SOBRE O GRAU DE NILPOTÊNCIA DAS AÇÕES DE UM ESPAÇO NILPOTENTE E LOCALIZAÇÃO DE CERTAS CLASSES DE GRUPOS

Augusto Reynol Filho

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR

Prof. Dr. PETER J. HILTON

São Paulo, Julho de 1987

ABSTRACT

We have two purposes in this work. The first one is to compare the nilpotency of the action of $\pi_1(X)$ on $\pi_n(X)$ $(n \geq 2)$ with the one of the action of $\pi_1(X)$ on $H_n(\tilde{X})$ $(n \geq 2)$, when X is a nilpotent space. (Here $\tilde{X}$ means the universal cover of X).

The second purpose is to study the theory of P-localization of a group in a category $\mathcal{C}$ to which $\mathcal{N}$ (the category of the nilpotent groups) is a full sub-category.

As for the first subject we work in the context of the nilpotent spaces. A suitable reference for a more detailed description of the properties of a nilpotent space might be [H.M.R.], chapter II.

Our main result towards comparison of nilpotencies is the theorem 2.12 and the main point in its proof is the reiterated use of the Serre spectral sequence.

Concerning the second subject we'd suggest [R.1] and [H.M.R.], chapter I.

In section 3.2 we present a number of results on the P-localization, in the category $\mathcal{G}$ of all groups, of a group $G = A \wr_{\omega} X$, where A is a finite abelian group and X is any group. It turns out that the P-localized (G_P) is completely described by X_P, A and ω .

We'd say that the most important results are proposition 3.2.1 and the theorems 3.2.4, 3.2.7 and 3.2.12.

We point out that proposition 3.2.2 plays a fundamental role in the proof of the theorems above.

Finally, in section 3.3 we present the construction of the theory of P-localization in the category of the groups which are extensions of nilpotent groups by finite abelian groups.

As we see it, the main results are given by the theorems 3.3.11 and 3.3.12.

Our proof follows rather closely the one presented in [H.M.R.], chapter I, and is based on the classical interpretation of the second cohomology group of a group.

It should be mentioned that proposition[illegible] 1 and 3.3.2 play an important role in the proof of the theorem 3.3.11. □

oOo

Í N D I C E

oOo

INTRODUÇÃO

A teoria de P-localização de espaços simplesmente conexos tem se mostrado útil em topologia. Ver [A], [S], [Z].

Em 1975 foi publicado um livro ([H.M.R.]) que sintetizou uma série de artigos anteriormente publicados tratando da teoria de P-localização de grupos e espaços nilpotentes. Ali foi dado um tratamento sistemático ao estudo destes tópicos.

Evidentemente o desenvolvimento da teoria de P-localização suscitou uma série de questões, algumas das quais tratadas neste trabalho.

Em [H.M.R.], capítulo II, há um resultado afirmando que um CW complexo conexo X, com $\pi_1(X)$ nilpotente, é um espaço nilpotente se e somente se $\pi_1(X)$ age nilpotentemente em $H_n(\tilde{X})$, $\forall n \geq 2$.

Surge então, naturalmente, o interesse em se comparar $\mathrm{nil}_{\pi_1(X)} \pi_n(X)$ com $\mathrm{nil}_{\pi_1(X)} H_n(\tilde{X})$ $(n \geq 2)$ quando X é nilpotente.

O capítulo II gravita em torno desta questão, e queremos crer que seu principal resultado seja o teorema 2.12. Este produz desigualdades comparando as grandezas citadas para $n \leq 7$. Acreditamos, da mesma forma, que os exemplos 2.5 e 2.13 tragam alguma luz à discussão do assunto.

Também em [H.M.R.] nos é apresentada a teoria de P-localização na categoria dos grupos nilpotentes, a qual é adequada à construção de uma teoria de P-localização para espaços nilpotentes. Entretanto, até então ainda era desconhecida a possibilidade de se P-localizar um grupo não nilpotente.

Paulo Ribenboim, em [R.1], nos apresenta a construção de uma teoria de P-localização na categoria de todos os grupos.

Em [R.2] aparece uma construção explícita da P-localização de um grupo finito. Ocorre que excetuado este caso e a situação em que o grupo é cíclico infinito, não parece simples a partir de [R.1] determinar explicitamente o P-localizado de um grupo na categoria de todos os grupos.

Estas considerações agregadas a uma sugestão do Prof. Hilton nos motivaram a considerar o problema tratado no capítulo III, §3.2, qual seja determinar a P-localização, na categoria de todos os grupos, de um produto semi-direto de um grupo abeliano finito por um grupo qualquer. Os principais resultados obtidos nesta secção são descritos pelos teoremas 3.2.4, 3.2.7 e 3.2.12.

Ainda no que concerne à construção apresentada em [R.1], não sabemos se este funtor quando restrito à categoria dos grupos nilpotentes produz uma teoria de localização nesta categoria. Mais ainda, em presença desta construção não vemos, até agora, como determinar certas propriedades básicas a respeito dos grupos de homologia de G_P. (Por exemplo: Será que $H_j(G) \xrightarrow{e_*} H_j(G_P)$ P-localiza $H_j(G)$ na categoria de todos os grupos?).

Devido a dificuldades deste jaez fomos levados a tentar utilizar os métodos aplicados em [H.M.R.], cap. I, para mostrar que existe uma teoria de P-localização, que estende a já existente na categoria dos grupos nilpotentes, na categoria dos grupos que são extensão de um grupo nilpotente por um abeliano finito.

Os frutos deste trabalho são apresentados no cap. III, §3.3, e a nosso ver os principais resultados são dados através dos teoremas 3.3.11 e 3.3.12.

A secção 3.1 tem por finalidade apresentar resultados que fundamentam os argumentos usados em 3.2 e 3.3. Não obstante, aí aparecem proposições que cremos tenham interesse por si só, tais como as prop. 3.1.5, 3.1.7, 3.1.11 e o teorema 3.1.20.

Finalmente no capítulo I a linguagem e definições básicas para o trato dos capítulos seguintes, e um esboço da construção da teoria de P-localização para espaços nilpotentes que faz uso das especificidades da teoria de P-localização na categoria dos grupos nilpotentes.

Gostaríamos de registrar os mais profundos e sinceros agradecimentos a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, nos auxiliaram na elaboração deste trabalho e, muito particularmente aos professores:

Paulo Ferreira Leite, pelo estímulo, apoio e paciente colaboração, principalmente no início do trabalho.

Elza Furtado Gomide, igualmente pelo estímulo e apoio, bem como pela paciente leitura dos manuscritos em ingles deste trabalho. Sem suas valiosas sugestões certamente os mesmos conteriam uma quantidade muito grande de erros, imperfeições e obscuridades.

Daciberg Lima Gonçalves, pelo estímulo e ajuda impagáveis ao longo de todos estes anos, pelo muito que aprendemos em seus seminários, aulas e conversas particulares, e pelas valiosíssimas sugestões e idéias a nós fornecidas durante a preparação do trabalho. Gostaria ainda de salientar que apesar de nossas diferentes qualificações profissionais, o Prof. Daciberg soube tornar nosso trabalho conjunto uma atividade bastante agradável e enriquecedora sob todos os aspectos.

Peter John Hilton, orientador deste trabalho, que ao longo dos anos nos sugeriu vários problemas tendo nas horas difíceis comparecido com encorajamento, orientação e amparo. É igualmente louvável sua assiduidade no que tange a opinar sobre o andamento do trabalho sempre que lhe foi dado conhecimento.

Finalmente, gostariamos de agradecer a *Antonia Soares* pela eficiência e dedicação demonstradas durante a realização do trabalho (excelente) de datilografia. □

oOo

CAPÍTULO I

Nosso objetivo aqui é estabelecer a notação e relembrar as definições e resultados básicos a serem utilizados nos dois capítulos subsequentes, onde obtemos os resultados originais do trabalho.

Ao longo de todo o estudo P significa uma família de primos, P' o complementar de P em $\mathcal{P}$ (família de todos os primos) e $P^{\times}$ o conjunto multiplicativo determinado por P, i.e. o conjunto dos produtos (finitos) de primos em P.

Definição 1.1 - Um grupo G diz-se P-local $\iff (\forall n \in P'^{\times})$; $g \in G \longmapsto g^n \in G$ é uma função bijetora.

Exemplo típico de grupo P-local é

$$\mathbb{Z}_P = \{\tfrac{m}{n} \in Q: \quad n \in P'^{\times}\}$$

ou

$$A_P = A \otimes \mathbb{Z}_P ,$$

se A é um grupo abeliano.

A seguir seja $\mathcal{C}$ uma sub-categoria plena da categoria dos grupos $\mathcal{G}$.

Definição 1.2 Um homomorfismo $G \xrightarrow{e} H$ de grupos $G,H \in |\mathcal{C}|$ é um P-localização de G $\iff$ H é P-local e $\forall$ K $\in |\mathcal{C}|$, K P-local e $\forall$ f $\in$ Hom(G,K), $\exists!$ $\bar{f} \in$ Hom(H,K) tq. $\bar{f} \circ e = f$).

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & K \\ H \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

É evidente, a partir da definição, que se $G \xrightarrow{e_1} H_1$ e $G \xrightarrow{e_2} H_2$ são P-localizações de G em $\mathcal{C}$, então $\exists!$ isomorfismo $\phi: H_1 \longrightarrow H_2$ tq. $\phi e_1 = e_2$.

A P-localização de G numa categoria $\mathcal{C}$ é usualmente indicada por $G \xrightarrow{e} G_P$ (caso exista).

Em [R.1] Paulo Ribenboim construiu a teoria de P-localização para categoria $\mathcal{C} = \mathcal{G}$, ie. um funtor

$$L_P: G \in |\mathcal{G}| \longmapsto G_P \in |\mathcal{G}|$$

$$: f \in \mathrm{Hom}(G,H) \longmapsto f_P \in \mathrm{Hom}(G_P,H_P)$$

tq.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & H \arrow[d, "e"] \\ G_P \arrow[r, "f_P"] & H_P \end{tikzcd}$$

é comutativo. ($\therefore$ e é uma transformação natural do funtor $1_{\mathcal{G}}$ para o funtor L_P).

É interessante notar que este funtor não é exato, pois sendo $P = \{3\}$ e S_3 o grupo das permutações de um conjunto com 3 elementos temos que (conforme será mostrado no capítulo III - §3.2 - teorema 3.2.7 ou [R.2]) $(S_3)_P = (0)$.

$\therefore\ \mathbb{Z}_3 \rightarrowtail S_3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ é levada em $\mathbb{Z}_3 \longrightarrow (0) \twoheadrightarrow (0)$ não exata.

Salientamos ainda que a construção efetuada em [R.1] não nos proporciona uma construção de G_P, onde seja claro como determinar, por exemplo, propriedades homológicas de G_P. Entretanto em [R.2], §7, prop. 7.2 o autor exibe G_P para um grupo finito G.

Desta construção concluimos também que o funtor L_P construido em [R.1] quando restrito a F (categoria dos grupos finitos) descreve a teoria de localização nesta categoria, uma vez que $G \in |F| \Longrightarrow G_P \in |F|$.

Por outro lado, para a categoria $C = \eta$ = categoria dos grupos nilpotentes, a teoria de localização foi desenvolvida em [H.M.R.], capítulo I.

Nesta categoria o funtor localização (que existe!) comporta-se mais adequadamente no que se refere a sua aplicação em topologia algébrica.

Assim é que em η este funtor é exato, ie.
$N \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} Q$ é uma seq. exata de grupos nilpotentes

$\Longrightarrow N_P \overset{\mu_P}{\rightarrowtail} G_P \overset{\varepsilon_P}{\twoheadrightarrow} Q_P$ é uma seq. exata de grupos nilpotentes.

Mais ainda, a construção descrita em [H.M.R.] é tal que se nil $G \leq c$, então nil $G_P \leq c$. Em particular, concluimos que G_P é abeliano sempre que G o é. Na realidade mostra-se (vide [H.M.R.]) que $a \in A \overset{e}{\longmapsto} a \otimes 1 \in A \otimes \mathbb{Z}_P$ P-localiza A em η, se A é abeliano.

<u>Definição 1.3</u> - $f \in \mathrm{Hom}(G,H)$;

(i) f é P-injetora $\Longleftrightarrow (f(x) = 1 \Longrightarrow (\exists n \in P'^{\times})$ tq. tq. $x^n = 1)$.

(ii) f é P-sobrejetora $\Longleftrightarrow$ ($\forall y \in H$, $\exists$ $n \in P'^{\times}$ tq. $y^n \in$ imf).

(iii) f é P-isomorfismo $\Longleftrightarrow$ f é P-injetora e P-sobrejetora. $\square$

Gostaríamos ainda de ressaltar duas propriedades fundamentais do funtor localização em η.

1) $G \xrightarrow{f} H$ um homomorfismo em η, P-localiza G $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ H é P-local e f é um P-isomorfismo. (vide Teorema Fundamental, pg. 7., [H.M.R.].

2) $f,g \in \mathrm{Hom}(G,H)$ em η. Então $f = g \Longleftrightarrow f_p = g_p$, $\forall p$ primo (onde f_p é a $\{p\}$-localização de f). (vide teorema I.3.13 de [H.M.R.]).

Esta propriedade é a versão algébrica do princípio de Hasse que no contexto topológico pode ser encontrado em [S]

Utilizaremos também a noção de ação nilpotente que passamos a definir.

Seja $\pi \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ uma ação de um grupo π num grupo abeliano A. Pomos $\Gamma_\pi^1 A = \Gamma_\omega^1 = A$. e supondo definido $\Gamma_\pi^k A = \Gamma_\omega^k$ consideramos

$\Gamma_\pi^{k+1} A = \Gamma_\omega^{k+1} = \langle \omega(x)a-a \in A\colon x \in \pi\ ;\ a \in \Gamma_\omega^k \rangle$ = (sub-grupo gerado pelos elementos $\omega(x)a-a$).

É fácil ver que $A = \Gamma^1_\omega \supset \Gamma^2_\omega \supset \dots \supset \Gamma^k_\omega \supset \dots$ e que Γ^k_ω é estável sob a ação de ω, ou que esta é uma cadeia descendente de $\mathbb{Z}[\pi]$-submódulos de A. (estrutura de $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo de A definida por ω).

Definição 1.4 - ω é nilpotente com classe de nilpotência $c \Longleftrightarrow \Gamma^c_\omega \neq (0)$ e $\Gamma^{c+1}_\omega = (0)$. (Se $A = (0)$ pomos, por definição, $c = 0$).

É importante notar aqui que se $I(\pi)$ representa o ideal de aumentação do anel de grupo $\mathbb{Z}[\pi]$ segue imediatamente que $\Gamma^{i+1}_\omega = I(\pi)^i.A$.

Relembramos aqui, para uso reiterado posteriormente, duas proposições fundamentais no contexto.

Proposição 1.5 - Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão, com A abeliano, dando origem a uma Q-ação ω em A. Então $G \in |\eta| \Longleftrightarrow Q \in |\eta|$ e ω é nilpotente.

Prova: (Vide prop. I.4.1 de [H.M.R.] $\square$

Proposição 1.6 - Seja $A' \to A \to A''$ uma sequência exata de Q-módulos com respeito a Q-ações ω', ω e ω'' respectivamente. Então, ω é nilpotente se ω' e ω'' são nilpotentes. Se $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ é exata e ω é nilpotente então ω' e ω'' são nilpotentes, e

$$\max\{\text{nil } \omega', \text{nil } \omega''\} \leqq \text{nil } \omega \leqq \text{nil } \omega' + \text{nil } \omega''.$$

Prova: (Vide prop. I.4.3 de [H.M.R.]). $\square$

Passamos agora à descrição (sucinta) da teoria de P-localização dos espaços nilpotentes.

<u>Definição 1.7</u> - Um espaço topológico X diz-se P-local $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \pi_n(X)$ é P-local, $\forall n \geq 1$.

<u>Definição 1.8</u> - Um espaço topológico X diz-se nilpotente $\Longleftrightarrow \pi_1(X)$ é nilpotente e $\pi_1(X)$ age nilpotentemente em $\pi_n(X)$, $\forall n \geq 2$.

Indicamos por ηH a categoria cujos objetos são os CW-complexos nilpotentes com ponto base e os morfismos de X em Y são as classes de homotopia pontuadas de aplicações (pontuadas) de X em Y. ([X,Y]).

Da mesma forma H_1 indica a sub-categoria plena de ηH cujos objetos são os CW-complexos 1-conexos.

Seja também C uma categoria de espaços topológicos 0-conexos com ponto base e tq. Mor(X,Y) = [X,Y].

<u>Definição 1.9</u> - $X \xrightarrow{e} Y$ $(X,Y \in |C|)$ P-localiza X $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ (Y é P-local e $\forall Z \in |C|$, Z P-local $\Longleftrightarrow$ $e^*: [Y,Z] \longrightarrow [X,Z]$ é bijetora).

Segue imediatamente da definição que (em C) se $\exists$ P-localização, então ela é única.

Em [H.M.R.], capítulo II, é descrita a construção do funtor P-localização em H_1 e em ηH.

Rememoramos agora os principais passos destas construções.

<u>Proposição 1.10</u> - Seja $e: X \longrightarrow Y$ em H_1. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) e P-localiza X (em H_1).

(ii) $e_*: \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ P-localiza $\pi_n(X)$, $\forall n \geq 1$.

(iii) $e_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ P-localiza $H_n(X)$, $\forall n \geq 1$.

<u>Prova</u>: (Vide [H.M.R.], Teorema II. 1.B.). □

<u>Proposição 1.11</u> - Seja $X \xrightarrow{e} Y$ em ηH . As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) e P-localiza X (em ηH).

(ii) $e_*: \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ P-localiza $\pi_n(X)$, $\forall n \geq 1$

(iii) $e_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ P-localiza $H_n(X)$, $\forall n \geq 1$

<u>Prova</u>: (Vide [H.M.R.] Teorema II.3.B). □

Das proposições acima é lícito concluir que se X é um CW-complexo simplesmente conexo e $X \xrightarrow{e} Y$ P-localiza X em ηH, então Y é simplesmente conexo, donde a construção em ηH estende a de H_1.

Seja agora X um CW-complexo 1-conexo de dimensão 2. Então,

$$X \overset{\phi}{\simeq} \underset{\alpha}{\vee} S^2 = \underset{\alpha}{\vee} M(\mathbb{Z},2) ,$$

onde M(A,n) é um espaço de Moore. Sendo $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_P$ é imediato que

$$\exists \quad \underset{\alpha}{\vee} S^2 \xrightarrow{e} \underset{\alpha}{\vee} M(\mathbb{Z}_P,2)$$

tq. e_* P-localiza $H_n(\underset{\alpha}{\vee} S^2)$, $\forall n \geq 1$. Daí que

$$e \circ \phi : X \longrightarrow \underset{\alpha}{\vee} M(\mathbb{Z}_P,2) \text{ P-localiza X em } \mathcal{H}_1$$

(e $\therefore$ também em $\eta\mathcal{H}$).

Suponhamos agora que nós temos construido $e_0: X_0 \longrightarrow Y_0$ satisfazendo (iii) da prop. 1.10 se dim $X_0 \leqq n$ e $n \geqq 2$. ($X_0, Y_0 \in |\mathcal{H}_1|$). e seja $X \in |\mathcal{H}_1|$ com dim X = n+1. Então

$$\exists \; g: \underset{\alpha}{\vee} S^n \longrightarrow X^n \quad \text{tq.} \quad C(g) = X ,$$

onde C(g) é o cone de g e X^n = n-esqueleto de X).

Devido à proposição II 1.3 de [H.M.R.] existe um diagrama comutativo a menos de homotopia.

$$\begin{tikzcd}
\underset{\alpha}{\vee} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e_1"] & X^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "e_0"] & X = C(g) \arrow[d, "e"] \\
\underset{\alpha}{\vee} M(\mathbb{Z},n) \arrow[r, dashed, "h"] & Y_0 \arrow[r, hook, "j"] & Y = C(h)
\end{tikzcd}$$

Em virtude da naturalidade da sequência do cone em homologia segue que e satisfaz (iii) da prop. 1.10, donde e P-localiza X em $\mathcal{H}_1$ (e $\therefore$ em $\eta\mathcal{H}$).

Suponhamos por fim $X \in |\mathcal{H}_1|$ e dim $X = \infty$.

Seja $\quad X^2 \subset X^3 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots \subset X = \bigsqcup_{n=2}^{\infty} X^n$

Temos construido as P-localizações e^n e e^{n+1}

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "e^n"] & X^{n+1} \arrow[d, "e^{n+1}"] \\ Y^{(n)} \arrow[r, hook] & Y^{(n+1)} \end{tikzcd}$$

Observamos que e^n e e^{n+1} podem ser escolhidos de modo que o diagrama comute efetivamente.

Pondo $Y = \bigsqcup_n Y^{(n)}$ com a topologia fraca vem que $Y \in |\mathcal{H}_1|$ e as funções f^n combinadas produzem $f\colon X \longrightarrow Y$ que satisfaz (iii) da prop. (1.10).

Isto completa a construção da P-localização em $\mathcal{H}_1$.

Vamos agora relembrar uma caracterização fundamental dos espaços nilpotentes.

Seja X um CW-conexo e $\ldots \to X_n \xrightarrow{p_n} \ldots \to X_2 \to X_1 =$ $= K(\pi_1(X),1)$ sua decomposição de Postnikov.

<u>Definição 1.12</u> - Dizemos que a decomposição de Postnikov admite um <u>refinamento principal</u> no estágio n $\Longleftrightarrow p_n$ pode ser fatorada como um produto de fibrações.

$$X_n = Y_c \xrightarrow{q_c} Y_{c-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{q_1} Y_0 = X_{n-1}$$

onde a fibra de q_i é um expaço $K(G_i,n)$ e q_i é induzida por uma aplicação $g_i\colon Y_i \longrightarrow K(G_i,n+1)$, $1 \leq i \leq c$.

Teorema 1.13 - Seja X um CW complexo conexo. Então X é nilpotente $\Longleftrightarrow$ a decomposição de Postnikov de X admite um refinamento principal no estágio n, $\forall n \geq 1$.

Prova. (Vide Teorema II.2.9 de [H.M.R.]). $\square$

Para encerrar, consideremos $X = K(G,1)$ onde G é nilpotente. Então uma aplicação

$$K(G,1) \xrightarrow{e} K(G_P,1)$$

tq. $e_*\colon G \longrightarrow G_P$ P-localiza G em $\mathcal{N}$, é um P-localização de X $\mathcal{NH}$ por (ii) da prop. 1.11.

Seja agora $X \in |\mathcal{NH}|$ tq. $\pi_j(X) = 0$, $j > n$, para algum n. Então o refinamento principal de seu sistema de Postnikov é finito.

Vamos agora argumentar por indução na altura(h) deste refinamento.

Se $h = 1$ então $X = K(G,1)$. Suponhamos pois que temos $K(G,n) \longrightarrow X \longrightarrow X'$ uma fibração principal onde G é abeliano (mesmo se $n=1$) e suponhamos também construída $e'\colon X' \longrightarrow Y'$ satisfazendo (ii).

Como $K(G,n) \longrightarrow X \longrightarrow X'$ é induzida nós podemos pensar em $X \longrightarrow X' \longrightarrow K(G,n+1)$ como uma fibração.

Devido à prop. II.3.4 de [H.M.R.] $\exists$ um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e'"] & K(G,n+1) \arrow[d, "e''"] \\ & Y' \arrow[r, "h"] & K(G_p,n+1) \end{tikzcd}$$

Este produz o diagrama (também comutativo) em ηH.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "e'"] & K(G,n+1) \arrow[d, "e''"] \\ Y \arrow[r] & Y' \arrow[r, "h"] & K(G_p,n+1) \end{tikzcd}$$

onde Y é a fibra de h. ($Y \in |\eta H|$ devido ao Teor. II.2.2 de [H.M.R.]).

Devido à naturalidade da sequência de homotopia, que e' e e" satisfazem (ii) da prop. 1.11, e ao corolário I.2.6 de [H.M.R.] segue que e satisfaz (ii) de <u>1.11</u> e $\therefore$ P-localiza X em ηH.

Finalmente seja $X \in |\eta H|$ cujo refinamento principal da decomposição de Postnikov é infinita. Temos

$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{\lim}\, X_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_i \arrow[r, "g_i"] & X_{i-1} \arrow[r] & \cdots \\ & X \arrow[ul, "\theta"] \arrow[ur] \arrow[urr] & & & \end{tikzcd}$$

onde θ é uma equivalência fraca de homotopia.

$\exists$ um diagrama comutativo em ηH onde cada e_i satisfaz (ii) de 1.11.

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim X_i \arrow[r] \arrow[d, "\varprojlim e_i"] & \cdots \arrow[r] & X_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "e_i"'] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "e_{i-1}"] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[d, "e_1"] \\
\varprojlim Y_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_i \arrow[r, "h_i"] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_1
\end{tikzcd}$$

Podemos também supor que h_i é fibração $\forall i$.

Da construção é imediato que $\{Y_i\}_i$ é um refinam. principal de um Sistema de Postnikov, donde vem que $\varprojlim e_i$ satisfaz (ii) de 1.11.

Sendo Y uma realização geométrica (CW) de $\varprojlim Y_i$, segue que $\exists$ $X \xrightarrow{e} Y$ tq. o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "e"] & \varprojlim X_i \arrow[d, "\varprojlim e_i"] \\
Y \arrow[r, "\theta'"] & \varprojlim Y_i
\end{tikzcd}$$

é comutativo a menos de homotopia.

Logo e também satisfaz (ii) de 1.11 pois θ e θ' são equivalências fracas de homotopia.

Isto conclui a construção do funtor P-localização em ηH . $\square$

oOo

CAPÍTULO II

Neste capítulo vamos estabelecer alguns resultados comparando $nil_{\pi_1(X)}\pi_n(X)$ e $nil_{\pi_1(X)}H_n(\tilde{X})$, onde $\tilde{X}$ representa o recobrimento universal de um CW complexo conexo X. Conforme o exposto depreende-se que a técnica utilizada somente frutifica quando n é pequeno ($\approx n \leq 6$ ou $n \leq 7$). Em alguns casos apresentamos exemplos para mostrar que as desigualdades não podem ser melhoradas.

Iniciamos com alguns resultados concernentes a espaços de Eilenberg-McLane a serem utilizados posteriormente. A prova da primeira proposição é bem conhecida. Não obstante decidimos reapresentá-la aqui, devido ao uso reiterado que faremos da mesma no que segue.

Seja $\pi \xrightarrow{\omega} Aut(A)$ uma ação de um grupo π num grupo abeliano A.

