TESE APRESENTADA À CONGREGAÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA CONCURSO À CÁTEDRA N. 20, "MATEMÁTICA APLICADA".

PREÂMBULO

1. Desde fins do ano de 1961, quando iniciámos as nossas pesquisas correspondentes à teoria dos sistemas associados, vimos trabalhando no desenvolvimento da mesma. Como resultado destas atividades, temos podido publicar alguns trabalhos. Um novo trabalho neste campo, intitulado "Sôbre a teoria dos sistemas associados para estudo da estabilidade global", é êste que ora temos a honra de apresentar à Congregação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, como tese para concurso à cátedra "Matemática Aplicada".

2. O estudo de problemas matemáticos de estabilidade concernentes a sistemas de equações diferenciais tem uma apreciável significação para a tecnologia moderna. Êste fato, universalmente reconhecido, constitui-se talvez na principal razão da existência de um número considerável de pesquisadores que, em todo o Mundo, atualmente se dedicam ao estudo de tais problemas. Nos dias presentes o tema da estabilidade apresenta-se como um tema bem típico de matemática aplicada.

A teoria dos sistemas associados foi concebida para ser utilizada no estudo de problemas de estabilidade (global). A finalidade principal da presente tese é a apresentação de certos desenvolvimentos da referida teoria. Assim, entendemos que a mesma deva ser considerada como um trabalho de matemática aplicada - apesar de na mesma não aparecerem focalizadas aplicações específicas da mencionada teoria a problemas suscitados diretamente por situações da prática tecnológica. (Aliás, algumas tais aplicações já foram feitas, e encontram-se publicadas, tanto por outros autores como por nós mesmos.)

3. Faz poucos anos que a teoria dos sistemas associados foi iniciada. É pois compreensível que um grande número de questões sôbre a mesma, ou relacionadas com a mesma, estejam ainda por serem estudadas. Temos para nós que as idéias fundamentais da referida teoria estão ainda muito longe de terem sido convenientemente exploradas. Alimentamos a esperança de que no futuro essa teoria possa vir a receber formulações mais poderosas - que conduzam a resultados mais fortes - bem como vir a ser objeto de extensões que a tornem utilizável no estudo de outros problemas matemáticos - além daqueles de estabilidade (global). Também consideramos que estudos de

natureza crítico-comparativa devam ser objeto de sérias preocupações. Referimo-nos a estudos que visem relacionar os resultados da teoria dos sistemas associados com os resultados concernentes à estabilidade global já estabelecidos independentemente da mencionada teoria.

A propósito, sentimos que nos cabe fazer aquí uma declaração. Até a presente data vimos nos dedicando mais a um trabalho que se poderia dizer de inferência: vimos procurando explorar as idéias fundamentais da teoria dos sistemas associados, visando estabelecer aqueles resultados que julgamos mais interessantes dentre os que se apresentaram ao nosso alcance. Esta atitude reflete-se na presente tese.

As consecuções matemáticas apresentadas nesta tese são modestas. Entretanto, apesar disso esperamos que a mesma possa ter alguma utilidade - talvez mais pelo que venha a sugerir, do que pelo que realmente acrescenta à teoria dos sistemas associados. As conclusões gerais da tese aparecem mencionadas no final da mesma, de um modo bastante sucinto, e na forma de um sumário.

4. Terminando, desejamos exprimir os nossos profundos agradecimentos ao Prof. N. ONUCHIC, por abalizados comentários e preciosas indicações, que tanto nos orientaram na elaboração do presente trabalho. Ao Prof. J. A. BREVES FILHO, manifestamos a nossa profunda gratidão pelo constante e valioso incentivo que nos deu. Somos ainda igualmente gratos ao Prof. M. DE OLIVEIRA CESAR, pela desprendida ajuda que nos prestou. Desejamos finalmente agradecer ao INSTITUTO DE ELETROTÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, na pessoa do Eng. J. L. DA CRUZ PASSOS, pela execução dos trabalhos de impressão, à Srta. E.C. MÜLLER e à Sra. C. ZIVKOVIC, pela execução dos trabalhos de datilografia, e também ao Sr. E. ORTIZ, pela execução dos trabalhos de desenho.

São Paulo, dezembro de 1966.

L. R. Borges Vieira.

TÁBUA DE MATÉRIAS

INTRODUÇÃO GERAL

PARTE I

SÔBRE UM TEOREMA GLOBAL DO MÉTODO DIRETO DE LIAPOUNOFF

PARTE II

SÔBRE O ESTUDO DA ESTABILIDADE GLOBAL ASSINTÓTICA POR MEIO DE SISTEMAS ASSOCIADOS

ERRATA SUPLEMENTAR

I.

Na errata, onde se lê

32	18	sejam q_o e t'_o 0	sejam q_o 0 e t'_o 0 fixados

leia-se

32	18	sejam $q_o \geq 0$ e $t'_o \geq 0$	sejam $q_o \geq 0$ e $t'_o \geq 0$ fixados

II.

Página	Linha	Onde se lê	Leia-se
vi	8	aqueles	aquêles
2	5	concernentes à esta-	concernentes à esta-
2	6	bilidade relativa	bilidade relativa
2	19	carater	caráter
2	-11	aqueles	aquêles
5	1	independente t.	independente escalar t.
50	-13	$F(0,t) + G(0,t) = 0$	$F(0,t) + G(0,t) = 0$,
99	9	ps. 13-81	ps. 9-81

E R R A T A

Página	Linha	Onde se lê	Leia-se
4	9	sistemas para	sistemas associados para
32	18	sejam q_o e t'_o 0	sejam q_o 0 e t'_o 0 fixados
40	-12	limitada por um	limitada no cilindro $K(\bar{V},t_o)$ por um

SÔBRE A

TEORIA DOS SISTEMAS ASSOCIADOS

PARA ESTUDO DA ESTABILIDADE GLOBAL

INTRODUÇÃO GERAL

1. APRESENTAÇÃO

A teoria dos sistemas associados pode ser adequadamente encarada considerando-se o seu escopo. Em linhas bastante gerais, pode-se dizer que a teoria dos sistemas associados se propõe a obtenção de resultados sôbre a estabilidade global, através da utilização de famílias de sistemas associadas. Estas são famílias de sistemas de equações diferenciais que, por satisfazerem a certas condições, aparecem como associadas a um sistema de equações diferenciais que é objeto de estudo quanto à estabilidade global. Dentre as aludidas condições figura a condição de associação, que exprime matemàticamente a idéia mais fundamental da teoria.

Podemos dizer que a teoria dos sistemas associados teve o seu início com a publicação do artigo [i] (*), onde expuzemos as idéias fundamentais da teoria.

(*) Indicações como esta são relativas às referências bibliográficas encontradas no final do presente trabalho.

Logo em seguida apresentámos o artigo [ii], onde começámos o desenvolvimento matemático da teoria dos sistemas associados, obtendo os primeiros resultados rigorosamente estabelecidos. (No decorrer do texto que segue, o artigo [ii] será preferencialmente designado por [TAS].) Êsses resultados podem ser divididos em duas categorias: a daqueles concernentes à estabilidade relativa e a daqueles concernentes à estabilidade assintótica. Como base para o estabelecimento dêsses resultados, respectivamente enunciámos e demonstrámos dois teoremas do tipo daqueles nos quais o método direto de Liapounoff se fundamenta, ambos de carater global: um sôbre a estabilidade relativa, designado por primeiro teorema de Liapounoff global, e outro sôbre a estabilidade assintótica, designado por segundo teorema de Liapounoff global [cf. TAS, teorema 1, p. 28, e teorema 2, p. 34].

Podemos dizer que os principais dentre os mais gerais resultados obtidos em [TAS] são o método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade relativa [cf. TAS, parte II, secção 6 (6.1), ps. 50-52] e o método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica [cf. TAS, parte II, secção 6 (6.2), ps. 52-55]. Ambos êsses métodos empregam famílias de sistemas associadas quaisquer.

Dentre os resultados de carater mais particular obtidos em [TAS] estão o método dos sistemas lineares associados para a determinação de domínios de estabilidade relativa [cf. TAS, parte III, secção 2, ps. 58-65] e o método dos sistemas lineares associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica [cf. TAS, parte III, secção 4, ps 71-76]. Ambos êsses métodos empregam famílias de sistemas associadas, impondo a restrição de que as mesmas sejam constituídas exclusivamente de sistemas lineares, isto é, empregam sòmente famílias de sistemas lineares associadas.

A propósito dos resultados da teoria dos sistemas associados obtidos em [TAS], em particular a propósito dos métodos que acabam de ser mencionados, sentíamos que aqueles concernentes à estabilidade assintótica eram menos satisfatórios do que aquêles concernentes à estabilidade relativa. O que fundamentalmente determinava esta situação era o emprêgo de uma certa noção de uniformidade [cf. TAS, definição 13, p. 46], noção essa que fomos levados a introduzir na teoria dos sistemas associados para o tratamento de questões que envolvem a estabilidade assintótica. De um modo geral, o referido emprêgo se manifestava pela presença de uma certa exigência indesejável, a saber, a exigência da escolha de uma função, geralmente designada por $\theta(x)$, numa certa classe de funções. É o que ocorre nos dois métodos concernentes à estabilidade assintótica acima citados. Os dois métodos concernentes à estabilidade relativa acima citados apresentam-se livres dessa exigência.

Entretanto, logo nos convencemos de que a aludida situação poderia ser modificada: os resultados concernentes à estabilidade assintótica poderiam ser aperfeiçoados, poderiam de certa forma serem equiparados aos resultados concernentes à estabilidade relativa - através da eliminação da escolha de uma função $\Theta(x)$.

Neste sentido, continuando com o desenvolvimento da teoria dos sistemas associados, apresentámos o artigo [iii], onde chegámos a certos resultados que se constituiam em aperfeiçoamentos de alguns resultados concernentes à estabilidade assintótica obtidos em [TAS]. Assim, estabelecemos em [iii] certos resultados que se apresentavam libertos da escolha de uma função $\Theta(x)$. No entanto, os mesmos cingiram-se à consideração de famílias de sistemas lineares associadas, e, além disso, foram conseguidos à custa da introdução de uma hipótese restritiva, a hipótese de eqüicontinuidade [cf. iii, p. 46]. Dentre tais resultados figura um método que se constitui numa forma aperfeiçoada do anteriormente citado método dos sistemas lineares associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica [cf. iii, parte II, secção 4 (4.1), ps. 56-58].

Posteriormente viemos a tomar plena consciência de certas deficiências do segundo teorema de Liapounoff global. Fôra fundamentalmente êsse teorema que, devido a certas restrições que comporta (à diferença do primeiro teorema de Liapounoff global), nos levara ao emprêgo da noção de uniformidade, responsável pela presença das funções $\Theta(x)$ na teoria dos sistemas associados. Para que pudéssemos eliminar total e convenientemente tal emprêgo, deveríamos rever o segundo teorema de Liapounoff global, substituindo-o por uma sua generalização, isenta das aludidas restrições. Eis, muito sumàriamente relatada, a idéia geral que nos conduziu à realização de novos estudos sôbre a teoria dos sistemas associados.

Agora, prosseguindo com o desenvolvimento da teoria dos sistemas associados, apresentamos êste novo trabalho, bàsicamente dedicado a uma exploração da aludida idéia. O mesmo é essencialmente composto de duas partes, I e II.

Na parte I, trataremos de uma certa generalização do segundo teorema de Liapounoff global, generalização essa que será adequada a suficiente para as nossas finalidades.

Na parte II, utilizando os desenvolvimentos da parte precedente, atingiremos os principais objetivos do presente trabalho. Trataremos do estabelecimento de novos resultados da teoria dos sistemas associados concernentes à estabilidade assintótica. Ao contrário de [iii], não nos cingiremos à consideração de famílias de sistemas lineares associadas, mas consideraremos sempre famílias de sistemas associadas quaisquer. Além disso, ainda ao contrário de [iii], não nos veremos constrangidos a introduzir hipóteses restritivas, como a hipótese de eqüicontinuidade. Dentre os aludidos novos resultados, alguns se constituirão em aperfeiçoamentos do principal dentre os mais gerais resultados concernentes à estabilidade assintótica obtidos em [TAS]; assim, estabeleceremos certos métodos, que se apresentarão libertos da escolha de uma função $\Theta(x)$, e que se constituirão em certas formas aperfeiçoadas do anteriormente citado método dos sistemas para a determinação de domínios de estabilidade assintótica.

2. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES.

O presente trabalho, pela própria natureza da matéria de que trata, pode ser considerado como um prolongamento de [TAS]. Sempre que possível e interessante, adotaremos aquí as mesmas hipóteses gerais, as mesmas denominações, convenções e símbolos já introduzidos em [TAS]. Para uma bôa compreensão do presente trabalho, desejamos encarecer a necessidade de uma prévia e completa leitura de [TAS].

Como parte integrante desta introdução geral, passaremos em rápida revista certos pontos especiais já considerados em [TAS], cujo conhecimento corrente julgamos ser particularmente indispensável. Desta forma atenderemos à conveniência do leitor dêste trabalho.

2.1. Os sistemas de equações a serem considerados.

As nossas considerações dirão respeito à mesma classe $\mathfrak{a}$ de sistemas de equações diferenciais definida em [TAS, parte I, secção 2, ps. 17-20].

Lidaremos com sistemas de equações diferenciais ordinárias do tipo geral (onde n designa um inteiro positivo qualquer)

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,\dots,x_n,t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1,\dots,x_n,t)\ , \end{aligned}$$

nas funções incógnitas escalares $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ da variável independente t. (Como de costume, pontos encimando símbolos de funções de t são empregados para designar derivadas em relação a t.) Trata-se de sistemas <u>normais</u>, mas <u>em geral não lineares</u> e <u>não necessàriamente autónomos</u>.

Restringir-nos-emos ao corpo real.

Faremos uso do cálculo matricial. Um ponto $(x_1,\ldots,x_n)$ do espaço de fase $\mathcal{F}$ (euclideano n - dimensional) será designado pela matriz coluna

(2)
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ou pela sua transposta

(3)
$$x' = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Introduzindo a matriz coluna

(4)
$$f(x,t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n,t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ \vdots \\ f_n(x,t) \end{pmatrix},$$

função de ponto $(x_1,\ldots,x_n,t) = (x,t)$ do espaço de movimento $\mathfrak{M}$ (euclideano n+1 - dimensional), podemos dar ao sistema (1) a seguinte forma matricial:

(5)
$$\dot{x} = f(x,t) ,$$

onde a incógnita é a matriz coluna

(6)
$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Seja E um conjunto qualquer do espaço de fase $\mathcal{F}$ e seja t_o um número qualquer (real). Usamos o símbolo $K(E,t_o)$ para designar o cilindro do espaço de movimento $\mathfrak{M}$, definido como segue: $K(E,t_o)$ é o conjunto dos pontos (x,t) tais que x pertence a E e t pertence ao intervalo $t_o \leq t < +\infty$.

Consideraremos sempre sistemas do tipo (5) que satisfazem as condições A, B e C apresentadas a seguir. [Cf. TAS, p. 19].

A. <u>O segundo membro</u> $f(x,t)$ <u>é uma função definida e contínua num cilindro</u> $K(D,t_o)$, <u>onde</u> D <u>é um conjunto aberto do espaço de fase</u> $\mathcal{F}$ <u>que contém a origem</u> 0 <u>do mesmo espaço</u>.

