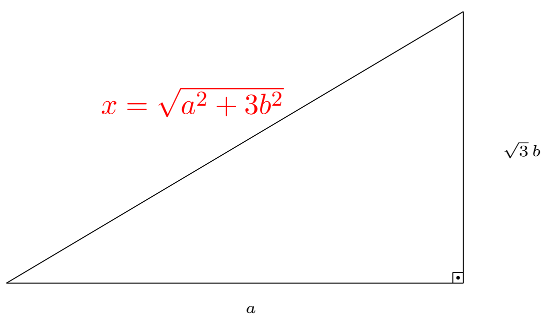
1. Para a construção de $\sqrt{3}\,b$ temos a figura abaixo:



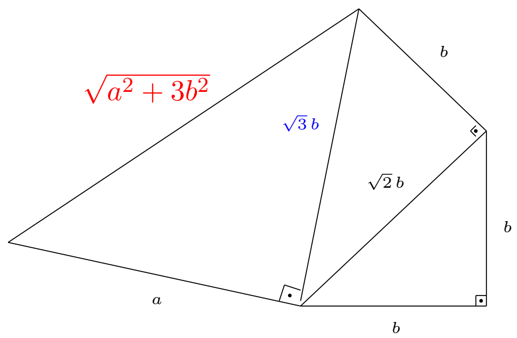
2. Para obter

$$x = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3}\,b)^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

onde $c = \sqrt{3}\,b$ foi obtido no item acima temos, geometricamente:



Ou de maneira direta temos, geometricamente:



Exercício 2.8.3 *Construir um segmento de comprimento*

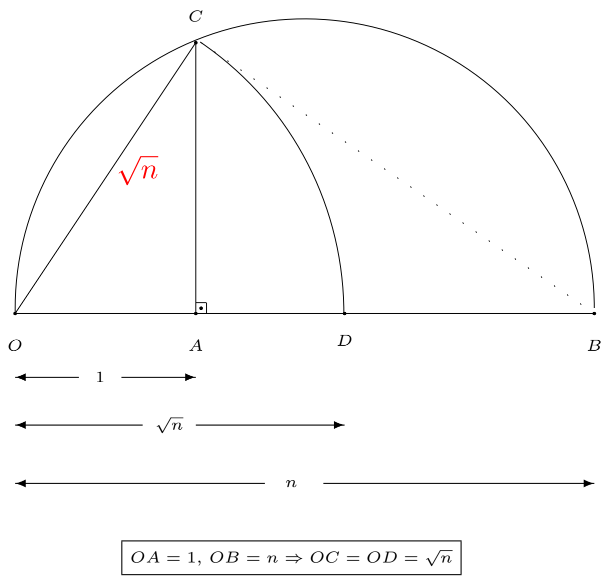
$$x = \frac{a}{\sqrt{n}}$$

onde $\underline{a}$ é o comprimento de um segmento dado e $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Uma possibilidade de obtermos $\underline{x}$, geometricamente, é a seguinte:

1. Obtemos geometricamente $\sqrt{n}$ (como na Observação (2.7.2) item 4.):

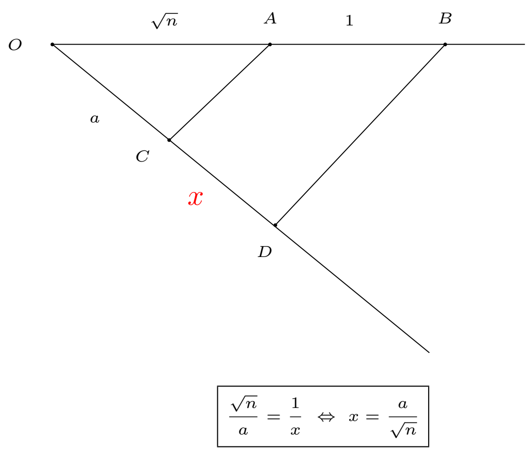


2. Observemos que

$$x = \frac{a}{\sqrt{n}} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{\sqrt{n}}{a} = \frac{1}{x},$$

ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $\sqrt{n}$, a, 1.

Logo podemos obtê-lo como na figura abaixo:



Exercício 2.8.4 *Construir um segmento com comprimento* $\sqrt{5,8}$ *centímetros.*

Resolução:

1. Observemos que

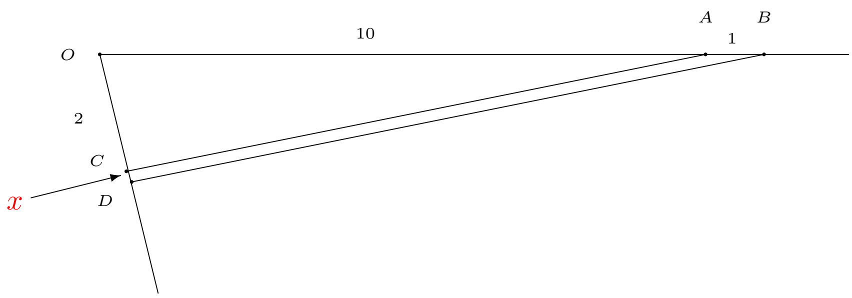
$$5,8 = 6 - 0,2.$$

2. Para obter um segmento de $0,2\,cm$ podemos agiremos da seguinte forma:

   Observemos que

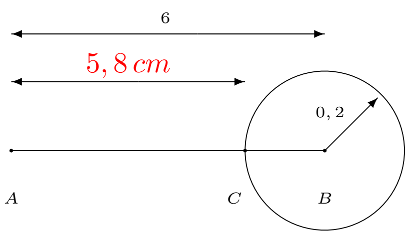
$$x = 0,2 = \frac{2}{10} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{10}{2} = \frac{1}{x},$$

   isto é, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos 10, 2, 1, que pode ser obtida geometricamente por:



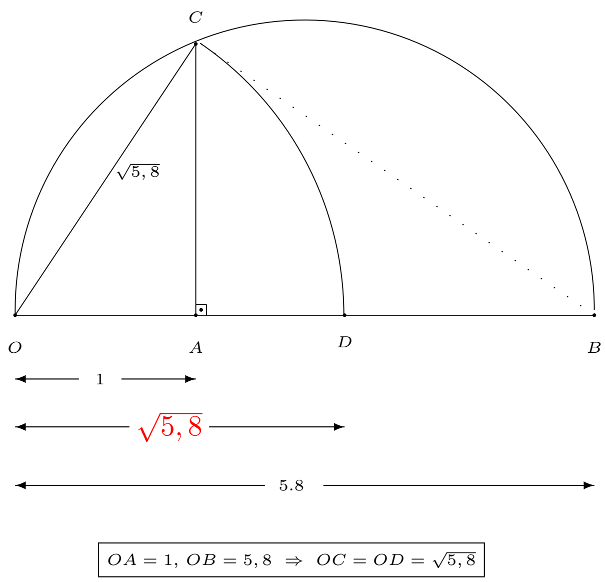
$$\boxed{\frac{10}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{10}}$$

3. Tendo um segmento de comprimento $x = 0,2\,cm$ podemos, geometricamente, obter um segmento de comprimento $5,8\,cm$ da seguinte forma:



$$\boxed{AB = 6\,cm,\ CB = 0,2\,cm \Rightarrow AC = 5.8\,cm}$$

4. Sabendo construir um segmento de $5,8\,cm$ podemos construir um de comprimento $\sqrt{5,8}\,cm$ como em uma observação anterior (figura abaixo).



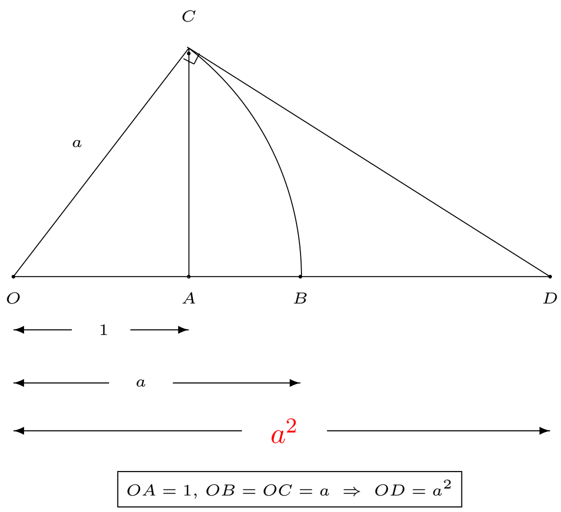
Exercício 2.8.5 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a^2}{b},$$

onde $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

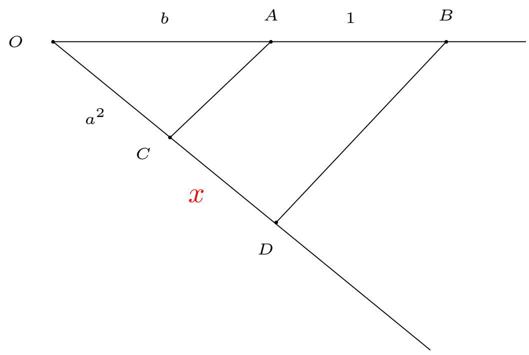
1. Primeiramente construimos um segmento de comprimento a^2 (figura abaixo):



2. Observemos que

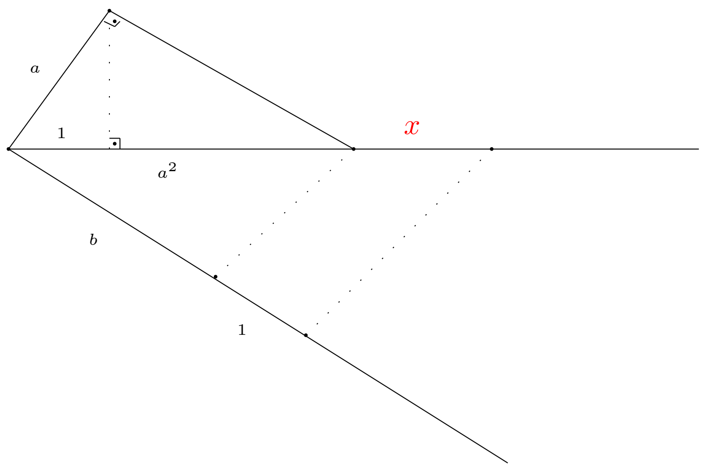
$$x = \frac{a^2}{b} \quad \text{se, e somente se,} \quad \frac{b}{a^2} = \frac{1}{x},$$

ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos b, a^2, 1, assim:



$$\boxed{\frac{b}{a^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{b}}$$

Podemos obter um segmento de comprimento $x = \dfrac{a^2}{b}$ em único desenho da seguinte forma:



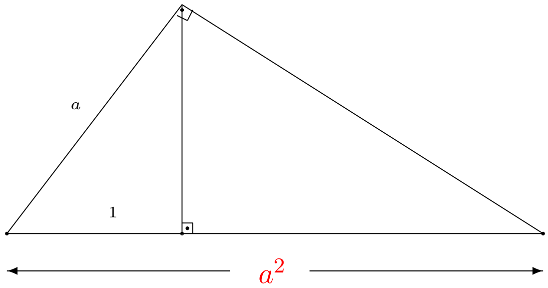
Exercício 2.8.6 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a^2 + bc}{d},$$

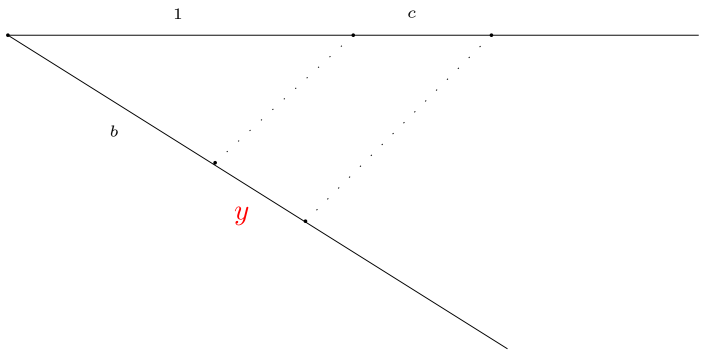
onde $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$ são comprimentos de segmentos dados.

Resolução:

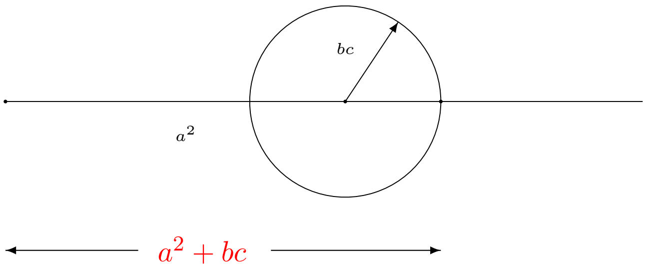
1. Construimos um segmento de comprimento a^2 (figura abaixo):



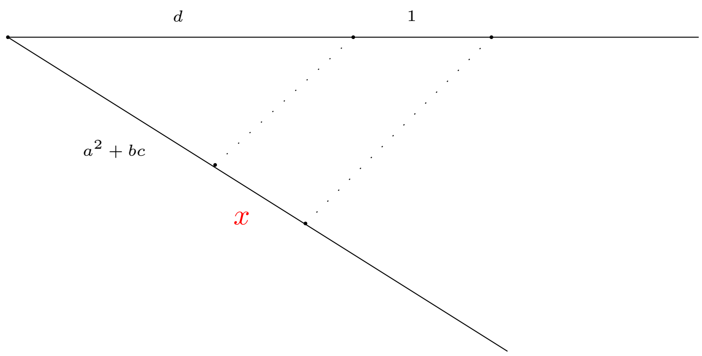
2. Para construir um segmento de comprimento
$$y = bc,$$
basta observarmos que esta igualdade é equivalente a
$$\frac{1}{b} = \frac{c}{y},$$
ou seja, $\underline{y}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos 1, b, c, assim temos a seguinte construção:



3. Podemos agora obter $a^2 + bc$ por meio da seguinte construção:



4. Finalmente podemos construir
$$x = \frac{a^2 + bc}{d}$$
escrevendo a igualdade como
$$\frac{d}{a^2 + bc} = \frac{1}{x},$$
ou seja, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos d, $a^2 + bc$, 1 e com isto temos a seguinte construção:



Exercício 2.8.7 *Construir um segmento de comprimento*

$$x = \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2},$$

onde $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Observemos que

$$x = \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2} = a^2 \frac{a + b}{a^2 + b^2},$$

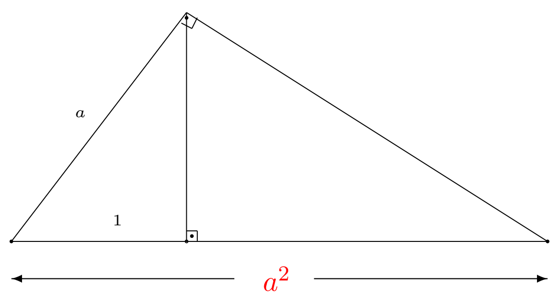
ou ainda,

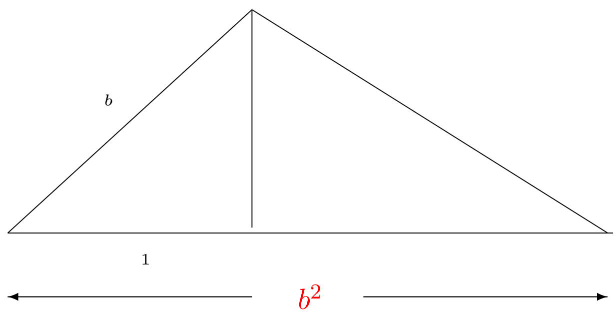
$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2}{x},$$

isto é, $\underline{x}$ é a quarta proporcional dos segemtos $a^2 + b^2$, $a + b$, a^2.