Lembramos que ω induz uma ação ω_n de π em $H_n(K(A,m))$ ($m \geq 1$, fixado) $\forall n \geq 0$ definida por:

$$(\forall x \in \pi) \quad \exists! \; [f_x] \in [K(A,m),* \; ; \; K(A,m),*] \text{ tq. } f_{x*} = \omega(x).$$

(Para maiores detalhes vide [W], pg. 100 e pg. 225). Pomos

$$\omega_n(x) = f_{x*}: H_n(K(A,m)) \longrightarrow H_n(K(A,m)).$$

<u>Proposição 2.1</u> - ω nilpotente $\Longrightarrow$ ω_n nilpotente; $\forall n \geqq 0$.

<u>Prova</u>. Argumentamos por indução sobre $c = \mathrm{nil}\,\omega = \mathrm{nil}_\pi A$. Se $c=1$, então segue da definição que ω_n é trivial donde nilpotente.

Para $c > 1$ consideramos $\Gamma = \Gamma_\omega^c \neq (0)$ e a fibração

$$\begin{array}{ccc} K(\Gamma,m) & \hookrightarrow & K(A,m) \\ & & \downarrow \\ & & K(A/\Gamma,m) \end{array}$$

Associada a esta fibração existe uma sequência espectral (de Serre) na qual temos:

$$E^2_{r,s} = H_r(K(A/\Gamma,m);H_s(K(\Gamma,m)))$$

(Aqui a homologia é com coeficientes triviais, uma vez que se $m \geqq 2$, então a base é simplesmente conexa e se $m=1$ temos $H_r(A/\Gamma;H_s(\Gamma))$ e A/Γ age trivialmente em Γ, donde A/Γ age trivialmente em $H_s(\Gamma)$):

Com isto podemos invocar o teorema dos coeficientes universais para obter a sequência exata.

$$H_r(K(A/\Gamma,m))\otimes H_s(K(\Gamma,m)) \rightarrowtail E^2_{r,s} \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}(H_{r-1}(K(A/\Gamma,m)),H_s(K(\Gamma,m)))$$

Devido à hipótese de indução, ao lema 1.1 de [H] e à proposição I.4.3, pg. 35 de [H.M.R.] segue que π age nilpotentemente em $E^2_{r,s}$.

Novamente a aplicação reiterada da prop. I.4.3, pg. 35, de [H.M.R.] garante que π age nilpotentemente em $E^\infty_{r,s}$ e daí em $H_n(K(A,m))$. $\square$

<u>Lema 2.2</u> - $\mathrm{nil}_\pi H_n(K(A,m)) \leq \sum_{j=0}^{n} \mathrm{nil}_\pi E^2_{n-j,j}$ (segundo a notação utilizada na prova da prop. 2.1). $(m \geq 1)$.

<u>Prova</u>. É sabido que a sequência espectral da prop. anterior é composta por π-módulos (ações induzidas por ω) $E^k_{r,s}$ e os diferenciais $d^k_{r,s}$ são homomorfismos de π-módulos. Agora,

$$E^2_{r+2,s-1} \xrightarrow{d^2_{r+2,s-1}} E^2_{r,s} \xrightarrow{d^2_{r,s}} E^2_{r-2,s+1}$$

e

$$E^3_{r,s} = \frac{\ker d^2_{r,s}}{\mathrm{im}\, d^2_{r+2,s-1}} .$$

Daí temos a sequência exata de π-módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}\, d^2_{r+2,s-1} \longrightarrow \ker d^2_{r,s} \longrightarrow E^3_{r,s} \longrightarrow 0$$

Segue da prop. I.4.3 de [H.M.R.] que

$$\mathrm{nil}_\pi E^3_{r,s} \leq \mathrm{nil}_\pi \ker d^2_{r,s} \leq \mathrm{nil}_\pi E^2_{r,s} .$$

É agora imediado, por indução, que

$$\mathrm{nil}_\pi E^k_{r,s} \leq \mathrm{nil}_\pi E^2_{r,s} \quad \forall k \geq 2.$$

Em particular, $\mathrm{nil}_\pi E^\infty_{r,s} \leq \mathrm{nil}_\pi E^2_{r,s}$. Finalmente, lembrando que

$$\begin{array}{ccccccc} E^\infty_{0,n} \subset & F_{1,n-1} & \subset & \cdots & \subset & F_{n,0} & = H_n(K(A,m)) , \\ & \downarrow & & & & \downarrow & \\ & E^\infty_{1,n-1} & & & & E^\infty_{n,0} & \end{array}$$

considerando a sequência exata de π-módulos

$$F_{i-1,n-i+1} \rightarrowtail F_{i,n-i} \twoheadrightarrow E^{\infty}_{i,n-i}$$

e usando seguidamente a prop. I.4.3 de [H.M.R.] segue

$$\text{nil } H_n(K(A,m)) \leq \sum_{j=0}^{n} \text{nil } E^{\infty}_{n-j.j} \leq \sum_{j=0}^{n} \text{nil } E^{2}_{n-j,j} \qquad \square$$

Teorema 2.3 - Suponhamos $\text{nil}_\pi A = \text{nil } \omega = c \geq 2$ e $m \geq 2$. Então,

(i) $\text{nil}_\pi H_n(K(A,m)) \leq c$, se $0 \leq n < 2m$

(ii) $\text{nil}_\pi H_n(K(A,m)) \leq \frac{c(c+1)}{2}$, se $n = 2m$ ou $n = 2m+1$

(iii) $\text{nil}_\pi H_n(K(A,m)) \leq c^2$, se $n = 2m+2$ e $m \geq 3$

(iv) $\text{nil}_\pi H_6(K(A,2)) \leq \sum_{j=1}^{c} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{c(c+1)(c+2)}{6}$

(v) $\text{nil}_\pi H_n(K(A,m)) \leq 2c^2-c$, se $n = 2m+3$ e $m \geq 4$

(vi) $\text{nil}_\pi H_9(K(A,3)) \leq \sum_{j=1}^{c} \frac{j^2+5j-4}{2} = \frac{c}{6}(c^2-9c-4)$

(vii) $\text{nil}_\pi H_7(K(A,2)) \leq \sum_{j=1}^{c} j^2+j-1 = \frac{c}{3}(c^2+3c-1)$

Prova: Temos $E^2_{n-j,j} = H_{n-j}(K(A/\Gamma,m);H_j(K(\Gamma,m)))$;

$\therefore E^2_{n,0} \cong H_n(K(A/\Gamma,m))$ e $E^2_{0,n} \cong H_n(K(\Gamma;m))$ (isomorfismos de π-módulos).

(i) supondo $n < 2m$ vem:

Se $n = 0$, então ω_0 é trivial $\therefore$ $\text{nil}_\pi H_0(K(A,m)) = 1 \leq c$

Se $1 \leq n < m$, então $H_n(K(A,m)) = 0 \therefore nil_\pi H_n(K(A,m)) = 0 \leq c$

Se n=m, então, por definição e isomorfismo de Hurewicz,temos $\omega_n = \omega$ donde $nil_\pi H_m(K(A,m)) = c \leq c$.

Podemos supor então que $m < n < 2m$. Seja j tq. $0 < j < n$.

$$0 < j < m \Longrightarrow H_j(K(\Gamma,m)) = 0 \Longrightarrow E^2_{n-j,j} = 0$$

$$m \leq j < n \Longrightarrow 0 < n-j < m \therefore H_{n-j}(K(A/\Gamma,m)) = 0 \Longrightarrow E^2_{n-j,j} = 0$$

Segue do lema anterior (2.2) que

$$\begin{aligned} nil_\pi H_n(K(A,m)) &\leq nil_\pi E^2_{0,n} + nil_\pi E^2_{n,0} \\ &\leq 1 + nil_\pi H_n(K(A/\Gamma;m)) \end{aligned}$$

pois π age trivialmente em Γ.

Obtemos pois, por indução sobre c que

$$nil_\pi H_n(K(A,m)) \leq c$$

(ii) Novamente, $0 < j < m \Longrightarrow E^2_{n-j,j} = 0$ e

$$m < j < n = 2m \Longrightarrow 0 < n-j < m \therefore E^2_{n-j,j} = 0$$

e

$$E^2_{m,m} \cong H_m(K(A/\Gamma,m) \otimes H_m(K(\Gamma,m)) \cong A/\Gamma \otimes \Gamma$$

Invocamos aqui a desigualdade (1.3) de [H.R.S.] para afirmar que $nil_\pi E^2_{m,m} \leq nil_\pi A/\Gamma = c-1$. $\therefore$ Usando o lema 2.2 vem:

$$nil_\pi H_{2m}(K(A,m)) \leq 1+(c-1)+nil_\pi H_{2m}(K(A/\Gamma,m))$$

segue ∴ por indução que

$$\mathrm{nil}_\pi H_{2m}(K(A,m)) \leqq c + (c-1) + \ldots + 1 = \frac{c(c+1)}{2} .$$

Para $n = 2m+1$, temos novamente $E^2_{n-j,j} = 0$, se $0 < j < m$ ou $m+1 < j < n=2m+1$.

Também, $E^2_{m,m+1} = 0$, pois $H_{m+1}(K(\Gamma,m)) = 0$ (Hurewicz). ($m \geqq 2$) e

$$E^2_{m+1,m} \cong \mathrm{Tor}(H_m(K(A/\Gamma,m);\ H_m(\Gamma,m)) \cong \mathrm{Tor}(A/\Gamma,\Gamma).$$

Da prova do lema 1.1 de [H] depreende-se fàcilmente que $\mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(A,B) \leqq (\mathrm{nil}_\pi A)(\mathrm{nil}_\pi B)$ donde

$$\mathrm{nil}_\pi E^2_{m+1,m} \leqq \mathrm{nil}_\pi A/\Gamma = c-1.$$

Temos então que

$$\mathrm{nil}_\pi H_{2m+1}(K(A,m)) \leqq 1+(c-1) + \mathrm{nil}_\pi H_{2m+1}(K(A/\Gamma,m))$$

donde por indução

$$\mathrm{nil}_\pi H_{2m+1}(K(A,m)) \leqq c+(c-1)+\ldots+1 = \frac{c(c+1)}{2} . \qquad \square$$

(iii) Suponhamos agora $m \geqq 3$ e $n = 2m+2$.

$$0 < j < m \text{ ou } m+2 < j < n = 2m+2 \Longrightarrow E^2_{n-j,j} = 0$$

$$E^2_{m+1,m+1} = 0 \quad (H_{m+1}(K(\Gamma,m)) = 0)$$

$$E^2_{m+2,m} \cong H_{m+2}(K(A/\Gamma,m)) \otimes H_m(K(\Gamma,m))$$

(pois $H_{m+1}(K(A/\Gamma,m) = 0)$ ∴ $E^2_{m+2,m} \cong H_{m+2}(K(A/\Gamma,m)) \otimes \Gamma$.

$$E^2_{m,m+2} \cong A/\Gamma \otimes H_{m+2}(K(\Gamma,m)); \quad \therefore \quad nil_\pi E^2_{m,m+2} \leqq nil_\pi A/\Gamma = c-1$$

Também, levando em conta que $m \geqq 3$ ($\therefore$ $m+2 < 2m$) e usando (i) deste teorema vem:

$$nil_\pi E^2_{m+2,m} \leqq nil_\pi H_{m+2}(K(A/\Gamma,m)) \leqq c-1 \quad (nil_\pi A/\Gamma = c-1).$$

$$\therefore nil_\pi H_{2m+2}(K(A,m)) \leqq 1+(c-1)+(c-1) + nil_\pi H_{2m+2}(K(A/\Gamma,m)) =$$

$$= (2c-1) + nil_\pi H_{2m+2}(K(A/\Gamma,m))$$

Daí vem por indução que:

$$nil_\pi H_{2m+2}(K(A,m)) \leqq (2c-1) + (2(c-1)-1) +..+ 3+1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{c} (2j-1) = \frac{c}{2}[1+(2c-1)] = c^2 \qquad \square$$

(iv) No caso $m=2$ e $n=2m+2 = 6$, usando os mesmos cálculos que em (iii) temos:

$$nil_\pi E^2_{4,2} \leqq nil_\pi H_4(K(A/\Gamma,2)) \leqq \frac{(c-1)c}{2} \quad \text{(por (ii))}.$$

e

$$nil_\pi E^2_{2,4} \leqq c-1$$

$$\therefore nil_\pi H_6(K(A,2)) \leqq 1+(c-1) + \frac{(c-1)c}{2} + nil_\pi H_6(K(A/\Gamma,2)) =$$

$$= \frac{c(c+1)}{2} + nil_\pi H_6(K(A/\Gamma,2)).$$

Daí vem por indução que:

$$nil_\pi H_6(K(A,2)) \leqq \sum_{j=1}^{c} \frac{j(j+1)}{2} \qquad \square$$

(v) Agora $m \geqq 4$ e $n=2m+3$.

$$E^2_{2m+3-j,j} = 0 \quad \text{se} \quad 0 < j < m$$

ou $m+3 < j < 2m+3$, ou $j = m+1$ (pois $H_{m+1}(K(\Gamma,m)) = 0$).

$$E^2_{m,m+3} \cong A/\Gamma \otimes H_{m+3}(K(\Gamma,m))$$

$$E^2_{m+1,m+2} \cong \mathrm{Tor}(A/\Gamma, H_{m+2}(K(\Gamma,m))$$

$$H_{m+3}(K(A/\Gamma,m)) \otimes \Gamma \rightarrowtail E^2_{m+3,m} \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}(H_{m+2}(K(A/\Gamma,m)),\Gamma)$$

Usando o lema 2.2 obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{nil}_\pi H_{2m+3}(K(A,m)) \leqq\ & 1 + \mathrm{nil}_\pi H_{2m+3}(K(A/\Gamma,m)) + \mathrm{nil}_\pi A/\Gamma + \\ & + \mathrm{nil}_\pi A/\Gamma + \mathrm{nil}_\pi H_{m+3}(K(A/\Gamma,m)) + \\ & + \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(K(A/\Gamma,m)) \quad \ldots \quad (*) \end{aligned}$$

Levando em conta que $m \geqq 4$ e (i) vem:

$$\mathrm{nil}_\pi H_{2m+3}(K(A,m)) \leqq (4c-3) + \mathrm{nil}_\pi H_{2m+3}(K(A/\Gamma,m)) \leqq$$

$$\leqq (4c-3)+[4(c-1)-3] + \ldots + (4.2-3) + \mathrm{nil}_\pi H_{2m+3}(K(A/\Gamma^2_\omega,m))$$

por indução. Logo,

$$\mathrm{nil}_\pi H_{2m+3}(K(A,m)) \leqq \sum_{j=1}^{c} (4j-3)$$

(pois π age trivialmente em A/Γ^2_ω).

$$\therefore \mathrm{nil}_\pi H_{2m+3}(K(A,m)) \leqq (2c-1)c \qquad \square$$

(vi) Se m=3 e n = 2m+3 = 9 temos (usando (*) do item anterior):

$$\begin{aligned} nil_\pi H_9(K(A,3)) &\leq nil_\pi H_9(K(A/\Gamma,3)) + (2c-1) + \\ &+ nil_\pi H_6(K(A/\Gamma,3)) + nil\ H_5(K(A/\Gamma,3)) \leq \\ &\leq nil_\pi H_9(K(A/\Gamma,3)) + (2c-1) + \frac{(c-1)c}{2} + \\ &+ c-1 \end{aligned}$$

devido aos itens (ii) e (i).

$$\therefore\ nil_\pi H_9(K(A,3)) \leq \frac{c^2+5c-4}{2} + nil_\pi H_9(K(A/\Gamma,3)) \ ,$$

donde

$$nil_\pi H_9(K(A,3)) \leq \sum_{j=1}^{c} \frac{j^2+5j-4}{2} \qquad \text{(por indução)}$$

(vii) Finalmente suponhamos m=2 e n = 2m+3 = 7.

Devido a (*) do item (v) temos:

$$\begin{aligned} nil_\pi H_7(K(A,2)) &\leq (2c-1) + nil_\pi H_7(K(A/\Gamma,2)) + \\ &+ nil_\pi H_5(K(A/\Gamma,2)) + nil_\pi H_4(K(A/\Gamma,2)) \leq \\ &\leq (2c-1) + nil_\pi H_7(K(A/\Gamma,2)) + \\ &+ \frac{(c-1)c}{2} + \frac{(c-1)c}{2} \end{aligned}$$

devido ao item (ii).

$$\therefore nil_\pi H_7(K(A,2)) \leq (c^2+c-1) + nil_\pi H_7(K(A/\Gamma,2)) \ ,$$

donde por indução vem:

$$nil_\pi H_7(K(A,2)) \leq \sum_{j=1}^{c} (j^2+j-1). \qquad \square$$

Exemplo 2.4 - Seja $\mathbb{Z} \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$ dada por $\omega(1)(1,0) = (1,1)$ $\omega(1)(0,1) = (0,1)$, ou seja, a matriz M associada ao automorfismo $\omega(1)$ é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos $(M-I_2)^2 = 0$ donde ω é nilpotente e $\mathrm{nil}\omega = 2$. Seja

$$X = K(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, 2) \simeq K(\mathbb{Z},2) \times K(\mathbb{Z},2)$$

Denotamos, como sempre, $\omega_n\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_n(X))$ a ação induzida por ω. Para calcular a classe de nilpotência de ω_n (para alguns valores de n) lembramos que $H_*(K(\mathbb{Z},2)) \cong D[x_2]$ = álgebra polinomial graduada dividida com um gerador de grau 2 (x_2). (ié. $x_{2i}\cdot x_{2j} = \binom{i+j}{i} x_{2(i+j)}$).

Outrossim, segue da definição que ω_n é compatível com a estrutura multiplicativa em $H_n(X)$.

Devido ao teorema de Hurewicz segue que $\omega_2 = \omega$, ié. lembrando que

$$H_2(X) \cong [H_0(K(Z,2)) \otimes H_2(K(\mathbb{Z},2))] \oplus$$
$$\oplus [H_2(K(\mathbb{Z},2)) \otimes H_0(K(\mathbb{Z},2))]$$

(Fórmula de Künneth) segue

$$\omega_2(1)(x_2 \otimes 1) = x_2 \otimes 1$$

e $$\omega_2(1)(1 \otimes x_2) = 1 \otimes x_2 + x_2 \otimes 1.$$

($\{1 \otimes x_2, x_2 \otimes 1\}$ é uma base do $\mathbb{Z}$-módulo livre $H_2(X)$).

Em $H_4(X)$ sabemos que $\{1 \otimes x_4, x_2 \otimes x_2, x_4 \otimes 1\}$ é uma base. (onde x_4 é o gerador de $H_4(K(\mathbb{Z},2))$). Agora,

$$\begin{aligned}2\omega_4(1)(1 \otimes x_4) &= \omega_4(1)(1 \otimes 2x_4) = \omega_4(1)((1 \otimes x_2)(1 \otimes x_2)) = \\ &= [\omega_2(1)(1 \otimes x_2)][\omega_2(1)(1 \otimes x_2)] = \\ &= (1 \otimes x_2 + x_2 \otimes 1)(1 \otimes x_2 + x_2 \otimes 1) = \\ &= 1 \otimes 2x_4 + 2x_2 \otimes x_2 + 2x_4 \otimes 1\end{aligned}$$

(pela compatibilidade de ω_n com a estrutura multiplicativa).

$$\therefore \omega_2(1)(1 \otimes x_2) = 1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_2 + x_2 \otimes 1$$

Também,

$$\begin{aligned}\omega_4(1)(x_2 \otimes x_2) &= \omega_4(1)((x_2 \otimes 1)(1 \otimes x_2)) = \\ &= [\omega_2(1)(x_2 \otimes 1)][\omega_2(1)(1 \otimes x_2)] = \\ &= (x_2 \otimes 1)(1 \otimes x_2 + x_2 \otimes 1) = \\ &= x_2 \otimes x_2 + 2x_4 \otimes 1 .\end{aligned}$$

Finalmente, $2\omega_4(1)(x_4 \otimes 1) = \omega_4(1)[(x_2 \otimes 1)(x_2 \otimes 1)] =$

$$= 2x_4 \otimes 1.$$

$$\therefore \omega_4(1)(x_4 \otimes 1) = x_4 \otimes 1$$

$\therefore$ Sendo M_4 a matriz associada a $\omega_4(1)$ associada à base considerada temos:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore (M_4 - I_3)^3 = 0$. Daí que $\mathrm{nil}\,\omega_4 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$

Da mesma forma sendo $\{1\otimes x_6,\ x_2\otimes x_4,\ x_4\otimes x_2,\ x_6\otimes 1\}$ uma base de $H_6(X)$ (Künneth), obtemos:

$$3\omega_6(1)(1\otimes x_6) = \omega_6(1)(1\otimes x_2x_4) = \omega_2(1)(1\otimes x_2)\omega_4(1)(1\otimes x_4) =$$

$$= (1\otimes x_2+x_2\otimes 1)(1\otimes x_4+x_2\otimes x_2+x_4\otimes 1) =$$

$$= 1\otimes 3x_6+x_2\otimes x_4+x_2\otimes 2x_4+2x_4\otimes x_2+x_4\otimes x_2+3x_6\otimes 1 =$$

$$= 3(1\otimes x_6+x_2\otimes x_4+x_4\otimes x_2+x_6\otimes 1).$$

$$\omega_6(1)(x_2\otimes x_4) = \omega_2(1)(x_2\otimes 1)\omega_4(1)(1\otimes x_4) =$$

$$= (x_2\otimes 1)(1\otimes x_4+x_2\otimes x_2+x_4\otimes 1) =$$

$$= x_2\otimes x_4+2x_4\otimes x_2+3x_6\otimes 1$$

$$\omega_6(1)(x_4\otimes x_2) = (x_4\otimes 1)(1\otimes x_2+x_2\otimes 1) = x_4\otimes x_2+3x_6\otimes 1$$

$$3\omega_6(1)(x_6\otimes 1) = (x_2\otimes 1)(x_4\otimes 1) = 3x_6\otimes 1$$

$$\therefore\ M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí, $(M_6-I_4)^4 = 0$, donde $\mathrm{nil}\,\omega_6 = 4 = \sum_{j=1}^{2} \frac{j(j+1)}{2}$

Este exemplo pode ser generalizado.

<u>Exemplo 2.5</u> - Seja $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\underbrace{\mathbb{Z} \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}}_{c\text{-vezes}})$

tq.
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Onde M é a matriz associada a $\omega(1)$ relativamente à base canônica. Desta forma $(M-I_c)^c = 0$, donde nilω = c. Seja

$$X_c = K(\mathbb{Z}^c,2) \simeq \underbrace{K(\mathbb{Z},2) \times \dots \times K(\mathbb{Z},2)}_{\text{c-vêzes}}$$

e

$$\omega_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}\ H_n(X_c)$$

a ação induzida por ω $(X_c \simeq K(\mathbb{Z},2) \times X_{c-1})$.

Cálculos similares aos do exemplo anterior mostram que

$$\mathrm{nil}_{\mathbb{Z}} H_4(X_c) = \mathrm{nil}\,\omega_4 = \frac{c(c+1)}{2} = \text{posto de } H_4(X_c).$$

(por indução sobre c), e

$$\mathrm{nil}_{\mathbb{Z}} H_6(X_c) = \mathrm{nil}\,\omega_6 = \sum_{j=1}^{c} \frac{j(j+1)}{2} = \text{posto de } H_6(X_c)$$

(Note que por Künneth, posto $H_6(X_c) = \sum_{i=0}^{3}$ posto $H_{2i}(X_{c-1})$ =

$= 1 + (c-1) + \frac{c(c-1)}{2} + \sum_{j=1}^{c-1} \frac{j(j+1)}{2}$ (por indução) =

$= \sum_{j=1}^{c} \frac{j(j+1)}{2}$). (Mostra-se que as matrizes $M_4(c)$ e $M_6(c)$ são triangulares por indução sobre c). $\square$

Este exemplo (2.5) mostra que as desigualdades obtidas em (ii) (n=4 e m=2) e em (iv) são as melhores possíveis.

<u>Proposição 2.6</u> - Suponhamos $\mathrm{nil}\,\omega = \mathrm{nil}_\pi A = c \geqq 2$. Então,

(i) $\mathrm{nil}_\pi H_2(A) \leqq \frac{c(c+1)}{2}$

(ii) $\mathrm{nil}_\pi H_3(A) \leqq \sum_{j=1}^{c} j^2 = \frac{c(c+1)(2c+1)}{6}$

<u>Prova</u>: Utilizamos a sequência espectral de Lyndon-Hoschild--Serre associada à sequência exata $\Gamma \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/\Gamma$ onde $\Gamma = \Gamma_\omega^c \neq (0)$. Temos $E^2_{r,s} = H_r(A/\Gamma; H_s(\Gamma))$ com coeficientes triviais.

(i) $E^2_{2,0} \cong H_2(A/\Gamma)$; $E^2_{0,2} \cong H_2(\Gamma)$ e $E^2_{1,1} \cong A/\Gamma \otimes \Gamma$.

De sorte que

$$\mathrm{nil}_\pi H_2(A) \leqq 1+(c-1) + \mathrm{nil}_\pi H_2(A/\Gamma)$$

devido ao lema 2.2 e a desigualdade (1.3) de [H.R.S.].

Novamente por indução obtemos

$$\mathrm{nil}_\pi H_2(A) \leqq c+(c-1)+\ldots+1 = \frac{c(c+1)}{2}$$

(ii) $E^2_{3,0} \cong H_3(A/\Gamma)$; $E^2_{0,3} \cong H_3(\Gamma)$; $E^2_{1,2} \cong A/\Gamma \otimes H_2(\Gamma)$ e

$$H_2(A/\Gamma) \otimes \Gamma \rightarrowtail E^2_{2,1} \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}(A/\Gamma,\Gamma)$$

é exata. Logo,

$$\mathrm{nil}_\pi H_3(A) \leqq 1 + \mathrm{nil}_\pi H_3(A/\Gamma)+(c-1)+(c-1)+\mathrm{nil}\; H_2(A/\Gamma)$$
$$\leqq 2c-1+(c-1)^2+\mathrm{nil}_\pi H_3(A/\Gamma) \text{ (devido ao caso an-}$$

terior) $= c^2+\mathrm{nil}_\pi H_3(A/\Gamma)$.

$\therefore$ por indução vem: $\quad nil_\pi H_3(A) \leq \sum_{j=1}^{c} j^2 = \dfrac{c(c+1)(2c+1)}{6}$ $\square$

Doravante, indicaremos por X um CW-complexo conexo, $\tilde{X}$ seu revestimento universal, $\pi = \pi_1(X)$ e $\pi_n = \pi_n(X)$.

