Serviço de Bibliotecas
Biblioteca de Engenharia Civil
01 SET 1988

Escola Politécnica - EPBC
31200053654

BT/PEF-8806

CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DE MEMBRANA NAS PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luiz Antonio Cortese Diogo
Professor Assistente Doutor
(recebido em 10/05/88)

EDITOR CHEFE C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- Engenharia de Solos W.Hachich
- Estruturas de Concreto P.B.Fusco
- Estruturas Metálicas e de Madeira P.B.Fusco
- Interação Solo-Estrutura C.E.M.Maffei
- Mecânica Aplicada D.Zagottis
- Métodos Numéricos J.C. André
- Pontes e Grandes Estruturas J.C.Figueiredo Ferraz
- Teoria das Estruturas V.M.Souza Lima

INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste trabalho, alguns exemplos que procuram mostrar a influência, na análise de placas em regime elástico linear, do efeito de membrana, que consiste na contribuição para o equilíbrio das cargas transversais, dos esforços correspondentes à deformação da superfície média da placa.

Os resultados são obtidos com o método dos elementos finitos, em cuja formulação se adotam relações deformações-deslocamentos não lineares.

1. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A sequência de operações que permitem a análise das placas pelo método dos elementos finitos, quando se consideram, em um ponto P, as relações deformações-deslocamentos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_o}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_o}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_o}{\partial y}\right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z\,\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x}\,\frac{\partial w_o}{\partial y} \qquad (1.1)$$

onde u_o, v_o e w_o são as componentes nas direções x, y e z do deslocamento do ponto P_o, projeção de P na superfície média da placa, é detalhada na referência R2.

Essa formulação conduz à resolução do sistema de equações de equilíbrio.

$$\underline{\psi}\,(\underline{a}) = \Sigma\, \underline{T}_e^T \int \underline{B}^T \underline{\sigma}\, dS - \underline{P} = 0 \qquad (1.2)$$

onde

$\underline{T}_e$ é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais $\underline{a}^e$ ao conjunto dos deslocamentos nodais $\underline{a}$ da estrutura, de modo que

$$\underline{a}^e = \underline{T}_e\, \underline{a} \qquad (1.3)$$

$\underline{B}$ é a matriz que relaciona variações $\delta\underline{\varepsilon}$ no campo de deformações a variações $\delta\underline{a}^e$ nos deslocamentos nodais, de modo que

$$\delta\underline{\varepsilon} = \underline{B}\, \delta\underline{a}^e \qquad (1.4)$$

$\underline{\sigma}$ é a matriz cujos elementos correspondem aos esforços solicitantes

ou seja

$$\underline{\sigma}^T = \left[N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad M_x \quad M_y \quad M_{xy} \right] \tag{1.5}$$

e

$\underline{P}$ é a matriz cujos elementos correspondem à resultante dos esforços externos segundo a direção dos deslocamentos nodais $\underline{a}$.

Tomando variações de $\underline{\psi}$, resulta

$$\delta\underline{\psi} = \underline{K}_T \delta\underline{a} - \delta\underline{P} \tag{1.6}$$

onde $\underline{K}_T$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura

Considerando duas situações de equilíbrio, $\delta\underline{\psi} = 0$, e portanto

$$\delta\underline{P} = \underline{K}_T \delta\underline{a} \tag{1.7}$$

Assim, pode-se dividir o carregamento externo em m incrementos $\Delta\underline{P}^n$, de modo que, após a aplicação do n-ésimo incremento, os deslocamentos nodais $\underline{a}^n$ são dados por

$$\underline{a}^n = \underline{a}^{n-1} + \Delta\underline{a}^n \qquad n = 1,2,\ldots, m \tag{1.8}$$

onde

$$\Delta\underline{a}^n = \underline{k}_T(\underline{a}^{n-1}) \; . \; \Delta\underline{P}^n \tag{1.9}$$