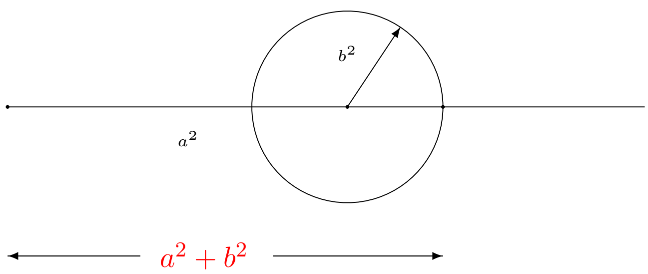
Com isto podemos obter, geometricamente, um segmento de comprimento $\underline{x}$ da seguinte forma:

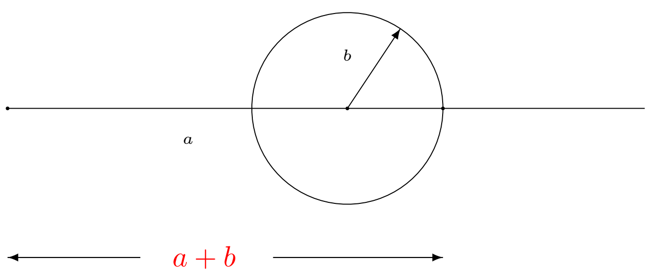
1. Construimos segmentos de comprimentos a^2 e b^2 (figuras abaixo):



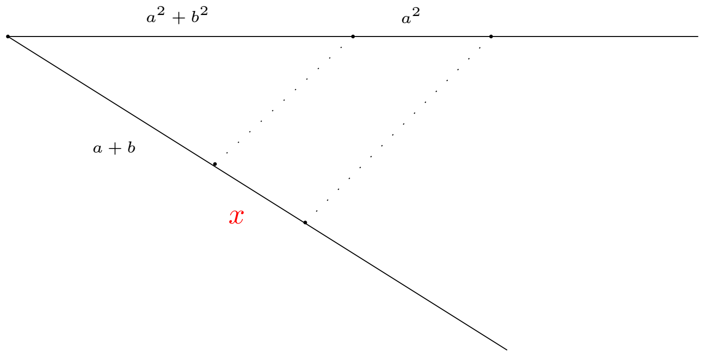


2. Podemos agora obter segmentos de comprimentos $a^2 + b^2$ e $a + b$ (figuras abaixo):





3. Como $x = \dfrac{a^3 + a^2 b}{a^2 + b^2}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos $a^2 + b^2$, $a + b$, a^2 teremos, geometricamente, a seguinte construção:



Exercício 2.8.8 *Resolver, geometricamente, o sistema (não linear)*

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b^2 \end{cases},$$

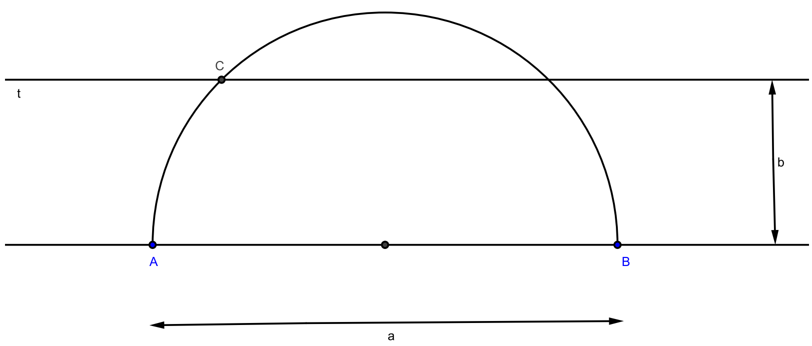
onde $a, b > 0$ são comprimentos de segmentos dados.

Resolução:

Precisamos encontrar segmentos de comprimentos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de tal modo que a soma e a média geométrica dos mesmos sejam dadas.

Para isto:

1. Consideremos uma semi-circunferência, $\mathcal{C}$, de diâmetro, $\overline{AB} = a$ e uma reta, $\underline{t}$ paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ distando $\underline{b}$ da mesma que intercepta a semi-circunferêcia $\mathcal{C}$ no ponto C (figura abaixo):

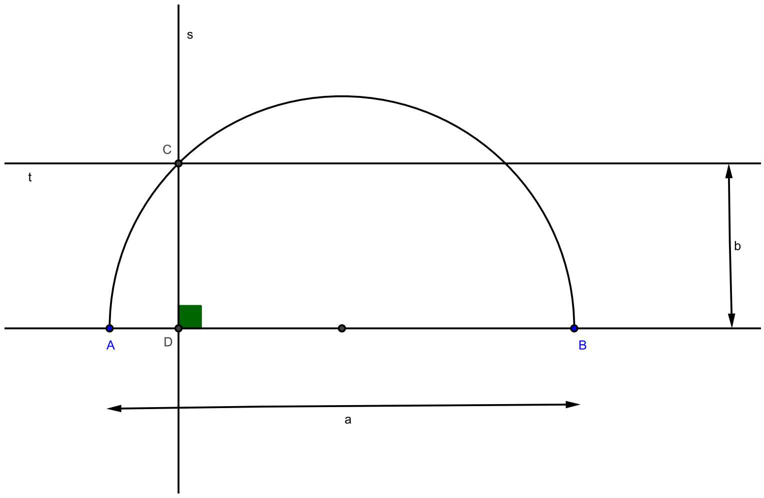


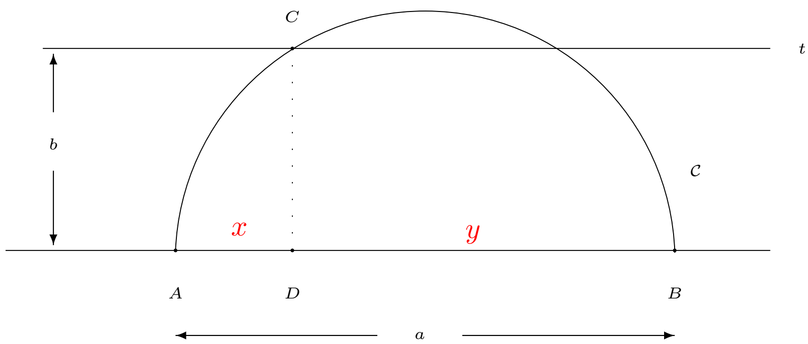
2. Consideremos a reta $\underline{s}$, perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto C cuja interseção com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é o ponto D (figura abaixo):

3. Afirmamos que

$$AD = x \quad \text{e} \quad DB = y$$

são as soluções do sistema dado.





De fato, como o triângulo ΔACB é retângulo no vértice C segue, do item 2. da Observação (2.5.1), que

$$CD^2 = AD \cdot DB$$

e, da construção, temos que

$$AB = AD + DB.$$

Como $CD = b$, $AB = a$ segue que

$$b^2 = xy \quad \text{e} \quad a = x + y,$$

como queríamos mostrar.

Observação 2.8.1 *Vale observar que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*

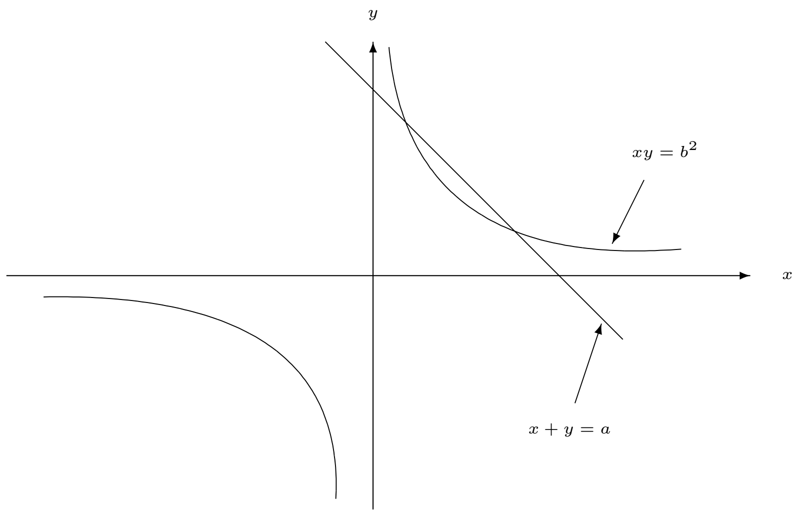
$$x + y = a$$

é uma reta e o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$xy = b^2$$

é uma hipérbole.

Logo resolver o problema acima é, geometricamente, encontrar a interseção desses lugares geométricos, no caso, a interseção da reta com a hipérbole (podem ter até dois pontos - figura abaixo).



Exercício 2.8.9 *Resolver, geometricamente, o sistema (não linear)*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases},$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Observemos que

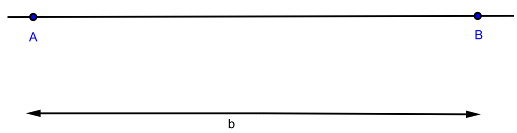
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Mas $x + y = b$, logo o sistema dado é equivalente ao seguite sistema (linear):

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{a^2}{b} \\ \\ x + y = b \end{cases}.$$

Para obtermos segmentos com comprimentos $\underline{x}$ e $\underline{y}$ agiremos da seguinte forma:

1. Consideremos um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = b$ (figura abaixo);

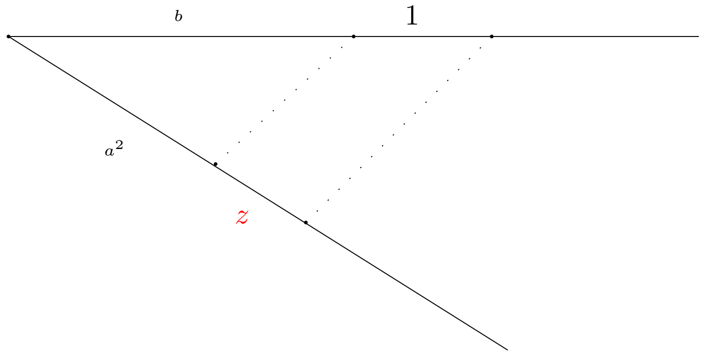


2. Construir um segmento de comprimento a^2 (como no item 3. da Observação (2.7.2));

3. Obtenhamos um segmento de comprimento $z = \dfrac{a^2}{b}$, ou seja,

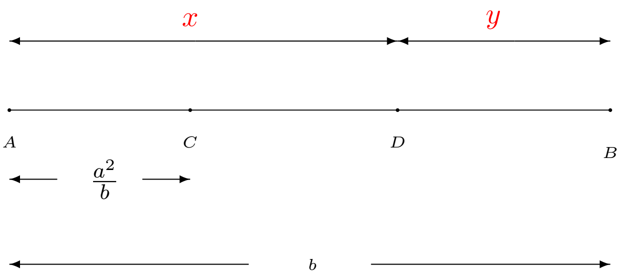
$$\frac{b}{a^2} = \frac{1}{z},$$

isto é, $\underline{z}$ é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos b, a^2, 1 (figura abaixo);



4. Sobre o segmento $\overline{AB}$ encontremos um ponto C de tal modo que $AC = \frac{a^2}{b}$ (veja no item 3. da Observação (2.7.1) como construir um segmento com esse comprimento).

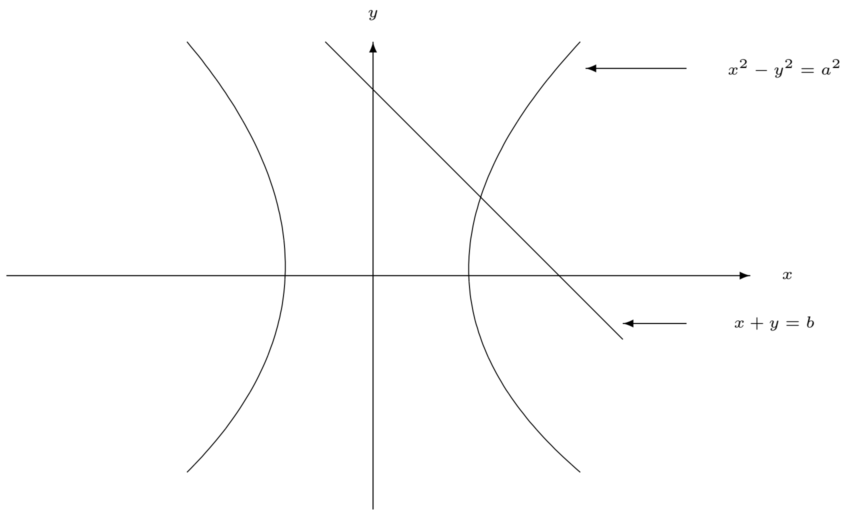
5. Seja D o ponto médio do segmento $\overline{CB}$.
   Afirmamos que
$$x = AD \quad \text{e} \quad y = DB$$
   satisfazem ao sistema acima (figura abaixo).



De fato, observemos que
$$AD + DB = AB,$$
ou seja
$$x + y = b.$$
Por outro lado, $CD = DB$, pois D é o ponto médio do segmento $\overline{CB}$.
Logo
$$x - y = AD - DB = AD - CD = AC = \frac{a^2}{b},$$
assim
$$x - y = \frac{a^2}{b},$$
como queríamos demonstrar.

Observação 2.8.2 *Observemos que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*
$$x + y = b$$
é uma reta e o o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação
$$x^2 - y^2 = a^2$$
é uma hipérbole.

Logo resolver o problema acima é encontrar, geometricamente, a interseção dos lugares geométricos, no caso, a interseção da reta com a hipérbole (podem ter até dois pontos - figura abaixo).



Exercício 2.8.10 *Resolver, geometricamente, o sistema*

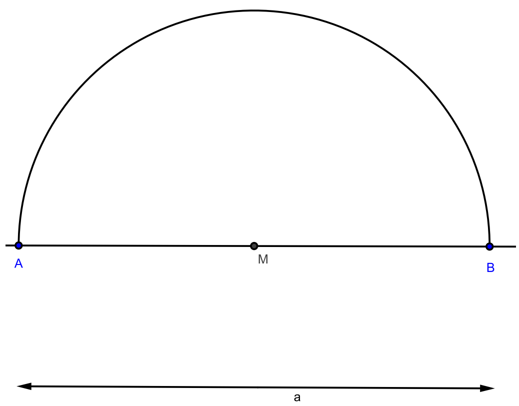
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x \cdot y = b^2 \end{cases},$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

Temos a seguinte constução:

1. Consideremos um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = a$.
   Construa uma semi-circunferência, $\mathcal{C}$, que tenha como diâmetro o segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo);



2. Observemos que se C é um ponto qualquer da semi-circunferência $\mathcal{C}$ então temos

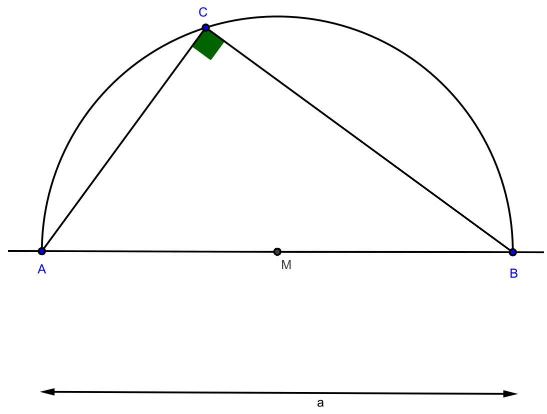
$$AC^2 + CB^2 = a^2,$$

pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo ΔABC (figura abaixo).
Assim, se $x = AC$ e $y = CB$ então

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Logo se o ponto C está na semi-circunferência $\mathcal{C}$ temos que

$$x = AC \quad \text{e} \quad y = CB$$



satisfazem a 1.a equação do sistema dado, para qualquer ponto C escolhido sobre a circunferência $\mathcal{C}$.

3. Por outro lado, se $h = AD$ é a altura do um triângulo ΔABC, relativamente ao lado $\overline{AB}$, com C na semi-circunferência $\mathcal{C}$ então sua área será dada por

$$\frac{a \cdot h}{2}. \tag{2.10}$$

Mas a área do triângulo ΔABC também pode ser dada por:

$$\frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{x \cdot y}{2} \overset{(*)}{=} \frac{b^2}{2}, \tag{2.11}$$

onde, em (*), usamos que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ devem satisfazer a 2.a equação do sistema.

Logo, de (2.10) e (2.11) deveremos os ter:

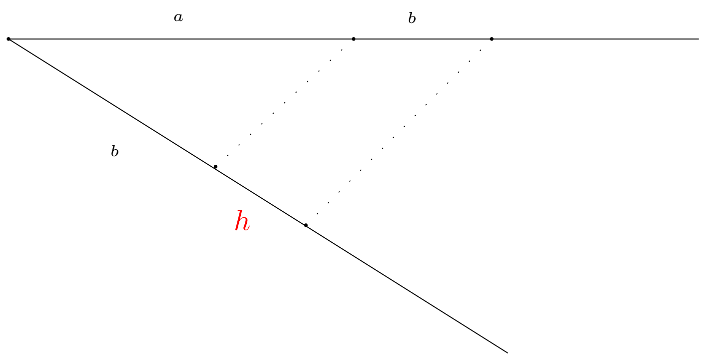
$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b^2}{2},$$

isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{h},$$

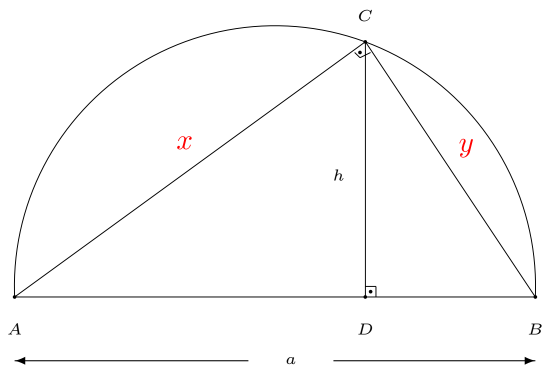
ou seja, $\underline{h}$ deve ser a 4.a proporcional dos segmentos de comprimentos a, b, b.

Geometricamente temos:



Deste modo obtemos um segmento de comprimento $\underline{h}$.

4. Tracemos a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que dista $\underline{h}$ da mesma, que interceptará a semi-circunferência $\mathcal{C}$ no ponto C (figura abaixo).



Deste modo

$$x = AC \quad \text{e} \quad y = CB$$

são soluções do sistema dado.

De fato, pois

$$x^2 + y^2 = AC^2 + CB^2 = a^2 \quad \text{e} \quad x \cdot y = AC \cdot CB \overset{[\text{ área do } \Delta ABC]}{=} a \cdot h = b^2,$$

como queríamos demonstrar.