Usaremos também a decomposição de Postnikov de $\tilde{X}$ e sua dual denominada decomposição de Cartan-Serre-Whitehead denotadas respectivamente por:

(Postnikov)

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots \arrow[d] \\
 & K(\pi_m,m) \arrow[r, hook] & \tilde{X}_m \arrow[d] \\
 & & \tilde{X}_{m-1} \arrow[d] \\
\tilde{X} \arrow[uurr] \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[ddrr] & & \vdots \arrow[d] \\
 & & \tilde{X}_2 = K(\pi_2,2) \arrow[d] \\
 & & *
\end{tikzcd}$$

(Dual)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \\
K(\pi_{m-1},m-2) \arrow[r, hook] & \tilde{X}_{(m)} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & \tilde{X}_{(m-1)} \arrow[d] \arrow[r] & \tilde{X} \\
 & \vdots \arrow[d] & \\
 & \tilde{X}_{(2)} = \tilde{X} \arrow[uur] \arrow[d, equal] & \\
 & \tilde{X} &
\end{tikzcd}$$

Lembramos aqui o lema I.2.18 e a observação 2.19 de [H.M.R.] que mostram que π age nilpotentemente em π_n $\forall n$, $2 \leq n \leq k \iff \pi$ age nilpotentemente em $H_n(\tilde{X})$, $\forall n$, $2 \leq n \leq k$.

Nosso objetivo agora é obter resultados comparando tais classes de nilpotências.

Supomos a partir de agora que π age nilpotentemente em π_n, $\forall n \geq 2$. Com respeito às decomposições acima vamos provar 2 lemas para uso posterior.

<u>Lema 2.7</u> - (i) $\mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_m) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_{m-1})$

(ii) $$\mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_m) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_{m-1}) + \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(K(\pi_m(X),m)) + \mathrm{nil}_\pi[\pi_2(X) \otimes \pi_m(X)]$$

(iii) $$\mathrm{nil}_\pi H_{m+3}(\tilde{X}_m) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+3}(\tilde{X}_{m-1}) + \mathrm{nil}_\pi H_{m+3}(K(\pi_m(X),m)) + \mathrm{nil}_\pi[H_3(\tilde{X}_{m-1})\otimes\pi_m(X)]+\mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(\pi_2(X),\pi_m(X))$$

(iv) $$\mathrm{nil}_\pi H_{m+4}(\tilde{X}_m) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+4}(\tilde{X}_{m-1}) + \mathrm{nil}_\pi H_{m+4}(K(\pi_m(X)),m) + \mathrm{nil}_\pi \pi_2(X) \otimes H_{m+2}(K(\pi_m(X),m)) + \mathrm{nil}_\pi H_4(\tilde{X}_{m-1}) \otimes \pi_m(X) + \mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(H_3(\tilde{X}_{m-1}),\pi_m(X)) \quad , \quad \forall m \geq 3.$$

<u>Prova</u>: Consideremos a fibração $(m \geq 3)$

$$\begin{array}{ccc} K(\pi_m(X),m) & \hookrightarrow & \tilde{X}_m \\ & & \downarrow \\ & & \tilde{X}_{m-1} \end{array}$$

Temos (seq. espectral de Serre)

$$E^2_{r,s} = H_s(\tilde{X}_{m-1}, H_s(K(\pi_m(X),m))$$

(coef. triviais pois $\tilde{X}_{m-1}$ é 1-conexo). Exatamente como no lema 2.2 temos

$$\mathrm{nil}_\pi H_n(\tilde{X}_m) \leq \sum_{j=0}^{n} \mathrm{nil}_\pi E^2_{n-j,j} \quad , \quad \forall\, n \geq 0$$

(i) $E^2_{0,m+1} \cong H_{m+1}(K(\pi_m,m)) = 0$; $E^2_{m+1,0} \cong H_{m+1}(\tilde{X}_{m-1})$

$E^2_{1,m} = 0$ e $E^2_{m+1-j,j} = 0$ se $0 < j < m.$

$\therefore\ nil_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_m) \leq nil_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_{m-1}) \quad \forall\, m \geq 3$

(ii) $E^2_{0,m+2} \cong H_{m+2}(K(\pi_m,m))$; $E^2_{m+2,0} \cong H_{m+2}(\tilde{X}_{m-1})$

$E^2_{1,m+1} = 0 = E^2_{m+2-j,j}$ se $0 < j < m$

$E^2_{2,m} \cong H_2(\tilde{X}_{m-1}) \otimes \pi_m \cong \pi_2 \otimes \pi_m \quad (m-1 \geq 2).$

$$\therefore\ nil_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_m) \leq nil_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_{m-1}) + nil_\pi H_{m+2}(K(\pi_m,m)) + nil_\pi \pi_2 \otimes \pi_m.$$

(iii) $E^2_{0,m+3} \cong H_{m+3}(K(\pi_m,m))$; $E^2_{m+3,0} \cong H_{m+3}(\tilde{X}_{m-1})$;

$E^2_{1,m+2} = 0 = E^2_{m+3-j,j}$, se $0 < j < m$; $E^2_{2,m+1} = 0$

e $H_3(\tilde{X}_m) \otimes \pi_m \rightarrowtail E^2_{3,m} \twoheadrightarrow Tor(\pi_2(X),\pi_m)$ é exata de π-mód.

$$\therefore\ nil_\pi H_{m+3}(\tilde{X}_m) \leq nil_\pi H_{m+3}(\tilde{X}_{m-1}) + nil_\pi H_{m+3}(K(\pi_m,m)) + nil_\pi (H_3(\tilde{X}_m) \otimes \pi_m) + nil_\pi Tor(\pi_2,\pi_m).$$

(iv) $E^2_{0,m+4} \cong H_{m+4}(K(\pi_m,m))$; $E^2_{m+4,0} \cong H_{m+4}(\tilde{X}_{m-1})$;

$E^2_{1,m+3} = 0 = E^2_{m+4-j,j}$, se $0 < j < m$, $E^2_{3,m+1} = 0.$

$$H_4(\tilde{X}_{m-1}) \otimes \pi_m \rightarrowtail E^2_{4,m} \twoheadrightarrow Tor(H_3(\tilde{X}_{m-1}),\pi_m) \text{ exata}$$

$$E^2_{2,m+2} \cong \pi_2 \otimes H_{m+2}(K(\pi_m,m))$$

Logo,

$$\begin{aligned} nil_\pi H_{m+4}(\tilde{X}_m) \leq\ & nil_\pi H_{m+4}(\tilde{X}_{m-1}) + nil_\pi H_{m+4}(K(\pi_m,m)) + \\ & + nil_\pi \pi_2 \otimes H_{m+2}(K(\pi_m,m)) + \\ & + nil_\pi H_4(\tilde{X}_{m-1}) \otimes \pi_m + nil_\pi Tor(H_3(\tilde{X}_{m-1}),\pi_m) \end{aligned}$$

$\square$

<u>Corolário 2.8</u> - (i) $nil_\pi H_5(\tilde{X}_3) \leq nil_\pi H_5(K(\pi_2,2)) + $
$+ nil_\pi H_5(K(\pi_3,3)) + nil_\pi \pi_2 \otimes \pi_3$.

(ii) $$\begin{aligned} nil_\pi H_6(\tilde{X}_3) \leq\ & nil_\pi H_6(K(\pi_2,2)) + nil_\pi H_6(K(\pi_3,3)) + \\ & + nil_\pi Tor(\pi_2,\pi_3) \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} nil_\pi H_7(\tilde{X}_3) \leq\ & nil_\pi H_7(K(\pi_2,2)) + nil_\pi H_7(K(\pi_3,3)) + \\ & + nil_\pi \pi_2 \otimes H_5(K(\pi_3,3)) + \\ & + nil_\pi H_4(K(\pi_2,2)) \otimes \pi_3 \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned} nil_\pi H_6(\tilde{X}_4) \leq\ & nil_\pi H_6(K(\pi_4,4)) + nil_\pi H_6(K(\pi_3,3)) + \\ & + nil_\pi H_6(K(\pi_2,2)) + nil_\pi \pi_2 \otimes \pi_4 + \\ & + nil_\pi Tor(\pi_2,\pi_3) \end{aligned}$$

(v) $$\begin{aligned} nil_\pi H_7(\tilde{X}_4) \leq\ & nil_\pi H_7(K(\pi_2,2)) + nil_\pi H_7(K(\pi_3,3)) + \\ & + nil_\pi H_7(K(\pi_4,4)) + nil_\pi H_3(\tilde{X}) \otimes \pi_4 + \\ & + nil_\pi Tor(\pi_2,\pi_4) + nil_\pi \pi_2 \otimes H_5(K(\pi_3,3)) + \\ & + nil_\pi H_4(K(\pi_2,2)) \otimes \pi_3 \end{aligned}$$

(vi) $\quad \mathrm{nil}_\pi H_7(\tilde{X}_5) \leq \mathrm{nil}_\pi H_7(K(\pi_2,2)) + \mathrm{nil}_\pi H_7(K(\pi_3,3)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_7(K(\pi_4,4)) + \mathrm{nil}_\pi H_7(K(\pi_5,5)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi \pi_2 \otimes \pi_5 + \mathrm{nil}_\pi \pi_4 \otimes H_3(\tilde{X}) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(\pi_2,\pi_4) + \mathrm{nil}_\pi \pi_2 \otimes H_5(K(\pi_3,3)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi\ \pi_3 \otimes H_4(K(\pi_2,2))$

Prova. (i) Basta observar que $\tilde{X}_2 = K(\pi_2,2)$ e aplicar (i) do lema 2.7.

(ii) Basta notar que $H_3(K(\pi_2,2)) = 0$ e usar (iii) do lema 2.7.

(iii) Sai de (iv) do lema 2.7 e $H_3(K(\pi_2,2)) = 0$

(iv) Basta juntar (ii) do lema 2.7 e (ii) deste corolário (2.8)

(v) Devemos juntar (iii) do lema 2.7 e (iii) deste corolário (2.8)

(vi) Devemos juntar (ii) do lema 2.7 e (v) deste corolário (2.8).

Lema 2.9 - (i) $\mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_{(m)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_{(m-1)}) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(K(\pi_{m-1}, m-2)) + \mathrm{nil}_\pi H_3(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes \pi_{m-1} +$

$+ \mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(H_2(\tilde{X}_{(m-1)}, \pi_{m-1}), \ \forall\ m \geq 3.$

(ii) $\quad \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_{(m)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_{(m-1)}) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(K(\pi_{m-1}, m-2)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_2(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes H_m(K(\pi_{m-1}, m-2)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_4(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes \pi_{m-1} +$

$+ \mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(H_3(\tilde{X}_{(m-1)}), \pi_{m-1}) \ , \quad \forall\ m \geq 3.$

<u>Prova</u>: Consideremos a fibração

$$\begin{tikzcd} K(\pi_{m-1}(X), m-2) \arrow[r, hook] & \tilde{X}_{(m)} \arrow[d] \\ & \tilde{X}_{(m-1)} \end{tikzcd}$$

Na sequência espectral de Serre associada temos:

$$E^2_{r,s} = H_r(\tilde{X}_{(m-1)}, H_s(K(\pi_{m-1}, m-2))$$

e

$$\text{nil}_\pi H_n(\tilde{X}_{(m)}) \leq \sum_{j=0}^{n} \text{nil}_\pi E^2_{n-j,j} \quad \ldots \quad (*)$$

(i) $E^2_{0,m+1} \cong H_{m+1}(K(\pi_{m-1}, m-2))$; $E^2_{m+1,0} \cong H_{m+1}(\tilde{X}_{(m-1)})$

$E^2_{m+1-j,j} = 0$, se $0 < j < m-2$; $E^2_{2,m-1} = 0 = E^2_{1,m}$

e

$$H_3(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes \pi_{m-1} \rightarrowtail E^2_{3,m-2} \twoheadrightarrow \text{Tor}(H_2(\tilde{X}_{(m-1)}); \pi_{m-1})$$

é exata.

Aplicando (*) vem o resultado.

(ii) $E^2_{0,m+2} \cong H_{m+2}(K(\pi_{m-1}, m-2))$; $E^2_{m+2,0} \cong H_{m+2}(\tilde{X}_{(m-1)})$

$E^2_{1,m+1} = 0 = E^2_{m+2-j,j}$ se $0 < j < m-2$; $E_{3,m-1} = 0$

$$H_4(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes \pi_{m-1} \rightarrowtail E^2_{4,m-2} \twoheadrightarrow \text{Tor}(H_3(\tilde{X}_{(m-1)}), \pi_{m-1})$$

exata

$$E^2_{2,m} \cong H_2(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes H_m(K(\pi_{m-1},m-2)$$

Aplicando (*) vem (ii) □

<u>Corolário 2.10</u> - (i) $\mathrm{nil}_\pi H_4(\tilde{X}_{(3)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_4(\tilde{X}) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_4(K(\pi_2,1)) + \mathrm{nil}_\pi H_3(\tilde{X}) \otimes \pi_2 + \mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(H_2(\tilde{X});\pi_2)$

(ii) $\mathrm{nil}_\pi H_5(\tilde{X}_{(3)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_5(\tilde{X}) + \mathrm{nil}_\pi H_5(K(\pi_2,1)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_2(\tilde{X}) \otimes H_3(\pi_2,1) + \mathrm{nil}_\pi H_4(\tilde{X}) \otimes \pi_2 +$

$+ \mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(H_3(\tilde{X}),\pi_2)$

(iii) $\mathrm{nil}_\pi H_5(\tilde{X}_{(4)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_5(\tilde{X}_{(3)}) + \mathrm{nil}_\pi H_5(K(\pi_3,2)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi \pi_3 \otimes \pi_3$

(iv) Se $m \geq 5$, então temos:

$\mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_{(m)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(\tilde{X}_{(m-1)}) + \mathrm{nil}_\pi H_{m+1}(K(\pi_{m-1},m-2))$

(v) $\mathrm{nil}_\pi H_6(\tilde{X}_{(4)}) \leq \mathrm{nil}\ H_6(\tilde{X}_{(3)}) + \mathrm{nil}_\pi H_6(K(\pi_3,2)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi H_4(\tilde{X}_{(3)}) \otimes \pi_3 + \mathrm{nil}_\pi \mathrm{Tor}(\pi_3,\pi_3)$

(vi) $\mathrm{nil}_\pi H_7(\tilde{X}_{(5)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_7(\tilde{X}_{(4)}) + \mathrm{nil}_\pi H_7(K(\pi_4,3)) +$

$+ \mathrm{nil}_\pi \pi_4 \otimes \pi_4$

(vii) Se $m \geq 6$, então:

$\mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_{(m)}) \leq \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(\tilde{X}_{(m-1)}) + \mathrm{nil}_\pi H_{m+2}(K_{m-1},m-2))$

Prova: Para (i) e (ii) é só lembrar que $\tilde{X}_{(2)} = \tilde{X}$.

Para (iii) lembramos que $H_2(\tilde{X}_{(3)}) = 0$ e $H_3(\tilde{X}_{(3)}) \cong \pi_3(X)$.

Para (iv), $H_3(\tilde{X}_{(m-1)}) = 0 = H_2(\tilde{X}_{(m-1)})$ se $m \geq 5$.

Para (v) $H_2(\tilde{X}_{(m-1)}) = 0$ e $H_3(\tilde{X}_{(3)}) = \pi_3$.

Da mesma forma obtemos (vi) e (vii) $\square$

Lema 2.11 - (i) $\operatorname{nil}_\pi H_m(\tilde{X}) \leq \operatorname{nil}_\pi \pi_m(X) + \operatorname{nil}_\pi H_m(\tilde{X}_{m-1})$; $m \geq 3$

(ii) $$\operatorname{nil}_\pi \pi_m \leq \operatorname{nil}_\pi H_m(\tilde{X}_{(m-1)}) + \operatorname{nil}_\pi H_m(K(\pi_{m-1}, m-2)) + $$
$$+ \operatorname{nil}_\pi H_2(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes \pi_{m-1} \text{ , } \forall\, m \geq 3.$$

Prova: (i) Seja
$$\begin{array}{ccc} K(\pi_m, m) & \hookrightarrow & \tilde{X}_m \\ & & \downarrow \\ & & \tilde{X}_{m-1} \end{array}$$

a fibração obtida pela decomposição de Postnikov.

$$E^2_{0,m} \cong \pi_m \text{ ; } E^2_{m,0} \cong H_m(\tilde{X}_{m-1})$$

e

$$E^2_{m-j,j} = 0 \quad \text{se} \quad 0 < j < m$$

Lembrando que

$$H_m(\tilde{X}_m) \cong H_m(X)$$

vem:

$$\therefore \operatorname{nil} H_m(\tilde{X}) \leq \operatorname{nil}_\pi \pi_m + \operatorname{nil}_\pi H_m(\tilde{X}_{m-1}).$$

(ii) Consideremos a fibração dual (da de Postnikov)

$$\begin{tikzcd} K(\pi_{m-1},m-2) \arrow[r, hook] & \tilde{X}_{(m)} \arrow[d] \\ & \tilde{X}_{(m-1)} \end{tikzcd}$$

Temos:

$$E^2_{0,m} \cong H_m(K(\pi_{m-1},m-2))$$

$$E^2_{m,0} \cong H_m(\tilde{X}_{(m-1)})$$

$$E^2_{1,m-1} = 0 = E^2_{m-j,j} \quad \text{se} \quad 0 < j < m-2 \ ;$$

$$E^2_{2,m-2} \cong H_2(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes \pi_{m-1}$$

(Observemos que $E^2_{2,m-2} = 0$; se $m \geq 4$ e $E^2_{2,1} = H_2(\tilde{X}) \otimes \pi_2 \cong \pi_2 \otimes \pi_2$, se $m=3$). Lembrando que

$$\pi_m(X) \cong H_m(\tilde{X}_{(m)}) \quad \text{(Hurewicz)}$$

segue:

$$\begin{aligned} nil_\pi \pi_m(X) = nil_\pi H_m(\tilde{X}_{(m)}) &\leq nil_\pi H_m(\tilde{X}_{(m-1)}) + \\ &+ nil_\pi H_m(K(\pi_{m-1},m-2) \\ &+ nil_\pi H_2(\tilde{X}_{(m-1)}) \otimes \pi_{m-1} \end{aligned}$$ $\square$

<u>Teorema 2.12</u> - Na condição de que π age nilpotentemente em π_n , $2 \leq n \leq 7$ temos:

(i) $$\begin{aligned} nil_\pi H_3(\tilde{X}) \leq nil_\pi \pi_3(X) &\leq nil_\pi H_3(\tilde{X}) + \\ &+ nil_\pi H_2(\tilde{X}) \otimes H_2(\tilde{X}) + nil_\pi H_3(H_2(\tilde{X})) \end{aligned}$$

(ii) $\quad nil_\pi \pi_4 \leq nil_\pi H_4(\tilde{X}) + nil_\pi H_4(K(\pi_3,2)) +$

$+ nil_\pi H_4(K(\pi_2,1)) + nil_\pi H_3(\tilde{X}) \otimes H_2(\tilde{X}) +$

$+ nil_\pi Tor(H_2(\tilde{X}),H_2(\tilde{X}))$

(iii) $\quad nil_\pi H_4(\tilde{X}) \leq nil_\pi \pi_4(X) + nil_\pi H_4(K(\pi_2,2))$

(iv) $\quad nil_\pi H_5(\tilde{X}) \leq nil_\pi \pi_5(X) + nil_\pi \pi_2 \otimes \pi_3 + nil_\pi H_5(K(\pi_2,2)) +$

$+ nil_\pi H_5(K(\pi_3,3))$

(v) $\quad nil_\pi H_6(\tilde{X}) \leq nil_\pi \pi_6(X) + nil_\pi \pi_2 \otimes \pi_4 + nil_\pi H_6(K(\pi_2,2)) +$

$+ nil_\pi H_6(K(\pi_3,3)) + nil_\pi H_6(K(\pi_4,4))$

(vi) $\quad nil_\pi H_7(\tilde{X}) \leq nil_\pi \pi_7(X) + nil_\pi \pi_2 \otimes \pi_5 + nil_\pi \pi_4 \otimes H_3(\tilde{X}) +$

$+ nil_\pi Tor(\pi_2,\pi_4) + nil_\pi \pi_3 \otimes H_4(K(\pi_2,2)) +$

$+ nil_\pi \pi_2 \otimes H_5(K(\pi_3,3)) + nil_\pi H_7(K(\pi_2,2)) +$

$+ nil_\pi H_7(K(\pi_3,3)) + nil_\pi H_7(K(\pi_4,4)) +$

$+ nil_\pi H_7(K(\pi_5,5))$

<u>Prova</u>: Para obter (i) lembramos que $H_3(\tilde{X}_2) = H_3(K(\pi_2,2))=0$, aplicamos (i) do lema 2.11 e (ii) do lema 2.11 recordando que $\tilde{X}_{(2)} = \tilde{X}$.

(ii) é resultado da utilização de (ii) lema 2.11 e (i) corolário 2.10. Para obter (iii) usamos o lema 2.11 (i) e o lema 2.7 (i). Para obter (iv) usamos o lema 2.11 (i), lema 2.7 (i) e o corolário 2.8 (i).

(v) é consequência do lema 2.11 (i), lema 2.7 (i), e do corolário 2.8 (iv). $\square$

<u>Observação</u>: As desigualdades para $nil_{\pi}\pi_n$ e $nil_{\pi}H_m(\tilde{X})$ tornam-se bastante complicadas, para $n > 4$ e $m > 7$.

Na verdade para $n=4$ e $m=7$ elas já não são tão simples conforme atestam (ii) e (vi) do teorema anterior.

<u>Exemplo 2.13</u> - Seja X um CW compelxo conexo tq.

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} \; ; \; \pi_2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \quad \text{(c cópias)} ,$$

$\pi_i(X) = 0$; $i > 2$ e a ação de $\pi_1(X)$ em $\pi_2(X)$ é dada por M como no exemplo 2.5.

Neste caso $\tilde{X} = K(\mathbb{Z}^c,2)$ e vimos no exemplos 2.5 que

$$nil_{\pi_1(X)}\pi_2(X) = c \qquad e \qquad nil_{\pi_1(X)}H_4(\tilde{X}) = \frac{c(c+1)}{2}$$

Como $\pi_4(X) = 0$, segue que a desigualdade (iii) obtida no teorema 2.12 é uma igualdade neste caso.

Observemos também que este exemplo produz uma situação na qual a desigualdade (v) é em verdade uma igualdade!

oOo

CAPÍTULO III

§3.1. - Nesta secção vamos estabelecer alguns resultados gerais referentes a grupos P-locais, fatoração de ações e algumas proposições ligadas a cohomologia de grupos.

Proposição 3.1.1 - Consideremos $E_1,\ldots,E_t,K$ grupos P-locais, onde P é uma família de primos e $E_i \xrightarrow{\varepsilon_i} K$ homomorfismo de grupos. Nestas condições, se $E \xrightarrow{\varepsilon} K$ é o pull-back da família $\{\varepsilon_i\}_{1\leq i\leq t}$, então E é P-local.

Prova: Sabemos que

$$E = \{(x_1,\ldots,x_t) \in E_1 \times \ldots \times E_t: \varepsilon_i(x_i) = \varepsilon_j(x_j),\ \forall i,j\}$$

sendo $\pi_j(x_1,\ldots,x_t) = x_j$ temos $\varepsilon = \varepsilon_i\pi_i;\ \forall i$.

Fixemos $n\in P'^{\times}$. Consideremos $x = (x_1,\ldots,x_t)$; $y = (y_1,\ldots,y_t)$; $x,y\in E$ e suponhamos $x^n=y^n$. Desta forma $\forall i$, $x_i^n = y_i^n$. Daí, $x_i=y_i$, uma vez que E_i é P-local $\forall i$. Logo, $x=y$. Por outro lado, $y = (y_1,\ldots,y_t) \in E$; $\forall i$ $(\exists x_i\in E_i)$ tq. $x_i^n = y_i$ (E_i P-local). Logo, sendo $x = (x_1,\ldots,x_t)$ segue $y = x^n$. Lembrando que $\varepsilon_i(x_i)^n = \varepsilon_i(y_i) = \varepsilon_j(y_j) = \varepsilon_j(x_j)^n$ e K é P-local segue $\forall i,j$; $\varepsilon_i(x_i) = \varepsilon_j(x_j)$ donde $x\in E$.

O argumento acima mostra que E é P-local $\square$

Proposição 3.1.2 - P-família de primos; Y-grupo P-local; F-grupo finito; $Y \xrightarrow{\phi} F$ homomorfismo de grupos. Então, $\forall y \in Y$; $o(\phi(y)) = n \in P^{\times}$ ou $\phi(y)=1$.

Prova: Seja $y \in Y$ e suponhamos que $\exists$ $q \in P'$ tq. $q|o(\phi(y))$. Pondo $o(\phi(y))=q.k$ e considerando $z=y^k$, segue $o(\phi(z))=q$. Dado que $q \in P'$, vem que $\forall r > 0$, $\exists z_r \in Y$ tq. $z_r^{q^r}=z$ (Y é P-local).

Assim que, $\phi(z_r)^{q^r} = \phi(z) \neq 1$ e $\phi(z_r)^{q^{r+1}} = \phi(z)^q=1$. $\therefore$ $o(\phi(z_r)) = q^{r+1}$, $\forall$ $r > 0$. Em particular, $\{\phi(z_r) \in F: r>0\} \subset F$ e é infinito, contra a hipótese de F ser finito. $\square$

Corolário 3.1.3. - Nas condições da proposição anterior, $|\phi(Y)| \in P^{\times}$, o que equivale a dizer que $\phi(Y)$ é um P-sub-grupo (finito) de torção de F.

Prova: De fato, se $\exists q \in P'$, $q||\phi(Y)|$, então $\exists y \in Y$ tq. $o(\phi(y)) = q \in P'$.

Observação 3.1.4 - A proposição 7.1 (pg. 106) de [R.2] nos mostra que um grupo finito F é P-local $\Longleftrightarrow$ F é um P-grupo de torção (i.é. q é primo e $q||F| \Longrightarrow q \in P$).

Na próxima proposição $X \xrightarrow{e_0} X_P$ pode respresentar a P-localização em $\mathcal{G}$ ou em η.

Proposição 3.1.5 - Sejam X,N grupos onde Aut(N) é finito, e $X \xrightarrow{\omega} Aut(N)$ uma ação de X em N.

Então $\exists!$ ω_P ação que torna o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(N) \\
X_P \arrow[ur, "\omega_P"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow \omega(X)$ é um P-sub-grupo de torção de Aut(N). Mais ainda, nas condições da proposição temos $\omega_P(X_P) = \omega(X)$.

<u>Prova</u>: $(\Longrightarrow)$ Se $\exists\, \omega_P$, então pelo corol. 3.1.3. temos que $\omega_P(X_P)$ é um P-sub-grupo de torção de Aut(N).

Daí $\omega(X) = \omega_P e_0(X) \subset \omega_P(X_P)$ é P-sub-grupo de torção de Aut(N).

$(\Longleftarrow)$ a) Suponhamos inicialmente que $e_0 : X \to X_P$ é a P-localização em G. Devido à observação 3.1.4. $\omega(X)$ é um grupo (finito) P-local. Logo da definição de localização $\exists!$ hom. $\bar{\omega}_P : X_P \to \omega(X)$ tq. $\bar{\omega}_P e_0 = \bar{\omega}$ onde $X \xrightarrow{\bar{\omega}} \omega(X)$ é tal que $i : \omega(X) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(N)$, então $i\bar{\omega} = \omega$. Sejam $\omega_P = i \circ \bar{\omega}_P \therefore \omega_P e_0 = \omega$.