Conhecidos os deslocamentos a^n, pode-se calcular o resíduo

$$\underline{R}^n = \underline{\psi}^n = \Sigma \; \underline{T}_e^T \; \underline{B}^{nT} \; \underline{\sigma}^n \; dS - \underline{P}^n \tag{1.10}$$

onde

$$\underline{P}^n = \sum_{i=1}^{n} \Delta\underline{P}^i \tag{1.11}$$

Alternativamente, pode-se definir o resíduo da seguinte maneira

$$R^n = \frac{\psi^{nT} . \psi^n}{\underline{P}^{nT} . \underline{P}^n} \tag{1.12}$$

Se o valor assim obtido for maior que o resíduo especificado (neste trabalho, 10^{-4}), procede-se, como se mostra na fig. (1.1), a iterações. Numa iteração genérica i, tem-se

$$\underline{a}_i^n = \underline{a}_{i-1}^n + \Delta\underline{a}_i^n \tag{1.13}$$

onde

$$\Delta \underline{a}_i^n = - \underline{K}_T^{-1} (\underline{a}_{i-1}^n) \cdot \underline{\psi} (\underline{a}_{i-1}^n) \qquad (1.14)$$

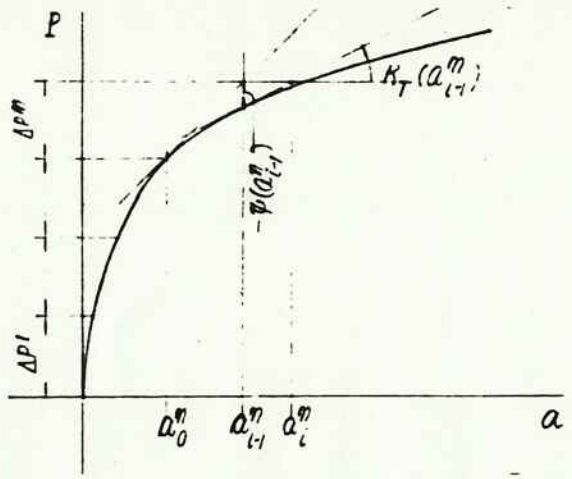

Fig. (1.1)

2. EXEMPLOS

Os exemplos seguintes referem-se à placa simplesmente apoiada da figura, (2.1), de material elástico linear de módulo de elasticidade $E = 2100$ tf/cm^2 e coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, submetida à compressão $N_x = N_y = N$, uniformemente distribuída no contorno, bem como à carga transversal P, aplicada no centro da placa.

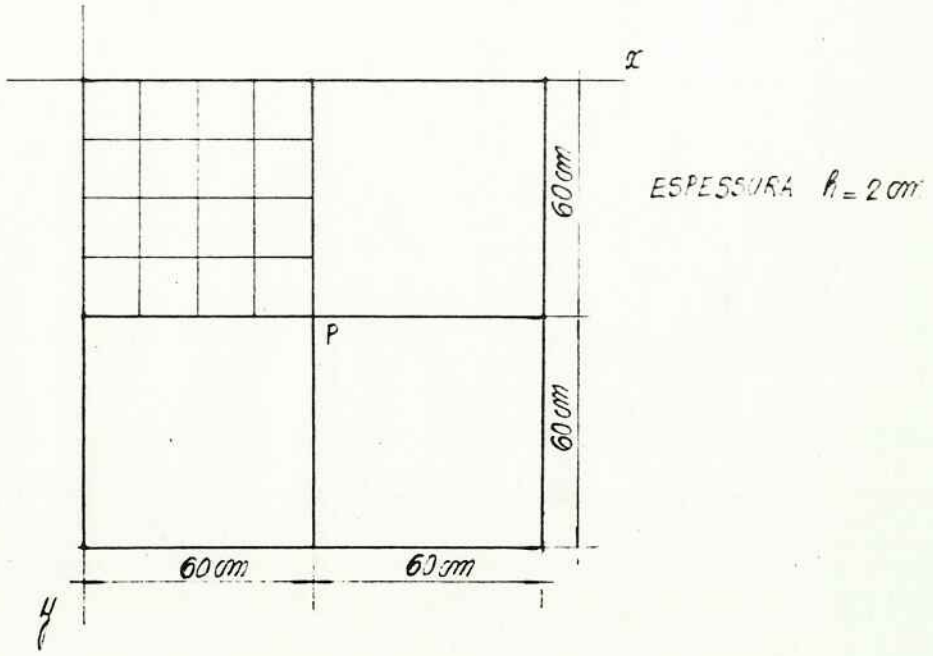

Fig. (2.1)