Observação 2.8.3 *Observemos que o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação*

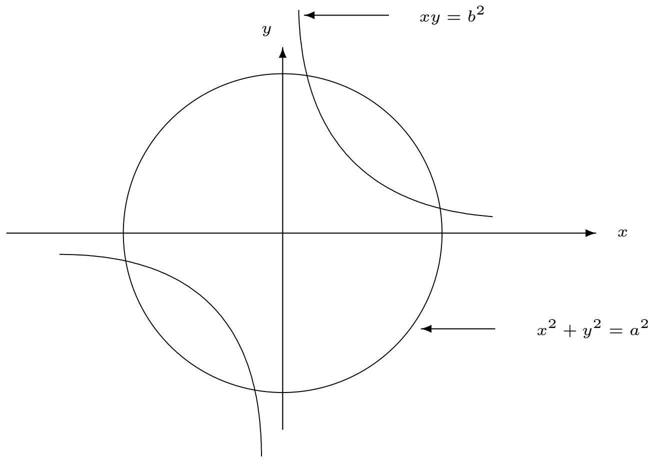
$$x^2 + y^2 = a^2$$

é uma circunferência de centro na origem e raio a e o o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$xy = b^2$$

é uma hipérbole.

Logo resolver o problema acima é, geometricamente, encontrar a interseção dos lugares geométricos, no caso, a interseção da circunferência com a hipérbole (podem ter até dois pontos; na verdade 4 pontos, mas $x, y > 0$ *- figura abaixo).*



Exercício 2.8.11 *Resolver, geometricamente, o sistema (não-linear)*

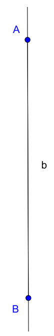
$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b^2 \end{cases},$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

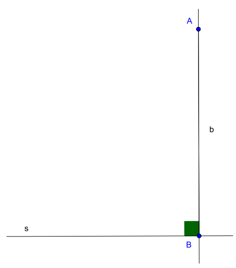
Resolução:

Temos a seguinte construção:

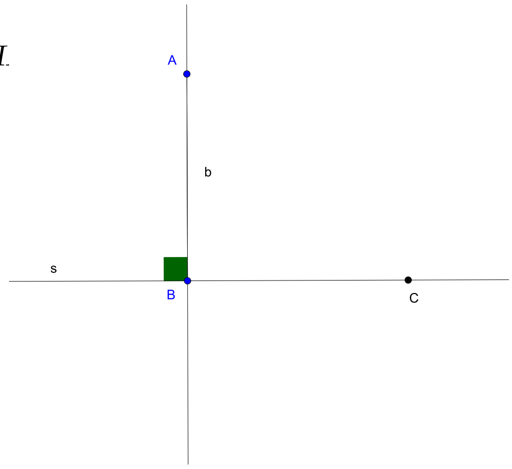
1. Consideremos em uma reta $\underline{r}$ um segmento $\overline{AB}$ tal que $AB = b$ (figura abaixo);



2. Considere a reta $\underline{s}$ perpendicular a reta $\underline{r}$ pelo ponto B (figura abaixo);

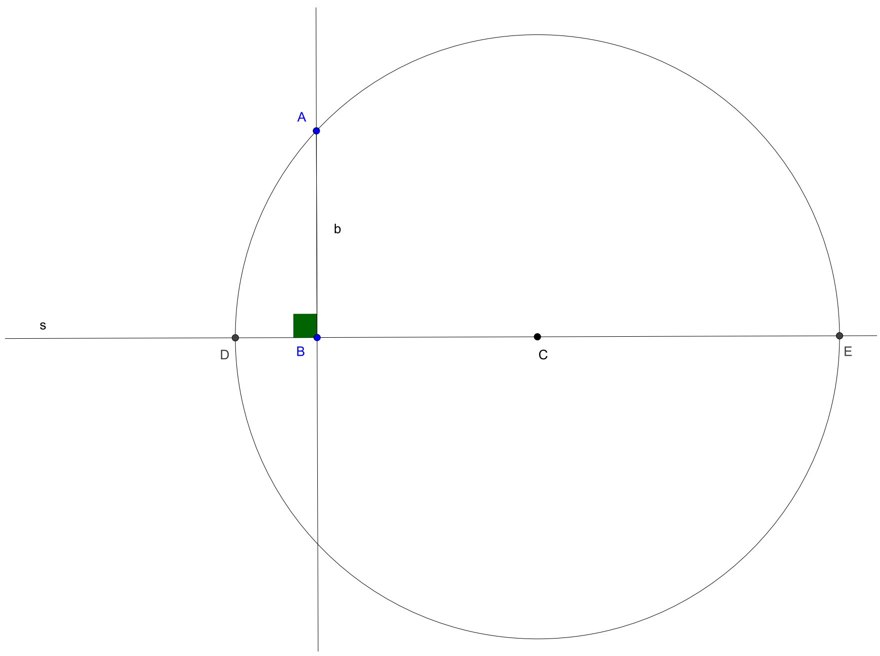


3. Obtenha o ponto C sobre a reta $\underline{s}$ tal que $BC = \dfrac{a}{2}$ (figura abaixo);



4. Construa a circunferência de centro em C e raio CA.

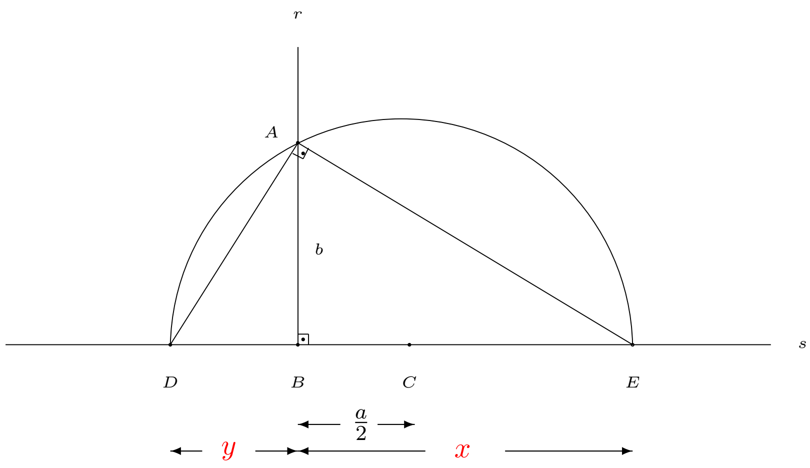
   Sejam D e E os pontos de interseção dessa circunferência com a reta $\underline{s}$ (figura abaixo);



5. Deste modo temos

$$y = DB \quad \text{e} \quad x = BE$$

   são soluções do sistema dado (figura abaixo).



De fato, como o triângulo ΔAED é retângulo no vértice A segue, de uma observação anterior, que

$$AB^2 = DB \cdot BE,$$

isto é,

$$b^2 = xy.$$

Além disso,

$$2(DB + BC) = DB + BE,$$

isto é,

$$2\left(y + \frac{a}{2}\right) = y + x, \quad \text{logo} \quad x - y = a,$$

mostrando que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ acima satisfazem o sistema dado.

Exercício 2.8.12 *Encontrar, geometricamente, uma solução da equação*

$$x^2 - ax - b^2 = 0,$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Resolução:

As soluções algébricas são:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}.$$

Observemos que

$$a - \sqrt{a^2 + 4b^2} < 0, \quad \text{pois} \quad a < \sqrt{a^2 + 4b^2}, \quad \text{e} \quad a + \sqrt{a^2 + 4b^2} > 0$$

logo encontraremos, geometricamente, somente a solução x_1.

Para resolver o problema basta, essencialmente, construir um segmento de comprimento

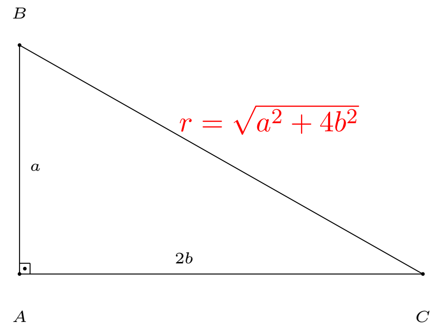
$$r \doteq \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Para isto:

1. Consideremos o triângulo ΔABC retângulo no vértice A onde os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm comprimentos a e $2b$, repectivamente.

   Logo a hipotenusa $\overline{BC}$ terá comprimento (figura abaixo)

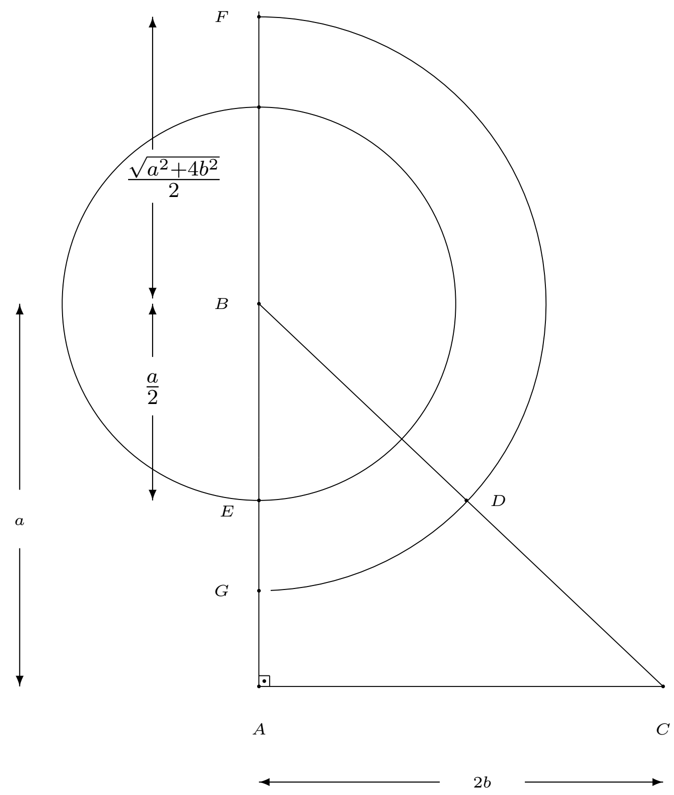
$$r = \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$



2. Considere os pontos médios, D e E, dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente (figura abaixo);

3. A circunferência de centro no ponto B e raio $\overline{BD}$ encontrará a reta $\overleftrightarrow{AB}$ num ponto F, de tal modo que o ponto B pertencerá ao segmento $\overline{AF}$ (figura abaixo).

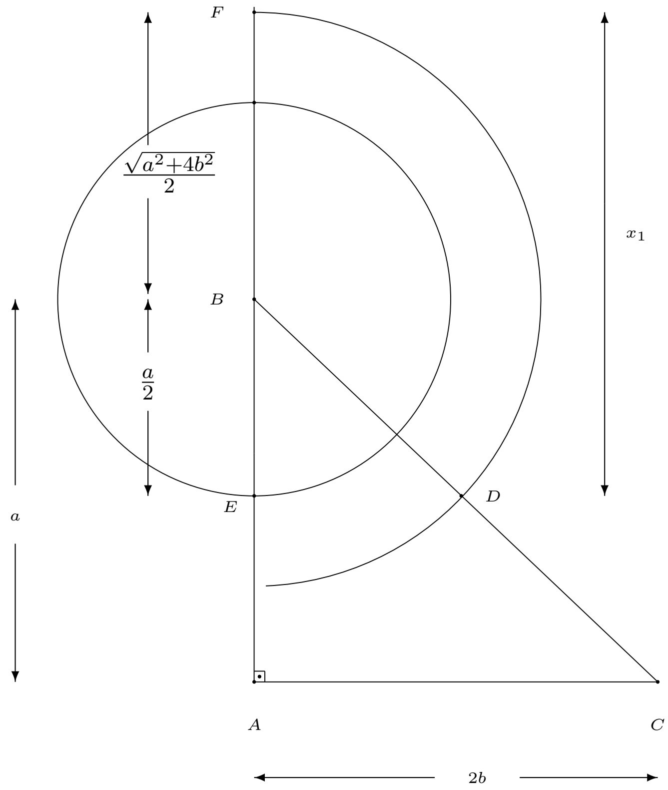
4. A circunferência de centro no ponto B e raio $\dfrac{a}{2}$ encontrará a reta $\overleftrightarrow{AB}$ num ponto E tal que o ponto E pertença ao segmento $\overline{AB}$ (figura abaixo).



5. Deste modo, por construção, temos que

$$x_1 = EF$$

será uma solução procurada (figura abaixo).



Exercício 2.8.13 *Construir a solução da equação*

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

onde $a, b > 0$ são comprimentos de segmentos dados.

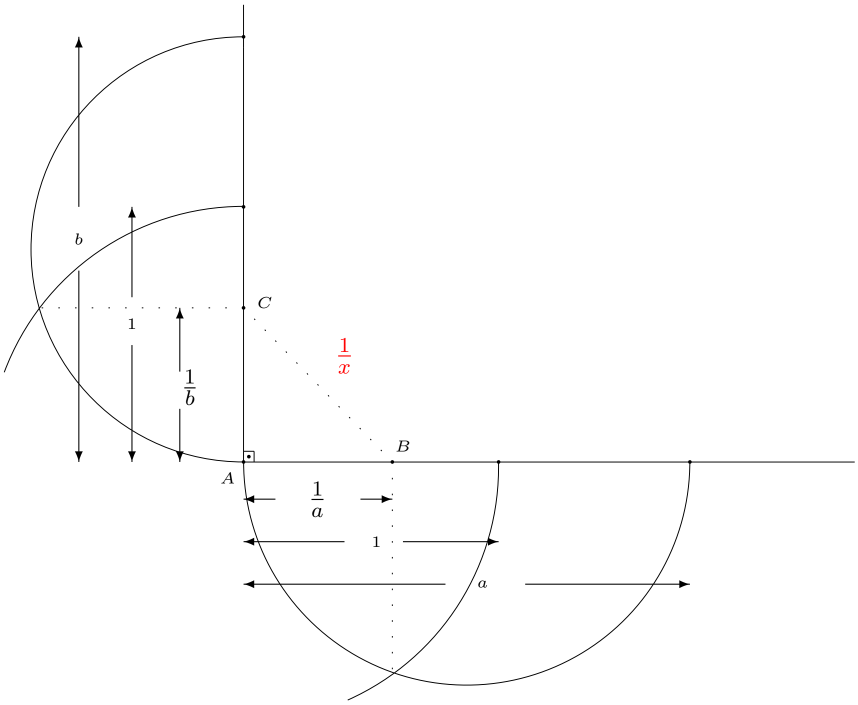
Resolução:

Temos a seguinte construção:

1. Consideremos um triângulo retângulo ΔABC tal que seus catetos têm comprimentos

$$AB = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad AC = \frac{1}{b}.$$

A Observação (2.7.2) item 2. nos diz como construir um segmento de comprimento $\frac{1}{a}$ (figura abaixo).



Deste modo sua hipotenusa terá comprimento

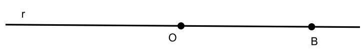
$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}},$$

que é o valor $\frac{1}{x}$ procurado.

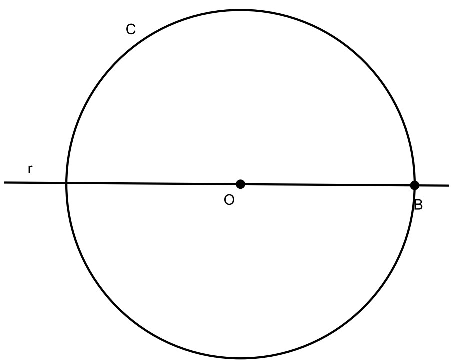
2. Se $\frac{1}{x} = 1$ então $x = 1$, ou seja, o comprimento de um segmento de comprimento $x = 1$ satisfaz a equação dada;

3. Se $\frac{1}{x} < 1$ faremos a seguinte construção: e

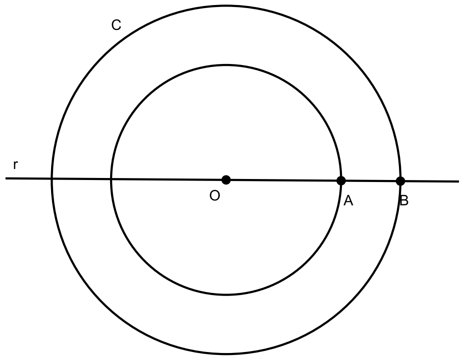
   (a) Sobre uma reta $\underline{r}$ encontremos pontos O e B tais que $OB = 1$ (figura abaixo);



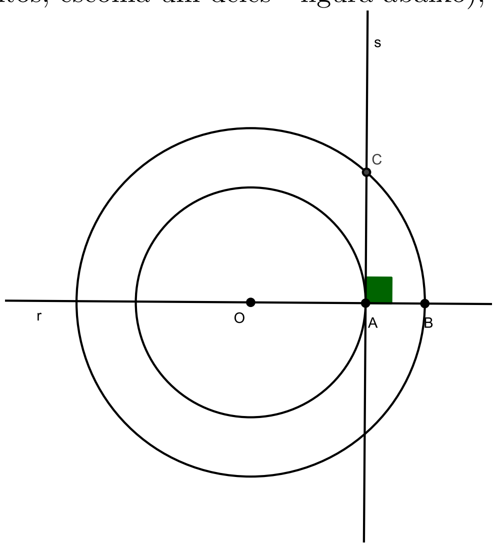
   (b) Tracemos a circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto O e raio $OC = 1$ (figura abaixo);