Seja $\tilde{\omega}_P : X_P \to \mathrm{Aut}(N)$ outra ação tq. $\tilde{\omega}_P e_0 = \omega$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\bar{\omega}"] \arrow[d, "e_0"'] & \omega(X) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[rr, hook, bend left, "i"] & \tilde{\omega}(X_P) \arrow[r, hook, "k"] & \mathrm{Aut}(N) \\
X_P \arrow[ur, "\bar{\omega}_P"] \arrow[urr, "\omega'_P"] \arrow[urrr, bend right=10, "\tilde{\omega}_P"] \arrow[urrr, bend right=30, "\omega_P"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Seja $\omega'_P : X_P \to \tilde{\omega}_P(X_P)$ tq. $k\omega'_P = \tilde{\omega}_P$. Devido ao corolário 3.1.3 e à observação 3.1.4, $\tilde{\omega}_P(X_P)$ é P-local e $(j\bar{\omega}_P)e_0 = j\bar{\omega} = \omega'_P e_0 \Longrightarrow j\bar{\omega}_P = \omega'_P$ por unicidade.

Assim que $\forall z \in X_P$, $\tilde{\omega}_P(z) = k \circ \omega'_P(z) = \omega'_P(z) = j\bar{\omega}_P(z) = \bar{\omega}_P(z) =$
$= i\bar{\omega}_P(z) = \omega_P(z)$ $\therefore$ $\boxed{\tilde{\omega}_P = \omega_P}$. Daí vem a unicidade de ω_P.

Finalmente, vimos acima que $\omega_P(X_P) = \bar{\omega}_P(X_P) = \omega(X)$ $\square$

b) Se $X \xrightarrow{e_Q} X_P$ é a P-local. em η, então a prova é a mesma lembrando-se que neste caso $\omega(X)$ é nilpotente (pois X o é) e $\therefore$ $\exists\, \bar{\omega}_P$ como acima.

Na prova da unicidade $\tilde{\omega}(X_P)$ é P-local e nilpotente (X_P = nilpot.)

Consideremos a seguir uma extenção $A \underset{\mu}{\rightarrowtail} G \underset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ onde A é um grupo abeliano.

Temos pois, associada a esta extensão, a ação $\omega\colon X \to \mathrm{Aut}(A)$ dada por $\mu(\omega(x)a) = g\mu(a)g^{-1}$, onde $\varepsilon(g) = x$.

Fixemos uma família de primos P e $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in X$ podemos definir o homomorfismo:

$$\theta_n(x) = 1_A + \omega(x) + \ldots + \omega(x^{n-1}) \in \mathrm{End}(A).$$

A respeito deste endomorfismo podemos enunciar o

Lema 3.1.6 - $(\forall g \in G)$; $(\forall a \in A)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ vale:

$$(\mu(a)g)^n = \mu(\theta_n(\varepsilon(g))a)g^n$$

Prova: Por indução s/n. n=1 é trivial.

Supondo a fórm. verd. p/k-1 temos:

$$(\mu(a)g)^k = (\mu(a)g)^{k-1}(\mu(a)g) = \mu(\theta_{k-1}(\varepsilon(g))a)(g^{k-1}\mu(a))g =$$

$$= \mu(\theta_{k-1}(\varepsilon(g))a)[g^{k-1}\mu(a)g^{-(k-1)}g^k =$$

$$= \mu(\theta_{k-1}(\varepsilon(g))a)\mu(\omega(\varepsilon(g)^{k-1})a)g^k =$$

$$= \mu(\theta_{k-1}(\varepsilon(g))a + \omega(\varepsilon(g)^{k-1})a)g^k = \mu(\theta_k(\varepsilon(g))a)g^k.$$

(Lembramos aqui que: $\theta_k(\varepsilon(g))a = \theta_{k-1}(\varepsilon(g))a + \omega(\varepsilon(g)^{k-1})a$, por definição).

Estamos agora aptos a provar a

Proposição 3.1.7 - Seja $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ uma extensão onde A é abeliano e ω a ação associada à extensão. Seja P uma família de primos e consideremos as 3 afirmações abaixo:

(i) G é P-local

(ii) X é P-local

(iii) $(\forall \in X)(\forall n \in P'^{\times})$; $\theta_n(x) \in \mathrm{Aut}(A)$.

Então, quaisquer duas implicam a terceira.

Prova: (i) + (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Seja $x \in X$; $n \in P'^{\times}$. Suponhamos $\theta_n(x)a = 0$. Seja $g \in G$ tq. $\varepsilon(g) = x$. Então pelo lema anterior vem:

$$(\mu(a)g)^n = \mu(\theta_n(x)a)g^n = \mu(0)g^n = g^n.$$

Daí, $\mu(a)g = g$, pois $n \in P'^{\times}$ e G é P-local. Logo $\mu(a) = 1$, $\therefore$ $a = 0$. $\therefore \theta_n(x)$ é monomorfismo.

Por outro lado dado $b \in A$. Afirmamos que $\exists g' \in G$ tq. $g'^n = \mu(b)g^n \in G$; uma vez que G é P-local.

Daí, $\varepsilon(g')^n = \varepsilon(\mu(b)g^n) = \varepsilon(g)^n \Longrightarrow \varepsilon(g') = \varepsilon(g)$ (X é P-local, $\therefore \exists!\ a \in A$ tq. $g' = \mu(a)g$. Logo, $\mu(b)g^n = g'^n = (\mu(a)g)^n = \mu(\theta_n(\varepsilon(g))a)g^n$ pelo Lema anterior.

Levando em conta que μ é injetora vem que

$$\theta_n(\varepsilon(g))a = b \therefore \theta_n(x) \in \mathrm{Aut}(A). \qquad \square$$

(iii) + (i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sejam $x, y \in X$ e $n \in P'^{\times}$ e suponhamos $x^n = y^n$

$x = \varepsilon(g)$; $y = \varepsilon(g')$ $\therefore$ $\varepsilon(g^n) = x^n = y^n = \varepsilon(g'^n)$ $\therefore \exists!\ a \in A$ tq. $g^n = \mu(a)g'^n$. Agora por hipótese $\exists!\ b \in A$ tq.

$$\theta_n(\varepsilon(g'))b = a \therefore g^n = \mu(\theta_n(\varepsilon(g')b)g'^n = (\mu(b)g')^n$$

Daí $g = \mu(b)g'$ (G é P-local).

$$\therefore x = \varepsilon(g) = \varepsilon(\mu(b)g') = \varepsilon(g') = y .$$

Por outro lado, seja $y \in X$.

$$y = \varepsilon(g) = \varepsilon(h^n) = \varepsilon(h)^n \text{ (G é P-local)} \therefore \text{X é P-local} \ \square$$

(ii) + (iii) $\Longrightarrow$ (i). Fixemos $n \in P'^{\times}$; $g, h \in G$.

$$g^n = h^n \Rightarrow \varepsilon(g)^n = \varepsilon(h)^n \Rightarrow \varepsilon(g) = \varepsilon(h)$$

pois X é P-local.

$\therefore (\exists!\ a \in A)$ tq $g = \mu(a)h$ $\therefore$ $h^n = g^n = (\mu(a)h)^n = \mu(\theta_n(\varepsilon(h))a)h^n$

Daí,

$\theta_n(\varepsilon(h))a = 0 \Longrightarrow a = 0$ (por hipótese). $\therefore\ g = \mu(0)h = h$

Por outro lado, $g\in G$, $(\exists x\in X)$ tq. $\varepsilon(g) = x^n$ (X é P-local)

$\therefore\ \varepsilon(g) = x^n = \varepsilon(h)^n = \varepsilon(h^n)$ $\therefore$ $(\exists!a\in A)$ tq. $g = \mu(a)h^n$.

Como $\theta_n(\varepsilon(h))$ é bijetora segue que $\exists!\ b\in A$ tq. $a = \theta_n(\varepsilon(h))b$

$\therefore\ g = \mu(\theta_n(\varepsilon(h))b)h^n = (\mu(b)h)^n$ devido ao lema 3.1.6. Mostramos pois que $g\in G \to g^n\in G$ é bijetora. $\square$

<u>Proposição 3.1.8</u> - P-família de primos; $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ extensão onde A é um grupo abeliano finito. Nestas condições, se G é P-local, ou A e X são P-locais, então

$$\theta_n(x) \in \mathrm{Aut}(A),\ \forall x\in X,\quad \forall n\in P'^{\times}.$$

<u>Prova</u>: (I) G é P-local.

Visto que A é finito basta provar que $\theta_n(x)$ é injetora $\forall n\in P'^{\times}$, $\forall x\in X$.

Fixados $n\in P'^{\times}$ e $x\in X$, seja $a\in A$ e suponhamos que $\theta_n(x)a = 0$. Seja $g\in G$ tq. $\varepsilon(g) = x$. Pelo lema 3.1.6. temos:

$$(\mu(a)g)^n = \mu(\theta_n(x)a)g^n = g^n$$

Como G é P-local segue $\mu(a)g = g$ $\therefore$ $a = 0$. $\square$

(II) A e X são P-locais.

Novamente basta que $\theta_n(x)$ seja injetora, pois A é finito. Fixemos $n\in P'^{\times}$ e $x\in X$. Seja $a\in A$ e suponhamos que $\theta_n(x)a = 0$. Desta forma

$$(\omega(x)^n - 1_A)a = [\omega(x)-1_A]\circ\theta_n(x)a = 0. \quad \therefore\ \omega(x)^n a = a.$$

Por outro lado,

$$X \xrightarrow{\omega} Aut(A); \quad o(\omega(x)) = m \in P^{\times} \quad \text{ou } m=1.$$

devido à prop. 3.1.2. $\therefore$ $\omega(x)^m.a = a$.

Agora $m=1$ ou $m \in P^{\times}$ e $n \in P'^{\times}$ $\therefore$ $mdc(m,n) = 1$.

$\therefore$ $(\exists r,s \in \mathbb{Z})$ tq. $rm + sn = 1$. Logo

$$\omega(x)a = [\omega(x)^m]^r o [\omega(x)^n]^s a = a$$

$\therefore 0 = \theta_n(x)a = a+a+...+a = na \Longrightarrow a = 0$ (pois A é P-local)

$$\therefore \theta_n(x) \in Aut(A), \ \forall\, n \in P'^{\times}; \ \forall\, x \in X \qquad \square$$

<u>Corolário 3.1.9</u> - P-família de primos; $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ extensão onde A é um grupo abeliano finito. Nestas condições temos A é P-local e X é P-local $\Longleftrightarrow$ G é P-local

<u>Prova</u>: ($\Longrightarrow$) A e X P-locais $\Longrightarrow \theta_n(x) \in Aut(A)$ $\forall\, n \in P'^{\times}$, $\forall x \in X$, pela prop. anterior. Logo G é P-local pela prop. 3.1.7.

($\Longleftarrow$) Se G é P-local, então $\theta_n(x) \in Aut(A)$, $\forall n \in P'^{\times}$, $\forall\, x \in X$. $\therefore$ X é P-local pela prop. 3.1.7.

Mais ainda, em particular,

$x=1 \in X \Longrightarrow \theta_n(1) =$ (multiplicação por n) $\in Aut(A)$ $\forall\, n \in P'^{\times}$ $\therefore$ A é P-local.

Consideremos agora uma extensão $N \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \underset{\sigma}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} X$ onde N é uma grupo finito.

Seja $X \xrightarrow{\omega} Aut(N)$ dada por $\mu(\omega(x)a) = \sigma(x)\mu(a)\sigma(x)^{-1}$ e consideremos $\theta_n(x): N \to N$ função definida por:

$$\theta_n(x) = 1_N \cdot \omega(x) \cdot \ldots \cdot \omega(x^{n-1}) \quad ; \forall\, x \in X \;,\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Vamos descrever as propriedades análogas às anteriores neste contexto ligeriramente diferente.

<u>Lema 3.1.10</u> - $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $(\forall x \in X)$ vale:

$$(\mu(a)\sigma(x))^n = \mu(\theta_n(x)a)\sigma(x)^n .$$

<u>Prova</u>: (indução sobre n); n=1 é trivial. Além disto,

$$(\mu(a)\cdot\sigma(x))^k = (\mu(a)\sigma(x))^{k-1}(\mu(a)\sigma(x)) =$$

$$= \mu(\theta_{k-1}(x)a)\sigma(x)^{k-1}\mu(a)\sigma(x)^{-(k-1)}\sigma(x)^k =$$

$$= \mu(\theta_{k-1}(x)a)\mu(\omega(x)^{k-1}a)\sigma(x)^k = \mu(\theta_k(x)a)\sigma(x)^k \quad ,$$

uma vez que usamos a hipótese de indução na 2ª igualdade e que

$$\theta_k(x)a = [\theta_{k-1}(x)a][\omega(x^k)a]$$

na última. □

<u>Proposição 3.1.11</u> - Sejam P uma família de primos, $N \xrightarrow{\mu} G \underset{\sigma}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} X$ uma extensão que cinde e ω a ação definida por σ.

Consideremos as afirmações abaixo:

(i) G é P-local

(ii) X é P-local

(iii) $(\forall x \in X)$ $(\forall n \in P'^{\times})$; $\theta_n(x)$ é uma bijeção de N.

Então, quaisquer duas implicam a terceira.

<u>Prova</u>: (iii) + (i) $\Longrightarrow$ (ii). Fixemos $n \in P'^{\times}$.

$$x \in X; \quad x = \varepsilon(g) = \varepsilon(h^n) = \varepsilon(h)^n .$$

Por outro lado, $x, y \in X$; $x^n = y^n \Longrightarrow x = \varepsilon(g)$; $y = \varepsilon(h)$ então

$$\varepsilon(g^n) = x^n = y^n = \varepsilon(h^n) \therefore \exists! a \in N \text{ tq. } g^n = \mu(a)h^n$$

Mas, $h = \mu(a')\sigma(y)$, pois a sequência cinde e $\varepsilon(h) = y$.

$$\therefore g^n = \mu(a)(\mu(a')\sigma(y))^n = \mu(a)\mu(\theta_n(y)a')\sigma(y)^n =$$

$$= \mu(a(\theta_n(y)a')\sigma(y)^n = \mu(\theta_n(y)b)\sigma(y)^n ,$$

pois $\theta_n(y)$ é sobrejetora.

$$\therefore g^n = (\mu(b)\sigma(y))^n ,$$

pelo lema 3.1.10.; donde $g = \mu(b)\sigma(y)$. Daí,

$$x = \varepsilon(g) = \varepsilon(\mu(b)\sigma(y)) = y. \qquad \square$$

(i) + (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Fixemos $x \in X$ e $n \in P'^{\times}$.

Seja $b, a \in N$ e suponhamos $\theta_n(x)a = \theta_n(x)b$. Desta forma

$$(\mu(a)\sigma(x))^n = \mu(\theta_n(x)a)\sigma(x)^n = \mu(\theta_n(x)b)\sigma(x)^n = (\mu(b)\sigma(x))^n$$

Daí,

$$\mu(a)\sigma(x) = \mu(b)\sigma(x) \text{ ; donde } a=b.$$

Também, $b \in N$; $\mu(b)\sigma(x)^n = g^n$ já que G é P-local.

$g = \mu(a)\sigma(y)$ pois a sequência cinde e $\therefore$

$$\sigma(x)^n = \varepsilon(g^n) = \sigma(y)^n \therefore x=y. \therefore g = \mu(a)\sigma(x) .$$

$$\therefore \mu(b)\sigma(x)^n = (\mu(a)\sigma(x))^n = \mu(\theta_n(x)a)\sigma(x)^n \Longrightarrow b = \theta_n(x)a \ \square$$

(ii) + (iii) $\Longrightarrow$ (i). Fixemos $n \in P'^{\times}$.

Sejam $g,h \in G$ e suponhamos $g^n = h^n$. Temos

$$g = \mu(a)\sigma(x) \quad e \quad h = \mu(b)\sigma(y)$$

$$\therefore\ x^n = \varepsilon(g)^n = \varepsilon(h)^n = y^n \text{ , donde } x = y .$$

$$\therefore\ \mu(\theta_n(x)a)\sigma(x)^n = g^n = h^n = \mu(\theta_n(x)b)\sigma(x)^n.$$

$$\therefore\ \theta_n(x)a = \theta_n(x)b \quad \text{donde } a=b \ \therefore\ g=h .$$

Por outro lado, $g \in G$;

$$\varepsilon(g) = x^n = \varepsilon(\sigma(x)^n) \Longrightarrow \exists!\ b \in A \ \text{ tq.}$$

$$g = \mu(b)\sigma(x)^n = \mu(\theta_n(x)a)\sigma(x)^n . \quad \therefore\ g = (\mu(a)\sigma(x))^n. \quad \square$$

<u>Proposição 3.1.12</u> - P-família de primos; $N \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \underset{\sigma}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} X$ uma sequência exata de grupos que cinde, onde N é finito.

Nestas condições, se G é P-local ou N e X são P-locais, então $(\forall x \in X)\ (\forall n \in P'^{\times})\ \theta_n(x)$ é uma bijeção de N.

<u>Prova</u>: (I) G é P-local

Fixemos $n \in P'^{\times}$ e $x \in X$. Devido a N ser finito basta mostrar que $\theta_n(x)$ é injetora.

Suponhamos $a,b \in N$ e $\theta_n(x)a = \theta_n(x)b$. Então,

$$(\mu(a)\sigma(x))^n = \mu(\theta_n(x)a)\sigma(x)^n = \mu(\theta_n(x)b)\sigma(x)^n = (\mu(b)\sigma(x))^n$$

Logo, $\mu(a)\sigma(x) = \mu(b)\sigma(x)$, donde $a=b$ $\square$

(II) N e X são P-locais.

Consideremos $\omega(X) \xhookrightarrow{i} Aut(N)$ e $\bar{G} = N \rtimes_i \omega(X)$.

$\omega(X)$ é um P-grupo de torção devido ao corolário 3.1.3, N é um P-grupo de torção devido à observação 3.1.4. Logo, $\bar{G}$ é um P-grupo de torção (pois N e $\bar{G}/N \cong \omega(X)$ o são). Concluímos que $\bar{G}$ é P-local, novamente pela observação 3.1.4 ($\bar{G}$ é finito).

Considerando a sequência $N \overset{\bar{\mu}}{\rightarrowtail} \bar{G} \underset{\bar{\sigma}}{\overset{\bar{\varepsilon}}{\rightleftarrows}} \omega(X)$ e usando a parte (I) desta proposição deduzimos que $\forall n \in P'^{\times}, \forall \tau \in \omega(X)$

$$\bar{\theta}_n(\tau) = 1_N \cdot i(\tau) \ \ldots \ i(\tau)^{n-1} = 1_N \cdot \tau \ldots \tau^{n-1}$$

é uma bijeção de N. Desta forma, $\forall x \in X$, $\forall n \in P'^{\times}$ vem:

$$\theta_n(x) = 1_N \cdot \omega(x) \ldots \omega(x^{n-1}) = \bar{\theta}_n(\tau)$$

onde $\tau = \omega(x) \in \omega(X)$. $\therefore$ $\theta_n(x)$ é bijeção de N. $\square$

<u>Corolário 3.1.13</u> - P-família de primos; $N \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \underset{\sigma}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} X$ sequência exata de grupos que cinde, onde N é finito. Então G é P-local $\Longleftrightarrow$ N e X são P-locais.

<u>Prova</u>: ($\Longrightarrow$) Sendo G P-local segue, devido à proposição anterior que $\forall n \in P'^{\times}$, $\forall x \in X$, que $\theta_n(x)$ é bijeção de N.

Da proposição 3.1.11 vem que X é P-local. Mais ainda, $x = 1 \in X$; $\theta_n(1)$ é bijeção de N. Mas $\forall a \in N$,

$$\theta_n(1)a = a(\omega(1)a)\ldots(\omega(1^{n-1})a) = a^n .$$

$\therefore$ N é P-local $\square$

($\Longleftarrow$) N e X P-locais (com N finito) $\Longrightarrow \forall\, n \in P'^{\times}$, $\forall\, x \in X$; $\theta_n(x)$ é bijeção.

Esta condição adjuntada ao fato de que X é P-local garante que G é P-local pela proposição 3.1.11. $\square$

<u>Proposiçao 3.1.14</u> - P-família de primos; $N \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ uma sequência exata de grupos. Então,

$$G \text{ e } X \text{ P-locais} \Longrightarrow N \text{ P-local.}$$

<u>Prova</u>: Fixemos $n \in P'^{\times}$.

$$a,b \in N \text{ e } a^n = b^n \Longrightarrow \mu(a)^n = \mu(b)^n \Longrightarrow \mu(a) = \mu(b)$$

pois G é P-local $\therefore$ a=b.

A seguir seja $b \in N$. Desde que G é P-local concluimos que $(\exists g \in G)$ tq. $g^n = \mu(b)$. Daí,

$$1^n = 1 = \varepsilon\mu(b) = \varepsilon(g)^n \Longrightarrow \varepsilon(g) = 1 \quad (\text{X P-local}).$$

$$\therefore (\exists!\, a \in N) \text{ tq. } g = \mu(a). \quad \therefore \quad \mu(b) = g^n = \mu(a)^n = \mu(a^n)$$

$$\therefore \; b = a^n$$ $\square$

<u>Observação 3.1.15</u> - Neste ponto salientamos (e é trivial) que todas as conclusões das proposições anteriores permanecem verdadeiras se substituimos a condição

$$[(\forall x \in X) \;\; (\forall\, n \in P'^{\times})\theta_n(x) \text{ é bijeção de N}]$$

pela

$$[(\forall x \in X) \;,\; (\forall q \in P') \;\; \theta_q(x) \text{ é bijeção de N}].$$

A partir de agora relembramos alguns conceitos ligados a cohomologia de grupos, bem como estabelecemos alguns resultados a serem utilizados na §3.3.

Consideremos os grupos X,A,B onde A e B são abelianos, e ações $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ e $X \xrightarrow{\theta} \mathrm{Aut}(B)$. Sejam também, $A \xrightarrow{\alpha} B$ um homomorfismo de X-módulos (ie., $\alpha(\omega(x)a)=\theta(x)\alpha(a)$).

Relembramos a definição de

$$\alpha_*: H^2_\omega(X;A) \to H^2_\theta(X;B)$$

Dada

$$\xi = [A \rightarrowtail^{\mu} G \xrightarrow{\varepsilon} X] \in H^2_\omega(X;A)$$

então

$$\alpha_*\xi = [B \overset{\nu}{\rightarrowtail} Q \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} X]$$

onde passamos a descrever a construção de Q,ν,π. Sejam

$$M = B\rfloor_{\theta\circ\varepsilon} G \; ; \; (G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X \xrightarrow{\theta} \mathrm{Aut}(B)) \quad \text{e}$$

$$H = \{(-\alpha(a),\mu(a)) \in M \colon a \in A\} .$$

Então, $H \triangleleft M$ e podemos considerar $Q = M/H$ e o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{\mu}{\rightarrowtail} & G & \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} & X \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \| \\ B & \overset{\nu}{\rightarrowtail} & Q & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & X \end{array}$$

Aqui, $\beta(g) = (0,g)H$

$\nu(b) = (b,1)H$

$\pi[(b,g)H] = \varepsilon(g)$.

Visto isto podemos enunciar a próxima proposição.

<u>Proposição 3.1.16</u> - No diagrama abaixo supomos A e B grupos abelianos, as linhas exatas e α um homomorfismo de X-módulos (ie. $\alpha(\omega(x)a) = \theta(\gamma(x))\alpha(a))$, onde ω e θ são as ações associadas às extenções).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & X \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, tail, "\nu"] & Q \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

Nestas condições, sendo $\xi = [A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow X]$; $\zeta = [B \rightarrowtail Q \twoheadrightarrow Y]$, podemos afirmar que: $\exists\, \beta : G \to Q$ homomorfismo de grupos tornando os diagramas comutativos $\Longleftrightarrow \alpha_*\xi = \gamma^*\zeta$. (<u>Obs</u>. Se $\exists\, \beta$, então α é automàticamente um homomorfismo de módulos).

<u>Prova</u>: ($\Longleftarrow$) Suponhamos $\alpha_*\xi=\gamma^*\zeta$. ;

$$H^2(X;A) \xrightarrow{\alpha_*} H^2(X;B) \xleftarrow{\gamma^*} H^2(Y;B)$$

$$\begin{tikzcd} \xi: & A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[ddd, dashed, bend right, "\beta"'] & X \arrow[d, equal] \\ \alpha_*\xi: & B \arrow[r, tail, "\mu_1"] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, two heads, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[d, equal] \\ \gamma^*\zeta: & B \arrow[r, tail, "\nu_1"] \arrow[d, equal] & L \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta_2"] & X \arrow[d, "\gamma"] \\ \zeta: & B \arrow[r, tail, "\nu"] & Q \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

Por hipótese, $\exists$ homom. de grupos $\phi: K \to L$ (isomorfismo) tornando os diagramas comutativos. Seja $\beta=\beta_2\circ\phi\circ\beta_1 \in \mathrm{Hom}(G,Q)$. Então é imediato que $\beta\mu = \nu\alpha$ e $\gamma\varepsilon = \pi\beta$. $\square$

($\Longrightarrow$) Suponhamos agora que $\exists$ uma tal β tornando os dia-gramas comutativos.

Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[ddd, dashed, bend right, "\beta"'] & X \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, tail, "\mu_1"] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, two heads, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dd, dashed, bend right, "\rho"'] & X \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, tail, "\nu_1"] \arrow[d, equal] & L \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta_2"] & X \arrow[d] \\
B \arrow[r, tail, "\nu"] & Q \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y
\end{tikzcd}$$

Definamos inicialmente ρ por:

$$B \rtimes_{(\theta\gamma)} G \xrightarrow{\rho} Q \quad \text{onde,}$$

$$\rho(b,g) = \nu(b)\beta(g)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\rho((b,g)(b',g')) &= \rho(b+\theta(\gamma\varepsilon(g))b', gg) = \\
&= \nu(b)\nu(\theta(\gamma\varepsilon(g))b')\beta(g)\beta(g') = \\
&= \nu(b)\,[\beta(g)\nu(b')\beta(g)^{-1}]\beta(g)\beta(g') = \\
&= \rho(b,g)\rho(b',g'),
\end{aligned}$$

onde utilizamos a definição de θ na 3ª igualdade.