A discretização da estrutura é feita com elementos retangulares descritos na referência R2, nos quais as componentes u_o, v_o e w_o do deslocamento de um ponto P_o da superfície média são dados por

$$u_o = \Sigma \phi_i u_i$$

$$v_o = \Sigma \phi_i v_i$$

$$w_o = \Sigma \left[\psi_i w_i + \xi_i \theta_{xi} + \eta_i \theta_{yi} \right] \qquad (2.1)$$

onde u_i, v_i, w_i, θ_{xi} e θ_{yi} são os deslocamentos nodais indicados na figura (2.2) e

$$\phi_i(r,s) = 1/4(r_o+1)(s_o+1)$$

$$\psi_i(r,s) = 1/8(r_o+1)(s_o+1)(2+r_o+s_o-r^2-s^2)$$

$$\xi_i(r,s) = 1/8\ b\ s_i(r_o+1)(s_o+1)^2(s_o+1)$$

$$\eta_i(r,s) = 1/8\ a\ r_i(r_o+1)^2(r_o-1)(s_o+1) \qquad (2.2)$$

onde

$$r_o = r.r_i \quad e \quad s_o = s.s_i \qquad (2.3)$$

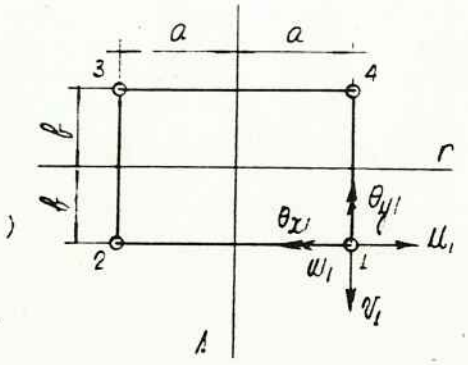

Fig. (2.2)

Na obtenção da matriz de rigidez de cada elemento, emprega-se o método de Gauss de integração numérica com 4 pontos de integração, nos quais se calculam,também, as tensões.

Quando P = 4tf e N = 0, obtêm-se os resultados apresentados na figura (2.3).