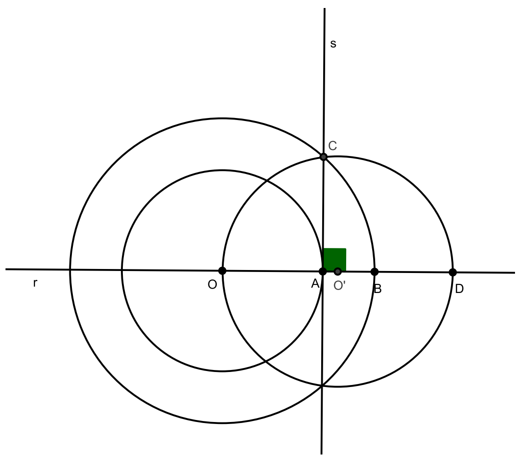
(c) Sobre a reta $\underline{r}$ encontremos o ponto A tais que $OA = \dfrac{1}{x}$ de modo que os pontos A e B estão sobre a mesma semi-reta determinada pela reta $\underline{r}$ com extremo no ponto O.
Observemos que o ponto A pertence ao segmento $\overline{OB}$, pois $\dfrac{1}{x} < 1$ (figura abaixo);



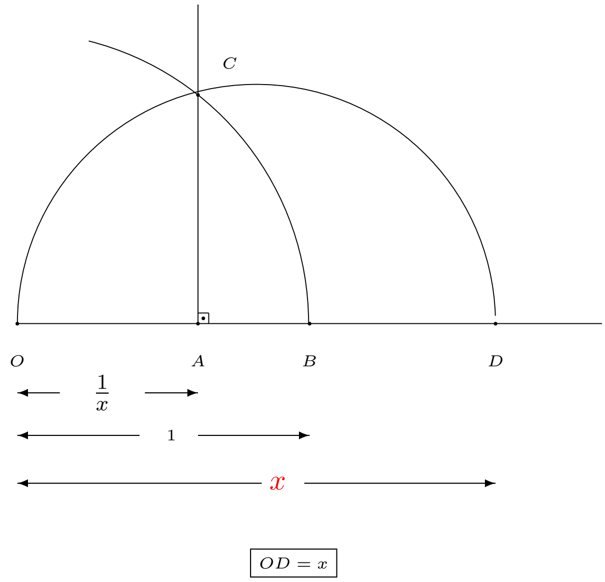
(d) A reta $\underline{s}$ perpendicular à reta $\underline{r}$ pelo ponto A encontrará a circunferência $\mathcal{C}$ no ponto C (na verdade em dois pontos, escolha um deles - figura abaixo);



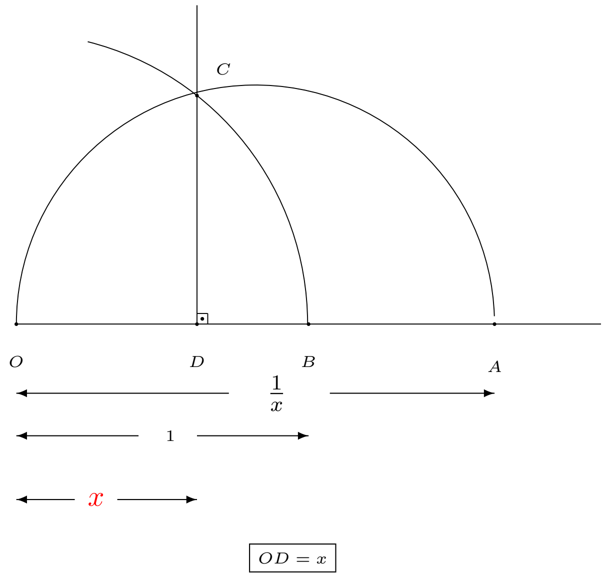
(e) A circunferência de centro sobre a reta $\underline{r}$ que passa pelos pontos O e C encontrará a semi-reta que está contida na $\underline{r}$ com extremidade no ponto O no ponto D (figura abaixo);



(f) Da Observação (2.7.2) item 2., segue que $OD = x$ (figura abaixo).



4. Se $\dfrac{1}{x} > 1$ a construção é semelhante a do item 3. acima (figura abaixo):



Exercício 2.8.14 *Construir a solução da equação*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

onde $a, b > 0$ *são comprimentos de segmentos dados.*

Exercício 2.8.15 *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a soma dos comprimentos dos catetos da altura relativa à hipotenusa.*

Exercício 2.8.16 *Dados o centro e o raio de uma circunferência $\mathcal{C}$ e um ponto P que está no exterior da mesma pede-se traçar pelo pnto P uma secante PAB à circunferência $\mathcal{C}$ de modo que o ponto A seja o ponto médio do segmento $\overline{PB}$.*

Exercício 2.8.17 *Construir um triângulo retângulo conhecendo-se o comprimento da hipotenusa e a soma dos comprimentos dos catetos.*

Exercício 2.8.18 *A média harmônica de dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que têm comprimentos $\underline{a}$ e $\underline{b}$, respectivamente, é um segmento $\overline{EF}$ que tem comprimento $\underline{h}$, onde*

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Construa, geometricamente, a média harmônica dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Exercício 2.8.19 *Um* **retângulo áureo** *é um retãngulo em um lado é o segmento áureo do outro lado adjacente. Construir um retângulo áureo conhecendo-se o seu perímetro.*

Exercício 2.8.20 *Inscrever em uma circunferência dada um retângulo cujo perímetro é dado.*

Exercício 2.8.21 *Dadas uma circunferência $\mathcal{C}$ e uma reta $\underline{t}$ tangente à $\mathcal{C}$, construir um quadrado que tenha dois vértices sobre $\mathcal{C}$ e os outros dois vértices sobre a reta $\underline{t}$.*

Exercício 2.8.22 *Construir um trapézio isóceles que está circunscrito à uma circunferência conhecendos suas bases.*

Exercício 2.8.23 *Dados os pontos distintos A e B sobre a reta $\underline{r}$, construir as circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ que são tangentes entre si, de modo que a circunferência $\mathcal{C}$ seja tangente à reta $\underline{r}$ no ponto B e o raio da circunferência $\mathcal{C}$ seja o dobro do raioda circunferência $\mathcal{C}'$.*

Exercício 2.8.24 *O comprimento do lado de um decágono inscrito em uma circunferência de raio $\underline{R}$ será $R\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro no ponto O e raio $\underline{R}$ considere os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que dois diâmetros da circunferência $\mathcal{C}$, perpendiculares entre si. Seja M o ponto médio do segmento $\overline{OA}$. Seja P o ponto de interseção da circunferência de centro no ponto M e raio MC com o segmento $\overline{O}$. Mostre que o segmento $\overline{OP}$ é o lado de um decágono inscrito na circunferência $\mathcal{C}$ e construa o polígono correspondente.

Exercício 2.8.25 *O comprimento de um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio $\underline{r}$ é dado por $r\,\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.*

Considerando-se a construção descrita no Exercício anterior mostre que o segmento $\overline{CP}$ é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência acima e construa o polígono correspondente.

Exercício 2.8.26 *Construa um pentágono regular conhecendo-se um dos seus lados.*

Exercício 2.8.27 *Construa um pentágono regular conhecendo-se uma de suas diagonais.*

Exercício 2.8.28 *Dado um quadrado, construa um octógono regular cortando os "cantos" desse quadrado.*

Exercício 2.8.29 *Dados os pontos distintos* A *e* B *pertencentes a um mesmo semi-plano determinado por uma reta* $\underline{r}$, *determinar o ponto* P *sobre a reta* $\underline{r}$ *de modo que o ângulo* $\widehat{APB}$ *seja o maior possível.*

Exercício 2.8.30 *Dados os pontos distintos* A *e* B *e dois segmentos de comprimentos* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$, *dividir harmonicamente o segmento* $\overline{AB}$ *na razão* $\frac{m}{n}$, *ou seja, determinar os pontos* M *e* N *sobre a reta que contém os pontos* A *e* B *de modo que*

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}.$$

Notemos que a circunferência que tem diâmetro MN *é denominada* **circunferência de Apolônio do segmento** $\overline{AB}$ **na razão** $\frac{m}{n}$. *Para todo ponto* P *nesta circunferência teremos*

$$\widehat{APM} = \widehat{MPB} \quad e \quad \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}.$$

Exercício 2.8.31 *Dados os pontos distintos* A, B *e* C, *nesta ordem, sobre a reta* $\underline{r}$, *obter o lugar geométrico dos pontos* P *tais que*

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC}.$$

Exercício 2.8.32 *Dados a circunferência* $\mathcal{C}$ *e dois segmentos de comprimentos* $\underline{h}$ *e* $\underline{m}$, *inscrever na circunferência* $\mathcal{C}$ *um trapézio de altura* $\underline{h}$ *de modo que a soma das bases do mesmo seja* $\underline{m}$.

Exercício 2.8.33 *Dados os pontos distintos* A *e* B *e um segmento de comprimento* $\underline{k}$, *contruir o lugar geométrico dos pontos* P *tais que*

$$PA^2 + PB^2 = k^2.$$

Exercício 2.8.34 *Construir um triângulo* ΔABC *conhencendo-se* $BC = a$, *o comprimento da altura* h_a *e a soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, isto é,* $\underline{k}$ *onde*

$$AB^2 + AC^{\,2} = k^2.$$

Exercício 2.8.35 *Dados os pontos distintos* A *e* B *pertencentes a um mesmo semi-plano determinado pela reta* $\underline{r}$, *determinar o ponto* P *sobre a reta* $\underline{r}$ *de modo que* $PA^2 + PB^2$ *seja o menor possível.*

Exercício 2.8.36 *Dados* $a, b > 0$, *construir, geometricamente, um segmento de comprimento* $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Exercício 2.8.37 *Dados dois segmentos de reta de comprimentos* $\underline{a}$ *e* $\underline{b}$ *e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento* ab.

Exercício 2.8.38 *Dados um segmento de reta de comprimento* $\underline{a}$ *e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento* $\sqrt[4]{a}$.

Exercício 2.8.39 *Dados os segmentos de reta de comprimentos* $\underline{a}$, $\underline{b}$ *e* $\underline{c}$ *e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento* $\sqrt{abc}$.

Exercício 2.8.40 *Dado um segmento de reta de comprimento* $\underline{a}$ *e um segmento unitário, construir um segmento de comprimento* $a^{\frac{2}{3}}$.

Capítulo 3

Áreas de Polígonos

3.1 Equivalências

A seguir trataremos de várias questões relacionadas com áreas de polígonos (convexos).

Na verdade relacionaremos a área de um polígono $\mathcal{P}$ com a^2, onde $\underline{a}$ é o comprimento de um segmento, mais precisamente, diremos, neste caso, que a área de um polígono $\mathcal{P}$ é **equivalente** a do quadrado cujo lado é um segmento de comprimento $\underline{a}$.

A questão, olhada sob esse ponto de vista, será encontrar um processo que transforme, sem alterar sua área, um polígono dado em um quadrado.

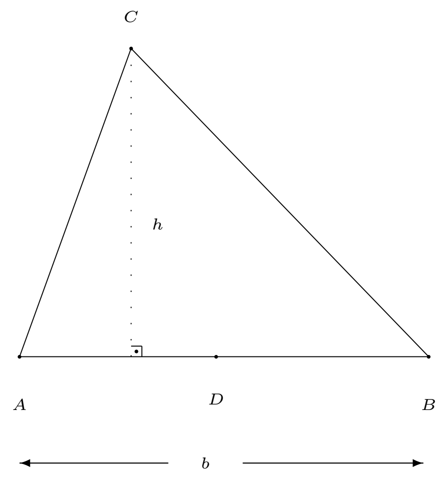
Começaremos por uma situação mais simples, a saber:

Triângulos

Começaremos pelo caso em que $\mathcal{P}$ é um triângulo:

Consideremos uma triângulo ΔABC dado.

Suponhamos que $AB = b$ e a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ seja $\underline{h}$ (figura abaixo).



Observemos que se esse triângulo é equivalente a um quadrado de lado de comprimento $\underline{a}$ então deveremos ter

$$a^2 = \frac{b \cdot h}{2},$$

ou seja,

$$a = \sqrt{\frac{b}{2} \cdot h}\,.$$

Portanto o comprimento do lado do quadrado é a média geométrica entre $\frac{b}{2}$ e h.

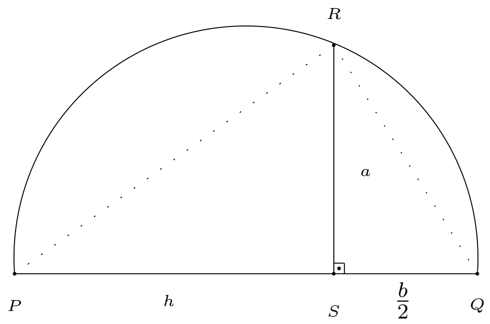
A construção (já feita anteriormente) é a seguinte:

Na figura abaixo, o triângulo ΔPQR é retângulo no vértice R, com $PS = h$, $SQ = \frac{b}{2}$ e altura, relativamente ao lado $\overline{PQ}$, $RS = a$.

Logo da Observação (2.5.1) item 2. teremos que

$$RS^2 = PS \cdot SQ, \quad \text{ou seja,} \quad a^2 = \frac{b \cdot h}{2},$$

como queríamos.



Com isto resolvemos o problema de construir um quadrado equivalente a um triângulo dado (precisamos conhecer um lado e a altura relativamente a esse lado do triângulo).

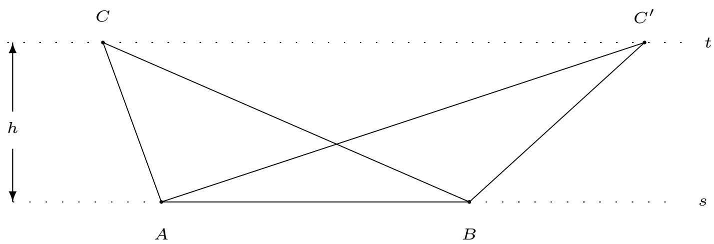
Quadriláteros

Passemos agora a tratar do caso em que $\mathcal{P}$ é um quadrilátero.

Observação 3.1.1 *Lembremos que num triângulo ΔABC de base $\overline{AB}$ fixadas, deslocando-se o vértice C sobre uma reta paralela, distando a altura relativamente a esse lado da base $\overline{AB}$, sua área não se alterará.*

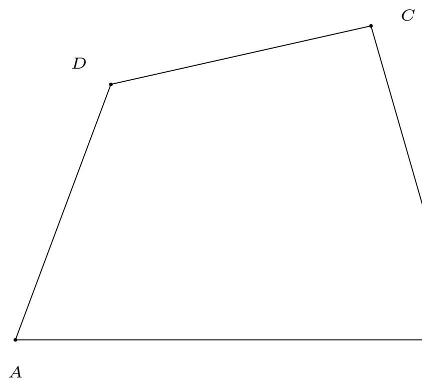
Na figura abaixo as retas $\underline{s}$ e $\underline{t}$ são paralelas.

Neste caso os triângulos ΔABC e $\Delta ABC'$ têm mesma área (eles têm mesma altura $\underline{h}$ relativamente ao lado $\overline{AB}$ - figura abaixo).

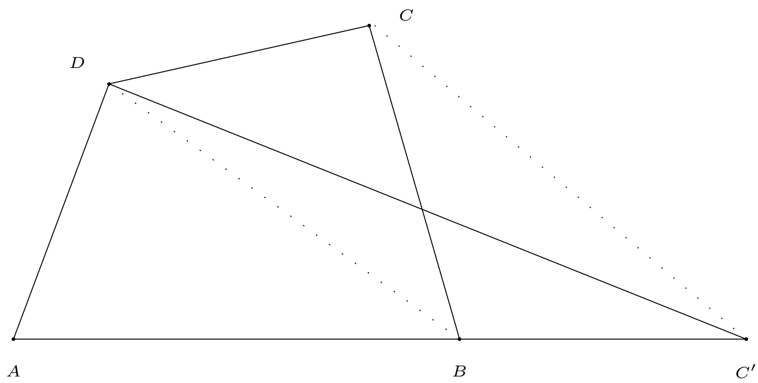


Numa primeira etapa "transformaremos" nosso polígono, que no caso é um quadrilátero, em um triângulo equivalente ao mesmo.

Para exemplificar, consideremos o quadrilátero $ABCD$ abaixo.



Tracemos pelo ponto C uma reta paralela à diagonal $\overline{BD}$ que encontrará o segmento $\overline{AB}$ no ponto C' (figura abaixo).



Com isto os triângulos ΔCBD e $\Delta C'BD$ são equivalentes.

De fato, têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{BD}$ e mesma altura, pois as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas.

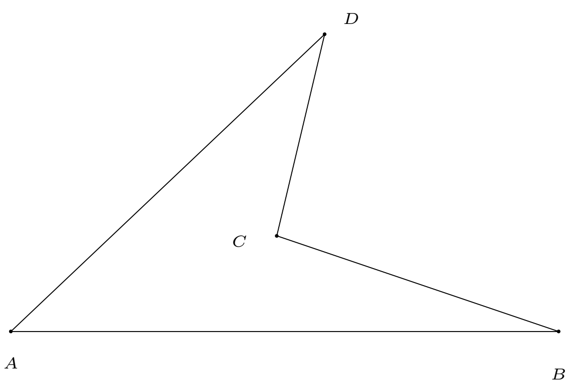
Logo o triângulo $\Delta ADC'$ é quivalente ao quadrilátero $ABCD$.