B. <u>O segundo membro</u> $f(x,t)$ <u>é tal que, para qualquer ponto</u> (x_o,t_o') <u>de</u> $K(D,t_o)$, <u>o problema de valores iniciais que consiste nas imposições da equação diferencial</u> (5) <u>e da condição inicial</u>

$$x(t_o') = x_o \ , \tag{7}$$

<u>tem nalgum intervalo</u> $t_o' \leqslant t < t^+$, <u>com</u> $t^+ > t_o'$, <u>uma e uma só solução</u>

$$x(t;x_o;t_o') \tag{8}$$

<u>continua no referido intervalo</u>. (*)

C. <u>O segundo membro</u> $f(x,t)$ <u>é tal que</u>

$$f(0,t) = 0 \tag{9}$$

<u>idênticamente no intervalo</u> $t_o \leqslant t < +\infty$.

DEFINIÇÃO 01 [cf. TAS, definição 1, p. 20] - Dizemos que um sistema $\dot{x} = f(x,t)$ pertence à <u>classe</u> $\mathfrak{E}$, se o mesmo é tal que as condições A, B e C estão satisfeitas. Para um tal sistema, quando desejarmos especifificar o conjunto D e o número t_o, diremos que o sistema pertence à <u>classe</u> $\mathfrak{E}(D,t_o)$.

(*) A menos que algo em contrário seja dito, consideraremos sempre t^+ como sendo o valor extremo futuro para t (relativo a prolongamentos em D). Desta forma, pode-se dizer qua a função $x(t;x_o;t_o')$ fica perfeitamente determinada por x_o e t_o'.

Como se vê, de acôrdo com a identidade (9), consideraremos sempre sistemas que admitem pelo menos um ponto de equilíbrio, e mais, suporemos sempre que a origem O do espaço de fase $\mathcal{F}$ seja um tal ponto. Assim, os nossos estudos de estabilidade em tôrno de um ponto de equilíbrio serão sempre relativos à origem O do espaço de fase $\mathcal{F}$. Como é sabido, esta padronização não envolve perda de generalidade.

2.2. Algumas observações gerais.

Sendo $A = (a_{ik})$, $(i=1,\dots,p;\ k=1,\dots,q)$, u'a matriz (real) qualquer, empregaremos a notação $|A|$ para indicar a norma euclideana de A:

$$|A| = \left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ik}^{\ 2} \right]^{1/2} . \tag{10}$$

(Neste trabalho as potências são sempre tomadas com as suas determinações não negativas.)

Indicaremos a distância (euclideana) no espaço $\mathcal{F}$ (euclideano n - dimensional) com o símbolo ρ. Assim, quaisquer que sejam os pontos $x \in \mathcal{F}$ e $y \in \mathcal{F}$, e quaisquer que sejam os conjuntos $X \subset \mathcal{F}$ e $Y \subset \mathcal{F}$, indicaremos com $\rho(x,y)$ a distância de x a y, com $\rho(x,Y)$ a distância de x a Y, e com $\rho(X,Y)$ a distância de X a Y. Desta forma vê-se que

$$\rho(x,y) = |x - y| , \tag{11}$$

quaisquer que sejam $x \in \mathcal{F}$ e $y \in \mathcal{F}$. Vê-se também que

$$\rho(x,Y) = \inf_{y \in Y} |x - y| \quad \text{e} \quad \rho(X,Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} |x - y| , \tag{12}$$

quaisquer que sejam $x \in \mathcal{F}$ e $Y \subset \mathcal{F}$ e quaisquer que sejam $X \subset \mathcal{F}$ e $Y \subset \mathcal{F}$, respectivamente.

A propósito de conjuntos de $\mathcal{F}$ empregaremos certos atributos de natureza topológica (tais como "aberto", "compacto", etc.). Quando nada em contrário fôr dito, e mesmo que tais conjuntos sejam considerados como subconjuntos de outros conjuntos de $\mathcal{F}$, os aludidos atributos serão sempre entendidos como relativos à topologia (euclideana) de $\mathcal{F}$.

2.3. Algumas definições especiais.

Empregaremos com grande freqüência certas notações e certos conceitos cuja introdução encontra-se feita em [TAS]. Apresentaremos a seguir uma bre ve recordação concernente a tais notações e conceitos.

a) Classe Π.

Considere-se uma qualquer função numérica $\varphi(x)$ (real) definida em todo o espaço de fase $\mathfrak{F}$. Para uma tal função, usamos as notações simplificadas sup φ e sup $\varphi(x)$, definidas pela seguinte expressão:

(13) $$\sup \varphi = \sup \varphi(x) = \sup_{x \in \mathfrak{F}} \varphi(x).$$

Seja h um número qualquer. A função $\varphi(x)$ e o número h determinam perfeitamente um conjunto do espaço de fase $\mathfrak{F}$, conjunto êsse que designamos por $L(\varphi, h)$ ou por $L(\varphi(x), h)$, e que definimos como segue:

DEFINIÇÃO 02 [cf. TAS, p. 20] - $L(\varphi, h)$ é o conjunto dos pontos x do espaço de fase $\mathfrak{F}$ tais que $\varphi(x) \leq h$.

Tais conjuntos são empregados na seguinte definição da classe Π:

DEFINIÇÃO 03 [cf. TAS, definição 2, p. 20] - Dizemos que a função $\varphi(x)$ pertence à classe Π ou, simplesmente, que $\varphi(x)$ é uma função Π, se $\varphi(x)$ verifica as quatro condições seguintes:

1) $\varphi(x)$ é contínua em todo o espaço de fase $\mathfrak{F}$.

2) $\varphi(0) = 0$.

3) $\varphi(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$ pertencente a $\mathfrak{F}$.

4) Qualquer que seja h (estritamente) menor do que sup φ, o conjunto $L(\varphi, h)$ é limitado.

Trata-se de uma classe de funções que amplia (num certo e conveniente sentido) a classe das formas quadráticas definidas-positivas.

b) Funções definidas-positivas, funções definidas-negativas e funções Π-limitadas.

Considere-se agora funções numéricas, $w(x,t)$, de ambas as variáveis x e t.

DEFINIÇÃO 04 [cf. TAS, definições 4 e 5, p. 25] - Dizemos que uma função $w(x,t)$ é <u>definida-positiva</u> [<u>-negativa</u>] <u>num cilindro</u> $K(R,t_o)$, se R é um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem 0, e se $w(x,t)$ é uma função definida em $K(R,t_o)$ de tal modo que

(14) $$w(0,t) = 0$$

para qualquer $t \geqslant t_o$, e de tal modo que existe uma função $\varphi(x)$ [$\theta(x)$] da classe $\prod$ para a qual a relação

(15) $$w(x,t) \geqslant \varphi(x) \qquad [\,w(x,t) \leqslant -\theta(x)\,]$$

subsiste para qualquer $x \in R$ e qualquer $t \geqslant t_o$. Nestas condições, dizemos ainda que $w(x,t)$ [$-w(x,t)$] <u>pertence à função</u> $\varphi(x)$ [$\theta(x)$] <u>no cilindro</u> $K(R,t_o)$.

DEFINIÇÃO 05 [cf. TAS, definição 6, p. 25] - Dizemos que uma função $w(x,t)$ é $\prod$-<u>limitada num cilindro</u> $K(R,t_o)$, se R é um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem 0, e se $w(x,t)$ é uma função definida em $K(R,t_o)$ de tal modo que existe uma função $\psi(x)$ da classe $\prod$ para a qual a relação

(16) $$|w(x,t)| \leqslant \psi(x)$$

subsiste para qualquer $x \in R$ e qualquer $t \geqslant t_o$.

As definições que acabam de ser dadas introduzem conceitos de caráter global.

c) <u>Classe</u> $C_1(K(D,t_o))$.

DEFINIÇÃO 06 [cf. TAS, definição 7, p. 26] - Dizemos que uma função $w(x,t)$ pertence à <u>classe</u> $C_1(K(D,t_o))$, se D é um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem 0, e se a função $w(x,t) = w(x_1,\ldots,x_n,t)$ é contínua e tem derivadas parciais primeiras em relação a todos os seus argumentos escalares, $x_1,\ldots,x_n$ e t, todas contínuas no cilindro $K(D,t_o)$. (Nos pontos (x,t) tais que $t = t_o$, a derivada $w_t(x,t)$ de $w(x,t)$ em relação a t é tomada como sendo a derivada à direita.)

d) <u>Os elementos</u> $h(\varphi,R)$ <u>e os conjuntos</u> $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$.

Considere-se uma qualquer função $\varphi(x)$ <u>da classe</u> $\prod$ e um qualquer conjunto <u>aberto</u> R do espaço de fase $\mathcal{F}$ <u>que contém a origem</u> 0. A função $\varphi(x)$ e o conjunto R determinam perfeitamente um elemento do sistema ampliado de números reais, elemento êsse que designamos por $h(\varphi,R)$ ou por $h(\varphi(x),R)$, e que definimos como segue:

DEFINIÇÃO 07 [cf. TAS, p. 22] - $h(\varphi,R)$ é o extremo superior do conjunto dos números h tais que $0 < h < \sup \varphi$ e que o conjunto $L(\varphi,h)$ está contido em R.

Tem-se que $0 < h(\varphi,R) \leq \sup \varphi$.

Tome-se t_o como sendo um número prèviamente fixado.

Juntamente com a função $\varphi(x)$ e com o conjunto R, considere-se agora uma qualquer função numérica $v(x,t)$ (*) <u>da classe</u> $C_1(K(R,t_o))$, <u>pertencente a $\varphi(x)$ no cilindro</u> $K(R,t_o)$.

A função $v(x,t)$, o conjunto R e um número h qualquer determinam perfeitamente um conjunto do espaço de fase $\mathcal{F}$, conjunto êsse que designamos por $S(v,R,h)$ ou por $S(v(x,t),R,h)$, e que definimos como segue:

DEFINIÇÃO 08 [cf. TAS, p. 28] - $S(v,R,h)$ é o conjunto dos pontos z do espaço de fase $\mathcal{F}$ tais que $z \in R$ e que z verifica a desigualdade $v(z,t_o) \leq h$.

Tem-se que $S(v,R,h) \subset R$ e que $S(v,R,h) \subset L(\varphi,h)$, qualquer que seja h. Além disso, para $0 < h < h(\varphi,R)$, pode-se afirmar que $S(v,R,h)$ é limitado e que $S(v,R,h)$ contém a origem O no seu interior: $O \in \operatorname{int} S(v,R,h)$.

A função $v(x,t)$, o conjunto R e a função $\varphi(x)$ determinam perfeitamente um conjunto do espaço de fase $\mathcal{F}$, conjunto êsse que designamos por $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ ou por $\mathfrak{S}(v(x,t),R,\varphi)$ ou ainda por $\mathfrak{S}(v(x,t),R,\varphi(x))$, e que definimos por meio da seguinte expressão [cf. TAS, p. 30]:

(17) $$\mathfrak{S}(v,R,\varphi) = \bigcup_{0<h<h(\varphi,R)} S(v,R,h) .$$

Equivalentemente, podemos também definir o mesmo conjunto como segue:

DEFINIÇÃO 09 [cp. TAS, p. 30] - $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ é o conjunto dos pontos z do espaço de fase $\mathcal{F}$ tais que $z \in R$ e que z verifica a desigualdade

(18) $$v(z,t_o) < h(\varphi,R) .$$

(*) Observe-se que, devido a esta última imposição, a função $v(x,t)$ é definida-positiva no cilindro $K(R,t_o)$.

Tem-se que $\mathfrak{S}(v,R,\varphi) \subset R$ e que $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ é aberto. Além disso, pode-se afirmar que $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ contém a origem O no seu interior: $O \in \operatorname{int} \mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ $(= \mathfrak{S}(v,R,\varphi))$.

As definições que acabam de ser dadas têm interêsse no tratamento de certas questões concernentes à estabilidade global.

2.4. <u>Sôbre o método direto de Liapounoff. Caso da estabilidade global assintótica</u>.

No nosso ponto de partida estarão duas definições e um teorema, que respectivamente adotámos e estabelecemos em [TAS]. Faremos abaixo a reprodução dessas definições e dêsse teorema. A primeira definição reproduzida tem um caráter básico, enquanto que a segunda e o teorema enquadram-se tìpicamente na teoria do método direto de Liapounoff.

Considere-se um sistema qualquer

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{19}$$

dado na classe $\mathfrak{E}$. Seja êle pertencente à classe $\mathfrak{E}(D,t_o)$.

a) <u>Domínios de estabilidade assintótica</u>.

Seja S um subconjunto de D que contém a origem O no seu interior.

DEFINIÇÃO 010 [cf. TAS, definição 10, p.33] - Dizemos que S é um <u>domínio de estabilidade assintótica</u> do sistema (19) (em tôrno do ponto de equilíbrio O), se O é um ponto de equilíbrio estável (*) do sistema (19), e se qualquer trajetória $x = x(t;x_o;t_o)$ do mesmo sistema, que para $t = t_o$ parte de um ponto $x_o \in S$, é tal que o correspondente valor extremo futuro para t (relativo a prolongamentos em D) é $t^+ = +\infty$, e é tal que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t;x_o;t_o) = 0 \,. \tag{20}$$

Equivalentemente, dizemos que o sistema (19) possui <u>estabilidade global assintótica</u> em S.

(*) No sentido de Liapounoff.

b) Funções de Liapounoff para a estabilidade (global) assintótica.

Seja $v(x,t)$ uma qualquer função da classe $C_1(K(D,t_o))$. O sistema (19) e $v(x,t)$ determinam perfeitamente uma outra função, a derivada de $v(x,t)$ em relação a t ao longo das trajetórias do sistema (19). Trata-se da função $v^{\bullet}(x,t)$ definida no cilindro $K(D,t_o)$ pela seguinte expressão (envolvendo as derivadas parciais $v_t(x,t)$ e $v_{x_i}(x,t)$, $(i=1,\dots,n)$, de $v(x,t) = v(x_1,\dots,x_n,t)$):

(21) $$v^{\bullet}(x,t) = v_t(x,t) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)\, v_{x_i}(x,t).$$

Essa expressão pode ser alternativamente apresentada como segue:

(22) $$v^{\bullet}(x,t) = v_t(x,t) + f'(x,t)\, \mathrm{grad}_x\, v(x,t),$$

onde

(23) $$\mathrm{grad}_x\, v(x,t) = \begin{pmatrix} v_{x_1}(x,t) \\ \vdots \\ v_{x_n}(x,t) \end{pmatrix}.$$

DEFINIÇÃO 011 [cf. TAS, definição 11, p. 33] - Dizemos que uma função $v(x,t)$ é uma <u>função de Liapounoff num cilindro</u> $K(R,t_o)$ <u>para a estabilidade assintótica</u> do sistema (19), se

(a) $v(x,t)$ é da classe $C_1(K(D,t_o))$,

(b) R é um subconjunto de D, que é aberto e que contém a origem 0,

(c) $v(x,t)$ é definida-positiva em $K(R,t_o)$,

(d) $v(x,t)$ é Π-limitada em $K(R,t_o)$,

(e) $v^{\bullet}(x,t)$ é definida-negativa em $K(R,t_o)$.

A definição acima introduz um conceito de caráter global.

c) Um teorema global do método direto de Liapounoff.

Envolvendo o conceito acima, subsiste o seguinte teorema:

TEOREMA 01 [cf. TAS, teorema 2, p. 34]-- Se $v(x,t)$ é uma função de Liapounoff num cilindro $K(R,t_o)$ para a estabilidade assintótica do sistema (19), e se $\varphi(x)$ é uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R,t_o)$ (*), então o conjunto $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (19).