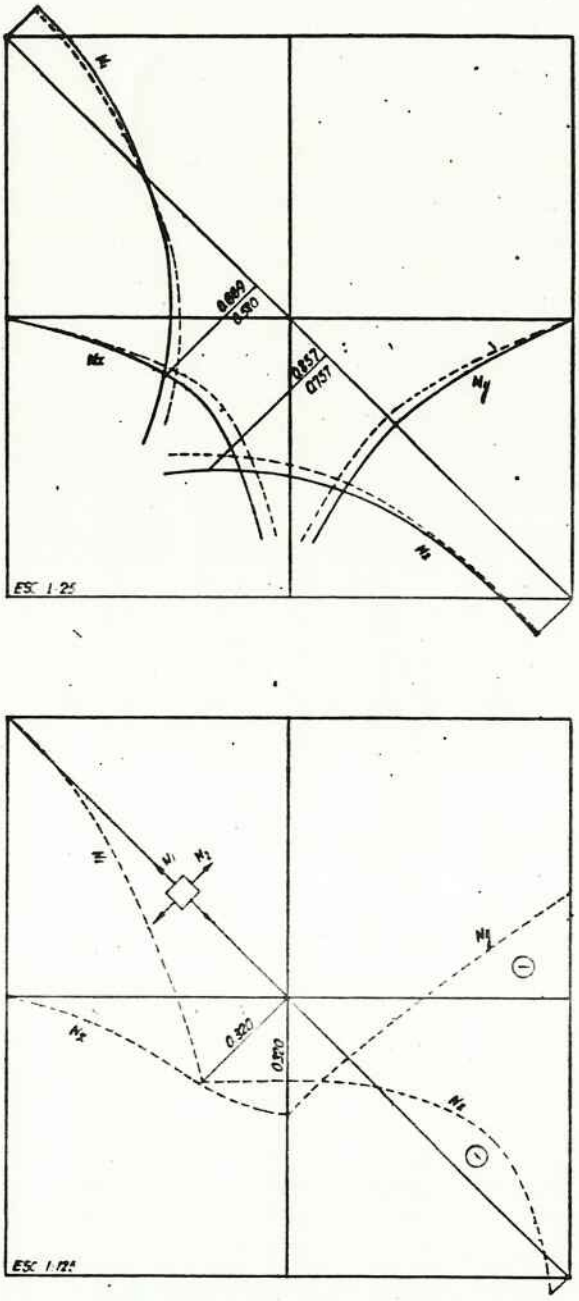

Fig. (2.3)

As linhas cheias representam os esforços correspondentes à análise linear, enquanto que as linhas pontilhadas, os esforços solicitantes que se obtêm considerando-se a deformação da superfície média da placa associada aos esforços N_x, N_y, N_{xy}, situados, em cada ponto, no plano tangente à superfície média deformada. A componente desses esforços segundo a direção z contribui para o equilíbrio das cargas transversais, de sorte que se reduzem os esforços de flexão.

O esquema resistente, como se mostra na figura (2.4), consiste de uma região tracionada que solicita um anel periférico, tracionado na direção radial e comprimido na direção transversal. Por se tratar de um sistema de forças auto-equilibradas, são nulas as resultantes dos esforços N_y e N_2, agentes, respectivamente, nas seções S_y e S_2.

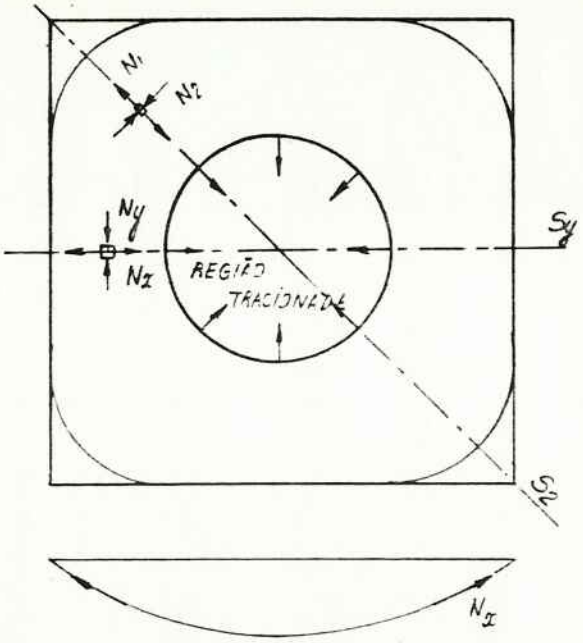

Fig. (2.4)

Quando P e N atuam simultaneamente, ocorre a interação do efeito da carga N, que tende a majorar os deslocamentos e os esforços solicitantes, e o efeito de membrana que tende a minorá-los. Assim

para P = 1.tf e N = 0.80tf/cm, obtém-se a curva da figura (2.5) que mostra a evolução do deslocamento w_p do centro da placa, solicitada SIMULTANEAMENTE pelas frações kP e kN ($0 \leq k \leq 1$).

Note-se o enrigecimento da estrutura a partir do valor k= 0.70, devido à preponderância do efeito de membrana sobre o efeito da carga N.