Observação 3.1.2

1. *Vale observar que podemos agir do mesmo se o quadrilátero* **não** *for convexo.*

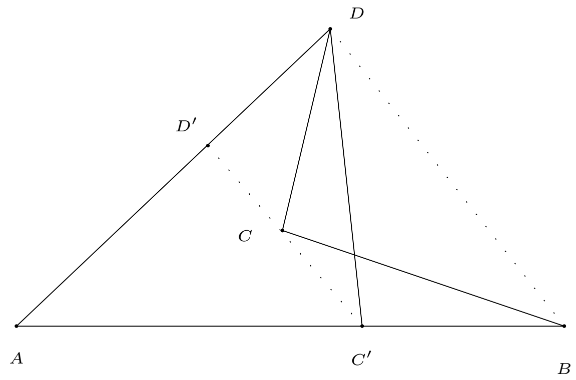
   Lembremos que um subconjunto do plano é dito **convexo** *se dados dois pontos do mesmo, o segmento que os une está inteiramente contido no subconjunto.*

2. *Para ilustrar consideremos o quadrilátero abaixo, que* **não** *é convexo.*



A construção acima pode ser feita neste caso.

De fato, a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BD}$ *passando pelo ponto* C *encontrará a reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *no ponto* C' *e a reta* $\overleftrightarrow{AD}$ *no ponto* D' *(figura abaixo).*



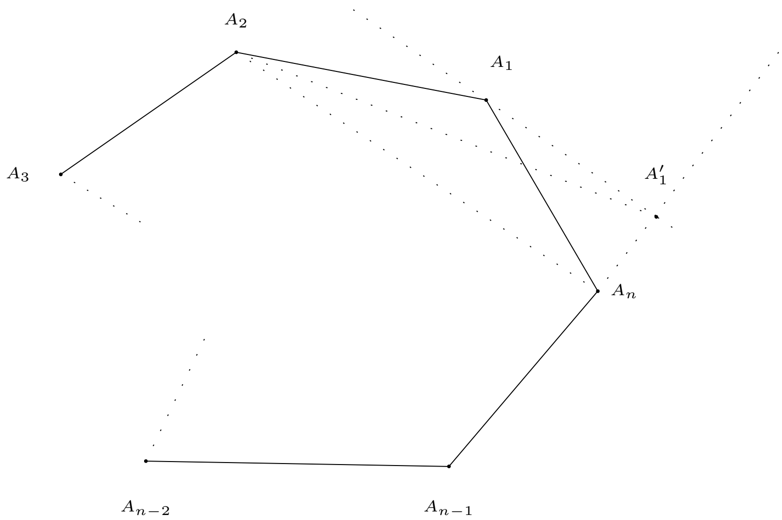
O triângulo $\Delta AC'D$ *é equivalente ao quadrilátero* $ABCD$*, pois a soma das áreas dos triângulos* $\Delta C'CB$ *e* $\Delta CDD'$ *é igual a área do triângulo* $\Delta C'DD'$ *(veja figura acima).*

De fato, se $\underline{h}$ *for a altura do triângulo* $\Delta C'D'D$ *relativamente ao lado* $\overline{D'C'}$ *então:*

$$\acute{A}rea(\Delta CDD') + \acute{A}rea(\Delta C'CB) = \frac{D'C \cdot h}{2} + \frac{CC' \cdot h}{2} = \frac{D'C' \cdot h}{2} = \acute{A}rea(\Delta C'DD').$$

Para resolvermos o problema de "transformar" um polígono geral em um quadrado equivalente mostraremos, primeiramente, como "transformar" um polígono de n-lados num polígono de $(n-1)$-lados equivalente ao inicial.

Dado um polígono de n-lados $A_1A_2\cdots A_n$ tracemos pelo ponto A_1 uma paralela ao lado $\overline{A_2A_n}$ que encontrará o ponto A_1' sobre a reta $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$ (figura abaixo).



Observemos que o polígono $A_1'A_2\cdots A_n$ (que tem $(n-1)$-lados) é equivalente ao polígono $A_1A_2\cdots A_n$ (que tem n-lados).

De fato, na situação acima, se o polígono é convexo, os triângulos $\Delta A_2A_nA_1$ e $\Delta A_2A_nA_1'$ são equivalentes (pois têm uma base comum, a saber, $\overline{A_2A_n}$, e mesma altura, pois as retas $\overleftrightarrow{A_2A_n}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_1'}$ são paralelas).

Se não for convexo agimos como na situação anterior e concluiremos o mesmo.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Desta forma "transformamos" um polígono de n-lados num polígono de $(n-1)$-lados equivalente ao primeiro.

Repetindo o processo acima (por indução) "transformamos" um polígono de n-lados num triângulo equivalente ao mesmo e finalmente a um quadrado equivalente ao polígono de n-lados dado inicialmente.

3.2 Partições do Plano

A seguir exibiremos alguns exemplos que tratarão do problema de dividir uma região do plano em partes satisfazendo certas condições.

Definição 3.2.1 *Diremos que as figuras planas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são* **semelhantes**, *com* **razão de semelhança** $\alpha > 0$, *se existe uma aplicação $\sigma : F \to F'$ bijetora que tem a seguinte propriedade:*

Para $X, Y \in F$ considerando-se $X' \doteq \sigma(F)$, $Y' \doteq \sigma(Y) \in F'$ deveremos ter:

$$X'Y' = \alpha \cdot XY.$$

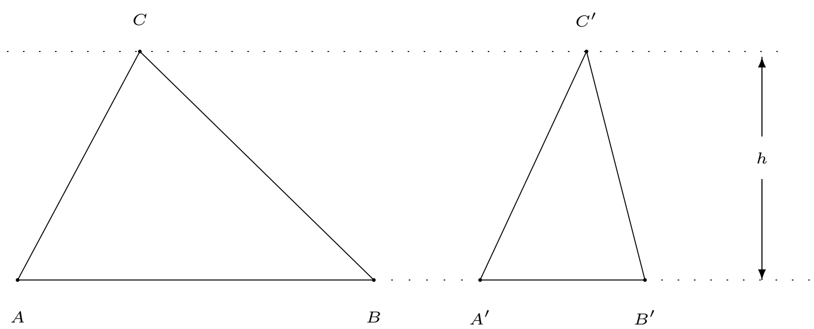
Neste caso diremos que aplicação σ é uma **semelhança, de razão α, entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$** *e os pontos X e X' considerados acima, serão ditos* **homólogos**.

Em várias situações que trataremos a seguir usaremos as seguintes propriedades básicas da Geometria plana:

P1. Se dos triângulos têm mesma altura então a razão entre suas áreas é igual a razão entre os comprimentos das suas respectivas bases (relativas a altura considerada), isto é,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{AB}{A'B'},$$

onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são as áreas dos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, respectivamente (figura abaixo).



De fato,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{\dfrac{AB \cdot h}{2}}{\dfrac{A'B' \cdot h}{2}} = \frac{AB}{A'B'}.$$

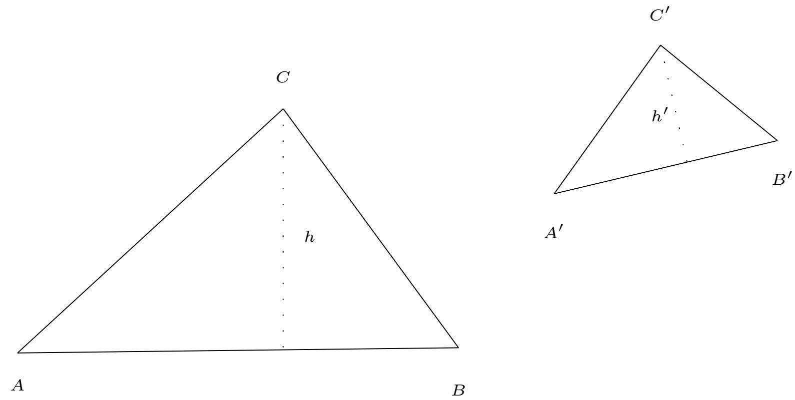
P2. A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre as mesmas.

2.1 Para o caso de triângulos temos que afirmação acima é válida.

De fato, sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ triângulos semelhantes (ou seja, têm três ângulos iguais, ou seja, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ e $\angle C = \angle C'$).

Então sabemos que correspondentes elementos dos triângulos guardam uma mesma proporção, por exemplo (figura abaixo):

$$\alpha \doteq \frac{AB}{A'B'} = \frac{h}{h'}. \tag{3.1}$$



Logo se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são as áreas dos respectivos triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ teremos

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{\frac{AB \cdot h}{2}}{\frac{A'B' \cdot h'}{2}} = \underbrace{\frac{AB}{A'B'}}_{\overset{(3.1)}{=}\alpha} \cdot \underbrace{\frac{h}{h'}}_{\overset{(3.1)}{=}\alpha} = \alpha^2.$$

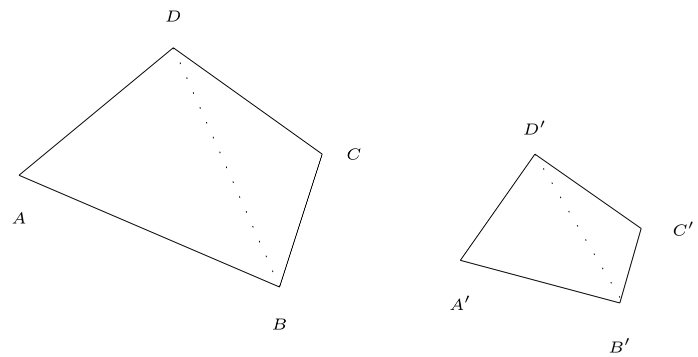
2.2 Para o caso de polígonos a afirmação acima também é válida.

De fato, podemos decompô-los em um número finito de triângulos justapostos que serão, dois a dois semelhantes, e aplicar o processo acima em cada um dos pares de triângulos semelhantes.

Se a razão de semelhança entre os dois polígonos é $\underline{\alpha}$ então a razão de semelhança entre os correspondentes triângulos da decomposição acima também será $\underline{\alpha}$.

Logo, do item acima, a razão entre as áreas dos correspondentes triângulos semelhantes na decomposição acima será α^2.

Logo somndo-se as áreas dos triângulos obtidos na decomposição obteremos as áreas dos respectivos polígonos, e assim obtemos a razão α^2 de semelhança entre as áreas dos polígonos dados incialmente.



Na figura acima teremos

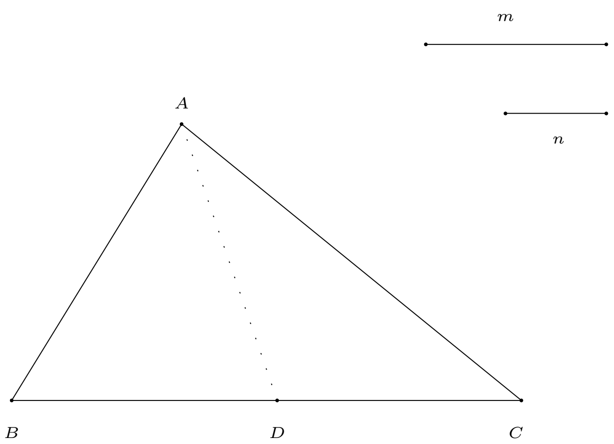
$$\frac{\text{Área}(ABCD)}{\text{Área}(A'B'C'D')} = \frac{\text{Área}(\Delta ABD) + \text{Área}(\Delta BCD)}{\Delta(A'B'D') + \text{Área}(\Delta B'C'D')}$$
$$= \frac{\alpha^2\,\text{Área}(\Delta A'B'D') + \alpha^2\,\text{Área}(\Delta B'C'D')}{\text{Área}(\Delta A'B'D') + \text{Área}(\Delta B'C'D')} = \alpha^2.$$

2.3 Para círculos a situação é análoga.
A verificação des te caso será deixada como exercício para o leitor.

2.4 Situação mais geral pode ser encontrada em *Medida e Forma em Geometria* - Elon Lages Lima, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991, página 48, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 11.

Dado o triângulo ΔABC encontrar o ponto D sobre o lado $\overline{BC}$ tal que a reta $\overleftrightarrow{AD}$ divida o triângulo em dois outros, ΔADB e ΔACD, cujas áreas sejam proporcionais a $\underline{m}$ e $\underline{n}$, dados.



Resolução:

Suponhamos que o ponto D já foi encontrado.

Como os triângulos ΔADB e ΔACD têm mesma altura, relativamente às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente (que será igual a altura do ΔABC relativamente à base $\overline{BC}$), da Propriedade P1. acima, segue que se a razão entre as áreas dos triângulos ΔADB e ΔADC será

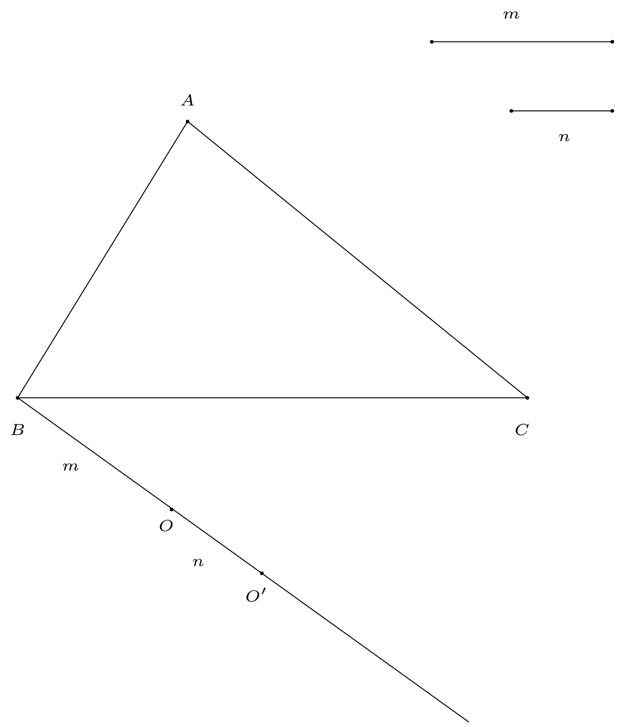
$$\frac{m}{n} = \frac{\text{Área}(ADB)}{\text{Área}(ACD)} \overset{\text{Propriedade P1.}}{=} \frac{BD}{DC}.$$

Logo a razão entre os respectivas bases deverá ser a mesma,

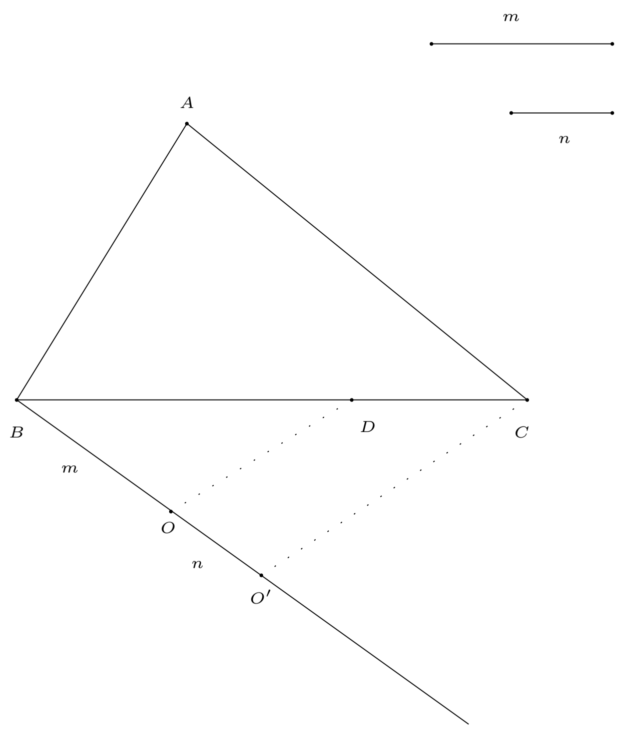
$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Com isto podemos obter o ponto D sobre o lado $\overline{BC}$ com a seguinte construção:

1. Consideremos uma semi-reta com extremos no ponto B e sobre esta encontremos os pontos O e O' tais que (figura abaixo);
$$BO = m \quad \text{e} \quad OO' = n.$$



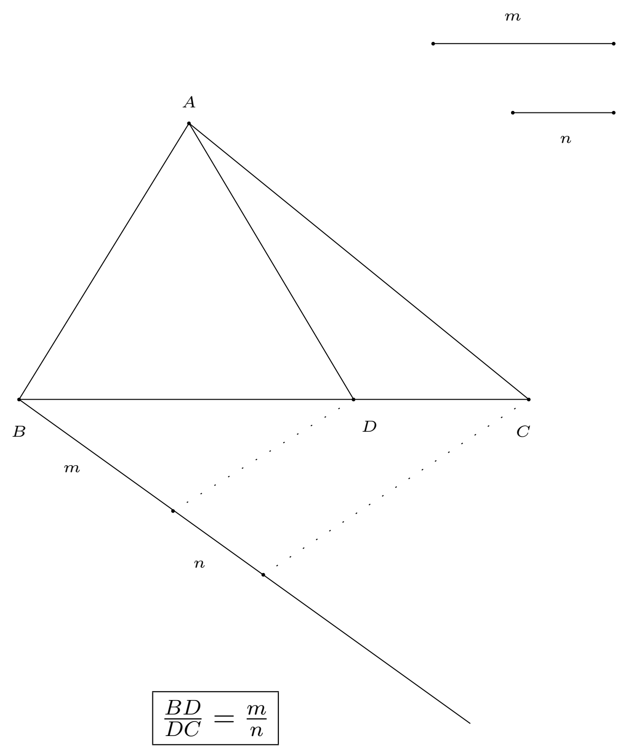
2. Tracemos a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{O'C}$ pelo ponto O que encontrará a semi-reta $\overrightarrow{BC}$ no ponto D (figura abaixo);



3. Como os triângulos ΔOBD e $\Delta O'BC$ são semelhantes (caso AAA) segue que

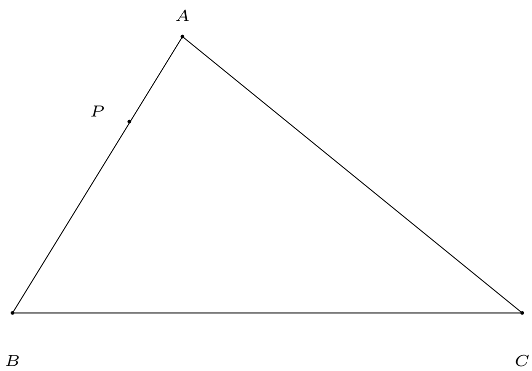
$$\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{OO'} = \frac{m}{n}.$$

4. Pela Propriedade P1, os triângulos ΔABD e ΔADC resolvem o problema (figura abaixo).



Exemplo 12.