Êsse teorema foi designado em [TAS] por segundo teorema de Liapounoff global.

2.5. Famílias de sistemas associadas.

Em [TAS, parte II, secção 2, ps. 37-39] fizemos a introdução do conceito de família de sistemas associada. Trata-se do conceito fundamental da teoria dos sistemas associados. Reconsiderá-lo-emos a seguir (apresentando-o em tôda a generalidade com que foi introduzido).

Considere-se um sistema qualquer

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{24}$$

dado na classe $\mathfrak{E}$. Seja êle pertencente à classe $\mathfrak{E}(D,t_o)$.

Seja

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

um ponto variável num conjunto do espaço de fase $\mathcal{F}$. Ao lado do sistema (24) e parametrizada por z, considere-se uma família de sistemas de equações diferenciais ordinárias do tipo geral

$$\dot{x} = u(x,t;z) , \tag{26}$$

onde a matriz coluna

(*) Observe-se que tais $\varphi(x)$ existem e que necessàriamente pertencem à classe Π (já que $v(x,t)$ é definida-positiva em $K(R,t_o)$).

$$(27) \qquad u(x,t;z) = \begin{pmatrix} u_1(x_1,\ldots,x_n,t;z_1,\ldots,z_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1,\ldots,x_n,t;z_1,\ldots,z_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x,t;z) \\ \vdots \\ u_n(x,t;z) \end{pmatrix}$$

é função de x, t e z.

Relacionando o sistema (24) com a família (26), pode-se formular as seguintes condições [cf. TAS, ps. 38 e 39]:

I. *A cada* $z \in D$ *corresponde um sistema* $\dot{x} = u(x,t;z)$ *da família*, *pertencente à classe* $\mathfrak{E}(D,t_o)$.

II. CONDIÇÃO DE ASSOCIAÇÃO - *A função* $u(x,t;z)$ *é tal que*

$$(28) \qquad u(z,t;z) = f(z,t)$$

para qualquer $z \in D$ *e qualquer* $t \geqslant t_o$.

DEFINIÇÃO 012 [cf. TAS, definição 12, p. 39] - Dizemos que a família (26) é uma *família de sistemas associada* ao sistema (24), se as condições I e II estão satisfeitas. Referimo-nos aos sistemas de uma tal família como *sistemas associados*.

Em [TAS, parte II, secção 3, ps. 40-42] demonstrámos que qualquer que seja o sistema da classe $\mathfrak{E}$, existem famílias de sistemas associadas ao mesmo. Na verdade, demonstrámos mais: demonstrámos que qualquer que seja o sistema da classe $\mathfrak{E}$, o mesmo admite famílias de sistemas associadas de um tipo particular, a saber, famílias de sistemas associadas constituídas exclusivamente de sistemas lineares, isto é, famílias de sistemas lineares associadas.

PARTE I

SÔBRE UM TEOREMA GLOBAL DO MÉTODO DIRETO DE LIAPOUNOFF

1. INTRODUÇÃO.

Consideremos um sistema qualquer,

$$\dot{x} = f(x,t) \quad , \tag{1}$$

dado na classe $\mathcal{E}$. Suponhamos que o mesmo pertença à classe $\mathcal{E}\,(D,t_o)$.

A propósito de tais sistemas, e relativamente ao seu ponto de equilíbrio O, origem do espaço de fase $\mathcal{F}$, enunciámos e demonstrámos em [TAS] um teorema global do método direto de Liapounoff, concernente à estabilidade assintótica. Referimo-nos ao segundo teorema de Liapounoff global, anteriormente reproduzido como teorema 01 [cf. introdução geral, 2.4, c].

Nesta parte I trataremos de uma certa generalização do segundo teorema de Liapounoff global, adequada e suficiente para as nossas posteriores finalidades. Preliminarmente faremos uma ligeira ampliação dos conceitos globais de função definida-positiva e de função definida-negativa introduzidos em [TAS]. Passaremos em seguida ao estabelecimento da aludida generalização, apresentando-a em duas formas (equivalentes). A primeira forma, análoga à do teorema 01, será obtida através do emprêgo de um conceito global de função de Liapounoff para a estabilidade assintótica ligeiramente mais amplo do que aquêle adotado em [TAS]. A segunda forma, que se apresentará como sendo de utilização mais conveniente do que a primeira, será obtida através do emprêgo do novo conceito de derivada autônoma de uma função em relação a um sistema, pràviamente introduzido e discutido.

Terminaremos considerando um teorema obtido por Yoshizawa, e discutindo certas conexões entre o mesmo e a acima aludida generalização.

2. FUNÇÕES DEFINIDAS-NEGATIVAS FRACAS E FUNÇÕES DEFINIDAS-POSITIVAS FRACAS.

Nesta secção introduziremos e estudaremos certos conceitos de caráter global, um pouco mais amplos do que aqueles correspondentes introduzidos em [TAS] e dados pela definição 04 [cf. introdução geral, 2.3, b].

Introduziremos os aludidos conceitos através da seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1 - Dizemos que uma função $w(x,t)$ é <u>definida-negativa</u> [<u>-positiva</u>] <u>fraca (*) num cilindro</u> $K(R,t_o)$, se R é um conjunto aberto de $\mathfrak{F}$ que contém a origem 0, e se $w(x,t)$ é uma função definida em $K(R,t_o)$ de tal modo que, qualquer que seja o conjunto <u>compacto</u> L de $\mathfrak{F}$ contido em R, cujo interior $\text{int}\ L$ contém 0, a mesma $w(x,t)$ (considerada como função definida em $K(\text{int}\ L,t_o)$) é <u>definida-negativa</u> [<u>-positiva</u>] <u>no cilindro</u> $K(\text{int}\ L,t_o)$.

Constata-se imediatamente que uma função $w(x,t)$ é definida-positiva fraca num cilindro, se e sòmente se a função $-w(x,t)$ é definida-negativa fraca no mesmo cilindro. Por motivos de simplificação e conveniência de exposição, restringiremos as nossas considerações às funções definidas-negativas fracas; relativamente às funções definidas-positivas fracas, considerações correspondentes análogas poderão ser fàcilmente feitas. Comecemos com a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1 - Considere-se um qualquer cilindro $K(R,t_o)$, onde R designa um conjunto aberto de $\mathfrak{F}$ que contém a origem 0. Se uma função $w(x,t)$ é definida-negativa em $K(R,t_o)$ então $w(x,t)$ é definida-negativa fraca em $K(R,t_o)$.

(*) Empregaremos o atributo "fraca" por não nos ter ocorrido uma outra expressão que nos parecesse mais recomendável.

Essa proposição pode ser demonstrada de modo extremamente simples. Em breves linhas, daremos a seguir uma demonstração para a mesma. Seja L um qualquer conjunto compacto de $\mathcal{F}$ contido em R, cujo interior int L contém a origem 0. Utilizando a definição 04 obtém-se fàcilmente que $w(x,t)$ é definida-negativa no cilindro $K(\text{int } L, t_o)$. Em vista disso, empregando a definição 1, conclui-se imediatamente que $w(x,t)$ é definida-negativa fraca em $K(R,t_o)$.

Passamos a exibir uma propriedade que é possuída por uma qualquer função $w(x,t)$ definida-negativa num cilindro $K(R,t_o)$:

Para qualquer conjunto compacto L de $\mathcal{F}$ contido em R, cujo interior int L contém a origem 0, existe um número $h = h(L) > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{x \in R \cap {}^cL \\ t \geq t_o}} w(x,t) \leq -h\,, \tag{2}$$

onde ${}^cL$ designa o conjunto complementar de L (em relação a $\mathcal{F}$). As restrições de L ser compacto e de L estar contido em R podem ser eliminadas.

Para demonstrar essa propriedade, comece-se considerando que, sendo $w(x,t)$ uma função definida-negativa no cilindro $K(R,t_o)$, existe uma função $\theta(x)$ da classe Π tal que

$$w(x,t) \leq -\theta(x) \tag{3}$$

para qualquer $x \in R$ e qualquer $t \geq t_o$.

Em seguida note-se que, exclusivamente com base no fato de que $\theta(x)$ é uma função da classe Π, pode-se demonstrar que subsiste a relação

$$\inf_{x \in {}^cU} \theta(x) > 0, \tag{4}$$

onde U designa uma qualquer vizinhança esférica da origem 0. Com efeito, designe-se por k o extremo inferior que figura no primeiro membro da (4). Certamente se tem que $k \geq 0$, pois $\theta(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathcal{F}$. Conseqüentemente, para provar a (4), basta que se prove que a hipótese $k = 0$ conduz a um absurdo. Adote-se essa hipótese. Designe-se por Σ o fêcho de uma arbitrária vizinhança esférica da origem 0 tal que $U \subset \Sigma$. No conjunto fechado limitado e não vazio $\Sigma - U$, a função $\theta(x)$, sendo contínua e (estritamente) positiva, tem um mínimo absoluto (estritamente) positivo. Assim sendo, vê-se fàcilmente que a hipótese adotada acarreta que $\inf_{x \in {}^c\Sigma} \theta(x) = 0$. Daí, levando em conta a arbitrariedade de Σ, deduz-se sem dificuldade que os conjuntos $L(\theta,i)$, com $0 < i < \sup \theta$, não são limitados. Eis o absurdo.

Considerando agora que $0 \in \text{int } L$, da relação (4) acima provada obtém-se fàcilmente que

$$(5) \qquad \inf_{x \in {}^c\text{int } L} \theta(x) > 0.$$

Resulta imediatamente daí que existe um número $h > 0$ tal que se $x \in {}^c\text{int } L$, então $\theta(x) > h$. Segue-se que se $x \in R \cap {}^cL$, então $\theta(x) > h$. Conseqüentemente, por fôrça da (3), deduz-se que se $x \in R \cap {}^cL$, então $w(x,t) < -h$ para qualquer $t \geq t_o$. Conclui-se imediatamente que o número $h > 0$ acima referido é tal que a (2) subsiste.

Por meio do uso da propriedade que acaba de ser demonstrada, podemos constatar de modo simples e sugestivo a subsistência da seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2 - Considere-se um qualquer cilindro $K(R,t_o)$, onde R designa um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem 0. Existem funções $w(x,t)$ definidas-negativas fracas em $K(R,t_o)$ que não são definidas-negativas em $K(R,t_o)$.

Com efeito, inicialmente observemos que, relativamente ao cilindro $K(R,t_o)$, os seguintes dois casos esgotam todas as possibilidades: ou $R = \mathcal{F}$, ou $R \neq \mathcal{F}$. Apresentaremos abaixo dois exemplos bastante simples e sugestivos, um para cada um dos referidos casos, exemplos êsses que exibem funções $w(x,t)$ com as seguintes características: $w(x,t)$ é definida-negativa fraca no cilindro $K(R,t_o)$, e, relativamente ao mesmo cilindro, $w(x,t)$ não possui a propriedade acima (expressa por meio da (2)). Esta última característica implica que $w(x,t)$ não é definida-negativa no cilindro $K(R,t_o)$. Ficará assim constatada a subsistência da proposição.

Para o caso de ser $R = \mathcal{F}$, considere-se no cilindro $K(R,t_o)$ a função

$$(6) \qquad w(x,t) = -|x|^2 e^{-|x|} .$$

E, para o caso de ser $R \neq \mathcal{F}$, considere-se no cilindro $K(R,t_o)$ a função

$$(7) \qquad w(x,t) = -|x|^2 e^{-|x|} [\rho(x,\bar{R}-R)]^2 .$$

(Neste último caso, observe-se que a fronteira $\overline{R}$ - int R = $\overline{R}$ - R de R não sendo vazia, tem-se que para qualquer $x \in \mathcal{F}$ a distância $\rho(x, \overline{R}-R)$ é um número real. Conseqüentemente a função w(x,t) dada pela (7) assume sempre valores reais.)

A propósito das verificações de que as funções dadas pelas (6) e(7) constituem-se em exemplos de funções w(x,t) com as características acima mencionadas, permitimo-nos, em nome de u'a maior brevidade, omitir considerações detalhadas. Limitar-nos-emos às ligeiras indicações que seguem. As verificações de que essas funções não possuem a propriedade expressa por meio da (2) não oferecem quaisquer dificuldades. Um pouco mais trabalhosas, embora exeqüíveis sem grandes dificuldades, são as verificações, feitas a partir da definição 1, de que as mesmas funções são definidas-negativas fracas. Entretanto, através do emprêgo da proposição 3 abaixo, estas últimas verificações tornam-se mais simples, não oferecendo quaisquer dificuldades.

O conteúdo das proposições 1 e 2 pode ser assim expresso: a classe das funções definidas-negativas fracas num cilindro <u>contém estritamente</u> a classe das funções definidas-negativas no mesmo cilindro (qualquer que seja tal cilindro).

Daremos a seguir, com a proposição 3, uma caracterização das funções definidas-negativas fracas num cilindro. Essa caracterização é bastante importante para o presente trabalho: a mesma permitirá que, ao tratarmos com funções definidas-negativas fracas, <u>nos libertemos completamente da consideração de funções da classe</u> Π.

PROPOSIÇÃO 3 - Para que uma função w(x,t) seja definida-negativa fraca num cilindro $K(R,t_0)$ é <u>necessário e suficiente</u> que sejam verificadas as seguintes condições:

(i) w(x,t) é uma função definida no cilindro $K(R,t_0)$, sendo que R é um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem O.

(ii) w(x,t) é tal que

$$w(0,t) = 0 \tag{8}$$

para qualquer $t \geq t_0$.

(iii) w(x,t) é tal que, para cada conjunto compacto C de $\mathcal{F}$ contido no conjunto R - $\{0\}$, existe um número <u>positivo</u> $\eta = \eta(C)$ tal que

$$w(x,t) < -\eta \tag{9}$$

para todo x de C e qualquer $t \geq t_0$.

para qualquer $x \in C$ e qualquer $t \geqslant t_o$.

Demonstremos inicialmente a necessidade das condições (i), (ii) e (iii). Suponha-se que $w(x,t)$ é uma função definida-negativa fraca num cilindro $K(R,t_o)$.

Pela definição 1 obtém-se imediatamente que a condição (i) resulta verificada.

Assim sendo, tem-se que R é um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem O. Existe portanto uma vizinhança esférica U_o de O cujo fêcho L_o está contido em R. O conjunto L_o é um compacto de $\mathcal{F}$ contido em R, cujo interior int L_o contém O. Pela definição 1 obtém-se que $w(x,t)$ é definida-negativa no cilindro $K(\text{int } L_o, t_o)$. Daí, pela definição 04, deduz-se que a condição (ii) resulta verificada.

Para provar que a condição (iii) resulta verificada, tome-se um qualquer conjunto compacto C de $\mathcal{F}$ contido no conjunto $R - \{0\}$. Pode-se evidentemente supôr que C não é vazio (pois no caso oposto a existência do número η é imediata).

Constatar-se-á a seguir a existência de um conjunto compacto L de $\mathcal{F}$ contido em R, cujo interior int L contém O, conjunto êsse que ainda é tal que o seu interior int L contém C. (Na verdade existe uma infinidade dêsses conjuntos.) Considere-se um ponto qualquer $\bar{x} \in C$. Levando em conta que $C \subset R - \{0\}$ e que $R - \{0\}$ é aberto, vê-se que existem infinitas vizinhanças esféricas U de $\bar{x}$ cujos fêchos estão contidos em $R - \{0\}$. Considere-se a classe constituída por todas essas vizinhanças U correspondentes a todos os pontos $\bar{x} \in C$. Tal classe é òbviamente um recobrimento aberto de C. Como C é um conjunto compacto, pelo teorema de Borel-Lebesgue pode-se afirmar que existe um número finito N de vizinhanças da referida classe que recobrem C. Designe-se tais vizinhanças por $U_1, \ldots, U_N$, e designe-se os seus respectivos fêchos por $L_1, \ldots, L_N$. Posto isto, construa-se o conjunto $L = L_o \cup L_1 \cup \ldots \cup L_N$. Sem qualquer dificuldade pode-se verificar que êsse conjunto L satisfaz a todos os requisitos existenciais acima explicitados.