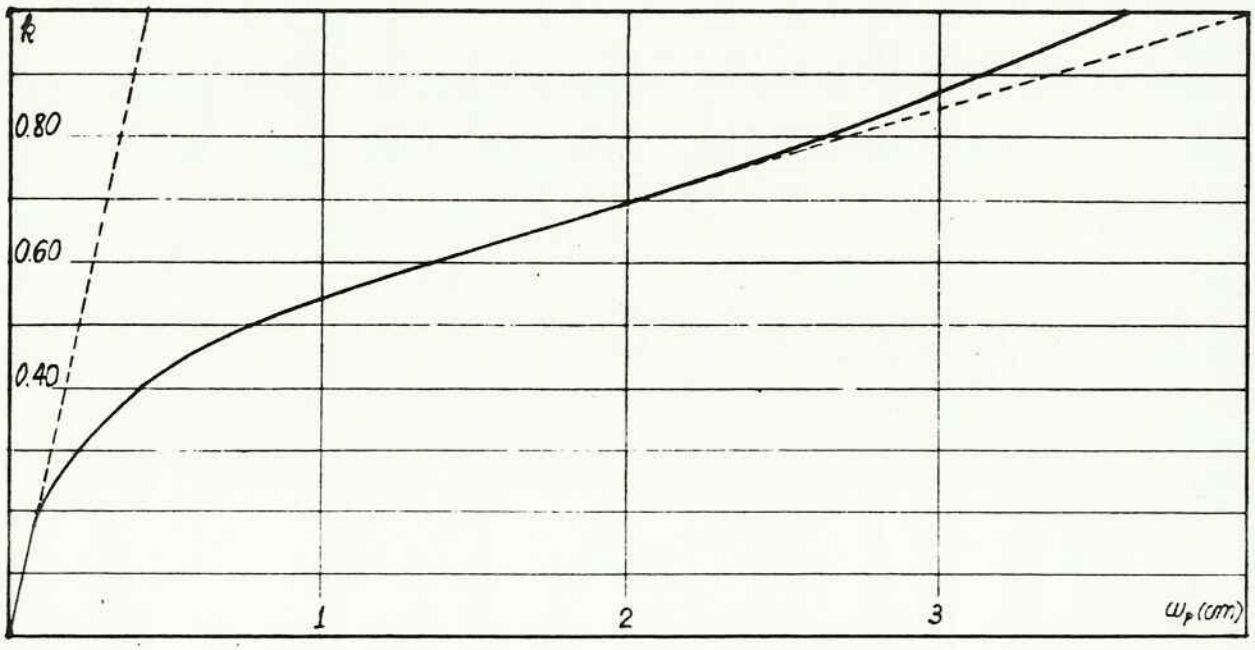

Fig. (2.5)

A relação entre o deslocamento w_p e o deslocamento w_{P0}, obtido da análise linear, define o coeficiente ϕ dado por

$$\phi = \frac{w_P}{w_{P0}} = \frac{3.597}{0.443} = 8.12$$

Procedendo-se de maneira análoga para diversos valores de P e N, obtém-se os valores w_p e ϕ apresentados na tabela (2.1) que podem ser comparados com os valores apresentados na tabela (2.2), obtidos na referência R.1 com o emprego de séries trigonométricas. Nessa formulação, desprezam-se as deformações da superfície média, cuja

importância se mostrou acima.

TABELA 2.1 VALORES DE w_P e ϕ					
P	0.400	1.000	2.000	4.000	
N					
0.000	0.177	0.439	0.852	1.561	w_P
	1.000	0.990	0.961	0.881	ϕ
0.200	0.275	0.666	1.222	2.041	w_P
	1.551	1.502	1.379	1.151	ϕ
0.400	0.644	1.274	1.922	2.708	w_P
	3.634	2.876	2.169	1.528	ϕ
0.600		2.471	2.890	3.499	w_P
		5.575	3.272	1.974	ϕ
0.800		3.597	3.866	4.306	w_P
		8.116	4.362	2.420	ϕ

TABELA 2.2 VALORES DE w_P E ϕ (REFERÊNCIA R.1)					
P	0.400	1.000	2.000	4.000	
N					
0.000	0.174	0.434	0.868	1.737	w_P
	1.000	1.000	1.000	1.000	ϕ
0.200	0.269	0.672	1.344	2.687	w_P
	1.547	1.547	1.547	1.547	ϕ
0.400	0.660	1.649	3.298	6.597	w_P
	3.798	3.798	3.798	3.798	ϕ
0.500	3.001	7.502	15.005	30.009	w_P
	17.277	17.277	17.277	17.277	ϕ

Dessa forma obtêm-se as curvas apresentadas na figura (2.6) que devem ser entendidas da seguinte maneira: quando a placa em questão é submetida, por exemplo, à ação SIMULTÂNEA das cargas P= 1.tf e N= 0.30 tf/cm, o deslocamento w_P do ponto de aplicação de P é ϕ=2 vezes o deslocamento w_{P0} do mesmo ponto, quando P= 1.tf e N= 0.