$\therefore$ ρ é homomorfismo. Mais ainda,

$$\rho(-\alpha(a), \mu(a)) = \nu\alpha(a)^{-1}\beta\mu(a) = \beta\mu(a)^{-1}\beta\mu(a) = 1$$

$$\therefore \rho(H) = \{1\}.$$

$\therefore\ \exists !\ \bar{\rho}$ que passa ρ ao quociente,

$$\begin{tikzcd}
K = \dfrac{B\rtimes_{\theta\gamma\varepsilon}G}{H} \arrow[r, "\bar{\rho}"] & Q \\
B\rtimes_{\theta\gamma\varepsilon}G \arrow[u, "pr"] \arrow[ur, "\rho"'] &
\end{tikzcd} \qquad (\bar{\rho}\circ pr = \rho)$$

Assim que, $\bar{\rho}\beta_1 = \beta$ e $\bar{\rho}\mu_1 = \nu$. Mais ainda,

$$\pi\bar{\rho}[(b,g)H] = \pi\rho(b,g) = \pi(\nu(b)\beta(g)) =$$

$$= \gamma\varepsilon(g) = \gamma\varepsilon_1[(b,g)H] \ \therefore\ \pi\bar{\rho} = \gamma\varepsilon_1 \ .$$

$\therefore$ Por definição de pull.-back, $\exists !$ homomorfismo ϕ,

$$\phi\colon K \to L \quad \text{tq.} \quad \pi_1\phi = \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad \beta_2\phi = \bar{\rho}\ .$$

Finalmente,

$$\beta_2(\phi\mu_1) = \bar{\rho}\mu_1 = \nu = \beta_2\nu_1 \qquad \text{e}$$

$$\pi_1(\phi\mu_1) = \varepsilon_1\mu_1 = 0 = \pi_1\nu_1 \quad ;$$

Logo, por unicidade (na def. de pull-back) segue $\phi\mu_1 = \nu_1$.

Segue pois do Lema dos 5 (para grupos) que ϕ é isomorfismo, donde $\alpha_*\xi = \gamma^*\zeta$ $\square$

<u>Proposição 3.1.17</u> - No diagrama abaixo as linhas são sequências exatas de grupos, A e B são abelianos e τ e β tornam os quadrados comutativos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, shift right, "\tau"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & X \arrow[d, "\gamma"] \\
B \arrow[r, tail, "\nu"] & Q \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y
\end{tikzcd}$$

Então $\exists$ homomorfismo cruzado $\kappa: X \longrightarrow B$ tq. $\forall\ g \in G$;

$\beta(g) = \nu\kappa\varepsilon(g)\tau(g)$.

<u>Prova</u>: $g \in G$; $\pi\beta(g) = \gamma\varepsilon(g) = \pi\tau(g)$ $\therefore \exists!\ b_g \in B$ tq.

$\beta(g) = \nu(b_g)\tau(g)$.

Desta forma fica definida $G \xrightarrow{\rho} B$ por $\rho(g) = b_g$. (uma função apenas). Entretanto,

$$g\mu(A) = g'\mu(A) \Longleftrightarrow g'^{-1}g \in \mu(A) \Longleftrightarrow \exists!\, a \in A \quad \text{tq} \quad g = \mu(a)g'.$$

Daí que, $\nu(b_g)\tau(\mu(a))\tau(g') = \nu(b_g)\tau(g) =$

$$= \beta(b) = \beta\mu(a)\beta(g') = \nu\alpha(a)\nu(b_{g'})\tau(g').$$

Logo, $\nu(b_g + \alpha(a)) = \nu(b_g)\tau\mu(a) = \nu(\alpha(a) + b_{g'})$,

donde $b_g = b_{g'}$.

Desta forma, fica bem definida uma função κ tornando o dia grama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & B \\ X \arrow[ur, dashed, "\kappa"'] & \end{tikzcd}$$

($\therefore \kappa(x) = \rho(g), \forall\ g \in G$, tq. $\varepsilon(g) = x$)

Assim que,

$$\forall g \in G\ ,\ \beta(g) = \nu(b_g)\tau(g) \Longrightarrow \boxed{\beta(g) = \nu\kappa\varepsilon(g)\tau(g)}$$

Além disto, dados $g, h \in G$,

$$\nu(b_{gh})\tau(gh) = \beta(gh) = \beta(g)\beta(h) = \nu(b_g)\tau(g)\nu(b_h)\tau(h).$$

Logo, $\nu(b_{gh})\tau(g) = \nu(b_g)\tau(g)\nu(b_h)$

e daí vem:

$$\nu(b_{gh}) = \nu(b_g)[\tau(g)\nu(b_h)\tau(g)^{-1}] =$$

$$= \nu(b_g)\nu(\theta(\gamma\varepsilon(g))b_h) = \nu(b_g+\theta(\gamma\varepsilon(g))b_h).$$

Desta forma, $b_{gh} = b_g+\theta(\gamma\varepsilon(g))b_h$, $\forall g,h\in G$. Assim que,

$\forall x,y\in X$; $x = \varepsilon(g)$; $y=\varepsilon(h)$ temos: (por def. de κ)

$$\kappa(xy) = b_{gh} = b_g + \theta(\gamma\varepsilon(g))b_h =$$

$$= \kappa(x) + \theta(\gamma(x))\kappa(y) = \kappa(x) + x.\kappa(y),$$

uma vez que a definição da ação de X em B é exatamente $\theta o \gamma$.

$\therefore$ κ é um homomorfismo cruzado de X em B. $\square$

<u>Proposição 3.1.18</u> -

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tau"] & X \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, tail, "\nu"] & Q \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

No diagrama acima, as linhas são sequências exatasde grupos, A e B são abelianos e os quadrados são comutativos. Seja $\kappa: X \to B$ um homomorfismo cruzado (X age em B via γ). Nestas condições a função $\beta: G \to Q$ dada por $\beta(g) = \nu\kappa\varepsilon(g)\tau(g)$ é um homomorfismo de grupos.

<u>Prova</u>: $g,h \in G$; $\beta(gh) = \nu\kappa(\varepsilon(g)\varepsilon(h))\tau(g)\tau(h) =$

$$= \nu(\kappa\varepsilon(g)+\varepsilon(g).\kappa\varepsilon(h))\tau(g)\tau(h) = \nu\kappa\varepsilon(g)\nu(\theta(\gamma\varepsilon(g))\kappa\varepsilon(h))\tau(g)\tau(h).$$

Mas, $\nu(\theta(\gamma\varepsilon(g))\kappa\varepsilon(h)) = \nu(\theta(\pi\tau(g)).\kappa\varepsilon(h)) =$

$$= \tau(g)\nu\kappa\varepsilon(h)\tau(g)^{-1}$$

(onde θ é a ação de Y em B associada à extensão).

$$\therefore \beta(gh) = \nu\kappa\varepsilon(g)[\tau(g)\nu\kappa\varepsilon(h)\tau(g)^{-1}]\tau(g)\tau(h) = \beta(g)\beta(h) \quad \square$$

Lema 3.1.19 - Seja Q um grupo abeliano de P'-torção. Então, $\forall q > 0$, $H_q(Q)$ é de P'-torção (onde $H_q(Q)$ representa a homologia do grupo Q com coeficientes inteiros e triviais).

Prova: Suponhamos inicialmente Q finitamente gerado. Logo,

$$Q \cong \bigoplus_{i=1}^{t} C_i \quad ;$$

onde C_i é um grupo cíclico de P'-torção. Daí,

$$H_q(C_i) \cong \begin{cases} C_i \; ; & q \text{ ímpar} \\ (0); & q \text{ par}; \; q > 0 \; . \end{cases}$$

Concluímos pois, da fórmulade Kunneth, que

$H_q(Q) \cong$ soma de cíclicos, onde os somandos pertencem ao conjunto

$\{C_1,\ldots,C_t\}$ $(q > 0)$ $\therefore$ $H_q(Q)$ é de P'-torção para $q > 0$.

Em geral, $Q \cong \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} Q_\alpha$ onde $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é a família dos sub-gr. finitamente gerados de Q.

Lembrando que

$$H_q(Q) \cong \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} H_q(Q_\alpha) \quad , \; H_q(Q_\alpha) \text{ é de P'-torção}$$

e $\varinjlim$ de grupos (abelianos) de P'-torção é de P'-torção segue o resultado $\square$

No próximo teorema trabalhamos com a teoria de localização na cateoria η .

<u>Teorema 3.1.20</u> - Consideremos X um grupo nilpotente e A um grupo abeliano P-local. Suponhamos que exista um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(A) \\ X_P \arrow[ur, "\omega_P"'] & \end{tikzcd}$$

Nestas condições afirmamos que $H^n_{\omega_P}(X_P;A) \xrightarrow{e_0^*} H^n_{\omega}(X;A)$ é um isomorfismo. (e_0 = P-localização de X em η).

<u>Prova</u>: (indução sobre c = nil X).

Se X é abeliano podemos considerar as sequências exatas de grupos abelianos

$$0 \to \mathrm{Ker}(e_0) \rightarrowtail X \xrightarrow{e_0'} e_0(X) \to 0 \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$(e_0'(x) = e_0(x) \quad , \forall x \in X).$$

e

$$0 \to e_0(X) \xrightarrow{e_0''} X_P \longrightarrow \mathrm{Coker}(e_0) \to 0 \quad \ldots \quad (\mathrm{II})$$

$$(e_0'' = \text{inclusão}).$$

(I) da origem a uma sequência espectral (de Lyndon-Hoschild -Serre) em cohomologia onde $E_2^{r,s} = H^r(e_0(X);\ H^s(\mathrm{Ker}(e_0);A))$.

Notemos que X abeliano $\Longrightarrow$ $e_0(X)$ age trivialmente em $\mathrm{Ker}(e_0)$, donde a ação de $e_0(X)$ em $H^s(\mathrm{Ker}(e_0);A)$ é trivial $\forall s \geq 0$. Mais ainda, $x \in \mathrm{Ker}(e_0) \Longrightarrow \omega(x) = \omega_P e_0(x) = \omega_P(1) = 1_A$, o que mostra que $\mathrm{Ker}(e_0)$ age trivialmente em A. Isto nos permite utilizar o teorema dos coeficientes universais e obter a sequência

$$0 \to Ext(H_{s-1}(Ker(e_0)),A) \to H^s(Ker(e_0);A) \to Hom(H_s(ker(e_0);A) \Longrightarrow 0$$

Levando em conta que

$$Hom(P'torção,\ P\text{-}local) = 0 = Ext(P'\text{-}torção,\ P\text{-}local)$$

e que $H_s(Ker(e_0))$ é de P'-torção devido ao Lema anterior (3.1.19) concluimos que

$$H^s(Ker(e_0);A) = (0) \quad , \forall s \geqq 1 .$$

Daí vem que

$$E^{r,s} = \begin{cases} H^r(e_0(X);A) & ; \quad s = 0 \\ (0) & ; \quad s > 0 \end{cases} ,$$

donde a sequência espectral colapsa e ∴ produz:

$$H^r(e_0(X);A) \xrightarrow[\cong]{e_0'^*} H^r(X;A)$$

Anàlogamente, considerando a sequência espectral associada a (II) temos:

$$E_2^{r,s} = H^r \ (coker(e_0);\ H^s(e_0(X);A)) .$$

Da mesma forma coker (e_0) age trivialmente em $e_0(X)$, já que G_P é abeliano. ∴ a ação de coker(e_0) em $H^s(e_0(X);A)$ é trivial $\forall s \geqq 0$.

Outrossim, A é P-local $\Longrightarrow$ $H^s(e_0)(X);A)$ é P-local (pois $n \in P'^{\times}$; $A \xrightarrow[\cong]{.n} A$ induz

$$H^s(e_0(X);A) \xrightarrow[\cong]{.n} H^s(e_0(X);A)) .$$

Novamente utilizando o T dos Coeficientes Univer - sais e lembrando que coker(e_0) é de P'-torção $\Longrightarrow$ $H_r(coker(e_0))$ é abeliano de P'-torção, $\forall r > 0$ (Lema 3.1.19) concluimos que

$E_2^{r,s} = (0) \quad \forall r > 0$. Temos pois

$$E^{r,s} \cong \begin{cases} (0) \; ; & r > 0 \\ H^s(e_0(X);A) \; ; & r = 0 \end{cases} \quad , \text{ donde}$$

$$H^s(e_0(X);A) \xleftarrow[\cong]{e_0''^*} H^s(X_P;A) \quad ; \; \forall s \, .$$

Do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H^n_\omega(X;A) & & H^n_{\omega_P}(X_P;A) \arrow[ll, "e_0^*"'] \arrow[dl, "e_0''^*", "\cong"'] \\ & H^n(e_0(X);A) \arrow[ul, "e_0'^*", "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

segue que e_0^* é isomorfismo.

Temos, pois, mostrado o passo de indução para $c = 1$.

Seja agora X um grupo com nil $X = c > 1$ e considere mos $\Gamma = \Gamma^c X \neq \{1\}$. É conhecido que as sequências abaixo são exatas e os diagramas comutativos.

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, tail] \arrow[d, "e_0''"] & X \arrow[r, two heads] \arrow[d, "e_0"] & X/\Gamma \arrow[d, "e_0'"] \\ \Gamma_P \arrow[r, tail] & X_P \arrow[r, two heads] & (X/\Gamma)_P \end{tikzcd}$$

Estas sequências curtas e aplicações dão origem a uma aplicação de sequências espectrais. Em particular temos os diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_2^{r,s} = H^r(X/\Gamma;H^s(\Gamma;A)) & \\
& H^r((X/\Gamma)_P\ ;\ H^s(\Gamma;A)) \arrow[ul, "e_0'^*"'] \\
\bar{E}_2^{r,s} = H^r(X/\Gamma)_P\ ;\ H^s(\Gamma_P;A)) \arrow[uu, "(e_0',e_0'')^*"] \arrow[ur, "(e_0''^*)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

É importante notar que as sequências curtas são centrais donde as cohomologias consideradas no diagrama anterior são ordinárias. Agora, do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "e_0''"'] & X \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "e_0"] & \mathrm{Aut}(A) \\
\Gamma_P \arrow[r, tail, "\mu_P"] & X_P \arrow[ur, "\omega_P"'] &
\end{tikzcd}$$

concluimos que $(\omega_P\mu_P)e_0'' = \omega\mu$.

Devido ao primeiro passo da indução (como Γ é abeliano) segue

$$H^s(\Gamma_P;A) \xrightarrow[\cong]{e_0''^*} H^s(\Gamma;A),$$

donde $(e_0''^*)_*$ é isomorfismo.

De outra parte, sendo $H^s(\Gamma;A)$ P-local, $\forall s \geq 0$ e considerando o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X/\Gamma \arrow[r, "0"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(H^s(\Gamma,A)) \\ (X/\Gamma)_P \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Segue por hipótese de indução (nil $X/\Gamma = c-1$) que $e_0'^*$ é isomorfismo.

Logo $(e_0', e_0'')^*$ é isomorfismo $E_2^{r,s} \xrightarrow{\cong} \bar{E}_2^{r,s}$

Desta forma utilizando-se a técnica usual de "passar" pela sequência espectral concluimos que

$$H^n(X_P;A) \xrightarrow{e_0^*} H^n(X;A)$$

é isomorfismo e a prova está completa por indução. $\square$

Finalmente, para encerrar esta secção, vamos considerar a seguinte situação (que voltará a aparecer nas 2 próximas):

P-família de primos; A - p-grupo abeliano finito; X-grupo; $p \in P$; $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ uma ação de X em A. Suponhamos que

$$|\omega(X)| = q_1^{\alpha_1} \cdots q_\ell^{\alpha_\ell} q_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \cdots q_t^{\alpha_t} \;;$$

onde $\alpha_i > 0$, $\forall\, i$;

$$P_1 = \{q_1, \dots, q_\ell\} \quad , \quad P_1 \cap P = \emptyset \quad e \quad \{q_{\ell+1}, \dots, q_t\} \subset P .$$

Denotemos por $H = \langle x \in X : o(\omega(x)) \in P_1^\times \rangle$ = (sub-grupo gerado pelos elementos de X cuja ordem de $\omega(X)$ pertence a $P_1^\times$).

Lema 3.1.21 - $H \triangleleft X$.

Prova: De fato, $x \in X$ e $o(\omega(x)) \in P_1^{\times} \Longrightarrow o(\omega(x^{-1})) =$ $= o(\omega(x)) \in P_1^{\times} \Longleftrightarrow \therefore (\forall h \in H)\ \exists\ x_1,\ldots,x_k \in X$ com $o(\omega(x_i)) \in P_1^{\times}$ tq. $h = x_1 \ldots x_k$ Daí que $\forall y \in X$, $\forall h \in H$;

$$yhy^{-1} = (yx_1y^{-1})(yx_2y^{-1})\ldots(yx_ky^{-1}) \in H$$

uma vez que

$$o(\omega(yx_iy^{-1})) = o(\omega(x_i)) \in P_1^{\times}, \ \forall i. \qquad \square$$

Denotemos por $\omega_H = \omega|_H : H \hookrightarrow X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$.

Com respeito a esta restrição temos a proposição seguinte.

Proposição 3.1.22 - $\Gamma^j_{\omega_H}$ é um $\mathbb{Z}[X]$-sub-módulo de A, $\forall j \geqq 1$. (ie, $\Gamma^j_{\omega_H}$ é invariante sob ω).

Prova: (indução sobre j) $\Gamma^1_{\omega_H} = A$.

Supondo $\forall x \in X$; $\omega(x)\Gamma^{j-1}_{\omega_H} \subset \Gamma^{j-1}_{\omega_H}$, consideremos

$$x \in X\ ,\ a \in \Gamma^{j-1}_{\omega_H} \quad \text{e} \quad h \in H.$$

Então

$$\omega(x)(\omega(h)a - a) = \omega(xhx^{-1})\omega(x)a - \omega(x)a \in \Gamma^j_{\omega_H},$$

uma vez que $xhx^{-1} \in H$ (Lema anterior (3.1.21)) e $\omega(x)a \in \Gamma^{j-1}_{\omega_H}$ por hipótese de indução.

$$\therefore \omega(x)\Gamma^j_{\omega_H} \subset \Gamma^j_{\omega_H}$$

e a prova está completa por indução. $\square$

A seguir salientamos que sendo A finito, $\exists$ r(mínimo) que satisfaz à propriedade $\Gamma^r_{\omega_H} = \Gamma^{r+1}_{\omega_H}$ $(\therefore \Gamma^{r-1}_{\omega_H} \supsetneq \Gamma^r_{\omega_H})$, ou $\Gamma^2_{\omega_H} = A$. Denotamos por $\Gamma = \Gamma(H) = \Gamma^r_{\omega_H}$ (ou $\Gamma = A$, se $\Gamma^2_{\omega_H} = A$).

Sendo $\Gamma(H)$ um $\mathbb{Z}[X]$-sub-módulo de A podemos considerar $A/\Gamma(H)$ sub-mód. quociente. A estrutura do X-módulo é dada por:

$\bar{\omega}: X \to \mathrm{Aut}(A/\Gamma(H))$ onde $\bar{\omega}(x)(a+\Gamma(H)) = \omega(x)a + \Gamma(H)$.

Podemos considerar $\bar{\omega}|_H$. É imediato que

$$\overline{\omega|_H} = \bar{\omega}|_H : H \hookrightarrow X \longrightarrow \mathrm{Aut}(A/\Gamma(H)).$$

<u>Lema 3.1.23</u> - $\bar{\omega}|_H$ é trivial.

<u>Prova</u>: Lembrando que $\Gamma(H) = \Gamma^r_{\omega_H}$ segue que $\bar{\omega}_H$ é nilpotente com $\mathrm{nil}\,\bar{\omega}_H = r-1$ já que $\Gamma^j_{\bar{\omega}_H} = \Gamma^j_{\omega_H}/\Gamma^r_{\omega_H}$.

Por outro lado $A/\Gamma(H)$ é um p-grupo finito.

Segue pois da proposição 7, pg. 7 de [G] que $\bar{\omega}_H(H) = \bar{\omega}(H)$ é um p-grupo (finito).

De outra parte sendo h um gerador de H segue $h \in X$ e $o(\omega(h)) \in P_1^\times$. Como $o(\bar{\omega}(h)) | o(\omega(h))$ (devido à definição de $\bar{\omega}$) segue $o(\bar{\omega}(h)) \in P_1^\times$ ou $o(\bar{\omega}(h)) = 1$. Mas $\bar{\omega}(H)$ é p-grupo e $p \in P$. e $P \cap P_1 = \emptyset$. $\therefore$ $o(\bar{\omega}(h)) = 1$. $\therefore$ $\bar{\omega}(h) = 1_{A/\Gamma}$, $\forall h \in H$. $\square$

<u>Proposição 3.1.24</u> - $\bar{\omega}(X)$ é um P-sub-grupo de torção de $\mathrm{Aut}(A/\Gamma)$.

<u>Prova</u>: Devemos que $|\bar{\omega}(X)| \in P^{\times}_{1}$

Suponhamos que $\exists$ $q \in P'$ tq. $q \,\Big|\, |\bar{\omega}(x)|$. Assim $\exists$ $y \in X$ tq. $o(\bar{\omega}(y)) = q$. Desta forma teríamos

$$o(\omega(y)) = q^{\ell}.m, \ \mathrm{mdc}(m,q) = 1,$$

uma vez que $o(\bar{\omega}(y)) \,|\, o(\omega(y))$.

Logo,

$$o(\omega(y^m)) = q^{\ell} \quad e \quad \therefore \quad o(\bar{\omega}(y^m)) = q,$$

pois $o(\bar{\omega}(y)) = q$ e $\mathrm{mdc}(m,q) = 1 \ \therefore \ \bar{\omega}(y^m) \neq 1_{A/\Gamma}$ o que é absurdo, devido ao Lema anterior (3.1.23), já que $y^m \in H$ (pois $o(\bar{\omega}(y^m)) = q \in P^{\times}_{1}$). □

<u>Corolário 3.1.25</u> - $\exists!$ ação $X_P \xrightarrow{\omega'} \mathrm{Aut}(A/\Gamma)$, com $\omega'(X_P) = \bar{\omega}(X)$, que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{\omega}"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(A/\Gamma) \\ X_P \arrow[ur, dashed, "\omega'"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Prova</u>: Consequência direta da proposição 3.1.5. □

Novamente observamos que este corolário é verdadeiro em ambos os casos quando $X \xrightarrow{e_0} X_P$ P-localiza em G ou em η quando X é nilpotente (da mesma forma que a prop. 3.1.5).

<u>Proposição 3.1.26</u> - No diagrama comutativo abaixo as linhas são exatas, A e B são p-grupos abelianos finitos.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, tail, "\nu"] & Q \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

Sejam

$$H_A = \langle x \in X: o(\omega_1(x)) \in P_1(A)^{\times} \rangle ,$$

onde $P_1(A) = \{q \in P': q \,|\, |\omega_1(X)|\}$

$$H_B = \langle y \in Y: o(\omega_2(y)) \in P_1(B)^{\times} \rangle ,$$

onde $P_1(B) = \{q \in P': q \,|\, |\omega_2(Y)|\}$

Nestas condições, $\forall\ j \geq 1 \quad \alpha(\Gamma^{j}_{\omega_1|_{H_A}}) \subset \Gamma^{j}_{\omega_2|_{H_B}}$.

(Em particular $\alpha(\Gamma(H_A)) \subset \Gamma(H_B)$).

<u>Prova</u>: (indução sobre j) ; j=1 é trivial.

Seja agora $j > 1$ e suponhamos $\alpha(\Gamma^{j-1}_{\omega_1|_{H_A}}) \subset \Gamma^{j-1}_{\omega_2|_{H_B}}$.

Consideremos $a \in \Gamma^{j-1}_{\omega_1|_{H_A}}$ e x gerador de H_A. Desta forma,

$$o(\omega_1(x)) = n \in P_1(A)^{\times} \subset P'^{\times}.$$

Suponhamos

$$o(\omega_2(\gamma(x))) = r.s \quad \text{onde} \quad r \in P^{\times} \text{ ou } r = 1;$$

$s \in P_1(B)^{\times} \subset P'^{\times}$ ou $s=1$. Assim sendo,

$$n_1 = o(\omega_1(x^s)) | o(\omega_1(x)) = n \in P_1^\times(A)$$

segue n=1 ou $n_1 \in P_1(A)^\times$. $\therefore \omega_2(\gamma(x^s))^r \alpha(a) = \alpha(a)$ e

$$\omega_2(\gamma(x^s))^{n_1}\alpha(a) = \alpha(\omega_1(x^s)^{n_1}a) = \alpha(a)$$

(pois n_1 = ordem de $\omega_1(x^s)$). Mas

$$r \in P^\times \text{ e } n_1 \in P'^\times \text{ ou } n_1 = 1 \therefore \text{mdc}(r,n_1) = 1.$$

Logo, $\omega_2(\gamma(x^s))\alpha(a) = \alpha(a)$.

Agora $\text{mdc}(r,s) = 1 \Longleftrightarrow \exists\ k, \ell \in \mathbb{Z}$ tq $kr + \ell s = 1$.

$$\therefore \omega_2(\gamma(x))\alpha(a) = \omega_2(\gamma(x)^r)^k o \omega_2(\gamma(x)^s)^\ell \alpha(a) = \omega_2(\gamma(x)^r)^k\ \alpha(a).$$

Mas, $o(\omega_2(\gamma(x)^r) = s \in P_1(B)^\times$ ou s=1. Daí que $\gamma(x^r) \in H_B$. Logo $\gamma(x^r)^k \in H_B$. Decorre do exposto que

$$\alpha(\omega_1(x)a-a) = \omega_2(\gamma(x))\alpha(a) - \alpha(a) =$$

$$= \omega_2(\gamma(x)^r)^k\alpha(a)-\alpha(a) \in \Gamma^j_{\omega_2|H_B},$$

uma vez que $\gamma(x^r)^k \in H_B$ e $\alpha(a) \in \Gamma^{j-1}_{\omega_2|H_B}$ por indução, $\forall$ x gerador de H_A. Mais ainda, se $x_1, x_2 \in H_A$ são tais que $\forall a \in A$, $\alpha(\omega_1(x_1)a-a)$ e $\alpha(\omega_1(x_2)a-a) \in \Gamma^j_{\omega_2|H_B}$, então

$$\alpha(\omega_1(x_1x_2)a-a) = \alpha(\omega_1(x_1) o \omega_1(x_2)a +$$

$$- \omega_1(x_2)a) + \alpha(\omega_1(x_2)a-a).$$

Mas, $\omega_1(x_2)a \in \Gamma^{j-1}_{\omega_1|_{H_A}}$ (prop. 3.1.22)

$$\therefore \alpha(\omega_1(x_1)\omega_1(x_2)a) - \omega_1(x_2)a) \in \Gamma^{j}_{\omega_2|_{H_B}}$$

e

$$\alpha(\omega_1(x_2)a-a) \in \Gamma^{j}_{\omega_2|_{H_B}}$$

Segue, pois, por indução que $\forall h \in H$, $\forall a \in A$,

$$\alpha(\omega_1(h)a-a) \in \Gamma^{j}_{\omega_2|_{H_B}}$$

donde

$$\alpha(\Gamma^{j}_{\omega_1|_{H_A}}) \subset \Gamma^{j}_{\omega_2|_{H_B}} ,$$

o que conclui a prova. $\square$

§ 3.2. - Neste parágrafo vamos apresentar construções explícitas para a localização de um grupo G, onde G é o produto semi-direto de um grupo abeliano finito A por um grupo X. Esta construção depende fundamentalmente de A de X_P e da ação de X em A. Salientamos que a teoria de localização considerada aqui é a definida na categoria dos grupos.