Como L é um conjunto compacto de $\mathcal{F}$ contido em R, cujo interior int L contém O, pela definição 1 pode-se afirmar que a função $w(x,t)$ é definida-negativa no cilindro $K(\text{int } L, t_o)$. Daí, pela definição 04, segue-se que existe uma função $\Theta(x)$ da classe $\prod$ tal que

(10) $$w(x,t) \leqslant -\theta(x)$$

para qualquer $x \in$ int L e qualquer $t \geqslant t_o$. Considerando que int L contém C, obtém-se que a desigualdade (10) subsiste para qualquer $x \in$ C e qualquer $t \geqslant t_o$. Mas, dos fatos de que $\theta(x)$ é uma função da classe $\prod$ e de que C é um conjunto compacto não vazio ao qual não pertence a origem O, segue-se fàcilmente que $\theta(x)$ tem um mínimo absoluto (estritamente) positivo m em C. Deduz-se então que

(11) $$w(x,t) \leqslant -m$$

para qualquer $x \in$ C e qualquer $t \geqslant t_o$, bastando pois tomar η tal que

(12) $$0 < \eta < m$$

para se concluir que a condição (iii) resulta verificada.

Na demonstração de suficiência, que será dada abaixo, consideraremos gráficos de funções reais definidas em conjuntos do espaço de fase $\mathcal{F}$. Assim, utilizaremos o espaço $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \times \mathcal{R}$, produto cartesiano de $\mathcal{F}$ pelo espaço $\mathcal{R}$ dos números reais; o mesmo $\mathcal{F}_1$ é pois constituído pelos pontos (z,γ), com z variável em $\mathcal{F}$ e γ variável em $\mathcal{R}$. Consideraremos $\mathcal{F}_1$ munido da estrutura de espaço euclideano (n+1 - dimensional), e utilizaremos o símbolo ϱ_1 para indicar a distância (euclideana) em $\mathcal{F}_1$, do mesmo modo que utilizámos o símbolo ϱ para indicar a distância (euclideana) em $\mathcal{F}$ [cf. introdução geral, 2.2]. Note-se que, desta forma, pode-se afirmar que $[\varrho_1((x,\alpha),(y,\beta))]^2 = [\varrho(x,y)]^2 + |\alpha-\beta|^2$, quaisquer que sejam os pontos $(x,\alpha) \in \mathcal{F}_1$ e $(y,\beta) \in \mathcal{F}_1$.

Demonstremos finalmente a suficiência das condições (i), (ii) e (iii). Suponha-se que $w(x,t)$ é uma função que as satisfaz.

Para demonstrarmos que $\dot{w}(x,t)$ é uma função definida-negativa fraca no cilindro $K(R,t_o)$, em virtude da condição (i) e tendo em vista a definição 1, òbviamente basta que demonstremos que $\dot{w}(x,t)$ é definida-negativa no cilindro $K(\text{int } L,t_o)$, qualquer que seja o conjunto compacto L de $\mathcal{F}$ contido em R, cujo interior int L contém a origem O. Mas, para tanto, utilizando a definição 04, vê-se que em virtude da condição (ii) basta que demonstremos o seguinte fato:

Qualquer que seja o conjunto compacto L de $\mathcal{F}$ contido em R, cujo interior int L contém a origem O, existe uma função $\theta_L(x)$ da classe $\prod$ tal que

$$(13) \qquad w(x,t) \leq -\theta_L(x)$$

para qualquer $x \in \text{int } L$ e qualquer $t \geq t_o$.

Supondo L fixado, comecemos construindo uma função $\theta_L(x)$. Primeiramente, consideremos a função $W(x)$ definida pela expressão

$$(14) \qquad W(x) = \sup_{t \geq t_o} w(x,t) .$$

Pelas condições (i), (ii) e (iii) vê-se fàcilmente que $W(x)$ é uma função definida em R, assumindo sempre valores reais. Em seguida, consideremos o gráfico $\hat{W}_L$ da restrição da função $W(x)$ ao conjunto L ($\subset$ R), isto é, consideremos o conjunto $\hat{W}_L$ dos pontos $(y,W(y)) \in \mathcal{F}_1$ obtidos quando y percorre L. Finalmente, definamos $\theta_L(x)$ pela expressão

$$(15) \qquad \theta_L(x) = \rho_1((x,0), \hat{W}_L) ,$$

ou, de modo equivalente, pela expressão

$$(16) \qquad \theta_L(x) = \inf_{y \in L} \rho_1((x,0) , (y,W(y))) .$$

Esta $\theta_L(x)$ é uma função definida em todo o espaço de fase $\mathcal{F}$, assumindo sempre valores reais (pois L não sendo vazio, também $\hat{W}_L$ não é vazio).

O fato acima ficará demonstrado se provarmos que a função $\theta_L(x)$ que acaba de ser construída satisfaz a todos os requisitos exigidos no enunciado do mesmo. É o que faremos a seguir.

Utilizando as condições (i), (ii) e (iii), da (14) tira-se que $W(0) = 0$ e que $W(x) < 0$ para qualquer $x \neq 0$ pertencente a R. Levando isto em conta, obtém-se fàcilmente que $W(x) = -\rho_1((x,0),(x,W(x)))$ para qualquer $x \in$ R.

Ora, das (15) e (16) tira-se que
$-\theta_L(x) = -\rho_1((x,0),\hat{W}_L) \geq -\rho_1((x,0),(x,W(x)))$ para qualquer $x \in$ L. Logo em seguida, considerando que int $L \subset L$, pela (14) conclui-se que a (13) subsiste para qualquer $x \in \text{int } L$ e qualquer $t \geq t_o$.

Assim sendo, só resta provar que a função $\theta_L(x)$ pertence à classe Π. É o que faremos logo abaixo, mostrando que a função $\theta_L(x)$ verifica as condições 1), 2), 3) e 4) que figuram na definição 03 da referida classe [cf. introdução geral, 2.3, a].

1) $\theta_L(x)$ é contínua em todo o espaço de fase $\mathcal{F}$. De fato, por uma propriedade bem conhecida da distância, sabe-se que $\rho_1((x,\gamma),\hat{W}_L)$ é uma função contínua do ponto (x,γ) em todo o espaço $\mathcal{F}_1$. Daí, usando a (15), obtém-se a referida continuidade de $\theta_L(x)$.

2) $\theta_L(0) = 0$. De fato, considerando que o ponto $(0,0)$ de $\mathcal{F}_1$ pertence a $\hat{W}_L$, vê-se pela (15) que isto é imediato.

3) $\theta_L(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$ pertencente a $\mathcal{F}$. De fato, sendo $\theta_L(x) \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathcal{F}$ (já que $\theta_L(x)$ é definida como uma distância), a presente condição só não será verificada se existir um ponto $\bar{x} \neq 0$ de $\mathcal{F}$ tal que $\theta_L(\bar{x}) = 0$. Faça-se a hipótese de que êste seja o caso. Então, pela (15) tem-se que $\rho_1((\bar{x},0),\hat{W}_L) = 0$, e, considerando a (16), vê-se que existe uma seqüência $\{(y_i,W(y_i))\}_{i=1,2,\dots}$, constituída de pontos pertencentes a $\hat{W}_L$, tal que $\lim\limits_{i\to+\infty} \rho_1((\bar{x},0),(y_i,W(y_i))) = 0$. Daí segue-se que $\lim\limits_{i\to+\infty} W(y_i) = 0$ e que $\lim\limits_{i\to+\infty} y_i = \bar{x}$. Desta última relação, considerando que $y_i \in L$, $(i=1,2,\dots)$, e que L por ser compacto é fechado, deduz-se que $\bar{x} \in L$. Como $L \subset R$, e como $\bar{x} \neq 0$, obtém-se que $\bar{x}$ pertence necessàriamente ao conjunto aberto $R - \{0\}$. Assim sendo, existe um conjunto compacto C de $\mathcal{F}$ contido no conjunto $R - \{0\}$ tal que $\bar{x} \in \operatorname{int} C$. (Basta que se tome C como sendo o fêcho de uma vizinhança esférica de $\bar{x}$ com raio suficientemente pequeno.) Em virtude da condição (iii), e levando em conta a (14), pode-se afirmar que existe um número positivo η tal que $W(x) \leqslant -\eta$ para qualquer $x \in C$. Ora, êste fato é manifestamente incompatível com as relações $\bar{x} \in \operatorname{int} C$, $\lim\limits_{i\to+\infty} y_i = \bar{x}$ e $\lim\limits_{i\to+\infty} W(y_i) = 0$. Conclui-se pois que a hipótese feita é absurda, sendo portanto $\theta_L(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$ pertencente a $\mathcal{F}$.

4) Qualquer que seja h (estritamente) menor do que $\sup \theta_L$, o conjunto $L(\theta_L,h)$ - isto é, o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{F}$ tais que $\theta_L(x) \leqslant h$ - é limitado. De fato, sempre que $h \leqslant 0$ o referido conjunto é claramente limitado, pois, como acima se mostrou, $\theta_L(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$ pertencente a $\mathcal{F}$. À vista disso, supondo-se fixado um qualquer número $h > 0$, basta que se mostre que o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{F}$ tais que $\theta_L(x) \leqslant h$ é limitado. É o que será feito a seguir. (*) Comece-se fixando um número $M > 0$ de tal modo que $|y| = \rho(y,0) \leqslant M$ para qualquer $y \in L$. Isto é certamente possível, pois o

---

(*) Note-se que, uma vez isto feito, poder-se-á concluir imediatamente que $\sup \theta_L = +\infty$.

conjunto L, sendo compacto, é limitado. Ao lado de M, fixe-se arbitràriamente um outro número $\delta > 0$. Como se passa a provar, subsiste o seguinte fato: se um ponto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ é tal que $|\bar{x}| = \rho(\bar{x},0) \geq h + M + \delta$, então certamente $\theta_L(\bar{x}) > h$. Com efeito, qualquer que seja $y \in L$, pode-se afirmar que $[\rho_1((\bar{x},0),(y,W(y)))]^2 = [\rho(\bar{x},y)]^2 + |0 - W(y)|^2 \geq [\rho(\bar{x},y)]^2$, e, conseqüentemente, que $\rho_1((\bar{x},0),(y,W(y))) \geq \rho(\bar{x},y) = |\bar{x} - y|$. Daí, como para qualquer $y \in L$ tem-se que $|\bar{x} - y| \geq |\bar{x}| - |y| \geq h + M + \delta - M = h + \delta$ (já que $|\bar{x}| \geq h + M + \delta$ e $|y| \leq M$), deduz-se que, qualquer que seja $y \in L$, tem lugar a relação $\rho_1((\bar{x},0),(y,W(y))) \geq h + \delta$. Ora, pela (16), levando em conta que $\delta > 0$, dessa relação obtém-se imediatamente que $\theta_L(\bar{x}) > h$, ficando assim provado o fato acima. Por fôrça dêsse fato, conclui-se que se um ponto $x \in \mathcal{F}$ é tal que $\theta_L(x) \leq h$, então certamente $|x| = \rho(x,0) < h + M + \delta$. Mas isto significa que o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{F}$ tais que $\theta_L(x) \leq h$ é limitado.

Fica assim concluída a demonstração da proposição 3.

Finalizaremos a presente secção observando que subsiste a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 4 - Considere-se um qualquer cilindro $K(R,t_o)$, onde R designa um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem O. Se uma função $w(x,t)$ é definida-negativa fraca em $K(R,t_o)$, então $w(x,t)$ é semidefinida-negativa em $K(R,t_o)$.

Tendo presente a definição de função semidefinida-negativa num cilindro [cf. TAS, definição 3, p.24], através da consideração das condições (i), (ii) e (iii), pode-se obter a proposição 4 como um corolário imediato da proposição 3.

3. UMA GENERALIZAÇÃO DO SEGUNDO TEOREMA DE LIAPOUNOFF GLOBAL.

Nesta secção apresentaremos uma generalização do teorema que foi designado em [TAS] por segundo teorema de Liapounoff global, isto é, uma generalização do teorema O1 [cf. introdução geral, 2.4, c]. Essa generalização, básica para o presente trabalho, é dada pelo teorema 1, enunciado e demonstrado mais abaixo.

3.1. Funções de Liapounoff fracas para a estabilidade (global) assintótica.

Principiemos introduzindo a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2 - Dizemos que uma função $v(x,t)$ é uma função de Liapounoff fraca no cilindro $K(R,t_o)$ para a estabilidade assintótica do sistema (1) se

(a) $v(x,t)$ é da classe $C_1(K(D,t_o))$,

(b) R é um subconjunto de D, que é aberto e que contém a origem 0,

(c) $v(x,t)$ é definida-positiva em $K(R,t_o)$,

(d) existe uma vizinhança esférica N da origem 0 contida em R tal que $v(x,t)$ é Π-limitada no cilindro $K(N,t_o)$,

(e) $v^{\bullet}(x,t)$ é definida-negativa fraca em $K(R,t_o)$.

A definição 2 é do mesmo tipo da definição 011 [cf. introdução geral, 2.4, b]. Entretanto, a definição 2 dá um conceito global de função de Liapounoff para a estabilidade assintótica estritamente mais amplo do que aquêle dado pela definição 011: tôda função de Liapounoff num cilindro para a estabilidade assintótica de um sistema é uma função de Liapounoff fraca no mesmo cilindro para a estabilidade assintótica do mesmo sistema, porém não recìprocamente.

Com efeito, as exigências (d) e (e) da definição 011 são substituídas pelas exigências (d) e (e) da definição 2. (No mais, ambas as definições coincidem.) Considerando que N é uma vizinhança esférica da origem 0 contida em R, a qual pode ser de raio arbitràriamente pequeno, pela definição 05 [cf. introdução geral, 2.3, b] fàcilmente se constata que a exigência (d) da definição 2 é estritamente menos forte do que a exigência (d) da definição 011. E, mais do que isso, as proposições 1 e 2 mostram que a exigência (e) da definição 2 é estritamente menos forte do que a exigência (e) da definição 011.

3.2. Generalização do segundo teorema de Liapounoff global.

O teorema abaixo envolve o novo conceito global de função de Liapounoff para a estabilidade assintótica dado pela definição 2. Pelos comentários feitos na subsecção precedente, através da consideração de que o teorema 01 envolve o conceito global de função de Liapounoff para a estabilidade assintótica dado pela definição 011, ver-se-á imediatamente que o teorema abaixo ~~constitui-se~~ numa efetiva generalização do teorema 01.

TEOREMA 1 - *Se $v(x,t)$ é uma função de Liapounoff fraca num cilindro $K(R,t_o)$ para a estabilidade assintótica do sistema (1), e se $\varphi(x)$ é uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R,t_o)$ (*), então o conjunto $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica dos sistema* (1).

A seguir demonstraremos o teorema 1 de um modo muito semelhante àquele pelo qual demonstrámos o teorema 01 em [TAS, ps. 34-36]. (Para demonstrar o teorema 1 poderíamos nos limitar a fazer alguns retoques na demonstração do teorema 01. Foi considerando que o teorema 1 tem um caráter básico para o presente trabalho, e também no intúito de proporcionar u'a maior comodidade de leitura, que decidimos expôr aquí uma demonstração completa do mesmo, independente da do teorema 01.)