Note-se que para cargas transversais pequenas, sendo o efeito de membrana desprezível por serem pequenas as rotações, os valores de ϕ, obtidos segundo duas formulações, praticamente coincidem.

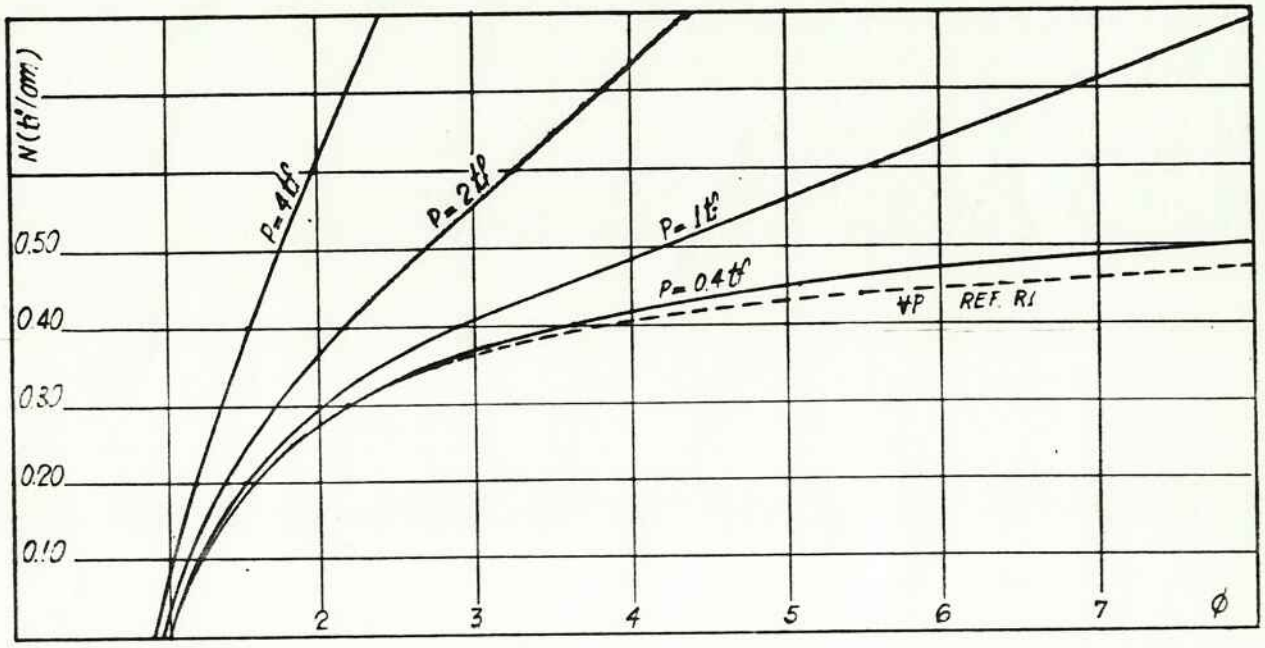

Fig. (2.6)

À medida que o valor da carga transversal aumenta, o efeito de membrana, passa a ser importante e o coeficiente ϕ, para um mesmo valor de N, decresce com o aumento do valor de P, ao passo que, com a formulação da referência R.1, o coeficiente ϕ independe de P e cresce indefinidamente quando a solicitação na superfície média da placa atinge o valor $N = N_{CR} = 0.53$tf/cm.

TIMOSHENKO, S.P. e WOINOVSKY - KRIEGER, S. Theory of plates and shells McGRAW-HILL, 2 nd. ed, 1959.

ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method McGRAW-HILL 3 rd ed., 1977.