Iniciamos a secção com um resultado geral.

<u>Proposição 3.2.1</u> - Seja P uma família de primos e $p \in P'$. Consideremos uma sequência exata de grupos $N \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ onde N é um P-grupo.

Então, sendo $X \xrightarrow{e_0} X_P$, afirmamos que $e_0 \circ \varepsilon$ P-localiza G.

<u>Prova</u>: Seja $G \xrightarrow{\phi} K$ um homomorfismo de grupos onde K é P-local.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "\mu"] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[d, "e_0"] \arrow[dl, dashed, "\phi'"'] \\ & K & X_P \arrow[l, dashed, "\bar{\phi}"] \end{tikzcd}$$

Dado $a \in N$, $\exists\ r \geq 0$ tq $a^{p^r} = 1$.

$$\therefore\ \phi\mu(a)^{p^r} = \phi\mu(a^{p^r}) = 1 = 1^{p^r} \in K .$$

Daí,

$$\phi\mu(a) = 1 \quad \text{pois} \quad K \text{ é P-local e } p \notin P .$$

$$\therefore\ \phi\mu(N) = \{1\} \quad \therefore\ \exists!\ \phi' : X \to K \text{ tq } \phi'\varepsilon = \phi.$$

Levando em conta que K é P-local e a definição de P-localização concluimos que $\exists!\ \bar{\phi}: X_P \to K$ tq. $\bar{\phi}e_0 = \phi'$.
$\therefore\ \bar{\phi}(e_0\varepsilon) = \phi$.

Mais ainda, se $\bar{\phi}(e_0\varepsilon) = \phi = \psi(e_0\varepsilon)$, então $(\bar{\phi}e_0)\varepsilon = (\psi e_0)\varepsilon$. Daí, $\bar{\phi}e_0 = \psi e_0$, pois ε é sobrejetora, e $\bar{\phi} = \psi$ por unicidade na definição de P-localização ($X \xrightarrow{e_0} X_P$ P-localiza).

Temos, pois, provado por definição que $e_0 \circ \varepsilon$ P-localiza G. $\square$

Vamos agora provar uma proposição fundamental para obtenção de nossos principais resultados desta secção.

<u>Proposição 3.2.2</u> - Seja P uma família de primos; $e_0 : X \to X_P$ P-localização de um grupo X. Consideremos $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(K)$ e $X_P \xrightarrow{\bar\omega} \mathrm{Aut}(\bar K)$ ações em grupos finitos K e $\bar K$, e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[d, two heads, "\pi"] \arrow[ddl, "e'"'] & & G \arrow[rr, two heads, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, "\bar e"] \arrow[ddl, "e"'] & & X \arrow[ll, tail, shift left] \arrow[d, "e_0"] \arrow[ddl, "e_0"'] \\
 & \bar K \arrow[rr, dashed, tail, "\bar\mu"] \arrow[dl, "\tilde e"'] & & \bar G \arrow[rr, dashed, two heads, shift left, "\bar\varepsilon"] & & X_P \arrow[ll, dashed, tail, shift left, "\bar\sigma"] \arrow[dl, equal] \\
N \arrow[rr, tail, "\mu'"] & & G_P \arrow[rr, two heads, shift left, "\varepsilon_P"] & & X_P \arrow[ll, tail, shift left, "\sigma_P"] &
\end{tikzcd}$$

No diagrama temos:

$$G = K \rtimes_\omega X \ ; \ \bar G = \bar K \rtimes_{\bar\omega} X_P \ , \ \mu, \varepsilon, \sigma, \bar\mu, \bar\sigma, \bar\varepsilon, \varepsilon_P, \sigma_P$$

são aplicações usuais, e é a P-localização de G, $N = \mathrm{Ker}\,\varepsilon_P$, μ' é a inclusão de N em G_P, e' é definida pela restrição de e a K, π é sobrejetora e $\tilde e \pi = e'$.

Suponhamos ainda que $\pi(\omega(x)a) = \bar\omega(e_0(x))\pi(a)$ e

$$e'(\omega(x)a) = \omega_P(e_0(x))e'(a) \ , \quad \forall x \in X; \quad \forall a \in K.$$

Nestas condições temos

$$\tilde e(\bar\omega(z)\bar a) = \omega_P(z)\tilde e(\bar a) \ , \ \forall z \in X_P \ , \ \forall \bar a \in \bar K \ .$$

<u>Prova:</u> $\bar G$ é P-local devido ao corolário 3.1.13.

$\therefore \exists! \ \phi \in \mathrm{Hom}(G_P, \bar G)$ tq. $\phi e = \bar e$ (pois da hipótese sobre π segue que $\bar e$ é homomorfismo). É imediato que $\bar\varepsilon\phi = \varepsilon_P$ e

$\phi\sigma_P = \bar{\sigma}$. $\therefore \phi$ define ϕ' por restrição. Donde $N \xrightarrow{\phi'} K$ é tq. $\bar{\mu}\phi' = \phi\mu'$ e $\phi' e' = \pi$. Vem daí que $\phi'\tilde{e}\pi = \phi' e' = \pi$, e $\therefore \ \phi'\tilde{e} = 1_{\bar{K}}$.

Assim que considerando-se $B = \ker\phi'$ obtemos a sequência exata que cinde $B \rightarrowtail N \underset{\tilde{e}}{\overset{\phi'}{\rightleftarrows}} \bar{K}$.

Lembremos a seguir que devido à proposição 6, pg. 8, de [R.1] temos:

$$X_P = \bigcup_{i=0}^{\infty} \langle I_{P',i}(X_P, e_0(X))\rangle$$

Portanto é suficiente mostrar que a fórmula é verdadeira $\forall\, z \in \langle I_{P',i}(X_P, e_0(X))\rangle$, $\forall i \geq 0$. Isto será feito por indução sobre i.

$i=0$; $z \in \langle I_{P',0}(X_P, e_0(X))\rangle = e_0(X) \Rightarrow z = e_0(x)$; $x \in X$.

Mas,

$$\begin{aligned} \tilde{e}(\bar{\omega}(e_0(x))\bar{a}) &= \tilde{e}(\bar{\omega}(e_0(x))\pi(a)) = \\ &= \tilde{e}\pi(\omega(x)a) = e'(\omega(x)a) = \\ &= \omega_P(e_0(x))e'(a) = \omega_P(e_0(x))\tilde{e}(\bar{a}). \end{aligned}$$

o que completa a prova para $i=0$.

Suponhamos a seguir que $\tilde{e}(\bar{\omega}(w)\bar{a}) = \omega_P(w)\tilde{e}(\bar{a})$, $\forall\, w \in \langle I_{P',i-1}(X_P, e_0(X))\rangle$ e consideremos

$$z \in I_{P',i}(X_P, e_0(X)) = I_{P',1}(X_P, \langle I_{P',i-1}(X_P, e_0(X))\rangle)$$

Segue-se que $\exists\, n \in P'^{\times}$ tq

$z^n \in \langle I_{P',i-1}(X_P, e_0(X))\rangle$, donde $\tilde{e}(\bar{\omega}(z^n)\bar{a}) = \omega_P(z^n)\tilde{e}(\bar{a})$.

A seguir tomamos $m = o(\bar{\omega}(z^n))$. A proposição 3.1.2 nos mostra que $m=1$ ou $m \in P^\times$, de modo que:

$$\omega_P(z^{nm})\tilde{e}(\bar{a}) = \omega_P(z^n)^m\tilde{e}(\bar{a}) =$$

$$= \tilde{e}(\bar{\omega}(z^n)^m\bar{a}) = \tilde{e}(\bar{a}).$$

$$\therefore \omega_P(z^{nm})\big|_{\tilde{e}(\bar{K})} = 1_{\tilde{e}(\bar{K})} .$$

Vamos agora mostrar que $\omega_P(z^m)\big|_{\tilde{e}(\bar{K})} = 1_{\tilde{e}(\bar{K})}$. Para isto consideremos

$$\tau = \phi' o\omega_P(z^m)o\tilde{e} \, ; \, (K \xrightarrow{\tilde{e}} N \xrightarrow{\omega_P(z^m)} N \xrightarrow{\phi'} \bar{K}) .$$

Notemos que

$$\bar{\mu}\tau(\bar{a}) = \bar{\mu}\phi'(\omega_P(z^m)\tilde{e}(\bar{a}) = \phi(\sigma_P(z^m)\mu'\tilde{e}(\bar{a})\sigma_P(z^m)^{-1}) =$$

$$= \bar{\sigma}(z^m)\bar{\mu}\phi'\tilde{e}(\bar{a})\bar{\sigma}(z^m)^{-1} = \bar{\sigma}(z^m)\bar{\mu}(\bar{a})\bar{\sigma}(z^m)^{-1} =$$

$$= \bar{\mu}(\bar{\omega}(z^m)\bar{a}) . \qquad \therefore \tau = \bar{\omega}(z^m) .$$

Novamente pela prop. 3.1.2, $\bar{\omega}(z^m) = 1_{\bar{K}}$ ou $o(\bar{\omega}(z^m)) \in P^\times$. Mas, $\bar{\omega}(z^m)^n = 1_{\bar{K}}$. Daí que $o(\bar{\omega}(z^m))|n$ $\therefore \tau = \bar{\omega}(z^m) = 1_{\bar{K}}$.

Por outro lado, lembrando que $B \rightarrowtail N \underset{\tilde{e}}{\overset{\phi'}{\rightleftarrows}} \bar{K}$ cinde podemos afirmar que $\omega_P(z^m)\tilde{e}(\bar{a}) = b\tilde{e}(\bar{a}_1)$; $b \in B$ e $\bar{a}_1 \in \bar{K}$.

$$\therefore \bar{a} = \tau(\bar{a}) = \phi'(\omega_P(z^m)\tilde{e}(\bar{a})) = \phi(b\tilde{e}(\bar{a}_1)) = \bar{a}_1 ,$$

donde $$\omega_P(z^m)\tilde{e}(\bar{a}) = b\tilde{e}(\bar{a}).$$

Aplicando-se sucessivamente $\omega_P(z^m)$ a esta expressão obtemos, (por indução sobre n):

$$\tilde{e}(\bar{a}) = \omega_P(z^m)^n\tilde{e}(\bar{a}) = [(\omega_P(z^m)^{n-1}b)\dots(\omega_P(z^m)b)b]\tilde{e}(\bar{a}) =$$

$$= (\bar{\theta}_n(z^m)b^{-1})^{-1}\tilde{e}(\bar{a})$$

(onde $\bar{\theta}_n(z^m)u = u(\omega_P(z^m)u)\dots(\omega_P(z^m)^{n-1}u)$.

Desta forma $\bar{\theta}_n(z^m)b^{-1} = 1 = \bar{\theta}_n(z^m)1$.

Invocamos a seguir a prop. 3.1.11 e o fato de que X_P e G_P são P-locais para concluir que $\bar{\theta}_n(z^m)$ é bijetora. $\therefore$ b=1, o que mostra que $\omega_P(z^m)\big|_{\tilde{e}(\bar{K})} = 1_{\tilde{e}(\bar{K})}$. De $mdc(m,n) = 1$ segue que $(\exists r,s\in\mathbb{Z})$ tq. $rm+sn = 1$.

$$\therefore \omega_P(z)\tilde{e}(\bar{a}) = \omega_P(z^n)^s \circ \omega_P(z^m)^r\tilde{e}(\bar{a}) =$$

$$\omega_P(z^n)^s\tilde{e}(\bar{a}) = \tilde{e}(\bar{\omega}(z^n)^s\bar{a} = \tilde{e}(\bar{\omega}(z^n)^s \circ \bar{\omega}(z^m)^r\bar{a}) =$$

$$= \tilde{e}(\bar{\omega}(z)\bar{a}),\ \forall \bar{a}\in\bar{K},\ \forall z\in I_{P',i}(X_P,e_0(X)).$$

Levando em conta que ω_P, $\bar{\omega}$ e $\tilde{e}$ são homomorfismos, segue que $\omega_P(z)\tilde{e}(\bar{a}) = \tilde{e}(\bar{\omega}(z)\bar{a})$, $\forall z\in \langle I_{P',i}(X_P,e_0(X))\rangle$ e a prova está completa. $\square$

Doravante, em toda esta secção a menos de menção em contrário, fixaremos uma família de primos P e p∈P.

Consideremos uma ação, $X \xrightarrow{\omega} Aut(A)$, de um grupo X em um p-grupo abeliano finito A.

Suponhamos que $|\omega(X)| = q_1^{\alpha_1}\dots q_t^{\alpha_t}$ e $P \supset \{q_1,\dots,q_t\}$.

Nestas condições, o grupo $\omega(X)$ um P-sub-grupo (finito) de torção de $Aut(A)$.

Desta forma, invocando a proposição 3.1.5, podemos garantir que $\exists !$ $X_P \xrightarrow{\bar{\omega}} \mathrm{Aut}(A)$ (com $\bar{\omega}(X_P) = \omega(X)$) que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(A) \\ X_P \arrow[ur, dashed, "\bar{\omega}"'] & \end{tikzcd}$$

Podemos então considerar $\bar{G} = A \rtimes_{\bar{\omega}} X_P$ e

$$\bar{e}: (a,x) \in G \longmapsto \bar{e}(a,x) = (a, e_0(x)) \in \bar{G} ,$$

que é um homomorfismo de grupos devido ao fato de ser comutativo o diagrama acima.

Sabemos também que $\bar{G}$ é P-local, devido ao corolário 3.1.9.

Desta forma $\exists !$ homomorfismo $G_P \xrightarrow{f} \bar{G}$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\bar{e}"] \arrow[d, "e"'] & \bar{G} \\ G_P \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos a seguir o seguinte diagrama:

Diagrama 3.2.3

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[d, equal] \arrow[ddl, dashed, "e'"'] & & G \arrow[rr, two heads, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, "\bar{e}"] \arrow[ddl, "e"'] & & X \arrow[ll, tail, shift left, "\sigma"] \arrow[d, "e_0"] \arrow[ddl, "e_0"'] \\
 & A \arrow[rr, dashed, tail, "\bar{\mu}"] \arrow[dl, dashed, shift right, "e'"'] & & \bar{G} \arrow[rr, dashed, two heads, shift left, "\bar{\varepsilon}"] & & X_P \arrow[ll, dashed, tail, shift left, "\bar{\sigma}"] \arrow[dl, equal] \\
N \arrow[rr, tail, "\mu'"] \arrow[ur, dashed, shift right, "f'"'] & & G_P \arrow[ur, dashed, "f"'] \arrow[rr, two heads, shift left, "\varepsilon_P"] & & X_P \arrow[ll, tail, shift left, "\sigma_P"] &
\end{tikzcd}$$

$\bar{\varepsilon}(a,z) = z$; $\bar{\sigma}(z) = (0,z)$; $\bar{\mu}(a) = (a,1)$; $N = \ker\varepsilon_P$

$\mu' =$ inclusão ; $\therefore$ $\bar{\varepsilon}\bar{e} = e_0\varepsilon$; $\bar{e}\sigma = \sigma e_0$; $\bar{e}\mu = \bar{\mu}$.

Aqui temos: $(\bar{\varepsilon}f)e = \bar{\varepsilon}\bar{e} = e_0\varepsilon = \varepsilon_P e$ $\therefore \bar{\varepsilon}f = \varepsilon_P$.
Analogamente, $f\sigma_P = \bar{\sigma}$.

Assim que, $\bar{\varepsilon}f\mu' = \varepsilon_P\mu' = 0$ $\therefore$ $\exists!$ $f' \in \mathrm{Hom}(N,A)$ tq. $\bar{\mu}f' = f\mu'$. Da mesma forma $\exists!$ $e' \in \mathrm{Hom}(A,N)$ tq. $\mu'e' = e\mu$. Daí, $f'e' = 1_A$. (Em particular, f' é epimorfismo e e' é monomorfismo). Temos pois verificado que todos os sub-diagramas de 3.2.3 são comutativos.

Indicando por $X_P \xrightarrow{\omega_P} \mathrm{Aut}(N)$ a ação definida por σ_P e $B = \mathrm{Ker}\, f'$ obtemos a sequência exata $B \rightarrowtail N \underset{e'}{\overset{f'}{\rightleftarrows}} A$ que cinde (já que $f'e' = 1_A$).

Estamos agora aptos a provar o primeiro teorema desta secção.

<u>Teorema 3.2.4</u> - Seja P uma família de primos e $p \in P$. Seja $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ uma ação de um grupo X num p-grupo abeliano finito A. Suponhamos que $|\omega(X)| = q_1^{\alpha_1} \cdots q_t^{\alpha_t}$ e $P \supset \{q_1, \ldots, q_t\}$. Consideremos a única ação $\bar{\omega}$ que torna o diagrama abaixo comutativo, $G = A \rtimes_\omega X$; $\bar{G} = A \rtimes_\omega X_P$; $\bar{e}: (a,x) \in G \to (a, e_0(x)) \in \bar{G}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(A) \\ X_P \arrow[ur, "\bar{\omega}"'] & \end{tikzcd}$$

Então, $\bar{e}$ P-localiza G.

<u>Prova</u>: Mostraremos que $f \in \mathrm{Hom}(G_P, \bar{G})$ indicada no diagrama 3.2.2 é um isomorfismo.

Para isto definimos $\phi: \bar{G} \to G_P$ por:

$$\phi(a,z) = \mu' e'(a) \sigma_P(z) \quad ; \quad a \in A \ , \ z \in X_P.$$

Para mostrarmos que ϕ é homomorfismo observamos inicialmente que as aplicações envolvidas no diagrama 3.2.3 satisfazem às hipóteses exigidas pela prop. 3.2.2 (no caso $1_A = \pi$ e $e' = \tilde{e}$), de sorte que temos:

$$e'(\bar{\omega}(z) \cdot a) = \omega_P(z) \cdot e'(a) \quad , \ \forall a \in A, \quad \forall z \in X_P.$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \phi((a,z)(b,w)) &= \phi(a + \bar{\omega}(z)b, zw) = \mu' e'(a) \mu' e'(\bar{\omega}(z)b) \sigma_P(zw) = \\ &= \mu' e'(a) \mu'(\omega_P(z) e'(b)) \sigma_P(z) \sigma_P(w) = \\ &= \mu' e'(a) [\sigma_P(z) \mu' e'(b) \sigma_P(z)^{-1}] \sigma_P(z) \sigma_P(w) = \\ &= \phi(a,z) \phi(b,w). \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$[(\phi f)e](a,x) = \phi\bar{e}(a,x) = \phi(a,e_0(x)) = \mu'e'(a)\sigma_P(e_0(x)) =$$

$$= e(\mu(a)\sigma(x)) = e(a,x). \quad \therefore\ (\phi f)e = e = 1_{G_P}e \ ,$$

donde $\phi f = 1_{G_P}$. Também,

$$f\phi(a,z) = f(\mu'e'(a)\sigma_P(z)) = fe\mu(a)f\sigma_P(z) = \bar{e}\mu(a)\bar{\sigma}(z) =$$

$$= \bar{\mu}(a)\bar{\sigma}(z) = (a,z) \quad \therefore \quad f\phi = 1_{\bar{G}} \ .$$

Está, portanto, completa a prova de que ϕ é inversa de f. $\square$

Para encerrar a análise da situação na qual A é um p-grupo abeliano finito supomos agora que $\exists q \in P'$ e $q \mid |\omega(X)|$.

Mais precisamente supomos que $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ é uma ação de um grupo X em um p-grupo abeliano finito A ($p \in P$). Digamos que

$$|\omega(X)| = q_1^{\alpha_1} \cdots q_\ell^{\alpha_\ell} \cdots q_t^{\alpha_t}$$

onde

$$P_1 = \{q_1, \ldots, q_\ell\} \subset P' \quad \text{e} \quad \{q_{\ell+1}, \ldots, q_t\} \subset P; \ (1 \leq \ell \leq t)$$

Consideremos $\Gamma = \Gamma(H)$ como foi definido logo após a proposição 3.1.22, bem como o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{\omega}"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(A/\Gamma) \\ X_P \arrow[ur, "\omega'"'] & \end{tikzcd}$$

considerado pelo corolário 3.1.25.

Definamos $G = A \rtimes_{\omega} X$, $G' = A/\Gamma \rtimes_{\omega'} X_P$ e fixemos o diagrama abaixo, onde: $\mu, \mu', \varepsilon, \varepsilon', \sigma, \sigma'$ são as aplicações usuais, π a aplicação quociente, e_0 a P-localização de X e

$$e'(a,x) = (a+\Gamma, e_0(x)) = (\pi(a), e_0(x))$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[r, two heads, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, "e'"] & X \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[d, "e_0"] \\
A/\Gamma \arrow[r, tail, "\mu'"] & G' \arrow[r, two heads, shift left, "\varepsilon'"] & X_P \arrow[l, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

Em virtude da definição das ações $\bar{\omega}$ e ω' decorre que π é homomorfismo de X-módulos. Isto produz como consequência o fato de que <u>e'</u> é homomorfismo.

Outrossim, o corolário 3.1.9 nos mostra que G' é P-local. Desta forma $\exists!$ $f \in \mathrm{Hom}(G_P, G')$ tq. $f\,e = e'$, onde $G \xrightarrow{e} G_P$ P-localiza G.

Estas considerações nos habilitam a construir um diagrama fundamental no contexto.

<u>Diagrama 3.2.5</u> -

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma \arrow[d] & & & & \\
 & A \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddl, "\bar e"'] & & G \arrow[rr, two heads, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, "e'"] \arrow[ddl, "e"'] & & X \arrow[ll, shift left, "\sigma"] \arrow[d, "e_0"] \arrow[ddl, "e_0"'] \\
 & A/\Gamma \arrow[rr, dashed, tail, "\mu'"] \arrow[dl, dashed, "\tilde e"'] & & G' \arrow[rr, dashed, two heads, shift left, "\varepsilon'"] & & X_P \arrow[ll, dashed, shift left, "\sigma'"] \arrow[dl, equal] \\
N \arrow[ur, "\bar f"] \arrow[rr, tail, "\bar\mu"] & & G_P \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, two heads, shift left, "\varepsilon_P"] & & X_P \arrow[ll, shift left, "\sigma_P"] & \\
B \arrow[u, tail] & & & & &
\end{tikzcd}$$

No diagrama anterior $N = \mathrm{Ker}\,\varepsilon_P$, $\bar{\mu}$ é a inclusão e é imediato que $\varepsilon' f = \varepsilon_P$ e $f\sigma_P = \sigma'$. Logo é possível definir, por restrição, $\bar{f}$ e $\bar{e}$ seguindo imediatamente que $\bar{f}\circ\bar{e}=\pi$. Em particular, $\bar{f}$ é sobrejetora. Pomos ainda $B = \ker \bar{f} \subset N$.

A definição de $\tilde{e}$ será introduzida após o próximo lema.

Lema 3.2.6 - $\bar{e}_{|\Gamma} = 0$.

Prova: Consideremos inicialmente, x um gerador de H (ie., $x \in X$ e $o(\omega(x)) = m \in P_1^\times$) e $b = \omega(x)a-a$, onde $a \in \Gamma$.

Temos,

$$(b,x)^m = (\theta_m(x)b, x^m) = (\theta_m(x)\circ(\omega(x)-1_A)a, x^m) =$$

$$= ((\omega(x)^m - 1_A)a, x^m) = (0, x^m) = (0,x)^m\ ,$$

de sorte que $e(b,x)^m = e(0,x)^m$.

Concluimos que $e(b,x) = e(0,x)$, já que G_P é P-local e

$m \in P_1^\times \subset P'^\times$. Logo, $e(b,1)e(0,x) = e(b,x) = e(0,x)$.

$\therefore \mu'\bar{e}(b) = e\mu(b) = e(b,1) = 1$. $\therefore$ $\bar{e}(b) = 1$.

Tomemos a seguir x_1, x_2 geradores de H e $b = \omega(x_1x_2)a-a$ onde $a \in \Gamma$. Desta forma,

$$b = \omega(x_1x_2)a-a = \omega(x_1)(\omega(x_2)a) - \omega(x_2)a + \omega(x_2)a-a\ ,$$

donde $b = b_1+b_2$ se $b_1 = \omega(x_1)(\omega(x_2a)) - \omega(x_2)a$ e

$b_2 = \omega(x_2)a-a$. Segue pois do argumento inicial que

$$e(b,1) = e(b_1+b_2,1) = e(b_1,1)e(b_2,1) = 1\cdot 1 = 1.$$

Lembrando que $\forall h \in H$, $\exists\ x_1,\ldots,x_k$ geradores de H tq. $h = x_1\ldots x_k$ obtemos imediatamente (por indução s/k) que

$$e(b,1) = 1 \ (\Longleftrightarrow \bar{e}(b) = 1) \text{ onde } b = \omega(h)a-a,\ a \in \Gamma.$$

Mostramos assim que $\forall b$ gerador de $\Gamma^{r+1}_{\omega_H} = \Gamma^{r}_{\omega_H} = \Gamma$ temos $\bar{e}(b) = 1$. $\therefore$ $\bar{e}(\Gamma) = \{1\}$ o que encerra a prova. $\square$

Fica desta forma definido por passagem ao quociente $\tilde{e} \in \mathrm{Hom}(A/\Gamma, N)$. (ie; $\tilde{e}\circ\pi = \bar{e}$).

Como decorrência obtemos $(\bar{f}\tilde{e})\pi = \bar{f}\bar{e} = \pi$, donde $\bar{f}\tilde{e} = 1_{A/\Gamma}$ o que mostra que a sequência exata

$B \rightarrowtail N \underset{\tilde{e}}{\overset{\bar{f}}{\rightleftarrows}} A/\Gamma$ cinde.

Estamos agora aptos a obter o segundo resultado fundamental deste parágrafo.

<u>Teorema 3.2.7</u> - Seja P uma família de primos e $p \in P$.

Seja $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ uma ação de um grupo X num p-grupo abeliano finito A. Suponhamos que

$$|\omega(X)| = q_1^{\alpha_1}\ldots q_\ell^{\alpha_\ell}\ldots q_t^{\alpha_t}\ . \qquad (\ell \leq t)$$

e

$$P_1 = \{q_1,\ldots,q_\ell\} \subset P' \quad \text{e} \quad \{q_{\ell+1},\ldots,q_t\} \subset P.$$

Sendo $G = A \rtimes_\omega X$; $G' = A/\Gamma \rtimes_{\omega'} X_P$ e $e': G \to G'$ dada por

$e'(a,x) = (\pi(a), e_0(x))$, afirmamos que e' P-localiza G.

Prova: É suficiente mostrar que $f\colon G_P \to G'$ descrita no diagrama 3.2.5 é um isomorfismo. Para isto vamos exibir sua inversa.