Inicialmente, observemos que $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ é um subconjunto de D que contém a origem O no seu interior. Isto resulta fàcilmente das hipóteses do teorema, consideradas a definição 2 e as propriedades dos conjuntos $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$. Assim sendo, de acôrdo com a definição de domínio de estabilidade assintótica [cf. introdução geral, 2.4, a], para demonstrar o teorema devemos provar que a origem O é um ponto de equilíbrio estável (**) do sistema (1), e que, sendo x_o um ponto qualquer do conjunto $\mathfrak{S}(v,R,\varphi)$, a solução $x(t;x_o;t_o)$ tem um valor extremo futuro para t (relativo a prolongamentos em D) $t^+ = +\infty$ e é tal que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t;x_o;t_o) = 0 \ . \tag{17}$$

Considerando que a função $v^\circ(x,t)$ é definida-negativa fraca no cilindro $K(R,t_o)$, pela proposição 4 tem-se que $v^\circ(x,t)$ é semidefinida-negativa em $K(R,t_o)$. Daí, comparando a definição 2 com a definição 9 de [TAS, p. 27], constata-se que $v(x,t)$ é uma função de Liapounoff no cilindro $K(R,t_o)$ para a estabilidade relativa do sistema (1). Assim sendo, vê-se que as hipóteses do primeiro teorema de Liapounoff global [cf. TAS, teorema 1, p. 28] estão preenchidas, podendo-se portanto afirmar que, qualquer que seja o número h tal que $0 < h < h(\varphi,R)$, o conjunto $S(v,R,h)$ é um domínio de estabilidade relativa do sistema (1) em relação ao conjunto $L(\varphi,h)$.

(*) Observe-se que tais $\varphi(x)$ existem e que necessàriamente pertencem à classe Π (já que $v(x,t)$ é definida-positiva em $K(R,t_o)$).

(**) No sentido de Liapounoff.

Considerando que $h(\varphi,R) > 0$, vê-se que a classe dêsses domínios não é vazia. De acôrdo com a definição de domínio de estabilidade relativa [cf. TAS, definição 8, p. 27], conclui-se que a origem 0 é um ponto de equilíbrio estável (*) do sistema (1).

Recordando que

$$(18) \qquad \mathfrak{S}(v,R,\varphi) = \bigcup_{0<h<h(\varphi,R)} S(v,R,h) \ ,$$

do fato de que $x_o \in \mathfrak{S}(v,R,\varphi)$ deduz-se que existe um número $\bar{h}$ tal que $0<\bar{h}<h(\varphi,R)$ para o qual se tem que $x_o \in S(v,R,\bar{h})$. Como $S(v,R,\bar{h})$ é um domínio de estabilidade relativa do sistema (1), pela citada definição 8 de [TAS, p. 27] conclui-se que $t^+ = +\infty$.

Agora só resta provar a subsistência da relação (17).

Como $S(v,R,\bar{h})$ é um domínio de estabilidade relativa do sistema (1) em relação ao conjunto $L(\varphi,\bar{h})$, de acôrdo com a mesma definição 8 de [TAS, p. 27] pode-se afirmar que para qualquer $t \geqslant t_o$ o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence a a $L(\varphi,\bar{h})$. Mas, como $0 < \bar{h} < h(\varphi,R)$, tem-se que $L(\varphi,\bar{h}) \subset R$. Vê-se assim que para qualquer $t \geqslant t_o$ o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence a R. Posto isto, considerando que a função $v(x,t)$ é definida-positiva no cilindro $K(R,t_o)$, sendo portanto $v(x,t) \geqslant 0$ em $K(R,t_o)$, deduz-se que a função composta $v(x(t;x_o;t_o),t)$, não só é definida para $t \geqslant t_o$, mas ainda é tal que

$$(19) \qquad v(x(t;x_o;t_o),t) \geqslant 0$$

para qualquer $t \geqslant t_o$. Considerando que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é definida-negativa fraca no cilindro $K(R,t_o)$, sendo portanto $v^{\bullet}(x,t) \leqslant 0$ em $K(R,t_o)$, em vista da expressão (21) da introdução geral deduz-se que $\frac{d}{dt} v(x(t;x_o;t_o),t) = v^{\bullet}(x(t;x_o;t_o),t) \leqslant 0$ para qualquer $t \geqslant t_o$. Conseqüentemente a função $v(x(t;x_o;t_o),t)$ é não crescente para $t \geqslant t_o$, tendo portanto um limite $\bar{v}$ quando t tende a $+\infty$. Levando em conta (19) pode-se afirmar que $\bar{v}$ é um número não negativo. Fica assim estabelecida a relação

$$(20) \qquad \lim_{t\to+\infty} v(x(t;x_o;t_o),t) = \bar{v} \geqslant 0 \ .$$

(*) No sentido de Liapounoff.

Mostremos que se $\bar{v} = 0$, então a relação (17) subsiste. Para tanto, provaremos a seguir que dada arbitràriamente uma vizinhança esférica U da origem O, existe um número $T \geq t_o$ tal que o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence à vizinhança U, qualquer que seja $t > T$. Com efeito, sendo $\varphi(x)$ uma função da classe Π, empregando a relação (4) anteriormente demonstrada, pode-se afirmar que $\inf\limits_{x \in {}^cU} \varphi(x) > 0$. Assim sendo, é possível tomar-se (arbitràriamente) um número $\bar{h}'$ tal que $0 < \bar{h}' < \inf\limits_{x \in {}^cU} \varphi(x)$. Sem dificuldade se constata que o correspondente conjunto $L(\varphi, \bar{h}')$ está contido na vizinhança U. Posto isto, considere-se agora a hipótese $\bar{v} = 0$. Nessa hipótese, (levando em conta a (20)) pode-se afirmar que existe um número $T \geq t_o$ tal que $v(x(t;x_o;t_o),t) < \bar{h}'$ para qualquer $t > T$. Tendo em vista que para qualquer $t > T$ $(\geq t_o)$ o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence a R, e considerando que a função $v(x,t)$ é <u>definida-positiva</u> pertencente a $\varphi(x)$ no cilindro $K(R,t_o)$, o que implica que $\varphi(x) \leq v(x,t)$ em $K(R,t_o)$, obtém-se que $\varphi(x(t;x_o;t_o)) < \bar{h}'$ para qualquer $t > T$. Isto mostra que o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence ao conjunto $L(\varphi, \bar{h}')$, qualquer que seja $t > T$. Ora, como $L(\varphi, \bar{h}')$ está contido em U, conclui-se que o número $T \geq t_o$ acima é tal que o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence à vizinhança U, qualquer que seja $t > T$.

À vista de que se $\bar{v} = 0$, então a relação (17) subsiste, não temos mais do que mostrar que necessàriamente $\bar{v} = 0$. É o que será feito a seguir. Faça-se a hipótese de que $\bar{v} \neq 0$. Como $\bar{v} \geq 0$, essa hipótese implica que $\bar{v} > 0$. Considerando que $v(x,t)$ é <u>Π-limitada</u> num cilindro $K(N,t_o)$, onde N designa uma vizinhança esférica da origem O contida em R, vê-se que existe uma função $\psi(x)$ da classe Π tal que $v(x,t) \leq \psi(x)$ para qualquer $x \in N$ e qualquer $t \geq t_o$. Posto isto, como $\bar{v} > 0$, é possível tomar-se (arbitràriamente) um número $\bar{h}''$ tal que $0 < \bar{h}'' < \bar{v}$. Levando em conta que $\psi(x)$ é uma função da classe Π, fàcilmente se constata que existe uma vizinhança esférica U da origem O contida em N e tal que $\psi(x) < \bar{h}''$ para qualquer $x \in U$. Deduz-se que $v(x,t) < \bar{v}$ para qualquer $x \in U$ e qualquer $t \geq t_o$. Daí, considerando que $v(x(t;x_o;t_o),t) \geq \bar{v}$ para qualquer $t \geq t_o$ (pois subsiste a (20) e $v(x(t;x_o;t_o),t)$ é não crescente para $t \geq t_o$), obtém-se que o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence ao conjunto complementar ${}^cU$ de U, qualquer que seja $t \geq t_o$. Mas, por outro lado, como anteriormente se viu, o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence ao conjunto $L(\varphi, \bar{h})$, qualquer que seja $t \geq t_o$. Pode-se pois afirmar que, para qualquer $t \geq t_o$, o ponto $x(t;x_o;t_o)$ pertence ao conjunto $C = L(\varphi, \bar{h}) \cap {}^cU$. Ora, C é visivelmente um conjunto compacto de $\mathcal{F}$ contido no conjunto $R - \{0\}$. Então, considerando que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é <u>definida-negativa fraca</u> no cilindro $K(R,t_o)$, por meio do emprêgo da proposição 3 (cf. condição (iii)) pode-se afirmar que existe um número positivo η tal que $v^{\bullet}(x,t) < -\eta$ para qualquer $x \in C$ e qualquer $t \geq t_o$. Assim sendo, resulta que a relação $v^{\bullet}(x(t;x_o;t_o),t) < -\eta$ subsiste para qualquer $t \geq t_o$. Como $\eta > 0$, dessa relação conclui-se fàcilmente que (para valores suficientemente grandes de t) a função $v(x(t;x_o;t_o),t)$ assume valores inferiores a qualquer número (em particular negativo) fixado. Em face do fato de que $v(x,t)$ é uma função definida-positiva no cilindro $K(R,t_o)$, esta conclusão é manifestamente absurda. A hipótese inicialmente feita é pois absurda, o que significa que necessàriamente $\bar{v} = 0$.

Fica assim completa a demonstração do teorema 1.

4. NOVA FORMA DA PRECEDENTE GENERALIZAÇÃO DO SEGUNDO TEOREMA DE LIAPOUNOFF GLOBAL.

A presente secção é primordialmente dedicada à apresentação de uma nova (e equivalente) forma do teorema 1. Trata-se do teorema 2, dado mais abaixo. O teorema 2 apresentar-se-á como sendo de utilização mais conveniente do que o teorema 1, e será tomado como ponto de partida para a obtenção dos novos resultados da teoria dos sistemas associados a serem apresentados posteriormente. Principiaremos introduzindo uma noção de derivada autônoma, em tôrno da qual girarão os desenvolvimentos desta secção.

4.1. A noção de derivada autônoma em relação a um sistema.

Considere-se o sistema dado (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente à classe $\mathfrak{C}(D,t_o)$. Em geral, a função $f(x,t)$ além de depender de x, depende também de t.

Juntamente com o sistema (1), considere-se uma qualquer função $v(x,t)$ da classe $C_1(K(D,t_o))$. Em geral, a função $v(x,t)$ além de depender de x, depende também de t.

Nestas condições fica perfeitamente determinada a função $v^{\bullet}(x,t)$, derivada de $v(x,t)$ em relação a t ao longo das trajetórias do sistema (1). A função $v^{\bullet}(x,t)$ é definida no cilindro $K(D,t_o)$, e dada por uma qualquer das duas expressões (21) e (22) da introdução geral. Essas expressões mostram que, em geral, a função $v^{\bullet}(x,t)$ além de depender de x, depende também de t.

Nesta subsecção introduziremos uma nova função, construindo-a a partir de $v^{\bullet}(x,t)$. Essa nova função, que será designada pela notação $v^{:}(x)$, dependerá, em geral, de x - porém, ao contrário de $v^{\bullet}(x,t)$, será independente de t. Podemos dizer que a função v'(x) se constituirá numa espécie de derivada de v(x,t) em relação ao sistema (1), numa espécie de "derivada autônoma".

Inicialmente, consideremos a função v´(x) definida pela expressão

$$v'(x) = \sup_{t \geq t_0} v^{\bullet}(x,t) \;. \tag{21}$$

Vê-se fàcilmente que v´(x) é definida em D e assume valores no sistema ampliado de números reais. (v´(x) poderá eventualmente assumir o valor $+\infty$, porém nunca o valor $-\infty$.) A função v´(x) fica perfeitamente determinada pelo sistema (1) e pela função v(x,t).

Para x variável em D, designemos agora por $\alpha(x)$ a distância de x à fronteira de D. (No caso em que a fronteira de D é vazia, $\alpha(x) = +\infty$.) Considerando que D é aberto, vê-se que $\alpha(x)$ é sempre um elemento (estritamente) positivo do sistema ampliado de números reais. Designemos ainda por r uma variável auxiliar real e por y uma variável auxiliar em $\mathcal{F}$. Constata-se fàcilmente que, para cada $x \in D$,

$$\sup_{|y-x| \leq r} v'(y) \tag{22}$$

é uma função de r definida no intervalo $0 < r < \alpha(x)$, a qual assume valores no sistema ampliado de números reais. Essa função é claramente não decrescente no referido intervalo. Assim sendo, podemos considerar a função v'(x) definida pela expressão

$$v'(x) = \lim_{r \to 0+} \; \sup_{|y-x| \leq r} v'(y) \;, \tag{23}$$

ou seja, pela expressão

$$v'(x) = \lim_{r \to 0+} \; \sup_{|y-x| \leq r} \; \sup_{t \geq t_0} v^{\bullet}(y,t) \;. \tag{24}$$

Vê-se fàcilmente que v'(x) é definida em D e assume valores nos sistema ampliado de números reais. (v'(x) poderá eventualmente assumir o valor $+\infty$, porém nunca o valor $-\infty$.) A função v'(x) fica perfeitamente determinada pelo sistema (1) e pela função v(x,t).

DEFINIÇÃO 3 - Dizemos que a função v'(x) acima construída é a <u>derivada autônoma da função</u> v(x,t) <u>em relação ao sistema</u> (1).

Não oferece maiores dificuldades a verificação de que para se definir a função v'(x) pode-se, em lugar da expressão (24) (ou da (23)), equivalentamente empregar a expressão

$$(25) \qquad v'(x) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ t \geq t_o}} v^{\bullet}(y,t) .$$

Observemos que a partir das expressões (21) e (23) estabelece-se fàcilmente que

$$(26) \qquad v'(x) \geq v'(x) \geq v^{\bullet}(x,t)$$

para qualquer $x \in D$ e qualquer $t \geq t_o$.

É interessante que ainda observemos que subsistem os fatos expressos pela seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 5 - Se as funções $f(x,t)$ e $v(x,t)$ independem de t no cilindro $K(D,t_o)$, então o mesmo ocorre com a função $v^{\bullet}(x,t)$, e, mais do que isso, tem-se que

$$(27) \qquad v'(x) = v'(x) = v^{\bullet}(x,t)$$

para qualquer $x \in D$ e qualquer $t \geq t_o$.

Com efeito, pela expressão (21) da introdução geral vê-se que a função $v^{\bullet}(x,t)$ independe de t, e, tendo presente a expressão (21) acima, deduz-se que $v^{\bullet}(x,t) = v'(x)$ para qualquer $x \in D$ e qualquer $t \geq t_o$. Além disso, considerando que o sistema (1) pertence à classe $\mathcal{E}(D,t_o)$ e que a função $v(x,t)$ é da classe $C_1(K(D,t_o))$, obtém-se fàcilmente que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é contínua no cilindro $K(D,t_o)$. Deduz-se que $v'(x)$ é contínua em D. Por fôrça desta continuidade, resulta imediatamente da expressão (23) que $v'(x) = v'(x)$ em D. A proposição fica assim demonstrada.