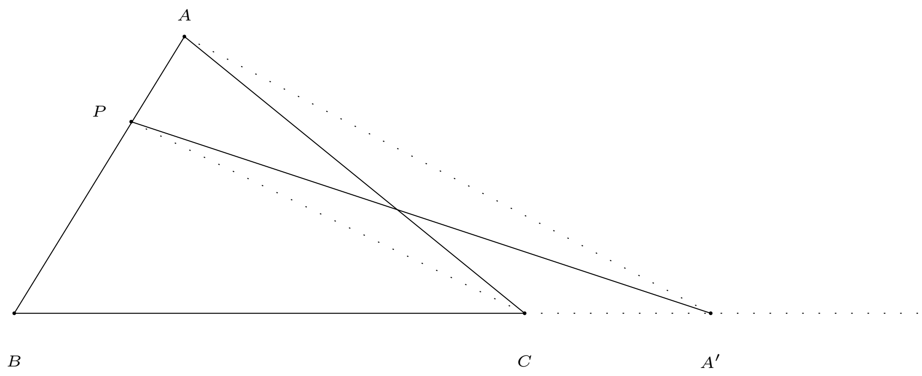
Dado um ponto P sobre o lado $\overline{AB}$ do triângulo ΔABC traçar por esse ponto uma reta que divida o triângulo em duas partes equivalentes (ou seja, dois polígonos que têm mesma área).



Resolução:

Temos a seguinte construção:

1. Tracemos pelo ponto A uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{PC}$, que encontrará a semi-reta lado $\overrightarrow{BC}$ no ponto A' (figura abaixo);



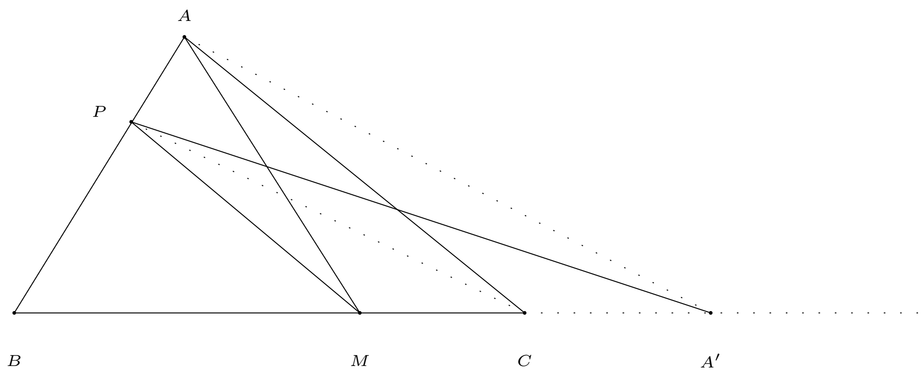
Com isto os triângulos ΔACB e $\Delta PAB'$ são equivalentes (os triângulos $\Delta PA'C$ e ΔPAC são equiavalentes pois têm mesma base, a saber, $\overline{PC}$, e mesma altura, pois as retas $\overleftrightarrow{PC}$ e $\overleftrightarrow{AA'}$ são paralelas).

2. Seja M o ponto médio do segmento $\overline{BA'}$.

   A mediana $\overline{PM}$ do triângulo $\Delta PA'B$ divide o mesmo em duas partes equivalentes.

   De fato, pois os triângulos ΔPMB e $\Delta PA'M$ têm mesma altura, relativamente às bases respectivas bases $\overline{BM}$ e $\overline{MA'}$ que têm mesmo comprimento, pois o ponto M é ponto médio do segmento $\overline{BA'}$ (figura abaixo), isto é,

$$\text{Área}(\Delta PMB) = \text{Área}(\Delta PA'M) \tag{3.2}$$



Logo o segmento $\overline{PM}$ também divide o triângulo ΔABC em duas partes equivalentes pois:

$$\text{Área}(\Delta ACB) = \text{Área}(\Delta PMB) + \text{Área}(PACM). \tag{3.3}$$

Mas:

$$\text{Área}(\Delta ACB) = \text{Área}(\Delta PA'B) = \text{Área}(\Delta PMB) + \text{Área}(\Delta PA'M). \tag{3.4}$$

Logo, de (3.3) e (3.4), segue que

$$\text{Área}(PACM) = \text{Área}(\Delta PA'M) \stackrel{(3.2)}{=} \text{Área}(\Delta PMB).$$

Portanto

$$\text{Área}(\Delta ACB) = \text{Área}(\Delta PMB) + \text{Área}(PACM)$$

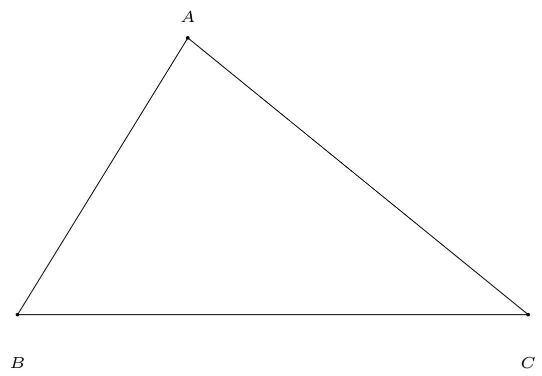
e

$$\text{Área}(\Delta PACM) = \text{Área}(PMB),$$

completando a resolução do exercício.

Exemplo 13.

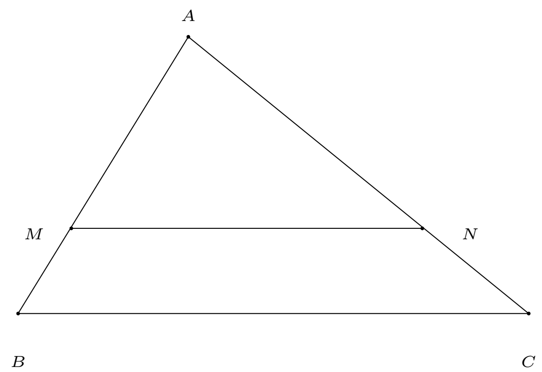
Dado o triângulo ΔABC traçar uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ que divida o mesmo em duas partes equivalentes (ou seja, dois polígonos que têm mesma área).



Resolução:

Suponhamos que a construção esteja pronta (figura abaixo).

1. Sejam M e N pontos sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e o triângulo ΔANM e o paralelogramo $MNCB$ sejam equivalentes (ou seja, a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é a reta procurada - figura abaixo).



2. Como os triângulo ΔACB e ΔANM são semelhantes (pois a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$) segue, da Propriedade P2. acima, que

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{Área}(\Delta ANM)}{\text{Área}(\Delta ACB)} \overset{\text{Propriedade P2.}}{=} \left(\frac{AM}{AB}\right)^2.$$

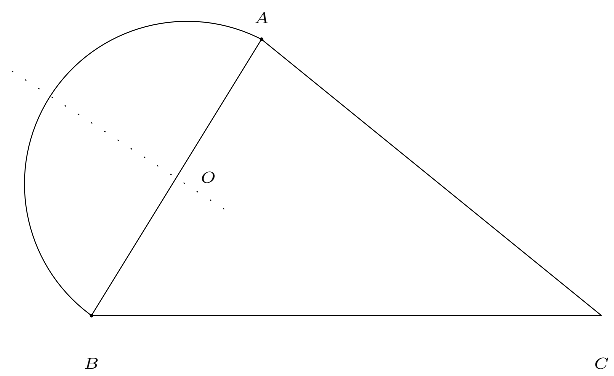
Logo

$$AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB. \tag{3.5}$$

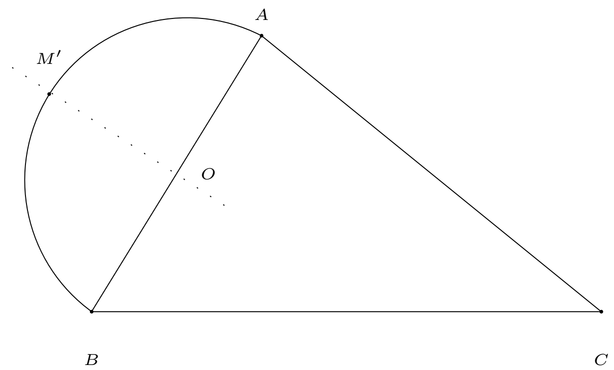
Portanto basta encontrarmos, geometricamente, o ponto M sobre o segmento $\overline{AB}$ com a propriedade (3.5).

Para isto temos a seguinte construção:

1. Traçemos uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, ou seja, seu centro será no ponto O, ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e raio $\dfrac{AB}{2}$ (figura abaixo);



2. Pelo ponto O traçamos uma perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que interceptará a semi-circunferência acima no ponto M' (figura abaixo).



Como $\Delta AOM'$ é um triângulo retângulo no vértice O, segue que

$$(AM')^2 = (OM')^2 + (OA)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{2},$$

ou seja,

$$AM' = \frac{AB}{\sqrt{2}},$$

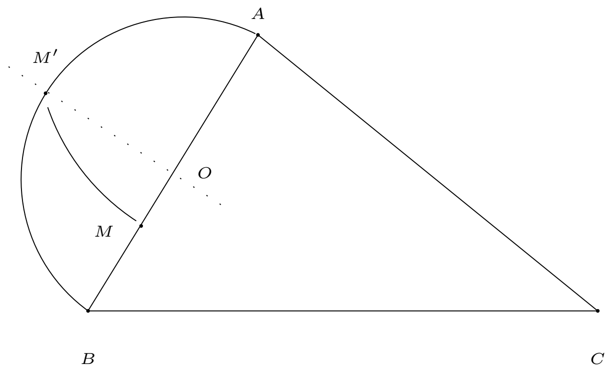
ou ainda,

$$AM' = \frac{AB}{2}.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

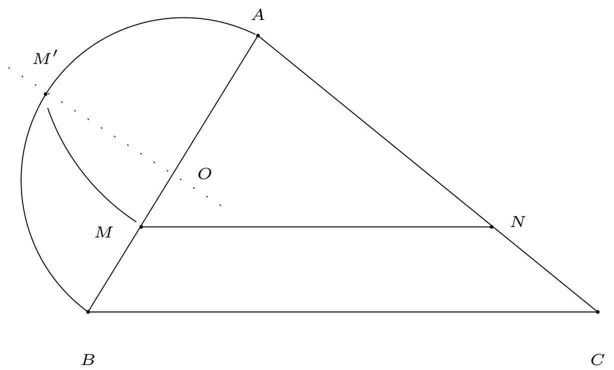
3. Assim encontramos o ponto M sobre o segmento $\overline{AB}$ de tal modo que

$$AM = AM' = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

Para isto basta traçarmos a circunferência de centro no ponto A e raio $AM' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$ que encontrará o segmento $\overline{AB}$ no ponto M (figura abaixo);

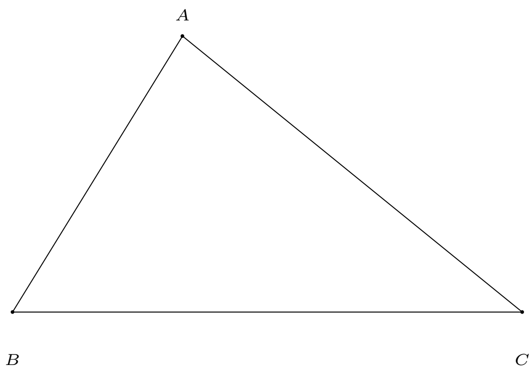


4. A reta procurara é a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto M.



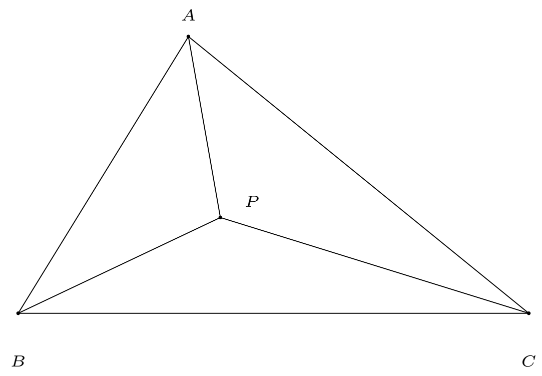
Exemplo 14.

Dado o triângulo ΔABC determinar um ponto P no seu interior de tal modo que as áreas dos triângulos ΔPAB, ΔPBC e ΔPAC sejam, respectivamente, proporcionais aos segmentos de comprimentos $\underline{m}$, $\underline{n}$ e $\underline{p}$, dados.



Resolução:

A situação geométrica é dada pela figura abaixo:

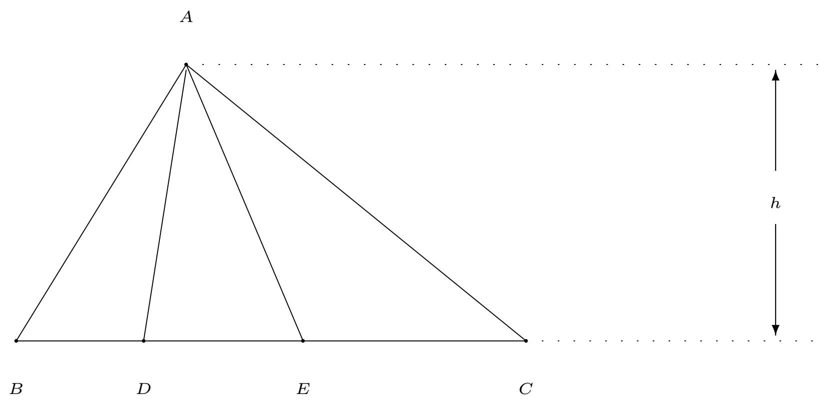


Queremos encontrar o ponto P no interior do triângulo ΔABC de tal modo que

$$\frac{\text{Área}(\Delta PAB)}{\text{Área}(\Delta PBC)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{Área}(\Delta PAB)}{\text{Área}(\Delta PCA)} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\text{Área}(\Delta PBC)}{\text{Área}(\Delta PCA)} = \frac{n}{p}.$$

1. Primeiramente consideraremos o problema de encontrar os pontos D e E sobre o lado $\overline{BC}$ de forma que os triângulos ΔADB, ΔAED e ΔACE tenham áreas respectivamente proporcionais a m, n e p, isto é (figura abaixo):

$$\frac{\text{Área}(\Delta ADB)}{\text{Área}(\Delta AED)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{Área}(\Delta ADB)}{\text{Área}(\Delta ACE)} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\text{Área}(\Delta AED)}{\text{Área}(\Delta ACE)} = \frac{n}{p}.$$



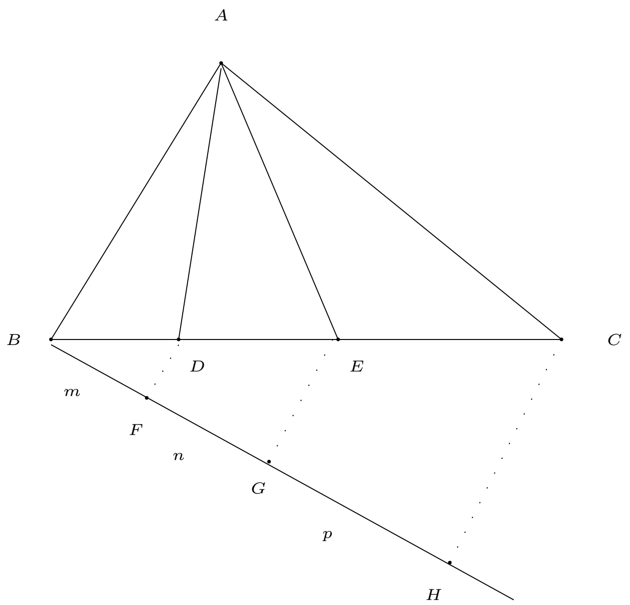
Da Propriedade P1. acima, como os triângulos ΔADB, ΔAED e ΔACE têm mesma altura $\underline{h}$, segue, das relações acima que:

$$\frac{\frac{BD}{2}\cdot h}{\frac{DE}{2}\cdot h} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\frac{BD}{2}\cdot h}{\frac{EC}{2}\cdot h} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\frac{DE}{2}\cdot h}{\frac{EC}{2}\cdot h} = \frac{n}{p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BD}{DE} = \frac{m}{n}, \quad \frac{BD}{EC} = \frac{m}{p}, \quad \frac{DE}{EC} = \frac{n}{p}$$

ou ainda,

$$\frac{BD}{m} = \frac{DE}{n} = \frac{EC}{p}. \tag{3.6}$$

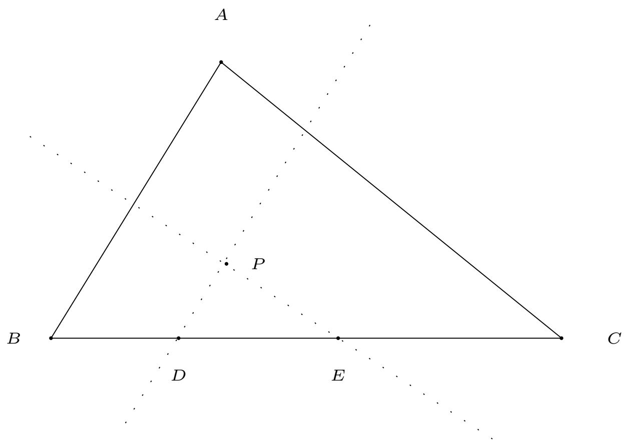
Logo podemos obter os pontos D e E com na figura abaixo:



$$\boxed{BF = m,\ FG = n,\ GH = p}$$

As retas $\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{GE}$ são paralelas a reta $\overleftrightarrow{HC}$.