Seja $\phi\colon G' \to G_P$ definida por $\phi(\bar{a},z) = \bar{\mu}\tilde{e}(\bar{a})\sigma_P(z)$.

Para mostrarmos que $\phi \in \mathrm{Hom}(G',G_P)$ observemos inicialmente que as aplicações envolvidas no diagrama 3.2.5 satisfazem às hipóteses exigidas na proposição 3.2.2, uma vez que é imediato que π é homom. de X-módulos e

$$\bar{e}(\omega(x)a) = \omega_P(e_0(x))\bar{e}(a) \quad \forall a \in A,\ \forall x \in X.$$

A citada proposição nos capacita a afirmar que

$$\tilde{e}(\bar{\omega}(z)\bar{a}) = \omega_P(z)\tilde{e}(\bar{a}) \ ,\ \forall \bar{a} \in A/\Gamma \ \text{ e } \ \forall z \in X_P.$$

Desta forma temos:

$$\begin{aligned}
\phi(\bar{a},z)(\bar{b},w)) &= \phi(\bar{a}+\bar{\omega}(z)\bar{b},zw) = \bar{\mu}\tilde{e}(\bar{a})\bar{\mu}\tilde{e}(\bar{\omega}(z)\bar{b})\sigma_P(z)\sigma_P(w) = \\
&= \bar{\mu}\tilde{e}(a)\bar{\mu}(\omega_P(z)\tilde{e}(\bar{b}))\sigma_P(z)\sigma_P(w) = \\
&= \bar{\mu}\tilde{e}(\bar{a})[\sigma_P(z)\bar{\mu}\tilde{e}(\bar{b})\sigma_P(z)^{-1}]\sigma_P(z)\sigma_P(w) = \\
&= \phi(\bar{a},z)\phi(\bar{b},w).
\end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
[(\phi f)e](a,x) &= \phi e'(a,x) = \phi(\pi(a),e_0(x)) = \\
&= \bar{\mu}\tilde{e}(\pi(a))\sigma_P e_0(x) = e(\mu(a)\sigma(x)) = \\
&= e(a,x). \quad \therefore\ \phi f = 1_{G_P} .
\end{aligned}$$

Também,

$$f\phi(\bar{a},z) = f(\bar{\mu}\tilde{e}(\bar{a}),\sigma_P(z)) = \mu'\bar{f}\tilde{e}(\bar{a})f\sigma_P(z) =$$

$$= \mu'(a)\sigma'(z) = (\bar{a},z). \quad \therefore \quad f\phi = 1_{G'} \qquad \square$$

Para finalizar esta secção vamos passar à análise do caso em que A é (apenas) um grupo abeliano finito.

Seja $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ uma ação de um grupo X num grupo abeliano finito A. Suponhamos

$$|A| = p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}$$

e seja A_i a componente p_i-primária de A.

É bem conhecido que

$$A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_i \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Aut}(A) \cong \prod_{i=1}^{t} \mathrm{Aut}(A_i)$$

Com isto ficam ùnicamente determinadas ações $\omega_1,\ldots,\omega_t$ por ω, onde

$$X \xrightarrow{\omega_i} \mathrm{Aut}(A_i)$$

é dada por $\omega_i(x)a_i = \omega(x)a_i$; $i=1,\ldots,t$.

Denotamos por

$$G = A \rtimes_{\omega} X \ , \ G_i = A_i \rtimes_{\omega_i} X \ , \qquad \varepsilon\colon G \twoheadrightarrow X \quad \text{e} \quad G_i \xrightarrow{\varepsilon_i} X$$

as projeções canônicas. É um fato elementar que ε é o pull-back da família $\{\varepsilon_i\}_{1\leq i\leq t}$. Denotamos por $G \xrightarrow{\pi_i} G_i$ as projeções naturais, $G \xleftarrow[\sigma]{} X$ e $G_i \xleftarrow{\sigma_i} X$ as cisões; com isto $\pi_i\sigma = \sigma_i$, $i=1,\ldots,t$.

Consideramos também $\bar{G} \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} X_P$ o pull-back das flexas

$$\left\{ (G_i)_P \xrightarrow{(\varepsilon_i)_P} X_P \right\}_{1 \leq i \leq t}$$

(Notemos que $\bar{\varepsilon}$ é epimorfismo, uma vez que $(\varepsilon_i)_P$ é epim. $\forall i$).

Observamos que $\forall i=1,\ldots,t$, $(\varepsilon_i)_P \circ (\sigma_i)_P = 1_{X_P}$ donde da definição de pull-back, $\exists !\ \bar{\sigma} \in \mathrm{Hom}(X_P, \bar{G})$ tq.

$$\bar{\pi}_i \circ \bar{\sigma} = (\sigma_i)_P \quad \forall i \ ,$$

(onde $\bar{\pi}_i : \bar{G} \to (G_i)_P$ é a aplicação canônica).

Denotando por $G_i \xrightarrow{e_i} (G_i)_P$ a P-localização de G_i observamos que $(\varepsilon_i)_P [e_i \pi_i] = e_0 \varepsilon_i \pi_i = e_0 \varepsilon$, $\forall i$. $\therefore$ por definição de pull-back, $\exists !\ f \in \mathrm{Hom}(G, \bar{G})$ tq. $\bar{\pi}_i f = e_i \pi_i$, $\forall i = 1,\ldots,t$.

Agora é óbvio que $\bar{\varepsilon} f = e_0 \varepsilon$. Também é imediato que $f\sigma = \bar{\sigma} e_0$ (por unicidade) e $\bar{\varepsilon}\bar{\sigma} = 1_{X_P}$ (donde $\bar{G}$ é um produto semi-direto).

Outrossim, $\bar{G}$ é P-local devido à prop. 3.1.1.

Mais ainda, $\forall i$, $(\varepsilon_i)_P \circ (\pi_i)_P = (\varepsilon_i \circ \pi_i)_P = \varepsilon_P$. Logo, da definição de pull-back,

$$\exists !\ \phi \in \mathrm{Hom}(G_P, \bar{G}) \text{ tq. } \bar{\pi}_i \circ \phi = (\pi_i)_P .$$

Em particular, concluimos que $\bar{\pi}_i$ é epimorfismo, $\forall i$. (pois $(\pi_i)_P$ o é!). Do fato de que $\bar{\pi}_i f = \bar{\pi}_i (\phi e)$ $\forall i$ segue, por unicidade, que $f = \phi e$.

Também pelos argumentos usuais de unicidade concluimos que $\bar{\varepsilon}\phi = \varepsilon_P$ e $\phi\sigma_P = \bar{\sigma}$.

Finalmente, denotamos por $C = \ker\bar{\varepsilon} \cong \bigoplus_{i=1}^{t} \ker(\varepsilon_i)_P$ em vista de $\bar{G}$ ser pull-back, e $\bar{\mu}\colon C \hookrightarrow \bar{G}$. Pomos também,

$$N = \ker(\varepsilon_P) \quad \text{e} \quad \mu'\colon N \hookrightarrow G_P\ .$$

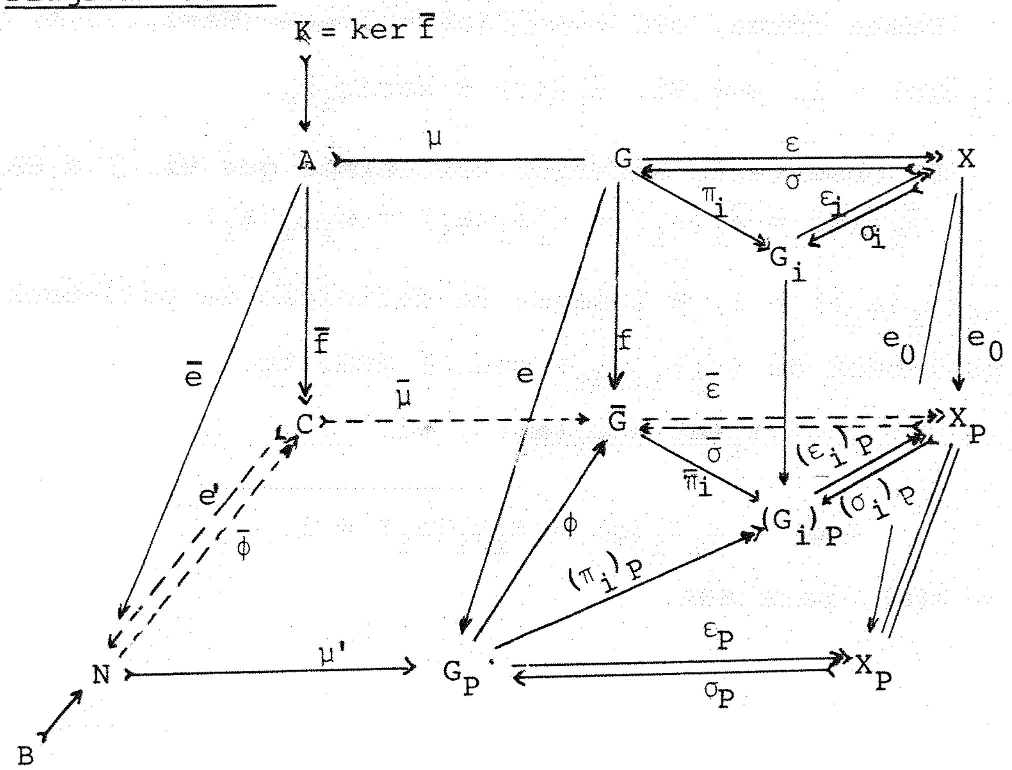
As aplicações e,f e ϕ definem, respectivamente, por restrição homomorfismos $\bar{e}\colon A \longrightarrow N$, $\bar{f}\colon A \to C$ e $\bar{\phi}\colon N \to C$, de sorte que:

$$\mu'\bar{e} = e\mu\ ;\quad \bar{\mu}\bar{\phi} = \phi\mu' \quad \text{e} \quad \bar{\mu}\bar{f} = f\mu\ .$$

Indicamos também por $B = \ker\bar{\phi} \subset N$ e mostraremos a seguir que $\bar{e}$ fatora-se através de uma aplicação $e'\colon C \to N$.

Com estas considerações mostramos que todos os sub-diagramas do diagrama a seguir são comutativos.

Diagrama 3.2.8



Para justificar todas as indicações do diagrama ainda necessitamos de 2 lemas.

Lema 3.2.9 - $\bar{f}$ é epimorfismo.

Prova. Para cada i=1,...,t temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, tail, "\mu_i"] \arrow[d, "\bar{e}_i"] & G_i \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i"] \arrow[d, "e_i"] & X \arrow[d, "e_0"] \\ \mathrm{Ker}(\varepsilon_i)_P \arrow[r, tail, "\mu_i'"] & (G_i)_P \arrow[r, two heads, "(\varepsilon_i)_P"] & X_P \end{tikzcd}$$

μ_i' = inclusão e $\bar{e}_i$ é definida por restrição de e_i. A prop. 3.2.1, o teor. 3.2.4, e o teor. 3.2.7 nos dizem que fixado i, então $\ker(\varepsilon_i)_P = (0)$ ou $\ker(\varepsilon_i)_P = A_i$ ou $\ker(\varepsilon_i)_P = A_i/\Gamma_i$ e $\bar{e}_i = 0$ ou identidade ou projeção canônica, sendo $\therefore$ sobrejetora em qquer caso.

Desta forma, $c \in C \iff \bar{\varepsilon}\bar{\mu}(c) = 1 \iff (\forall i=1,\dots,t)$; $(\varepsilon_i)_P\bar{\pi}_i\bar{\mu}(c) = 1. \iff \forall i,\ \bar{\pi}_i\bar{\mu}(c) \in \ker(\varepsilon_i)_P$.

Da observação anterior concluimos que $\forall i$, $\exists\ a_i \in A_i$ tq $\quad \bar{\pi}_i\bar{\mu}(c) = \bar{e}_i(a_i) = \mu_i'\bar{e}_i(a_i) = e_i\mu_i(a_i)$.

Como $\varepsilon_i(\mu_i(a_i)) = 1$, $\forall$ i segue da definição de pull-back (ε é pull-back de $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq t}$) que $\exists$ $g \in G$. tq.

$$\pi_i(g) = \mu_i(a_i)\ ,\ \forall i.$$

Mas, $$\varepsilon(g) = \varepsilon_i\pi_i(g) = \varepsilon_i\mu_i(a_i) = 1.$$

$\therefore$ $g = \mu(a)$, para $a \in A$.

Logo,

$$\bar{\pi}_i \mu \bar{f}(a) = \bar{\pi}_i f \mu(a) = e_i \pi_i(g) = e_i \mu_i(a_i) = \bar{\pi}_i \bar{\mu}(c) \quad , \forall i$$

Daí

$$\bar{\mu}\bar{f}(a) = \bar{\mu}(c) \quad , \text{ donde } \bar{f}(a) = c. \qquad \square$$

A seguir lembramos $(\forall a \in A)$; $(\forall x \in X)$ se

$$a = a_1 + \ldots + a_t \in \bigoplus_{i=1}^{t} A_i \ ,$$

então

$$f(a,x) = (e_1(a_1,x) \ \ldots \ e_t(a_t,x))$$

por definição (pois $\bar{\pi}_i f = e_i \pi_i$).

Desta forma, se $a \in A$ e $a = a_1 + \ldots + a_t \in \overset{t}{\underset{i=1}{}} A_i$,

então

$$\bar{f}(a) = f\mu(a) = f(a,1) = (e_1(a_1,1),\ldots,e_t(a_t,1)) =$$

$$= (e_1\mu_1(a_1),\ldots,e_t\mu_t(a_t)) =$$

$$= (\bar{e}_1(a_1),\ldots,\bar{e}_t(a_t)).$$

Logo, $a \in K \iff \bar{f}(a) = 0 \iff \bar{e}_i(a_i) = 0$,

$\forall i = 1,\ldots,t \iff a_i \in K_i = \ker \bar{e}_i$, $\forall i$.

$$K = \bigoplus_{i=1}^{t} K_i$$

$$(K = \{a = a_1 + \ldots + a_t \in \bigoplus_{i=1}^{t} A_i : \ \bar{e}_i(a_i) = 0 \ , \ \forall i=1,\ldots,t\}).$$

Lembramos também que $\pi_i : (a,x) \in G \longmapsto (a_i,x) \in G$;

admite uma cisão $\nu_i : G_i \hookrightarrow G$ definida simplesmente por:

$$\nu_i(a_i,x) = (a_i,x) \ \text{(inclusão)} \ , \ \forall a_i \in A_i , \ \forall x \in X \ .$$

Salientamos que ν_i é homomorfismo devido à definição de ω_i relativamente a ω.

<u>Lema 3.2.10</u> - $\bar{e}\big|_K = 0.$

<u>Prova</u>: Uma vez que $K = \bigoplus_{i=1}^{t} K_i$, basta mostrar que $\bar{e}\big|_{K_i} = 0$, $\forall i$. Fixemos pois <u>i</u> e consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "\mu"] & \\
a\in K_i \arrow[r, hook] & A_i \arrow[ur, hook] \arrow[r, tail, "\mu_i"] \arrow[d, two heads, "\bar{e}_i"] & G_i \arrow[r, tail, "\nu_i"] \arrow[d, "e_i"] & G \arrow[d, "e"] \\
 & \mathrm{Ker}(\varepsilon_i)_P \arrow[r, tail, "\mu'_i"'] & (G_i)_P \arrow[r, tail, "(\nu_i)_P"'] & G_P
\end{tikzcd}$$

Dado $a\in K_i$, $e\mu(a) = (\nu_i)_P\mu'_i\bar{e}_i(a) = (\nu_i)_P\mu'_i(0) = 1$ pois o diagr. é comutativo e $a\in K_i = \mathrm{Ker}\,\bar{e}_i$.

$\therefore \mu'\bar{e}(a) = e\mu(a) = 1$, donde $\bar{e}(a) = 1$. □

Este lema nos permite definir $e': C \to N$ por $e'\circ f = \bar{e}$. Daí que $(\bar{\phi}e')\bar{f} = \bar{\phi}\bar{e} = \bar{f}$. Logo, $\bar{\phi}e' = 1_C$ pois $\bar{f}$ é sobrejetora.

Concluimos pois que a sequência exata $B \rightarrowtail N \underset{e'}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} C$ cinde.

Relativamente às ações $X_P \xrightarrow{\bar{\omega}} \mathrm{Aut}(C)$ e $X_P \xrightarrow{\omega_P} \mathrm{Aut}(N)$ definidas por $\bar{\sigma}$ e σ_P temos o próximo lema.

<u>Lema 3.2.11</u> - $(\forall x \in X)$, $(\forall a \in A)$ temos:

(i) $\bar{f}(\omega(x)a) = \bar{\omega}(e_0(x))\bar{f}(a)$

(ii) $\bar{e}(\omega(x)a) = \omega_P(e_0(x))\bar{e}(a)$

<u>Prova</u>: (i) $\bar{\mu}\bar{f}(\omega(x)a) = f(\sigma(x)\mu(a)\sigma(x)^{-1}) =$

$= \bar{\sigma}(e_0(x))\bar{\mu}\bar{f}(a)\bar{\sigma}(e_0(x))^{-1} =$

$= \bar{\mu}(\bar{\omega}(e_0(x))\bar{f}(a))$.

(ii) $\mu'\bar{e}(\omega(x)a) = e(\sigma(x)\mu(a)\sigma(x)^{-1}) =$

$= \sigma_P(e_0(x))\mu'\bar{e}(a)\sigma_P(e_0(x)) =$

$= \mu'(\omega_P(e_0(x))\bar{e}(a))$ $\square$

Podemos agora mostrar o último resultado fundamental deste parágrafo.

<u>Teorema 3.2.12</u> - Seja P uma família de primos e $X \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(A)$ uma ação de um grupo X num grupo abeliano finito A. Suponhamos que $|A| = p_1^{\beta_1} \ldots p_t^{\beta_t}$ e A_i é a componente p_i-primária de A. Seja $X \xrightarrow{\omega_i} \mathrm{Aut}(A_i)$ induzida por ω.

Definamos $G = A \rtimes_\omega X$; $G_i = A_i \rtimes_{\omega_i} X$; $G \xrightarrow{\varepsilon} X$; $G_i \xrightarrow{\varepsilon_i} X$ as projeções canônicas.

Nestas condições sendo $\bar{G} \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} X_P$ o pull-back da família $(G_i)_P \xrightarrow{(\varepsilon_i)_P} X_P$; $i=1,\ldots,t$, então o homomorfismo canônico $G \xrightarrow{f} \bar{G}$ P-localiza G.

<u>Prova</u>: É suficiente mostrar que o homomorfismo ϕ do diagrama 3.2.8 é um isomorfismo.

Para isto definimos $\bar{G} \xrightarrow{\psi} G_P$ por:

$$\psi(\bar{\mu}(c)\bar{\sigma}(z)) = \mu' e'(c)\sigma_P(z).$$

(Lembramos aqui que a seq. exata $C \rightarrowtail{\bar{\mu}} G \underset{\bar{\sigma}}{\overset{\bar{\varepsilon}}{\rightleftarrows}} X_P$ cinde, donde $\forall \bar{g} \in G$ $\exists!$ $c \in C$ e $\exists!$ $z \in X_P$ tq. $\bar{g} = \bar{\mu}(c)\bar{\sigma}(z)$).

O Lema 3.2.11 nos mostra que o diagrama 3.2.8 satisfaz às hipóteses da proposição 3.2.2.

Desta forma temos $e'(\bar{\omega}(z)c) = \omega_P(z)e'(c)$, $\forall c \in C$, $\forall z \in X_P$. Logo,

$$\psi(\bar{\mu}(c)\bar{\sigma}(z)\bar{\mu}(c')\bar{\sigma}(z')) = \psi(\bar{\mu}(c+\bar{\omega}(z)c')\bar{\sigma}(zz')) =$$

$$= \mu' e'(c)\mu' e'(\bar{\omega}(z)c')\sigma_P(z)\sigma_P(z') =$$

$$= \mu' e'(c)\mu'(\omega_P(z)e'(c'))\sigma_P(z)\sigma_P(z') =$$

$$= \mu' e'(c)[\sigma_P(z)\mu' e'(c')\sigma_P(z)^{-1}]\sigma_P(z)\sigma_P(z') =$$

$$= \psi(\bar{\mu}(c)\bar{\sigma}(z))\psi(\bar{\mu}(c')\bar{\sigma}(z') \quad \therefore \ \psi \in \mathrm{Hom}(\bar{G},G_P).$$

Agora,

$$[(\psi\phi)e](a,x) = \psi f(a,x) = \psi f(\mu(a)\sigma(x)) =$$

$$= \Psi(\bar{\mu}\bar{f}(a)\bar{\sigma}e_0(x)) =$$

$$= \mu' e'(\bar{f}(a))\sigma_P(e_0(x)) = e\mu(a)e\sigma(x) =$$

$$= e(a,x) \quad \therefore \ \psi\phi = 1_{G_P}.$$

Também, $\phi\psi(\bar{\mu}(c)\bar{\sigma}(z)) = \phi(\mu' e'(c)\sigma_P(z)) = \bar{\mu}(c)\bar{\sigma}(z) \ \therefore \ \phi\psi = 1_{\bar{G}}$.

Está, pois, completa a prova de que $\phi^{-1} = \psi$. $\square$

§ 3.3. Nesta secção estabelecemos a teoria de localização para a categoria dos grupos que são extensão de um nilpotente por um abeliano finito em uma família de primos P. Est teoria foi desenvolvida anteriormente para a categoria dos grupos nilpotentes por P. Hilton, G. Mislin e J. Roitberg em [H.M.R.].

Consideremos $\mathcal{C}$ a categoria na qual os objetos são os grupos que são extensão de um grupo nilpotente por um abeliano finito, e os morfismos são os homomorfismos de grupos.

Trabalhamos inicialmente no sentido de a cada $G \in |\mathcal{C}|$ associa $G_P \in |\mathcal{C}|$, fixada uma família de primos P.

<u>Proposição 3.3.1</u> - Seja $A \rightarrowtail^{\mu} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ uma sequência exata de grupos, onde A é abeliano finito e X nilpotente. Consideremos $\omega: X \longrightarrow Aut(A)$ a ação associada à extensão e suponhamos que $\Gamma^{2}_{\omega} = A$.

Nestas condições, dados $\beta \in Hom(G,K)$ e $B \overset{\nu}{\rightarrowtail} K \overset{\kappa}{\twoheadrightarrow} Y$ onde B é abeliano finito e Y nilpotente afirmamos que $\exists$ homomorfismos α, γ tornando comutativo o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, tail, "\nu"] & K \arrow[r, two heads, "\kappa"] & Y \end{tikzcd}$$

<u>Prova</u>: Seja $H = \kappa\beta\mu(A) < Y$. Assim que,

$$\kappa\beta\mu(\omega(x)a-a) = \kappa\beta(g.\mu(a)g^{-1}\mu(a)^{-1})$$

onde $\varepsilon(g) = x$

$$\therefore \kappa\beta\mu(\omega(x)a-a) = \kappa\beta(g)\kappa\beta\mu(a)\kappa\beta(g)^{-1}\kappa\beta\mu(a)^{-1} \in [Y,H],$$

$\forall x \in X$, $\forall a \in A$.

$$\therefore H = \kappa\beta\mu(A) = \kappa\beta\mu(\Gamma_\omega^2) \subset [Y,H].$$

Logo,

$$H \subset [Y,H] \subset [Y,Y] = \Gamma^2 Y.$$

Supondo (para $k \geq 3$) que $H \subset \Gamma^{k-1}Y$, temos:

$$H \subset [Y,H] \subset [Y,\Gamma^{k-1}Y] = \Gamma^k Y.$$

Segue pois, por indução, que $H \subset \Gamma^{c+1}Y = \{1\}$ (onde $c=\text{nil}\,Y$).

$\therefore$ $\beta\mu(A) \subset \ker\kappa = \text{im}\nu$.

Fica, pois, definida por restrição $\alpha \in \text{Hom}(A,B)$ tq. $\nu\alpha = \beta\mu$. Podemos agora definir, por passagem ao quociente $\gamma \in \text{Hom}(X,Y)$ tq. $\gamma\varepsilon = \kappa\beta$. $\square$

<u>Proposição 3.3.2</u> - $(\forall G \in |\mathcal{C}|)\ \exists!\ U = U(G) \lhd G$, U abeliano finito com G/U nilpotente satisfazendo à propriedade de que sendo $\Omega: G/U \longrightarrow \text{Aut}(U)$ a ação associada à extensão $U \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/U$ temos $\Gamma_\Omega^2 = U$.

<u>Prova</u>: $G \in |\mathcal{C}| \Longrightarrow \exists$ extensão $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$ onde A é abeliano finito e X nilpotente.

Seja $\omega: X \longrightarrow \text{Aut}(A)$ a ação dada por $\mu(\omega(x)a) = g\mu(a)g^{-1}$, onde $\varepsilon(g) = x$. Em virtude de A ser finito podemos concluir que $\Gamma_\omega^2 = A$ (e daí a prova da existência está completa) ou $\exists\ r \geq 2$ tal que $\Gamma_\omega^{r-1} \supsetneqq \Gamma_\omega^r$ e $\Gamma_\omega^r = \Gamma_\omega^{r+1}$.

Provemos inicialmente, por indução, que $\mu(\Gamma_{\omega}^{k}) \triangleleft G$. Uma vez que para k=1 ocorre por hipótese, supondo $\mu(\Gamma_{\omega}^{k-1}) \triangleleft G$ temos: $x \in X$, $a \in \Gamma_{\omega}^{k-1}$, fixado $h \in G$. Suponhamos que $\varepsilon(g) = x$ e $\varepsilon(h) = y$. Então,

$$h.\mu(\omega(x)a-a)h^{-1} = \mu(\omega(y)(\omega(x)a-a)) =$$
$$= \mu(\omega(yx)a-\omega(y)a) =$$
$$= \mu(\omega(yx)a-a)\mu(\omega(y)a-a)^{-1} \in \Gamma_{\omega}^{k}$$

$$\therefore \mu(\Gamma_{\omega}^{k}) \triangleleft G$$

Em particular, $U = \mu(\Gamma) \triangleleft G$: Também, U é abeliano e finito.

Mais ainda, considerando-se a sequência exata $A/\Gamma \overset{\bar{\mu}}{\rightarrowtail} G/U \overset{\bar{\varepsilon}}{\twoheadrightarrow} X$, onde $\bar{\mu}$ e $\bar{\varepsilon}$ são induzidos por μ e ε, e $\bar{\omega}$ a ação de X em A/Γ associada segue que $\Gamma_{\bar{\omega}}^{k} = \Gamma_{\omega}^{k}/\Gamma$ donde $\Gamma_{\bar{\omega}}^{r} = (0)$. Concluimos, pois, que G/U é nilpotente, uma vez que $\bar{\omega}$ e X são nilpotentes.