De agora em diante, em <u>quaisquer circunstâncias</u> nas quais estivermos considerando um sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente a uma classe $\mathcal{E}(D,t_o)$, e, concomitantemente, uma função $v(x,t)$ da classe $C_1(K(D,t_o))$, <u>diremos que se verifica o caso autônomo se as funções</u> $f(x,t)$ <u>e</u> $v(x,t)$ <u>independem de</u> t <u>no cilindro</u> $K(D,t_o)$.

Pela proposição 5, vê-se que no caso autônomo a derivada autônoma de $v(x,t)$ em relação ao sistema (1) coincide com a derivada de $v(x,t)$ em relação a t ao longo das trajetórias do sistema (1) (desde que esta última derivada, que independe de t, seja considerada como função definida em D, e não em $K(D,t_o)$).

4.2. O caso eqüicontínuo.

A presente subsecção é dedicada a algumas considerações em tôrno da subsistência da relação

$$(28) \qquad v'(x) = v^{\prime}(x)$$

para qualquer $x \in D - \{0\}$. Tenha-se presente que, como o exibe a relação (26), sempre se tem que $v'(x) \geqslant v^{\prime}(x)$ para qualquer $x \in D$.

Inicialmente observemos que, de acôrdo com a proposição 5, no caso autônomo as funções $f(x,t)$ e $v(x,t)$ são tais que a relação (28) subsiste.

Entretanto, como passamos a ver através da análise de um exemplo, a relação (28) nem sempre tem lugar.

É interessante que comecemos considerando no cilindro $K(\mathcal{F},0)$ um sistema de equações diferenciais do tipo

$$(29) \qquad \dot{x} = H\,x + b(|x|,t)\,x\,,$$

onde supomos que H é u'a matriz constante hemissimétrica ($H' = -H$) e que $b(q,t)$ é uma função real das duas variáveis reais q e t, definida e contínua para $0 \leqslant q < +\infty$ e $0 \leqslant t < +\infty$. Sôbre a função $b(q,t)$, ainda supomos que a mesma satisfaz a seguinte condição (do tipo das) de Lipschitz: quaisquer que sejam $q_o \geqslant 0$ e $t_o' \geqslant 0$, existem três constantes $L = L(q_o,t_o') > 0$, $\varrho = \varrho(q_o,t_o') > 0$ e $\delta = \delta(q_o,t_o') > 0$ para as quais a desigualdade

$$(30) \qquad |b(\bar{q},t) - b(\bar{\bar{q}},t)| \leqslant L|\bar{q} - \bar{\bar{q}}|$$

é verificada para quaisquer $\bar{q}$, $\bar{\bar{q}}$ e t tais que $\bar{q} \geqslant 0$, $|\bar{q} - q_o| < \varrho$, $\bar{\bar{q}} \geqslant 0$, $|\bar{\bar{q}} - q_o| < \varrho$ e $t_o' \leqslant t < t_o' + \delta$. Com as suposições feitas, (empregando um dos teoremas clássicos de existência a unicidade de soluções de sistemas normais de equações diferenciais ordinárias) chega-se sem maiores dificuldades à constatação de que o sistema (29) pertence à classe $\mathfrak{E}(\mathcal{F},0)$. (*)

(*) Sistemas do tipo acima prestam-se a variadas ilustrações interessantes. Veja-se, por exemplo, o livro [iv, p. 235], onde são considerados sistemas dêsse tipo (se bem que bastante menos gerais, em particular autônomos, e com objetivos diferentes dos nossos).

Juntamente com o sistema (29), consideremos a função

$$v(x,t) = x'x = |x|^2 \tag{31}$$

no cilindro $K(\mathcal{F},0)$. Manifestamente, essa função é da classe $C_1(K(\mathcal{F},0))$.

Usando a expressão (22) da introdução geral, estabelece-se fàcilmente que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é dada no cilindro $K(\mathcal{F},0)$ pela expressão

$$v^{\bullet}(x,t) = 2\,|x|^2\, b(|x|,t)\ . \tag{32}$$

Com efeito, levando em conta que H é hemissimétrica, deduz-se sucessivamente que

$$\begin{aligned} v^{\bullet}(x,t) &= [Hx + b(|x|,t)x\,]'\ \mathrm{grad}_x\, |x|^2 = \\ &= [-\,x'H + b(|x|,t)x']\ \ (2x) = \\ &= -\,2\,x'Hx + 2\,|x|^2\, b(|x|,t) = \\ &= 2\,|x|^2\, b(|x|,t)\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Empregando as expressões (21) e (23), em virtude da (32) obtém-se que as funções $v'(x)$ e $v'(x)$ são dadas em $\mathcal{F}$ pelas expressões

$$v'(x) = 2\,\sup_{t \geq 0}\ |x|^2\, b(|x|,t) \tag{34}$$

e

$$v'(x) = 2\,\lim_{r \to 0+}\ \sup_{|y-x| \leq r}\ \sup_{t \geq 0}\ |y|^2\, b(|y|,t). \tag{35}$$

Observe-se que as funções $v'(x)$ e $v'(x)$ independem de H (o que decorre do fato de que a função $v^{\bullet}(x,t)$ independe de H).

Note-se que as (34) e (35) estabelecem relações bastante simples ligando as funções $v'(x)$ e $v'(x)$ com a função $b(q,t)$. Pode-se daí entrever a possibilidade da construção de exemplos - através de escolhas da função $b(q,t)$ - nos quais as funções $v'(x)$ e $v'(x)$ se apresentam com características de comportamento interessantes, como naquele que será apresentado a seguir.

Consideremos o exemplo no qual o sistema (29) assume a forma

$$\dot{x} = H\,x + [\,\tfrac{1}{2}\,(|x| - 1) - e^{-||x| - 2|t}\,]\ x\ , \tag{36}$$

isto é, o exemplo no qual a função $b(q,t)$ é dada pela expressão

$$(37) \qquad b(q,t) = \frac{1}{2}(q-1) - e^{-|q-2|t}.$$

Pode-se ver sem dificuldade que a expressão (37) determina uma função $b(q,t)$ que satisfaz aos acima exigidos requisitos de definição, continuidade e lipschitzianeidade.

Utilizando a (37), através de uma aplicação da (34) deduz-se que

$$(38) \qquad v'(x) = 2 \sup_{t \geq 0} |x|^2 \left[\frac{1}{2}(|x|-1) - e^{-||x|-2|t}\right]$$

para qualquer $x \in \mathcal{F}$. Ora, fàcilmente se estabelece que, para x variável em $\mathcal{F}$,

$$(39) \qquad \sup_{t \geq 0} |x|^2 \left[\frac{1}{2}(|x|-1) - e^{-||x|-2|t}\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^2(|x|-1) & \text{sempre que } |x| \neq 2 \\ \frac{1}{2}|x|^2(|x|-3) & \text{sempre que } |x| = 2 . \end{cases}$$

Assim sendo, pela (38) obtém-se que a função $v'(x)$ é dada em $\mathcal{F}$ pela expressão

$$(40) \qquad v'(x) = \begin{cases} |x|^2(|x|-1) & \text{sempre que } |x| \neq 2 \\ |x|^2(|x|-3) & \text{sempre que } |x| = 2 . \end{cases}$$

O cálculo da função $v'(x)$, correspondente àquele acima feito da função $v'(x)$, é um pouco mais trabalhoso. Utilizando a (37), através de uma aplicação da (35) deduz-se que

$$(41) \qquad v'(x) = 2 \lim_{r \to 0+} \sup_{|y-x| \leq r} \sup_{t \geq 0} |y|^2 \left[\frac{1}{2}(|y|-1) - e^{-||y|-2|t}\right]$$

para qualquer $x \in \mathcal{F}$. Num primeiro caso, suponha-se que $|x| \neq 2$. Nesse caso, levando em conta a (39), a partir da (41) constata-se sem dificuldade que

$$(42) \qquad v'(x) = 2 \lim_{r \to 0+} \sup_{|y-x| \leq r} \frac{1}{2}|y|^2(|y|-1) ,$$

donde imediatamente se obtém que

$$(43) \qquad v'(x) = |x|^2(|x|-1) .$$

Num segundo caso, suponha-se que $|x| = 2$. Nesse caso, mais uma vez levando em conta a (39), novamente a partir da (41) constata-se sem dificuldade que

$$(44) \qquad v'(x) = 2 \lim_{r \to 0+} \max \left\{ \begin{array}{ll} \sup\limits_{\substack{|y-x| \leq r \\ |y| \neq 2}} & \frac{1}{2} |y|^2 (|y| - 1) , \\ \sup\limits_{\substack{|y-x| \leq r \\ |y| = 2}} & \frac{1}{2} |y|^2 (|y| - 3) \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \lim_{r \to 0+} \max \left\{ \begin{array}{ll} \sup\limits_{|y-x| \leq r} & \frac{1}{2} |y|^2 (|y| - 1) , \\ \sup\limits_{|y| = 2} & \frac{1}{2} |y|^2 (|y| - 3) \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \max \left\{ \begin{array}{lll} \lim\limits_{r \to 0+} & \sup\limits_{|y-x| \leq r} & \frac{1}{2} |y|^2 (|y| - 1) , \\ \lim\limits_{r \to 0+} & \sup\limits_{|y| = 2} & \frac{1}{2} |y|^2 (|y| - 3) \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \max \left\{ \frac{1}{2} |x|^2 (|x| - 1) \quad , \quad \frac{1}{2} |x|^2 (|x| - 3) \right\},$$

donde imediatamente se obtém que

$$(45) \qquad v'(x) = |x|^2 (|x| - 1) .$$

Reunindo os resultados obtidos nos dois casos acima considerados, à vista das (43) e (45) fàcilmente se deduz que a função $v'(x)$ é dada em $\mathcal{F}$ pela expressão

$$(46) \qquad v'(x) = |x|^2 (|x| - 1) .$$

As (40) e (46) mostram que as funções $v'(x)$ e $v'(x)$ não resultam iguais em todo o conjunto $\mathcal{F}$. Nos pontos x tais que $|x| = 2$ (e sòmente nesses pontos) tem-se que

$$(47) \qquad v'(x) > v'(x) ,$$

pois $v'(x) = -4$ e $v'(x) = 4$. Terminando a análise do exemplo considerado, podemos concluir que a relação (28) nem sempre tem lugar.

A partir dêste ponto e até o final da presente subsecção, desenvolveremos certas análises visando o estabelecimento de condições suficientes para que as funções f(x,t) e v(x,t) sejam tais que a subsistência da relação (28) fique assegurada. Referimo-nos a certas condições suficientes mais amplas do que aquelas dadas pelo caso autônomo.

PROPOSIÇÃO 6 - Se a função $v^{\circ}(x,t)$ é equicontínua em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$, então a função $v'(x)$ é contínua em todos os pontos $x \in D - \{0\}$ nos quais a função $v^{\circ}(x,t)$ é superiormente limitada como função de t no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$, e mais, subsiste a relação $v^{*}(x) = v'(x)$ para qualquer $x \in D - \{0\}$.

De fato, considere-se inicialmente um ponto qualquer $\bar{x} \in D - \{0\}$ tal que a função $v^{\circ}(\bar{x},t)$ é superiormente limitada no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$. Pela suposta eqüicontinuidade da função $v^{\circ}(x,t)$, tem-se manifestamente que a mesma função é eqüicontínua no ponto $\bar{x}$, para t variável no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$. Levando em conta que $D - \{0\}$ é um conjunto aberto, isto significa que dado arbitràriamente um número $\varepsilon > 0$, existe um número $\sigma > 0$ (independente de t) tal que $|x - \bar{x}| < \sigma$ implica que $x \in D - \{0\}$ e tal que a desigualdade

$$(48) \qquad |v^{\circ}(x,t) - v^{\circ}(\bar{x},t)| < \varepsilon$$

é satisfeita para qualquer x da vizinhança $|x - \bar{x}| < \sigma$ e para qualquer t do intervalo $t_0 \leq t < +\infty$. Como $v^{\circ}(\bar{x},t)$ é superiormente limitada no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$, por meio da (48) obtém-se que o mesmo ocorre com $v^{\circ}(x,t)$, qualquer que seja x da referida vizinhança. À vista disso, utilizando a expressão (21), constata-se imediatamente que a função $v'(x)$ assume valores reais em todos os pontos x da mesma vizinhança. Assim sendo, a partir da (48), e através de uma nova utilização da expressão (21), fàcilmente se deduz que a desigualdade

$$(49) \qquad |v'(x) - v'(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

é satisfeita para qualquer x da vizinhança $|x - \bar{x}| < \sigma$. Vê-se daí que a função $v'(x)$ é contínua no ponto $\bar{x}$. Conclui-se imediatamente que a função $v'(x)$ é contínua em todos os pontos $x \in D - \{0\}$ nos quais a função $v^{\circ}(x,t)$ é superiormente limitada como função de t no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$.

Considere-se agora um ponto qualquer $x_0 \in D - \{0\}$. Os seguintes dois, e sòmente os seguintes dois casos mùtuamente exclusivos são possíveis: ou a função $v^{\circ}(x_0,t)$ é superiormente limitada no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$, ou a função $v^{\circ}(x_0,t)$ não é superiormente limitada no intervalo $t_0 \leq t < +\infty$. No primeiro caso, como acima se provou, a função $v'(x)$ é contínua no ponto

x_o. Assim sendo, por meio do emprêgo da expressão (23) fàcilmente se deduz que $v'(x_o) = v'(x_o)$. No segundo caso, pela expressão (21) vê-se que $v'(x_o) = +\infty$. Assim sendo, por meio do emprêgo da expressão (23) obtém-se fàcilmente que também $v'(x_o) = +\infty$, donde de deduz que $v'(x_o) = v'(x_o)$. Pela argumentação que acaba de ser feita, conclui-se imediatamente que subsiste a relação $v'(x) = v'(x)$ para qualquer $x \in D - \{0\}$.

A proposição 6 mostra que o estabelecimento de condições suficientes do tipo acima mencionado pode ser feito através do estabelecimento de condições suficientes para que as funções $f(x,t)$ e $v(x,t)$ sejam tais que a função $v^{\cdot}(x,t)$ resulte eqüicontínua em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_o \leq t < +\infty$. Um conjunto de tais condições é manifestamente dado pela seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 7 - Se as funções $f(x,t)$, $\text{grad}_x\, v(x,t)$ e $v_t(x,t)$ são eqüicontínuas em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_o \leq t < +\infty$, e, além disso, se, para cada $x \in D - \{0\}$, as funções $f(x,t)$ e $\text{grad}_x\, v(x,t)$ são limitadas como funções de t no intervalo $t_o \leq t < +\infty$, então a função $v^{\cdot}(x,t)$ é eqüicontínua em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_o \leq t < +\infty$.