2. Para finalizar, tracemos pelos pontos D e E retas paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas acima (figura abaixo).



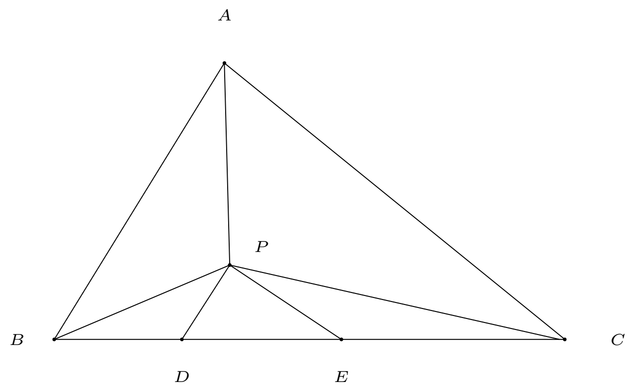
3. Afirmamos que os triângulos ΔPAB, ΔPCB e ΔPAC têm as propriedades pedidas.

De fato, os triângulos ΔADB e ΔAPB têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{AB}$ e mesma altura relativamente à base $\overline{AB}$, pois os pontos D e P estão sobre uma mesma paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja,

$$\text{Área}(\Delta ADB) = \text{Área}(\Delta APB). \tag{3.7}$$

Os triângulos ΔACE e ΔACP também têm mesma área, pois têm mesma base $\overline{AC}$ e mesma altura relativamente à base $\overline{AC}$, pois os pontos E e P estão sobre uma mesma paralela a reta $\overleftrightarrow{AC}$, ou seja,

$$\text{Área}(\Delta ACE) = \text{Área}(\Delta PAC). \tag{3.8}$$



Mas,

$$\text{Área}(\Delta ACB) = \text{Área}(\Delta ADB) + \text{Área}(\Delta AED) + \text{Área}(\Delta ACE). \tag{3.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\text{Área}(\Delta ACB) &= \text{Área}(\Delta APB) + \text{Área}(\Delta PBC) + \text{Área}(\Delta ACP) \\ &\overset{[(3.7)\text{ e }(3.8)]}{=} \text{Área}(\Delta ADB) + \text{Área}(\Delta PBC) + \text{Área}(\Delta ACE).\end{aligned}$$

Comparando a identidade acima com (3.9) obteremos:

$$\text{Área}(\Delta PBC) = \text{Área}(\Delta AED). \tag{3.10}$$

Notemos que os triângulos ΔADB e ΔAED têm mesma altura, relativamente às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente, assim:

$$\frac{\text{Área}(\Delta PBA)}{\text{Área}(\Delta PCB)} \overset{(3.7)\text{ e }(3.10)}{=} \frac{\text{Área}(\Delta ADB)}{\text{Área}(\Delta AED)} = \frac{\frac{BD}{2}h}{\frac{DE}{2}h} = \frac{BD}{DE} \overset{(3.6)}{=} \frac{m}{n}.$$

Notemos também que os triângulos ΔAED e ΔACE têm mesma altura, relativamente às bases $\overline{DE}$ e $\overline{EC}$, respectivamente, assim:

$$\frac{\text{Área}(\Delta PBC)}{\text{Área}(\Delta PAC)} \overset{(3.8)\text{ e }(3.10)}{=} \frac{\text{Área}(\Delta AED)}{\text{Área}(\Delta ACE)} = \frac{\frac{DE}{2}h}{\frac{EC}{2}h} = \frac{DE}{EC} \overset{(3.6)}{=} \frac{n}{p}.$$

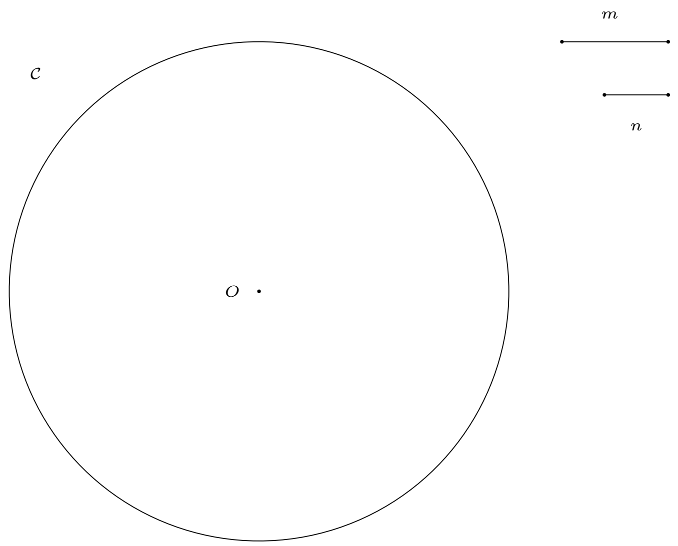
Portanto

$$\frac{\text{Área}(\Delta PBA)}{\text{Área}(\Delta PCB)} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\text{Área}(\Delta PBA)}{\text{Área}(\Delta PAC)} = \frac{m}{p}, \quad \frac{\text{Área}(\Delta PCB)}{\text{Área}(\Delta PAC)} = \frac{n}{p},$$

completando a resolução do Exercício.

Exemplo 15.

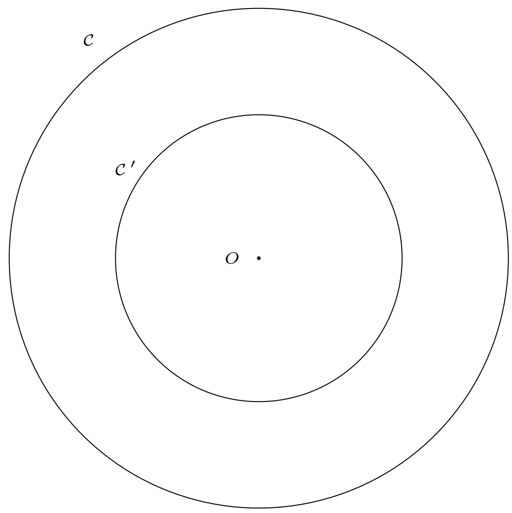
Dado uma circunferência $\mathcal{C}$, traçar uma outra circunferência $\mathcal{C}'$, concêntrica à circunferência $\mathcal{C}$, de modo que as áreas do círculo menor e da coroa determinada pelas circunferências sejam proporcionais ao $\underline{m}$ e $\underline{n}$ dados.



Resolução:

Sejam $r > 0$ e O o raio e o centro da circunferência $\mathcal{C}$, respectivamente.

Queremos construir uma circunferência $\mathcal{C}\,'$ de centro no ponto O e raio $\underline{r'}$ de modo que a área do círculo determinado pela circunferência $\mathcal{C}\,'$ e a área exterior a circunferência $\mathcal{C}\,'$ e interior a circunferência $\mathcal{C}$ sejam proporcionais a $\underline{m}$ e $\underline{n}$, respectivamente (figura abaixo).



Observemos que deveremos ter:

$$\text{Área}(\mathcal{C}) = \text{Área}(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}\,') + \text{Área}(\mathcal{C}\,').$$

Notemos que se encontrarmos $\underline{r'}$ tal que

$$\frac{\text{Área}(\mathcal{C}\,')}{\text{Área}(\mathcal{C})} = \frac{m}{m+n}$$

então teremos

$$\frac{\text{Área}(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}\,')}{\text{Área}(\mathcal{C}\,')} = \frac{\text{Área}(\mathcal{C}) - \text{Área}(\mathcal{C}')}{\text{Área}(\mathcal{C}\,')} = \frac{\text{Área}(\mathcal{C})}{\text{Área}(\mathcal{C}\,')} - 1 = \frac{m+n}{m} - 1 = \frac{n}{m},$$

cujo inverso é o que queremos, ou seja, teremos:

$$\frac{\text{Área}(\mathcal{C}\,')}{\text{Área}(\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}\,')}=\frac{m}{n}.$$

Lembremos da Propriedade P2. acima que

$$\frac{\text{Área}(\mathcal{C}')}{\text{Área}(\mathcal{C})}=\left(\frac{r'}{r}\right)^2,$$

ou seja, precisamos encontrar $r'>0$ tal que

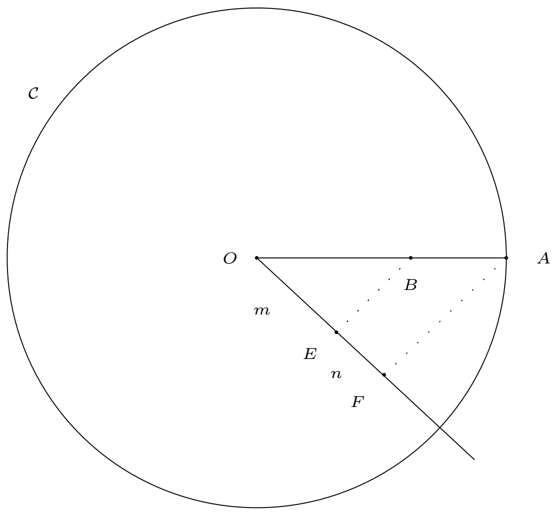
$$\frac{m}{m+n}=\frac{\text{Área}(\mathcal{C}\,')}{\text{Área}(\mathcal{C})}=(\frac{r'}{r})^2,$$

ou seja, $r'>0$ deverá satisafazer a seguinte relação:

$$\frac{r'^{\,2}}{r^2}=\frac{m}{m+n}. \tag{3.11}$$

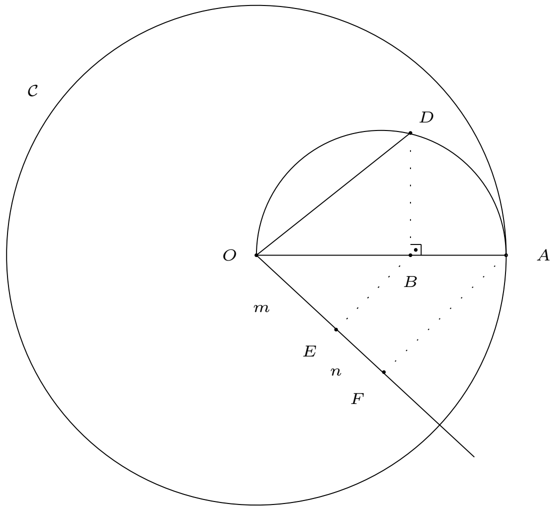
Para isto agimos da seguinte forma:

1. Consideremos o segmento $\overline{OA}$, onde $A\in\mathcal{C}$, e um ponto B sobre o segmento $\overline{OA}$ de tal modo que
$$\frac{OB}{BA}=\frac{m}{n}.$$
Para isto basta considerar sobre uma semireta que tem origem no ponto O, diferente da semi-reta $\overrightarrow{OA}$, os pontos E e F de modo que $OE=m$ e $EF=n$.
Na figura abaixo o segmento $\overline{EB}$ é paralelo ao segmento $\overline{AF}$ e assim obtemos o ponto B com a propriedade acima.



$\boxed{OE=m,\ EF=n}$

2. Traçando a semi-circunferência de diâmetro $\overline{OA}$ (de centro no seu ponto médio) e a perpendicular ao segmento $\overline{OA}$ pelo ponto B encontraremos o ponto D na interseção das mesmas (figura abaixo).



$$\boxed{OE = m,\ EF = n}$$

3. Observemos que o triângulo ΔODA é retângulo no vértice D, logo

$$OD^2 = OB \cdot OA. \tag{3.12}$$

Da semelhança dos triângulos ΔOBE e ΔOAF (caso AAA) segue que

$$\frac{OB}{OA} = \frac{m}{m+n},$$

mas $OA = r$, assim teremos:

$$OB = \frac{m}{m+n} \cdot r.$$

Logo

$$OD^2 \overset{(3.12)}{=} \frac{m}{m+n} \cdot r^2,$$

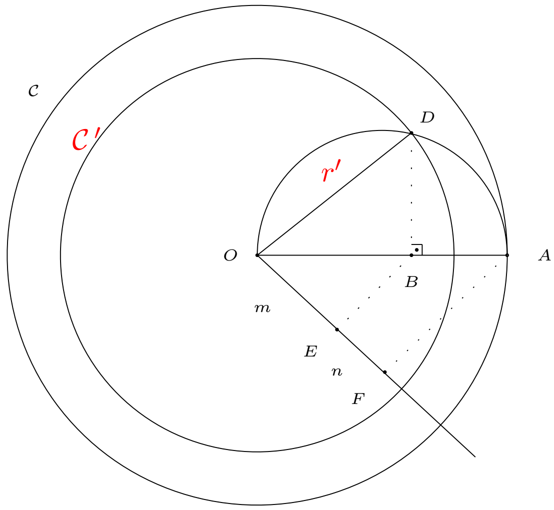
ou ainda,

$$\frac{OD^2}{r^2} = \frac{m}{m+n},$$

ou seja,

$$r' \doteq OD$$

satisfaz a relação (3.11) e assim será o raio da circunferência $\mathcal{C}'$ procurada, completando a resolução do Exercício (figura abaixo).

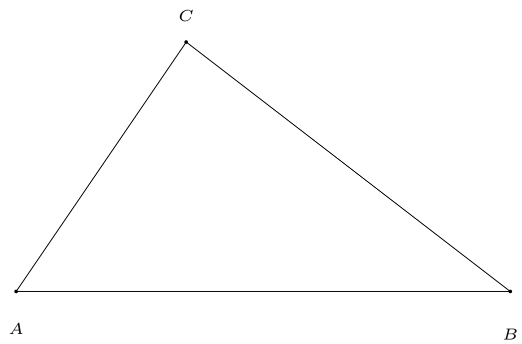


$$\boxed{OE = m,\ EF = n}$$

3.3 Exercícios resolvidos e propostos

Exercício 3.3.1 *Dado um triângulo ΔABC, construir um triângulo $\Delta A'B'C'$ equivalente ao triângulo ΔABC tal que*

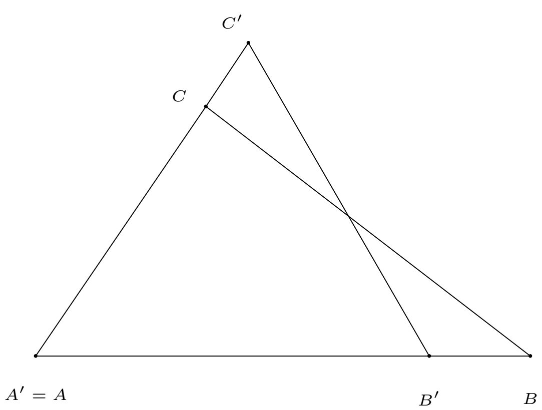
$$\widehat{A'} = \widehat{A} \quad e \quad A'B' = A'C'.$$



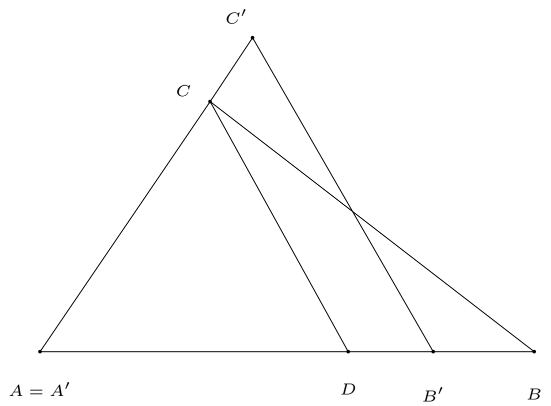
Resolução:

Suponhamos que o triângulo $\Delta A'B'C'$ está construído.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $A' = A$ (figura abaixo).



Consideremos D um ponto sobre o segmento $\overline{AB}$ tal que $AD = AC$ (figura abaixo).