Consideremos a seguir $\Omega: G/U \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ dada por:

$$\Omega(gU)u = g.u.g^{-1}$$

Sendo $U = \mu(\Gamma) = \mu(\Gamma_{\omega}^{r+1})$ segue que U gerado por $\mu(\omega(x)a-a)$; $x \in X$; $a \in \Gamma$. Mas,

$$\mu(\omega(x)a-a) = g\mu(a)g^{-1}\mu(a)^{-1} = [\Omega(gU)\mu(a)]\mu(a)^{-1} \in \Gamma_{\Omega}^{2}$$

Daí que $U \subset \Gamma_{\Omega}^{2}$.

Para verificar a unicidade de U suponhamos que $V \triangleleft G$, V abeliano e finito e G/V nilpotente tq $\Gamma_{G/V}^{2} V = V$.

Devido à proposição anterior (3.3.1) $\exists$ homomorf. α , α' que tornam comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, tail, "i_U"] \arrow[d, shift left, "\alpha"] & G \arrow[d, equal] \\ V \arrow[r, tail, "i_V"] \arrow[u, shift left, "\alpha'"] & G \end{tikzcd}$$

Segue pois que α é a inclusão de U em V e α' é a inclusão de V em U. $\therefore$ U = V. $\square$

Seja agora $\mathcal{C}_p$ a sub-categoria plena de $\mathcal{C}$ definida de modo que os objetos são os grupos que são extensão de um nilpotente por um p-grupo abeliano finito (p = primo fixo).

<u>Corolário 3.3.3</u> - $G \in |\mathcal{C}_p| \Longrightarrow U = U(G)$ é um p-grupo abeliano finito.

<u>Prova</u>: De fato, $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} G \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$; A - p-grupo abeliano finito e $U = \mu(\Gamma) \trianglelefteq \mu(A)$ = p-grupo abeliano finito. $\square$

<u>Corolário 3.3.4</u> - $G \in |\mathcal{C}|$; G é nilpotente $\Longleftrightarrow U = U(G) = \{1\}$

<u>Prova</u>: ($\Longrightarrow$) G nilpotente $\Longrightarrow \Omega : G/U \longrightarrow Aut(U)$ é nilpotente. Logo,

$$U = \Gamma_\Omega^2 = \Gamma_\Omega^3 = \ldots = \Gamma_\Omega^{c+1} = \{1\}.$$

($\Longleftarrow$) $U = \{1\} \Longrightarrow G \cong G/U$ nilpotente. $\square$

<u>Corolário 3.3.5</u> - $\exists$ p,q primos, $p \neq q$ tq.

$$G \in |\mathcal{C}_p| \cap |\mathcal{C}_q| \Longleftrightarrow G \text{ é nilpotente.}$$

Prova: ($\Longleftarrow$) G nilpotente $\Longrightarrow U = \{1\}$ Logo, $G \in |C_p|$ $\forall p$ primo. (pois $\{1\}$ é p-grupo $\forall p$).

($\Longrightarrow$) Devido ao corolário 3.3.3; U é p-grupo finito e q-grupo finito. $\therefore$ $|U| = 1$ $\therefore$ G é nilpotente. $\square$

Passamos a seguir à definição de $G_p \in |C|$ para cada $G \in |C|$. Dado $G \in |C|$ fixamos a seqüência exata $U \rightarrowtail G \xrightarrow{\varepsilon} G/U$ onde U é o sub-grupo definido na proposição 3.3.2 e ω: $G/U \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ dada por $\omega(gU)u = g.u.g^{-1}$.

Seja P uma família de primos fixada e consideremos e_0: $G/U \longrightarrow (G/U)_e$ a P-localização de G/U em η. Fixemos também p primo e suponhamos inicialmente que $G \in |C_p|$.

(I) $p \in P'$. Pomos, neste caso, $e = e_0 \circ \varepsilon$ onde $G \xrightarrow{\varepsilon} G/U \xrightarrow{e_0} (G/U)_P$. Temos pois:

$$\begin{array}{ccccc}
U & \rightarrowtail & G & \twoheadrightarrow & G/U \\
\downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e_0 \\
\bar{U} = (0) & \rightarrowtail & (G/U)_P & = & (G/U)_P
\end{array}$$

(II) $p \in P$. Aqui sub-dividimos em dois casos.

Suponhamos que $|\omega(G/U)| = q_1^{\alpha_1} \ldots q_\ell^{\alpha_\ell} \ldots q_t^{\alpha_t}$.

(II)a) $P \supset \{q_1 \ldots, q_t\}$.

Neste caso $\omega(G/U)$ é um P-sub-grupo de torção de Aut(U) e $\therefore$ da proposição 3.1.5, $\exists!$ ação ω_P: $(G/U)_P \to \mathrm{Aut}(U)$ tq. $\omega_P \circ e_0 = \omega$.

Lembrando que U é abeliano P-local (p∈P) segue do teor. 3.1.20 que $H^2_{\omega_P}((G/U)_P;U) \xrightarrow{e_0^*} H^2_{\omega}(G/U;U)$ é isomorfismo.

Seja, pois, ξ_P (único) tq. $e_0^*\xi_P = \xi$.

A prop. 3.1.16 nos mostra que ∃ um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \xi: & U \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "e"] & G/U \arrow[d, "e_0"] \\ \xi_P: & U \arrow[r, tail, "\bar{\mu}"] & G_P \arrow[r, two heads, "\varepsilon_P"] & (G/U)_P \end{tikzcd}$$

(II)b) Suponhamos, finalmente, que ∃ ℓ, $1 \leq \ell \leq t$ tq.

$$P_1 = \{q_1,\ldots,q_\ell\} \subset P' \quad \text{e} \quad \{q_{\ell+1},\ldots,q_t\} \subset P.$$

Nesta situação consideramos

$$H = \langle x \in G/U:\ o(\omega(x)) \in P_1^\times \rangle \ ;$$

$$\Gamma = \Gamma(H) \ ; \quad \bar{\omega}: G/U \longrightarrow \mathrm{Aut}(U/\Gamma)$$

conforme já definíramos logo após o teorema 3.1.20.

Conforme o Corolário 3.1.25, ∃ um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G/U \arrow[r, "\bar{\omega}"] \arrow[d, "e_0"'] & \mathrm{Aut}(U/\Gamma) \\ (G/U)_P \arrow[ur, dashed, "\omega_P"'] & \end{tikzcd}$$

(onde ω_P é única).

Consideremos a seguir o diagrama:

$$\begin{tikzcd} H^2_\omega(G/U;U) \arrow[r, "\pi_*"] & H^2_{\bar\omega}(G/U;U/\Gamma) \\ & H^2_{\omega_P}((G/U)_P;U/\Gamma) \arrow[u, "\cong"', "e_0^*"] \end{tikzcd}$$

Note-se que $\pi: U \twoheadrightarrow U/\Gamma$ é a projeção canônica, e novamente pelo teor. 3.1.20 segue que e_0^* é isomorfismo.

$$\therefore \exists!\ \xi_P \in H^2_{\omega_P}((G/U)_P;U/\Gamma) \quad \text{tq.} \quad e_0^*\xi_P = \pi_*(\xi).$$

Mais uma vez a prop. 3.1.16 nos mostra que $\exists$ um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \xi: & U \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "e"] & G/U \arrow[d, "e_0"] \\ \xi_P: & U/\Gamma \arrow[r, tail, "\bar\mu"] & G_P \arrow[r, two heads, "\varepsilon_P"] & (G/U)_P \end{tikzcd}$$

Observamos a seguir que a esta altura temos definido para cada $G \in \biguplus_P |C_P|$ um grupo $G_P \in \biguplus_P |C_P|$. Esta definição é boa pois, se $G \in |C_P| \cap |C_q|$, então $G \in |\eta|$. Daí $U = \{1\}$, donde só podem ocorrer os casos (I) ou (II)a) e ambos levam à construção de $G_P = (G/U)_P$.

Em particular observamos que esta construção estende aquela definida em [H.M.R.].

O exemplo seguinte mostra que

$$|C| \setminus \biguplus_P |C_P| \neq \emptyset .$$

Exemplo 3.3.6 - Seja

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3) \oplus \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5)$$

definida por $\omega_1(1)a = 2a$; $\omega_2(1)b = 2b$.

Seja $G = (\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5) \rtimes_\omega \mathbb{Z}$. É imediato que $\Gamma^2_\omega = \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5$ donde G não é nilpotente. Entretanto,

$$A = \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5 \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} .$$

$\therefore$ $G \in |\mathcal{C}|$. Mais ainda, $\mu(A) = U(G)$, pois $\Gamma^2_\omega = A$.

Desta forma $G \notin |\mathcal{C}_p|$ $\forall p$ primo, caso contrário U seria um p-grupo abeliano finito para algum p conforme o cor. 3.3.3.

$\square$

Vamos agora completar a construção de G_p a categoria $\mathcal{C}$.

(III) Seja $G \in |\mathcal{C}| \setminus \bigsqcup_p |\mathcal{C}_p|$. Neste caso $U = U(G)$ não é p-grupo, $\forall p$. Entretanto, $U = \bigoplus_{i=1}^{t} U_i$, onde U_i é a componente p_i-primária de U.

Desta forma

$$G/U \xrightarrow{\omega} \mathrm{Aut}(U) \cong \prod_{i=1}^{t} \mathrm{Aut}(U_i) \quad \text{e} \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_t) .$$

Devido à definição de ω_i e de $\Gamma^2_\omega = U$ segue $\Gamma^2_{\omega_i} = U_i$, $\forall i$.

Denotamos por $U \xrightarrow{\pi_i} U_i$ a projeção canônica. Sabemos que

$$H^2_\omega(G/U;U) \xrightarrow[\cong]{(\pi_{1*}, \ldots, \pi_{t*})} \bigoplus_{i=1}^{t} H^2_{\omega_i}(G/U;U_i)$$

é um isomorfismo cuja inversa é definida pelo pull-back.

Indiquemos por $\xi = [U \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G/U]$, $\xi_i = \pi_{i*}\xi$ e consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\xi \in H^2_\omega(G/U;U) \arrow[r, "(\bar\pi_{1*},\dots,\bar\pi_{t*})", "\cong"'] \arrow[d, "\rho_*"'] & (\xi_i)_i \in \bigoplus_{i=1}^t H^2_{\omega_i}(G/U;U_i) \arrow[d, "\bigoplus_{i=1}^t \rho_{i*}"] \\
\xi_P \in H^2_{\omega_P}((G/U)_P, \bar U) \arrow[r, "(\bar\pi_{1*},\dots,\bar\pi_{t*})", "\cong"'] & ((\xi_i)_P)_i \in \bigoplus_{i=1}^t H^2_{(\omega_i)_P}((G/U)_P;\bar U_i)
\end{tikzcd}$$

onde

$$\begin{tikzcd}
\xi_i : U_i \arrow[r, tail, "\mu_i"] \arrow[d, "\rho_i"'] & G_i \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i"] \arrow[d, "e_i"] & G/U \arrow[d, "e_0"] \\
(\xi_i)_P : \bar U_i \arrow[r, tail, "\bar\mu_i"] & (G_i)_P \arrow[r, two heads, "(\varepsilon_i)_P"] & (G/U)_P
\end{tikzcd}$$

é definido pelos casos anteriores ((I) ou (II)a) ou (II)b).).

Também $\bar U = \bigoplus_{i=1}^t \bar U_i$ e ξ_P (único) é tq.

$$(\bar\pi_{1*},\dots,\bar\pi_{t*})(\xi_P) = ((\xi_i)_P)_i$$

($\bar\pi_i : \bar U \twoheadrightarrow \bar U_i$ projeção canônica); $\rho = \bigoplus_{i=1}^t \rho_i$.

As construções efetuadas podem ser visualizadas no diagrama:

Diagrama 3.3.7

$$\begin{tikzcd}
\xi : U \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[ddd, "\rho"'] & G \arrow[rrr, two heads, "\varepsilon"] \arrow[drr] \arrow[ddd, "e"] & & & G/U \arrow[ddd, "e_0"] \\
& & & G_i \arrow[ur, "\varepsilon_i"] \arrow[ddd, "e_i"] & \\
& & \xi_i : U_i \arrow[ur] \arrow[ddd, "\rho_i"] & & \\
\xi_P : \bar{U} \arrow[r, tail, "\bar{\mu}"] & G_P \arrow[rrr, dashed, two heads, "\varepsilon_P"] \arrow[drr, dashed] & & & (G/U)_P \\
& & & (G_i)_P \arrow[ur, "(\varepsilon_i)_P"] & \\
& & (\xi_i)_P : \bar{U}_i \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Temos, pois, que ε_P é o pull-back das flechas $\{(\varepsilon_i)_P\}_{1 \leq i \leq t}$, uma vez que, por definição: $\xi_P = \rho_* \xi$.

A respeito da aplicação $e: G \to G_P$ definida em (I), (II) e (III) temos as duas próximas proposições abaixo.

Proposição 3.3.8 - e é P-sobrejetora.

Prova: No caso (I) $e = e_0 \circ \varepsilon$ é P-sobrejetora pois e_0 é P-sobrejetora e ε é sobrejetora.

Da mesma forma nos casos (II)a), (II)b) ou (III) e é definida através de um diagrama onde e_0 é P-sobrejetora e 1_U ((II)a)); π ((II)b); ou ρ ((III)) são sobrejetoras.

$\square$

Corolário 3.3.9 - $G \xrightarrow{e} G_P \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} K$, K P-local. Então,

$fe = ge \Longrightarrow f = g$. $\square$

Proposição 3.3.10 - G P-local $\Longrightarrow$ e isomorfismo.

Prova: Novamente temos 4 casos a analisar

(I) G P-local $\Longrightarrow$ G/U P-local (e $\therefore$ e_0 isomorfismo) e U P-local devido ao corolário 3.1.9. Mas $p \in P'$ e U é p-grupo abeliano finito. $\therefore$ $U = \{1\}$. Logo, ε é isomorfismo, donde $e = e_0 \circ \varepsilon$ também é.

(II)a) É imediato pois G P-local $\Longrightarrow$ G/U P-local, donde e_0 é isom. Daí e é isomorfismo pois 1_U também é.

(II)b) Este caso nos apresenta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, tail] \arrow[d, "\pi"', two heads] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "e"] & G/U \arrow[d, "e_0"] \\
U/\Gamma \arrow[r, tail] & G_P \arrow[r, two heads] & (G/U)_P
\end{tikzcd}$$

Como antes G P-local $\Longrightarrow$ G/U P-local donde e_0 é isomorfismo.

Consideremos $\omega\colon G/U \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$. Lembramos que

$$H = \langle x \in G/U\colon o(\omega(x)) \in P_1^{\times} \rangle$$

A prop. 3.1.8 nos garante (pois G é P-local) que

$$\theta_n(x) = 1_U . \omega(x) \ldots \omega(x^{n-1}) \in \mathrm{Aut}(U) \quad , \forall n \in P'^{\times}, \ \forall x \in G/U$$

Assim que, se x é gerador de H segue que $\exists$ $n \in P_1^{\times} \subset P'^{\times}$ tq. $\omega(x)^n = 1_U$.

Daí,

$$1 = \omega(x)^n(u) \cdot u^{-1} = \theta_n(x)((\omega(x)u) \cdot u^{-1})$$

(pois U é abeliano).

Como $\theta_n(x)$ é injetora segue $(\omega(x)u)u^{-1} = 1$ donde $\omega(x)u = u$ $\forall u \in U$. $\therefore$ $\omega|_H = 0$. Em particular $\Gamma = \{1\}$ ($\Gamma = \Gamma^r_{\omega_H}$ e ω_H é trivial). $\therefore \pi = 1_U$ donde e é isomorfismo.

(III) G P-local $\Longrightarrow$ A e X P-locais (corol. 3.1.9). Segue A_i e X P-locais $\forall i = 1,\ldots,t$ (pois A_i é sub-grupo finito de A_i). $\therefore$ G_i é P-local $\forall i$ (corol. 3.1.9). $\therefore$ e_i é isomorfismo $\forall i$. Como e_0 é isomorfismo segue ρ_i isomorfismo $\forall i$ $\therefore$ $\rho = \bigoplus_{i=1}^{t} \rho_i$ é isomorfismo, donde $\underline{\underline{e}}$ é isomorfismo, o que encerra a prova. $\square$

A seguir consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
U(G) = U \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & G/U \arrow[d, "\gamma"] \\
U(K) = V \arrow[r, tail, "\nu"] & K \arrow[r, two heads, "\kappa"] & K/V
\end{tikzcd}$$

Vamos observar que nestas condições $\exists$ homom. induzido $\bar{\alpha}: \bar{U} \longrightarrow \bar{V}$ onde $\bar{U}, \bar{V}$ são explicitados em um dos quatro casos considerados na construção de G_p.

De fato, definimos $\bar{\alpha}$ como segue abaixo de modo que o diagrama comute.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\rho_U"] & V \arrow[d, two heads, "\rho_V"] \\ \bar{U} \arrow[r, dashed, "\bar{\alpha}"] & \bar{V} \end{tikzcd}$$

Se G ou K está nas condições do caso (I) então $\bar{U} = \{1\}$ ou $\bar{V} = \{\bar{1}\}$ $\therefore$ $\bar{\alpha} = 0$. Caso contrário escrevemos $U = \bigoplus\limits_{p\text{-primo}} U(p)$ e $V = \bigoplus\limits_{p} V(p)$ (decomposição nas componentes p-primárias).

Assim que $\alpha(U(p)) \subset V(p)$ e pela proposição 3.1.26 temos $\alpha(\Gamma_{U(p)}) \subset \Gamma_{V(p)}$ (onde aplicamos a propos. 3.1.26 ao diagrama

$$\begin{tikzcd} \xi(p): U(p) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha|U(p)"] & G(p) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & G/U \arrow[d] \\ \zeta(p): V(p) \arrow[r, tail] & K(p) \arrow[r, two heads] & K/V \end{tikzcd}$$

onde $\xi(p) = \pi(p)_*\xi$; $\zeta(p) = \pi(p)_*\zeta$) $\therefore$ Denotando por $\alpha(p): U(p) \to V(p)$ a restrição de α segue que $\exists$ diagr. comutativo

$$
\begin{tikzcd}
U(p) \arrow[r, "\alpha(p)"] \arrow[d, two heads] & V(p) \arrow[d, two heads] \\
\bar{U}(p) = \dfrac{U(p)}{\Gamma_{U(p)}} \arrow[r, "\bar{\alpha}(p)"] & \dfrac{V(p)}{\Gamma_{V(p)}} = \bar{V}(p)
\end{tikzcd}
$$

Definimos pois; $\bar{\alpha} = \bigoplus\limits_{p} \bar{\alpha}(p)$.

<u>Observação</u>: Salientamos aqui que o caso II)a) pode ser pensado com caso particular de II)b) onde $H = \{1\}$ e $\therefore \Gamma = (0)$. Desta forma todos os casos podem ser tratados de uma só vez no raciocínio acima.

Outrossim, devido às definições $\bar{\alpha}$ é homom. de módulos (as ações são todas induzidas).

<u>Teorema 3.3.11</u> - Dados, $G, K \in |\mathcal{C}|$ e o diagrama abaixo, $\exists!$ $\beta_P \in \mathrm{Hom}(G_P, K_P)$ que torna o diagrama comutativo.

$$
\begin{tikzcd}
\xi:U \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[dr, "\rho_U"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & G \arrow[rr, two heads, "e"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dd, dashed, "\beta"] & & G/U \arrow[dr, "e_0"] \arrow[dd, dashed, "\gamma"] & \\
& \xi_P:\bar{U} \arrow[rr, tail, "\bar{\mu}"] \arrow[dd, "\bar{\alpha}"] & & G_P \arrow[rr, two heads, "\varepsilon_P"] & & (G/U)_P \arrow[dd, "\gamma_P"] \\
\zeta:V \arrow[rr, dashed, "\nu"] \arrow[dr, "\rho_V"] & & K \arrow[rr, dashed, two heads, "\kappa"] \arrow[dr, dashed, "e"] & & K/V \arrow[dr, dashed, "e_0"] & \\
& \zeta_P:\bar{V} \arrow[rr, tail, "\bar{\nu}"] & & K_P \arrow[rr, two heads, "\kappa_P"] & & (K/V)_P
\end{tikzcd}
$$

<u>Prova</u>: A unicidade sai do corolário 3.3.9.

Para a existência observemos que

$$e^*{}_0\gamma_P^*\zeta_P = \gamma^* e_0^*\zeta_P = \gamma^*\rho_{V*}\zeta \quad (\text{definição de } \zeta_P) = \rho_{V*}\gamma^*\zeta =$$

$$= \rho_{V*}\alpha_*\xi \ (\text{prop. } 3.1.16) = \bar{\alpha}_*\rho_{U*}\xi =$$

$$= \bar{\alpha}_* e_0^*\xi_P \ (\text{definição de } \xi_P) = e_0^*\bar{\alpha}_*\xi_P \, .$$

Ocorre que $e_0^*: H^2((G/U)_P;\bar{V}) \longrightarrow H^2(G/U;\bar{V})$ é um isomorfismo devido ao teor. 3.1.20.

Logo, $\bar{\alpha}_*\xi_P = \gamma_P^*\zeta_P$. $\therefore$ pela prop. 3.1.16 $\exists$ $\tau \in \mathrm{Hom}(G_P,K_P)$ que torna a "face frontal" comutativa.

Desta forma os homom. τe e $e\beta$ tornam o diagr. abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\rho_V \circ \alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, shift right, "\tau e"'] \arrow[d, shift left, "e\beta"] & G/U \arrow[d, "e_0\gamma"] \\
\bar{V} \arrow[r, tail, "\bar{\nu}"] & K_P \arrow[r, two heads, "\kappa_P"] & (K/V)_P
\end{tikzcd}$$

Invocamos agora a prop. 3.1.17 para garantir que $\exists$ um homomorfismo cruzado

$$\theta: G/U \longrightarrow \bar{V} \quad \text{tq.} \quad \forall g \in G. \quad e\beta(g) = \bar{\nu}\theta\varepsilon(g)\tau e(g).$$

Novamente devido ao teor. 3.1.20 temos que

$$e_0^*: H^1((G/U)_P;\bar{V}) \to H^1(G/U);\bar{V})$$

é isomorfismo. Logo,

$$\exists!\ [\theta'_P] \quad \text{tq.} \quad e_0^*[\theta'_P] = [\theta],\ \text{ie.},\quad \theta = \theta'_P o e_0 + \delta'_v$$

onde δ'_v é um hom. cruzado principal. ($\therefore \delta'_v(x) = v - x.v$, $v \in \bar{V}$ fixo).

Agora, definindo $\delta_v\colon (G/U)_P \to \bar{V}$ por $\delta_v(z) = v - z.v$ segue que $\delta_v o e_0 = \delta'_v$.

$$\therefore\ \theta = \theta'_P e_0 + \delta_v e_0 = \theta_P e_0\ ,$$

onde $\theta_P = \theta'_P + \delta_v$ = homom. cruzado de $(G/U)_P$ em $\bar{V}$.

Assim que,

$$e\beta(g) = \bar{\nu}\theta_P e_0 \varepsilon(g)\tau e(g) = \bar{\nu}\theta_P \varepsilon_P e(g)\tau e(g)\ ,\ \forall g \in G.$$

Logo, definindo $\beta_P\colon G_P \longrightarrow K_P$ por $\beta_P(z) = \bar{\nu}\theta_P\varepsilon_P(z)\tau(z)$ segue da prop. 3.1.18 que $\beta_P \in \mathrm{Hom}(G_P, K_P)$ e $\beta_P e = e\beta$. Além disto,

$$\kappa_P\beta_P = (\kappa_P\bar{\nu}\theta_P\varepsilon_P)\quad(\kappa_P\tau) = \kappa_P\tau = \gamma_P\varepsilon_P$$

e

$$\beta_P\bar{\mu} = (\bar{\nu}\theta_P\varepsilon_P\bar{\mu})(\tau\bar{\mu}) = \tau\bar{\mu} = \bar{\nu}\bar{\alpha}$$

e a prova está concluida. $\square$

O teorema acima nos mostra que $G \rightsquigarrow G_P$ é um funtor e $\underline{e}$ é uma transformação natural.

<u>Teorema 3.3.12</u> - A aplicação $e\colon G \longrightarrow G_P$ P-localiza G em $\mathcal{C}$.

<u>Prova</u>: Consideremos $G,K \in |\mathcal{C}|$ com K P-local e $\beta \in Hom(G,K)$. Devido à prop. 3.3.1 existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
U(G) = U \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] & G/U \arrow[d, "\gamma"] \\
U(K) = V \arrow[r, tail, "\nu"] & K \arrow[r, two heads, "\kappa"] & K/V
\end{tikzcd}$$

Usando o teorema anterior (3.3.11) concluimos que

$$\exists!\ \beta_P \in Hom(G_P,K_P) \quad tq. \quad \beta_P e = e\beta.$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "e"'] & K \arrow[d, "e_*"] \arrow[d, phantom, "\cong"', shift right=3] \\
G_P \arrow[r, "\beta_P"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{\beta}"] & K_P
\end{tikzcd}$$

Mas K P-local $\Longrightarrow$ e é isomorfismo. Seja

$$\bar{\beta} = e^{-1} \circ \beta_P \quad \therefore \quad \bar{\beta} e = \beta.$$

A unicidade de $\bar{\beta}$ é garantida pelo corolário 3.3.9.

$\square$

oOo

REFERÊNCIAS

[A] - ADAMS, J.F., "The Sphere considered as an H-space mod p", Quart. J. Math. 12 (1961), 52-60.

[G] - GONÇALVES, DACIBERG L. , "Nilpotent Actions", Universidade de São Paulo - Instituto de Matemática e Estatística (1981).

[H] - HILTON, PETER J., "On G-Spaces", Bol. Soc. Bras. Mat. 7(1976), 65-73.

[H.M.R.] - HILTON, P., MISLIN, G., ROITBERG, J., "Localization of Nilpotent Groups and Spaces", Notas de Matemática, North Holland Mathematics Studies 15 (1975).

[H.R.S.] - HILTON, P., ROITBERG, J., SINGER, D., "On G-Spaces", Serre Classes, and G-nilpotency", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1978), 84, 443-454.

[R.1] - RIBENBOIM, P. -"Torsion et localization de groupes arbitraires", Sém. d'Algèbre Paul Dubreil, Paris, 1977.

Lectures Notes in Mathematics nº 740, 444-456, Springer Verlag, New York, 1978.

[R.2] - RIBENBOIM, P. - "Equations in Groups, With Special Emphasis on Localization and Torsion" - Preprint.

[S] - SULLIVAN, D. - "Genetics of Homotopy Theory and the Adams Conjecture" - Ann. of Math. - 100 (1974), 1-79.

[W] - WHITEHEAD , GEORGE W. - "Elements of Homotopy Theory", Graduate Texts in Mathematics - Springer Verlag - New York - Heidelberg - Berlin.

[Z] - ZABRODSKY, A. - "Homotopy Associativity and Finite CW Complex". Topology 9 (1970), 121-128.

oOo