De fato, considere-se um ponto qualquer $x_o \in D - \{0\}$. Pela expressão (22) da introdução geral obtém-se que as igualdades

$$(50)\qquad v^{\cdot}(x,t) - v^{\cdot}(x_o,t) =$$

$$= v_t(x,t) - v_t(x_o,t) + f'(x,t)\,\text{grad}_x\, v(x,t) - f'(x_o,t)\,\text{grad}_x\, v(x_o,t) =$$

$$= v_t(x,t) - v_t(x_o,t) +$$

$$+ \left[f'(x,t) - f'(x_o,t)\right] \text{grad}_x\, v(x_o,t) +$$

$$+ f'(x_o,t) \left[\text{grad}_x\, v(x,t) - \text{grad}_x\, v(x_o,t)\right] +$$

$$+ \left[f'(x,t) - f'(x_o,t)\right] \left[\text{grad}_x\, v(x,t) - \text{grad}_x\, v(x_o,t)\right]$$

são verificadas para qualquer $x \in D - \{0\}$ e qualquer $t \geqslant t_o$. Segue-se que a desigualdade

(51)
$$|v^{\bullet}(x,t) - v^{\bullet}(x_o,t)| \leqslant$$
$$\leqslant |v_t(x,t) - v_t(x_o,t)| +$$
$$+ |f(x,t) - f(x_o,t)|\,|\mathrm{grad}_x\, v(x_o,t)| +$$
$$+ |f(x_o,t)|\,|\mathrm{grad}_x\, v(x,t) - \mathrm{grad}_x\, v(x_o,t)| +$$
$$+ |f(x,t) - f(x_o,t)|\,|\mathrm{grad}_x\, v(x,t) - \mathrm{grad}_x\, v(x_o,t)|$$

é verificada para qualquer $x \in D - \{0\}$ e qualquer $t \geqslant t_o$.

Seja agora arbitràriamente dado um número $\varepsilon > 0$. Tendo em vista que $D - \{0\}$ é um conjunto aberto, pela admitida eqüicontinuidade das funções $f(x,t)$, $\mathrm{grad}_x\, v(x,t)$ e $v_t(x,t)$ pode-se afirmar que existe um número $\sigma > 0$ tal que $|x - x_o| < \sigma$ implica que $x \in D - \{0\}$ e tal que as desigualdades

(52)
$$|v_t(x,t) - v_t(x_o,t)| < \varepsilon\,,$$

(53)
$$|f(x,t) - f(x_o,t)| < \varepsilon\,,$$

(54)
$$|\mathrm{grad}_x\, v(x,t) - \mathrm{grad}_x\, v(x_o,t)| < \varepsilon$$

são satisfeitas para qualquer x da vizinhança $|x - x_o| < \sigma$ e para qualquer t do intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$. Além disso, pela suposta limitação das funções $f(x,t)$ e $\mathrm{grad}_x\, v(x,t)$ pode-se afirmar que existem constantes $K' > 0$ e $K'' > 0$ tais que as desigualdades

(55)
$$|f(x_o,t)| < K'\,,$$

(56)
$$|\mathrm{grad}_x\, v(x_o,t)| < K''$$

são satisfeitas para qualquer t do intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$.

Da (51) combinada com as (52), (53), (54), (55) e (56) resulta que a desigualdade

(57)
$$|v^{\bullet}(x,t) - v^{\bullet}(x_o,t)| < (1 + K' + K'' + \varepsilon)\,\varepsilon$$

é satisfeita para qualquer x da vizinhança $|x - x_o| < \sigma$ e para qualquer t do intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$. Vê-se daí que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é eqüicontínua no ponto x_o, para t variável no intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$. Considerando que x_o é um ponto qualquer de $D - \{0\}$, conclui-se que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é eqüicontínua em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$.

A partir das proposições 6 e 7 chega-se imediatamente ao estabelecimento da seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 8 - Se as funções $f(x,t)$, $\text{grad}_x\, v(x,t)$ e $v_t(x,t)$ são <u>eqüicontínuas</u> em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$, e, além disso, se, para cada $x \in D - \{0\}$, as funções $f(x,t)$ e $\text{grad}_x\, v(x,t)$ são <u>limitadas</u> como funções de t no intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$, então a função $v'(x)$ é contínua em todos os pontos $x \in D - \{0\}$ nos quais a função $v^{\bullet}(x,t)$ é superiormente limitada como função de t no intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$, e mais, <u>subsiste a relação</u>

$$v'(x) = v'(x) \tag{58}$$

para qualquer $x \in D - \{0\}$.

De agora em diante, em <u>quaisquer circunstâncias</u> nas quais estivermos considerando um sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente a uma classe $\mathfrak{E}(D,t_o)$, e, concomitantemente, uma função $v(x,t)$ da classe $C_1(K(D,t_o))$, <u>diremos que se verifica o caso eqüicontínuo se as funções</u> $f(x,t)$, $\text{grad}_x\, v(x,t)$ <u>e</u> $v_t(x,t)$ <u>são eqüicontínuas em</u> $D - \{0\}$, <u>para</u> t <u>variável no intervalo</u> $t_o \leqslant t < +\infty$, <u>e, além disso, se, para cada</u> $x \in D - \{0\}$, <u>as funções</u> $f(x,t)$ <u>e</u> $\text{grad}_x\, v(x,t)$ <u>são limitadas como funções de</u> t <u>no intervalo</u> $t_o \leqslant t < +\infty$.

Pela proposição 8 somos conduzidos à seguinte conclusão: <u>a verificação do caso eqüicontínuo é suficiente para que a subsistência da relação</u> (28) <u>fique assegurada.</u>

Observe-se que o caso eqüicontínuo é mais amplo do que o caso autônomo. Se êste último se verifica, então aquêle primeiro também se verifica, porém não vice-versa. O caso eqüicontínuo abrange uma variedade bastante grande de sistemas $\dot{x} = f(x,t)$ não autônomos (e de funções $v(x,t)$ efetivamente dependentes de t). (*)

(*) Não nos deteremos em comentários detalhados a êste respeito. No entanto, julgamos interessante fazermos pelo menos a menção que segue.

Casos nos quais a subsistência da relação (28) fica assegurada são interessantes pelo fato de que, nos mesmos, pode-se tomar a derivada autônoma $v'(x)$ como sendo dada nos pontos $x \in D - \{0\}$ por uma expressão bem mais simples do que a (24), a saber, pela seguinte expressão:

$$v'(x) = \sup_{t \geq t_o} v^\circ(x,t) . \tag{59}$$

Para se ver isto, tenha-se presente a expressão (21).

4.3. <u>Nova forma do teorema da secção precedente.</u>

Ao lado do sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ <u>pertencente à classe</u> $\mathcal{E}(D,t_o)$, consideremos uma função $v(x,t)$, supondo por ora que a mesma satisfaça sòmente à seguinte condição:

(a') $v(x,t)$ <u>é da classe</u> $C_1(K(D,t_o))$.

Nestas circunstâncias, sabemos que a derivada autônoma $v'(x)$ da função $v(x,t)$ em relação ao sistema (1) fica perfeitamente determinada. A partir de $v'(x)$ introduziremos abaixo dois conjuntos, R_o^* e R^*.

Em primeiro lugar, introduzamos o conjunto R_o^*, definindo-o da seguinte maneira: R_o^* <u>é o conjunto dos pontos</u> $x \in D - \{0\}$ <u>tais que</u>

$$v'(x) < 0 . \tag{60}$$

Estabeleceremos a seguir certas propriedades do conjunto R_o^*. As mesmas são dadas pela seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 9 - Uma condição <u>necessária e suficiente</u> para que um ponto $\bar{x}$ pertença ao conjunto R_o^*, é que $\bar{x}$ possua uma vizinhança esférica U contida em $D - \{0\}$ tal que a função $v^\circ(x,t)$ é superiormente limitada no cilindro $K(U,t_o)$ por um número negativo. Uma qualquer vizinhança esférica U que satisfaz a êstes resisitos está certamente contida em R_o^*. O conjunto R_o^* é um <u>aberto</u> de $\mathcal{F}$.

Considere-se um qualquer sistema $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente a uma classe $\mathcal{E}(D,t_o)$, cujo segundo membro $f(x,t)$ é uma função periódica em relação a t no cilindro $K(D,t_o)$. Pode-se constatar sem grande dificuldade que êsse sistema é tal que a função $f(x,t)$ satisfaz a todos os requisitos exigidos para a verificação do caso eqüicontínuo.

De fato, considerando a (25), pela definição do conjunto R_o^* vê-se que um ponto $\overline{x}$ pertence a R_o^* se e sòmente se $\overline{x} \in D - \{0\}$ e

(61) $$\lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-\overline{x}| \leq r \\ t \geq t_o}} v^{\bullet}(y,t) < 0 ,$$

isto é, se e sòmente se $\overline{x} \in D - \{0\}$ e existe um número $\overline{r} > 0$ tal que

(62) $$\sup_{\substack{|y-\overline{x}| \leq \overline{r} \\ t \geq t_o}} v^{\bullet}(y,t) < 0$$

e tal que a vizinhança esférica U de $\overline{x}$ definida por $|y - \overline{x}| < \overline{r}$ está contida em $D - \{0\}$, ou seja, se e sòmente se $\overline{x}$ possui uma vizinhança esférica U contida em $D - \{0\}$ tal que

(63) $$\sup_{(y,t) \in K(U,t_o)} v^{\bullet}(y,t) < 0 .$$

Considerando que a relação (63) exprime que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é superiormente limitada no cilindro $K(U,t_o)$ por um número negativo, vê-se que é de fato necessária e suficiente a condição enunciada na proposição.

Seja agora U uma qualquer vizinhança esférica contida em $D - \{0\}$ tal que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é superiormente limitada no cilindro $K(U,t_o)$ por um número negativo. Suponha-se que y seja um ponto qualquer de U. É imediato que y possui uma vizinhança esférica V contida em $D - \{0\}$ tal que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é superiormente limitada por um número negativo. (Basta que se tome V contida em U.) Pela condição necessária e suficiente acima provada, deduz-se que $y \in R_o^*$. Resulta daí que U está certamente contida em R_o^*.

Pelos dois fatos precedentemente estabelecidos, conclui-se imediatamente que o conjunto R_o^* é um aberto de $\mathcal{F}$. Fica assim terminada a demonstração da proposição.

Em segundo lugar, introduzamos o conjunto R^*, definindo-o da seguinte maneira: R^* é a reunião do conjunto R_o^* com o conjunto $\{0\}$, isto é,

(64) $$R^* = R_o^* \cup \{0\} .$$

Observemos que os conjuntos R_o^* e R^* ficam perfeitamente determinados pelo sistema (1) e pela função $v(x,t)$. Ambos, R_o^* e R^*, são conjuntos de $\mathcal{F}$ contidos em D. O conjunto R^* contém a origem 0, enquanto que o conjunto R_o^*

não a contém. A propósito de relações entre êsses conjuntos e a referida origem, pode-se considerar uma divisão da possibilidades em dois casos: ou o interior int R^* do conjunto R^* contém a origem 0, ou não a contém. Subsiste a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 10 - No caso em que $0 \in$ int R^*, o conjunto R^* é um aberto de $\mathcal{F}$.

Com efeito, pela proposição 9 tem-se que R^*_0 é um aberto de $\mathcal{F}$. Assim sendo, por meio da (64) fàcilmente se constata que se $0 \in$ int R^*, então todos os pontos de R^* são interiores a R^*.

Suponhamos agora que, além da condição (a'), a função $v(x,t)$ satisfaça também as seguintes condições:

(b') $v(x,t)$ é definida-positiva num cilindro $K(R,t_0)$, onde R designa um conjunto contido em D.

(c') $v(x,t)$ é Π-limitada em algum cilindro $K(N,t_0)$, onde N designa uma vizinhança esférica da origem 0 contida em R.

De acôrdo com o enunciado da condição (b'), o conjunto R que nele comparece deverá ser considerado como dado. Tendo presente a definição 04 [cf. introdução geral, 2.3, b], vê-se que R é necessàriamente um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem 0.

Nas presentes circunstâncias, subsiste a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 11 - No caso em que $0 \in$ int R^*, a função $v(x,t)$ é uma função de Liapounoff fraca no cilindro $K(R \cap R^*,t_0)$ para a estabilidade assintótica do sistema (1).

De fato, provaremos a seguir que as condições (a), (b), (c), (d) e (e) da definição 2 resultam satisfeitas, quando nelas se substitui R por $R \cap R^*$. Será o quanto basta para que se tenha a proposição demonstrada.

A condição (a) resulta satisfeita, pois não é outra coisa que a condição (a'). Como $0 \in$ int R^*, utilizando a proposição 10 pode-se afirmar que R^* é um subconjunto de D, que é aberto e que contém a origem 0. Mas, de acôrdo com a condição (b'), tendo presentes as observações acima feitas sôbre o conjunto R, vê-se que êsse conjunto goza das mesmas propriedades. Conseqüentemente, $R \cap R^*$ é um subconjunto de D que é aberto e que contém a origem 0. A condição (b) resulta pois satisfeita. Considerando êste fato, e tendo em vista que $R \cap R^* \subset R$, por meio da definição 04 constata-se fàcilmente que em virtude da condição (b') a função $v(x,t)$ é definida-positiva no cilindro $K(R \cap R^*, t_o)$. Vê-se assim que a condição (c) igualmente resulta satisfeita. Utilizando a definição 05 [cf. introdução geral, 2.3, b] e o fato de que $R \cap R^*$ é um aberto que contém a origem 0, por fôrça da condição (c') obtém-se que existe uma vizinhança esférica N_1 da origem 0 contida em $R \cap R^*$ tal que $v(x,t)$ é Π-limitada no cilindro $K(N_1, t_o)$. Assim sendo, a condição (d) por sua vez resulta satisfeita.

Para se provar que a condição (e) também resulta satisfeita, isto é, para se provar que a função $v^\circ(x,t)$ é definida-negativa fraca no cilindro $K(R \cap R^*, t_o)$, basta, com base na proposição 3, que se prove que as condições (i), (ii) e (iii) da mesma são verificadas pela função $v^\circ(x,t)$ no cilindro $K(R \cap R^*, t_o)$. É o que se passa a fazer.

Considerando que a função $v^\circ(x,t)$ é definida no cilindro $K(D, t_o)$, e levando em conta que $R \cap R^*$ é um subconjunto de D que é aberto e que contém a origem 0, constata-se fàcilmente que a condição (i) é verificada.

Pela condição (b'), a função $v(x,t)$ é definida-positiva no cilindro $K(R, t_o)$. Daí, por meio da definição 04, obtém-se que $v(0,t) = 0$ para qualquer $t \geq t_o$. Deduz-se que subsiste a seguinte identidade: $v_t(0,t) = 0$ para qualquer $t \geq t_o$. Mas, como a origem 0 é ponto de equilíbrio do sistema (1), tem-se mais a seguinte identidade: $f(0,t) = 0$ para qualquer $t \geq t_o$. Em vista dessas duas identidades, pela expressão (22) da introdução geral, constata-se imediatamente que $v^\circ(0,t) = 0$ para qualquer $t \geq t_o$, isto é, que a condição (ii) é verificada.

Será feita a seguir a constatação de que a condição (iii) é verificada: mostrar-se-á que dado um qualquer conjunto compacto C de $\mathcal{F}$ contido no conjunto $R \cap R^* - \{0\}$, existe um número positivo $\eta = \eta(C)$ tal que

(65) $$v^\circ(x,t) < -\eta$$

para qualquer $x \in C$ e qualquer $t \geq t_o$. Inicialmente, observe-se que de $C \subset R \cap R^* - \{0\}$ e de $R^* = R^*_o \cup \{0\}$ obtém-se que $C \subset R \cap R^*_o$, e, portanto, que $C \subset R^*_o$. Além disso, observe-se que pode ser adotada a suposição de que C não é vazio (pois no caso oposto a existência do número η é imediata). Considere-se agora um ponto qualquer $\bar{x} \in C$. Como $C \subset R^*_o$, tem-se que $\bar{x} \in R^*_o$. Utilizando a proposição 9, deduz-se que existe uma vizinhança esférica U de $\bar{x}$ contida em $D - \{0\}$ tal que a função $v^\circ(x,t)$ é superiormente limitada no cilindro $K(U, t_o)$ por um número negativo. Como imediatamente se vê, a cada ponto $\bar{x} \in C$ corresponde uma infinidade de tais vizinhanças esféricas U. Considere-se a classe constituída por todas essas vizinhanças U cor respondentes a todos os pontos $\bar{x} \in C$. Tal classe é evidentemente um recobrimento aberto de C. Como C é um conjunto compacto, pelo teorema de Borel-Lebesgue pode-se afirmar que C é recoberto por um número finito N de vizinhanças $U_1, \ldots, U_N$ da referida classe. Para essas vizinhanças pode-se fixar N números negativos $-\eta_1, \ldots, -\eta_N$ tais que a função $v^{\bullet}(x,t)$ é superiormente limitada nos cilindros $K(U_1,t_o), \ldots, K(U_N,t_o)$ respectivamente por $-\eta_1, \ldots -\eta_N$. Conclui-se fàcilmente que existe um número positivo η, por exemplo $\eta = \min \{\eta_1, \ldots, \eta_N\}$, tal que a (65) subsiste para qualquer $x \in C$ e qualquer $t \geq t_o$.