Observemos que os triângulo $\Delta AB'C'$ e ΔACD são semelhantes, pois temos um ângulo comum, a saber o ângulo $\angle A$, $AC = AD$ e $AC' = AB'$, ou seja, os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{C'B'}$ são paralelos.

Logo, da Propriedade P2. acima segue-se que

$$\frac{\text{Área}(\Delta ADC)}{\text{Área}(\Delta AB'C')} = \left(\frac{AC}{AC'}\right)^2. \tag{3.13}$$

Por outro lado, notemos que as alturas dos triângulos ΔADC e ΔABC, relativamente as bases $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ são iguais a $\underline{h}$ assim teremos

$$\frac{\text{Área}(\Delta ADC)}{\text{Área}(\Delta ABC)} = \frac{\frac{AD}{2}\cdot h}{\frac{AB}{2}\cdot h} \overset{[AD=AC]}{=} \frac{AC}{AB}. \tag{3.14}$$

Logo, de (3.13) e (3.14), segue que

$$\left(\frac{AC}{AC'}\right)^2 = \frac{AC}{AB}, \tag{3.15}$$

ou seja,

$$(AC')^2 = AB \cdot AC.$$

Portanto os triângulos $\Delta AB'C'$ e ΔABC terão mesma área.

De fato, notemos que

$$\frac{\text{Área}(\Delta ADC)}{\text{Área}(\Delta AB'C')} \overset{\text{Prop. P2.}}{=} \left(\frac{AC}{AC'}\right)^2 \overset{(3.15)}{=} \frac{AC}{AB} \overset{(3.14)}{=} \frac{\text{Área}(\Delta ADC)}{\text{Área}(\Delta ABC)},$$

isto é,

$$\text{Área}(\Delta AB'C') = \text{Área}(\Delta ABC).$$

Logo basta obter C' sobre a semi-reta $\overset{\mapsto}{AC}$ de tal modo que

$$(AC')^2 = AB \cdot AC.$$

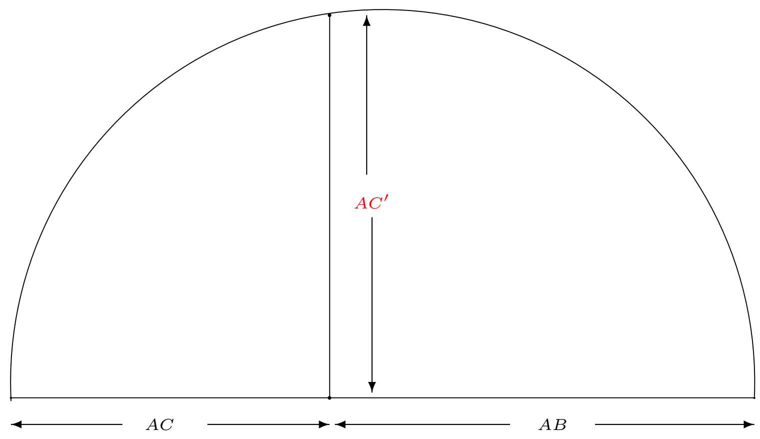
Para isto lembremos que num triângulo retângulo temos (ver Observação (2.5.1) item 2.)

$$h^2 = m.n,$$

ou seja, basta construimos um triângulo retângulo de tal modo que a base oposta ao ângulo reto tenha comprimento

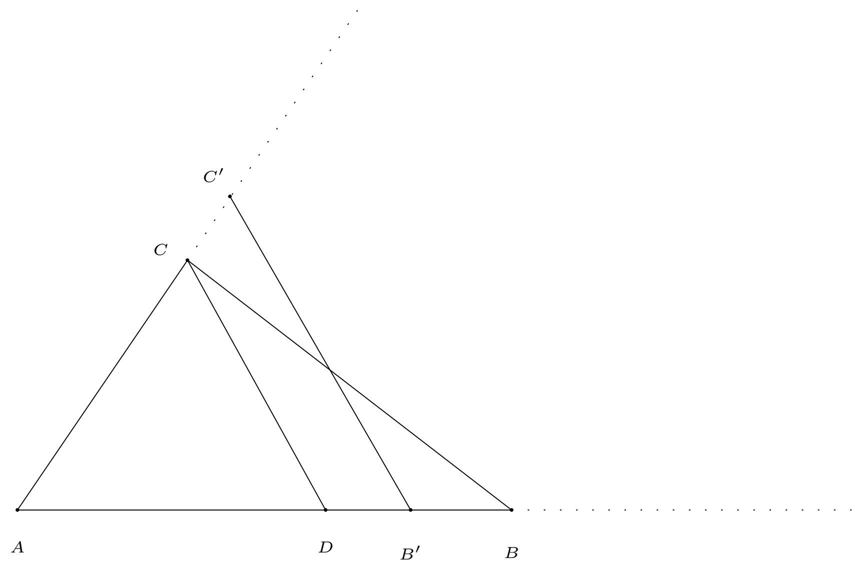
$$AB + AC.$$

Com isso sua altura terá comprimento AC'.

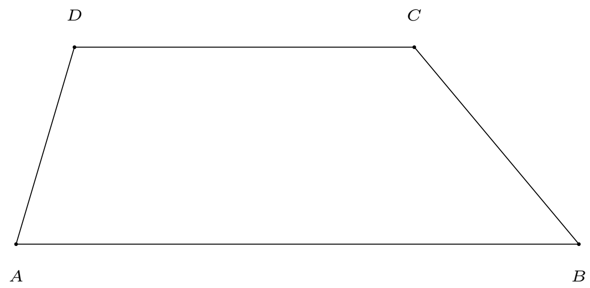


Logo teremos como construir o triângulo $\Delta AB'C'$ com as propriedades pedidas no exercício bastanto transportarmos o comprimento AC' para o lado $\overset{\mapsto}{AC}$ do ângulo $\widehat{A}$.

O ponto B' será obtido da interseção da circunferência de centro em A e raio AC' com a semi-reta $\overset{\mapsto}{AB}$ (figura abaixo).

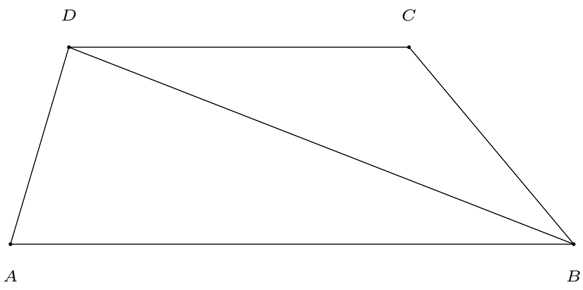


Exercício 3.3.2 *Construir um quadrado equivalente a um trapézio $ABCD$ dado.*

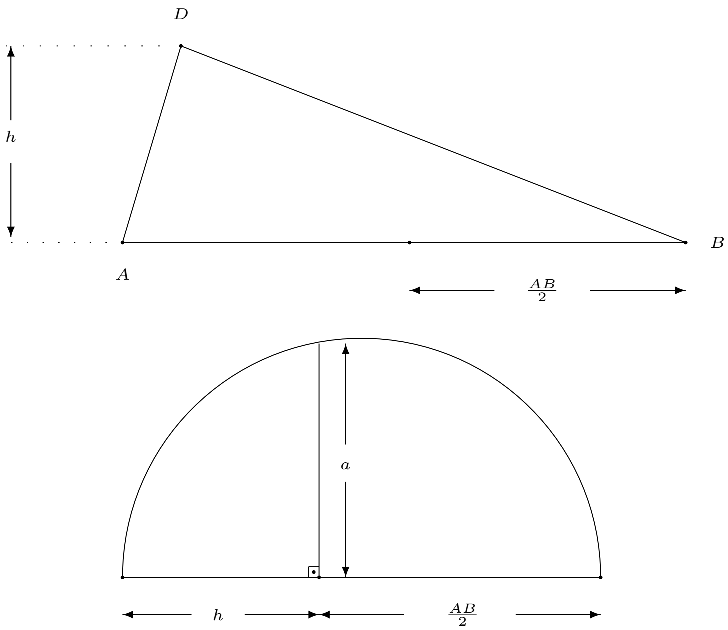


Resolução:

Consideremos os triângulo ΔADB e ΔBDC como na figura abaixo.



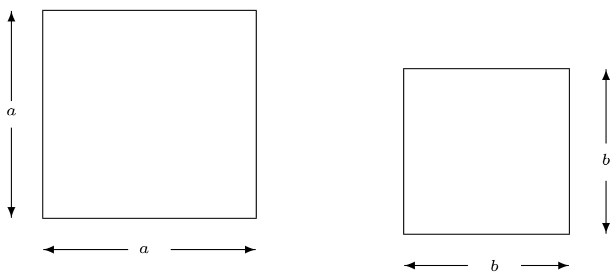
1. Podemos transformar cada um desses triângulos em quadrados equivalentes, para isto temos a figura abaixo:



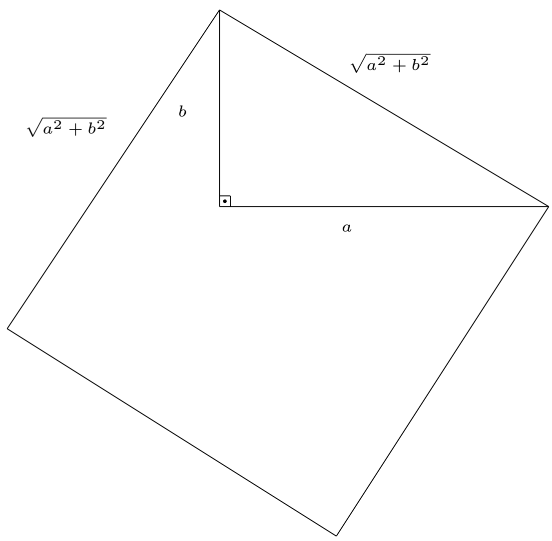
   Com o segmento de comprimento $\underline{a}$ podemos construir um quadrado que é equivalente ao triângulo ΔADB (lembremos que $a^2 = \dfrac{AB}{2} \cdot h$).

   Agindo do mesmo modo com o triângulo ΔBDC obtemos o segmento de comprimento $\underline{b}$ com o qual podemos construir um quadrado que é equivalente ao triângulo ΔBDC.

2. Logo o trapézio $ABCD$ é equivalente aos dois quadrados de lados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ obtidos acima, isto é, a área do trapézio $ACBD$ será $a^2 + b^2$.

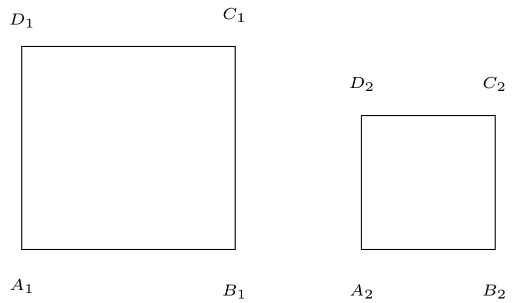


3. Podemos agora construir um quadrado de lado $\sqrt{a^2 + b^2}$ (figura abaixo);



4. Assim o quadrado de lado $\sqrt{a^2+b^2}$ será equivalente ao trapézio $ABCD$, pois sua área é a^2+b^2, como queríamos.

Exercício 3.3.3 *Construir um quadrado cuja área seja a soma das áreas de dois outros quadrados dados.*



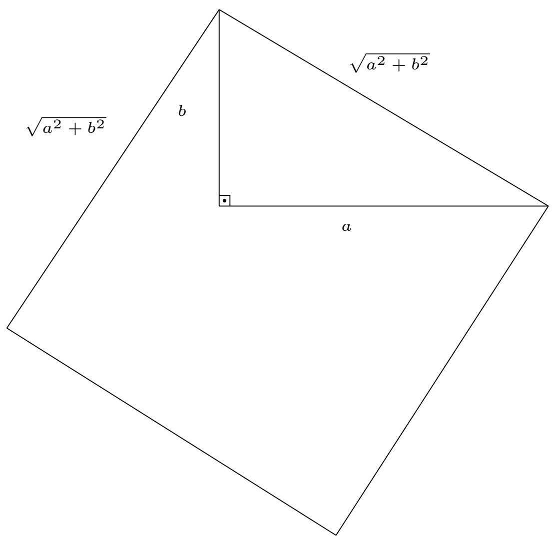
Resolução:

Podemos repetir as idéias usadas no exercício anterior.

Mas claramente: se

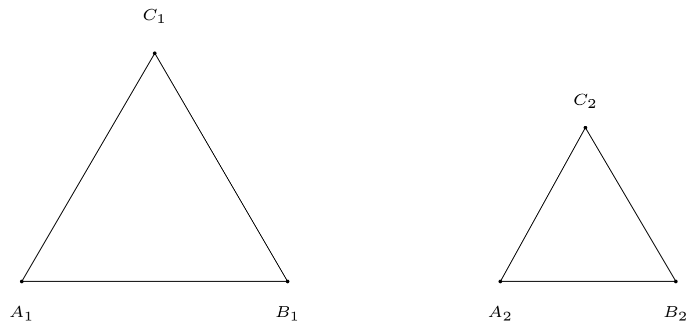
$$A_1B_1 = a \quad \text{e} \quad A_2B_2 = b$$

então podemos fazer a seguinte contrução:



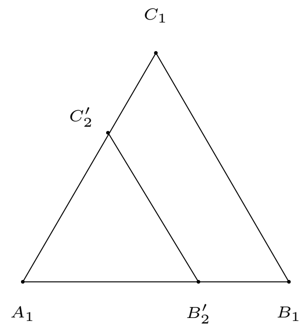
O quadrado construído acima, que tem lados de comprimentos $\sqrt{a^2+b^2}$, terá área igual a a^2+b^2 que é a soma das áreas dos dois quadrados dados, com o queríamos.

Exercício 3.3.4 *Construir um triângulo cuja área seja a diferença das áreas de dois triângulos equiláteros dados.*



Resolução:

Como os triângulos $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$ são equiláteros podemos obter pontos B_2' e C_2' sobre os segmentos $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_1C_1}$, respectivamente, de modo que os triângulos $\Delta A_1B_2'C_2'$ e $\Delta A_2B_2C_2$ sejam equivalentes (figura abaixo).

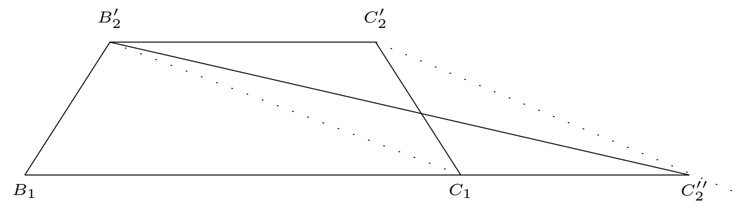


Com isto a diferença das áreas dos dois triângulos será igual a área do trapézio $B_2'B_1C_1C_2'$.

Podemos então transformar o trapézio acima num triângulo equivalente ao mesmo.

Para isto basta considerar a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{B_2'C_1}$ que passa pelo ponto C_2'.

Esta reta interceptará a reta $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ no ponto C_2'' (figura abaixo).



O triângulo $\Delta B_1C_2''B_2'$ é equivalente ao trapézio $B_1C_1C_2'B_2'$ e portanto sua área é igual a diferença das areas dos triângulos $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$, como queríamos mostrar.

Exercício 3.3.5 *Construir um triângulo equilátero equivalente a um triângulo dado.*

Exercício 3.3.6 *Dado o triângulo ΔABC, construir um triângulo $\Delta A'B'C'$ equivalente ao dado conhecendo-se dois lados do triângulo $\Delta A'B'C'$.*

Exercício 3.3.7 *Dados uma quadrado e os comprimentos* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$ *de dois segmentos, traçar por um dos vértices do quadrado uma reta que divida a sua área em partes proporcionais a* $\underline{m}$ *e* $\underline{n}$.

Exercício 3.3.8 *Inscrever em uma circunferência dada um retângulo equivalente a um quadrado dado.*

Exercício 3.3.9 *Dado um triângulo* ΔABC *traçar o segmento* $\overline{DE}$ *paralelo ao segmento* $\overline{BC}$ *de modo que a área do triângulo* ΔADE *seja* $\dfrac{2}{3}$ *da área do triângulo* ΔABC.

Exercício 3.3.10 *Determinar o ponto* P *no interior do triângulo* ΔABC *de modo que as áreas dos triângulos* ΔPAB, ΔPBC *e* ΔPCA *sejam iguais.*

Exercício 3.3.11 *Seja* P *um ponto sobre o lado* $\overline{AB}$ *do triângulo* ΔABC. *Traçar pelo ponto* P *duas retas de modo que estas dividam o triângulo* ΔABC *em três partes que tenham áreas iguais.*

Exercício 3.3.12 *Seja* P *um ponto sobre o lado* $\overline{AB}$ *de um quadrilátero convexo* $\Delta ABCD$. *Traçar pelo ponto* P *uma reta que divida o quadrilátero em duas partes equivalentes.*

Exercício 3.3.13 *Sejam* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *duas retas concorrentes do ponto* A *e* M *um ponto que não pertence a nenhuma dessas retas. Encontrar um ponto* B *sobre a reta* $\underline{r}$ *e um ponto* C *sobre a reta* $\underline{s}$ *de modo que o segmento* $\overline{BC}$ *passe pelo ponto* M *e a área do triângulo* ΔABC *seja a menor possível.*