A proposição 11 fica assim completamente demonstrada.

Consideremos por fim uma função $\varphi(x)$ à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R,t_o)$. (*)

No caso em que $0 \in \operatorname{int} R^*$, o conjunto $R \cap R^*$ além de ser um conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem 0, é um conjunto que está contido em R. No referido caso, usando a definição 04, deduz-se fàcilmente daí que $\varphi(x)$ é uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R \cap R^*,t_o)$.

Levando isto em conta, através do emprêgo da proposição 11, somos imediatamente conduzidos à seguinte <u>conseqüência do teorema</u> 1: <u>no caso em que</u> $0 \in \operatorname{int} R^*$, o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap R^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1). De um modo mais completo, êste fato pode ser enunciado na forma do seguinte teorema:

TEOREMA 2 - <u>Dado o sistema</u> (1), $\dot{x} = f(x,t)$ <u>pertencente à classe</u> $\mathfrak{E}(D,t_o)$, <u>seja</u> $v(x,t)$ <u>uma função que satisfaz as seguintes condições</u>:

(a') $v(x,t)$ <u>é da classe</u> $C_1(K(D,t_o))$,

(b') $v(x,t)$ <u>é definida-positiva num cilindro</u> $K(R,t_o)$, <u>onde R designa um conjunto contido em</u> D,

(c') $v(x,t)^{\bullet}$ <u>é</u> Π-<u>limitada em algum cilindro</u> $K(N,t_o)$, <u>onde</u> N <u>designa uma vizinhança esférica da origem</u> 0 <u>contida em</u> R.

<u>Seja</u> $\varphi(x)$ <u>uma função à qual</u> $v(x,t)$ <u>pertence no cilindro</u> $K(R,t_o)$. <u>Designe-se por</u> R^* <u>a reunião do conjunto</u> $\{0\}$ <u>com o conjunto</u> R^*_o <u>dos pontos</u> $x \in D - \{0\}$ <u>tais que a derivada autônoma</u> $v'(x)$ <u>de</u> $v(x,t)$ <u>em relação ao sistema</u> (1) <u>é negativa. Nestas circunstâncias, se o inte-</u>

(*) Observe-se que tais $\varphi(x)$ existem e que necessàriamente pertencem à classe Π (pois estamos supondo que a condição (b') é satisfeita).

rior do conjunto R^* contém a origem 0, então o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap R^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1).

A argumentação acima apresentada mostra que o teorema 2 pode ser demonstrado com base no teorema 1.

Como passamos a ver, a recíproca desta asserção pode também ser feita. Para tanto é interessante que comecemos retomando as mesmas circunstâncias que, na presente subsecção, conduziram à proposição 11. Nessas circunstâncias, subsiste a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 12 - Se a função $v(x,t)$ é uma função de Liapounoff fraca no cilindro $K(R,t_0)$ para a estabilidade assintótica do sistema (1), então certamente se tem que $R \subset R^*$. E, mais, pode-se afirmar que $0 \in \text{int } R^*$.

De fato, considere-se um ponto qualquer $\bar{x} \in R$. Num primeiro caso, suponha-se que $\bar{x} \neq 0$. Pela definição 2 tem-se que $v^{\bullet}(x,t)$ é uma função definida-negativa fraca no cilindro $K(R,t_0)$. Daí, considerando que $\bar{x} \neq 0$, através de uma aplicação da proposição 3 obtém-se sem dificuldade que existe uma vizinhança esférica U de $\bar{x}$ contida em $D - \{0\}$ tal que a função $v^{\circ}(x,t)$ é superiormente limitada no cilindro $K(U,t_0)$ por um número negativo. (Como U, pode-se tomar uma qualquer vizinhança esférica de $\bar{x}$ cujo fêcho está contido no conjunto $R - \{0\}$.) Assim sendo, por meio do emprêgo da proposição 9, deduz-se que $\bar{x} \in R^*_0$, donde, pela (64), resulta que o ponto $\bar{x}$ é tal que $\bar{x} \in R^*$. Num segundo caso, suponha-se que $\bar{x} = 0$. Pela (64) vê-se que $0 \in R^*$. Assim sendo, resulta que o ponto $\bar{x}$ é tal que $\bar{x} \in R^*$. Levando em conta os dois casos considerados, conclui-se que certamente se tem que $R \subset R^*$. Considerando êste fato, e tendo presente que $0 \in R = \text{int } R$, conclui-se mais: pode-se afirmar que $0 \in \text{int } R^*$.

Suponhamos agora que as hipóteses do teorema 1 estejam satisfeitas, isto é, suponhamos que $v(x,t)$ é uma função de Liapounoff fraca num cilindro $K(R,t_0)$ para a estabilidade assintótica do sistema (1), e que $\varphi(x)$ é uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R,t_0)$.

Nestas circunstâncias, pela definição 2 obtém-se imediatamente que a função $v(x,t)$ é da classe $C_1(K(D,t_0))$, que $v(x,t)$ é definida-positiva no cilindro $K(R,t_0)$, onde R é um conjunto contido em D, e que $v(x,t)$ é Π-limitada em algum cilindro $K(N,t_0)$, onde N designa uma vizinhança esférica da origem 0 contida em R; além disso, pela proposição 12 obtém-se que $0 \in \text{int } R^*$. Levando em conta êstes fatos, é-se fàcilmente levado à seguinte consequência do teorema 2: o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap R^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1). Ora, subsiste a relação $R = R \cap R^*$, pois, pela proposição 12, $R \subset R^*$. Pode-se portanto concluir que o conjunto $\mathfrak{S}(v, R, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1). Esta conclusão não é outra coisa que a tese do teorema 1.

A argumentação acima apresentada mostra que o teorema 1 pode ser demonstrado com base no teorema 2.

O teorema 2 constitui-se numa nova (e equivalente) forma do teorema 1. À diferença do teorema 1, o teorema 2 emprega a noção de derivada autônoma em relação a um sistema. Uma das vantagens do teorema 2 sôbre o teorema 1 poderá ser apreciada através dos comentários que serão feitos no final da subsecção seguinte.

Como dissemos no começo da presente secção, o teorema 2 será tomado como ponto de partida para a obtenção dos novos resultados da teoria dos sistemas associados a serem apresentados posteriormente. Na seqüência dêste trabalho, o teorema 1 não mais será empregado. Ora, sem maiores dificuldades compreende-se que poderíamos ter enunciado e demonstrado o teorema 2 logo de início, sem passarmos pelo teorema 1. Isto poderia trazer como conseqüência uma redução da extensão desta parte I. É pois natural que se inquira por quê passámos pelo teorema 1 para chegarmos ao teorema 2. Uma breve resposta justificativa pode ser dada como segue: se assim tivéssemos feito, teríamos deixado de por em evidência um bom número de relações interessantes, e, em especial, teríamos deixado de exibir uma linha de desenvolvimento que principia na parte I do artigo [TAS] , e que continua, passo por passo, na parte I dêste trabalho, até o teorema 2.

4.4. Sôbre a determinação de domínios de estabilidade assintótica.

Podemos exprimir o teorema 2 numa outra forma, na forma de um método para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Para êsse método - que marcha seguindo as linhas gerais do método direto de Liapounoff - daremos a formulação que segue.

Dado o sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente à classe $\mathfrak{E}(D, t_o)$, para se fazer a determinação de domínios de estabilidade assintótica do mesmo, pode-se proceder executando as três etapas I_A, II_A e III_A, abaixo apresentadas, e, em seguida, utilizando o teorema 3, posteriormente enunciado.

ETAPA I_A - Escolha de uma função $v(x,t)$ da classe $C_1(K(D, t_o))$, que pertence a uma função $\varphi(x)$ num cilindro $K(R,t_o)$, com $R \subset D$, e que é π-limitada em algum cilindro $K(N,t_o)$, onde $N \subset R$ designa uma vizinhança esférica da origem 0.

ETAPA II_A - Obtenção da derivada autônoma $v'(x)$ (de $v(x,t)$ em relação ao sistema (1)).

ETAPA III_A - Determinação do conjunto R^*, reunião do conjunto $\{0\}$ com o conjunto R^*_o dos pontos $x \in D - \{0\}$ tais que

$$v'(x) < 0 . \tag{66}$$

TEOREMA 3 - Se $0 \in \text{int } R^*$, então o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap R^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1).

Um exame da formulação que acaba de ser dada mostra imediatamente que o método constitui-se numa outra forma de expressão para o teorema 2. Na verificação dêste fato reside a justificação do método, em especial do teorema 3. A formulação acima será útil para confrontações futuras.

Uma observação que apresenta interêsse é aquela que passamos a fazer. Existe um caso especial no qual o método acima pode ser simplificado. No caso geral, a função $v'(x)$ é dada pela expressão (24). No caso eqüicontínuo, levando em conta que subsiste a relação (28), constata-se imediatamente que a função $v'(x)$ pode ser substituída pela função $v'(x)$ dada pela expressão (21), bem mais simples do que a expressão (24).

Fechando a presente secção, faremos alguns comentários que chamam a atenção para um ponto que julgamos ser significativo.

Da mesma forma que acima procedemos relativamente ao teorema 2, poderíamos, calcados no teorema 1, ensaiar a formulação de um método análogo: que principia pela escolha de uma função $v(x,t)$ satisfazendo a certas condições (por exemplo as da etapa I_A, que envolvem um dado conjunto R), e que prossegue, até o final, através da aplicação de processos completa e explìcitamente descritos. Considerando o enunciado do teorema 1, não é difícil ver que, uma vez escolhida a função $v(x,t)$, surgiria um problema a resolver: surgiria o problema da existência e obtenção de conjuntos X para os quais a função $v(x,t)$ resulta ser uma função de Liapounoff fraca no cilindro $K(X,t_o)$ para a estabilidade assintótica do sistema (1). Podemos dizer que - graças à utilização da derivada autônoma $v'(x)$ (e da consideração do conjunto R^* obtido a partir da mesma) - o teorema 2 já a presenta o referido problema resolvido. (Trata-se de uma resolução que é essencialmente dada pela proposição 11, a qual, sob a condição de existência $0 \in \text{int } R^*$, fornece o conjunto $X = R \cap R^*$ como solução.)

De acôrdo com a idéia brevemente relatada acima, podemos dizer que o teorema 2 constitui-se numa espécie de "forma resolvida" do teorema 1. Eis uma razão pela qual o teorema 2, embora equivalente ao teorema 1, apresenta-se como sendo de utilização mais conveniente do que êste último.

5. CONSIDERAÇÕES E DISCUSSÕES SUPLEMENTARES.

Nesta secção consideraremos um teorema obtido por Yoshizawa (*) e discutiremos certas conexões entre o mesmo e o teorema 2, apresentado na secção precedente. (**)

5.1. Um teorema de Yoshizawa e correspondente corolário.

Procurando generalizar para sistemas de equações diferenciais não autônomos certos resultados anteriores de La Salle sôbre o comportamento assintótico de soluções de sistemas de equações diferenciais autônomos [cf. v, teorema 1 e corolários], Yoshizawa foi conduzido a estabelecer no seu artigo relativamente recente [vi] um certo teorema. Daremos abaixo um enunciado do mesmo, sob o nome de teorema de Yoshizawa. Trata-se do teorema 6 de [vi, p.383].

Considere-se um sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = F(x,t) + G(x,t) \tag{67}$$

num cilindro $K(Q,t_0)$, onde Q designa um conjunto aberto do espaço de fase $\mathcal{F}$. $F(x,t)$ e $G(x,t)$ designam funções definidas no referido cilindro.

Relativamente a um tal sistema, pode-se formular as hipóteses I, II, III e IV abaixo.

(*) Tomámos conhecimento dêsse teorema por intermédio de N. Onuchic (no ano de 1965).

(**) A leitura da presente secção pode ser omitida sem prejuizo para a compreensão da matéria que será posteriormente exposta.

I. Qualquer que seja o conjunto compacto Q^* de $\mathcal{F}$ contido em Q, a função $F(x,t)$ é limitada no cilindro $K(Q^*,t_o)$.

II. As funções $F(x,t)$ e $G(x,t)$ são contínuas no cilindro $K(Q,t_o)$.

III. A função $G(x,t)$ é tal que a integral

$$(68) \qquad \int_{t'_o}^{+\infty} |G(x(s),s)| \, ds$$

converge, qualquer que seja a função $x(t)$ gozando das seguintes propriedades: $x(t)$ é definida no intervalo $t'_o \leq t < +\infty$, com $t'_o > t_o$, $x(t)$ assume valores num conjunto compacto de $\mathcal{F}$ contido em Q, e $x(t)$ é contínua no referido intervalo.

IV. Qualquer que seja a solução $x(t)$ de (67), os valores assumidos pela mesma pertencem a um conjunto compacto de $\mathcal{F}$ contido em Q.

Considere-se uma função escalar $v(x,t)$ definida no cilindro $K(Q,t_o)$. Envolvendo a mesma, pode-se formular as hipóteses V, VI e VII abaixo.

V. A função $v(x,t)$ é não negativa no cilindro $K(Q,t_o)$.

VI. A função $v(x,t)$ é contínua no cilindro $K(Q,t_o)$.

VII. A função $v(x,t)$ é localmente lipschitziana em relação a x em Q, para t variável no intervalo $t_o \leq t < +\infty$.

Designe-se por $v^*(x,t)$ a função definida no cilindro $K(Q,t_o)$ pela expressão

$$(69) \qquad v^*(x,t) = \overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{v(\ x + h(F(x,t)+G(x,t))\ ,\ t+h\ ) - v(x,t)}{h} \ . \quad (*)$$

Seja Ω um conjunto (contido em Q) fechado relativamente a Q. Envolvendo o mesmo, pode-se formular as hipóteses VIII, IX e X abaixo.

VIII. Sendo $W(x)$ uma função (escalar) definida-positiva em relação a Ω no conjunto Q, a desigualdade

---

(*) Pode-se constatar sem maiores dificuldades que no caso em que $v(x,t)$ pertence à classe $C_1(K(Q,t_o))$, a função $v^*(x,t)$ ora introduzida reduz-se à função $v^{\bullet}(x,t)$ obtida segundo a expressão (22) da introdução geral. Assim, nesse caso,

$$v^*(x,t) = v_t(x,t) + [F(x,t)+G(x,t)]' \operatorname{grad}_x v(x,t) \ .$$

$$(70) \qquad v^*(x,t) \leqslant - W(x)$$

subsiste para qualquer $x \in Q$ e qualquer $t \geqslant t_o$.

Uma função $W(x)$ é dita definida-positiva em relação a Ω no conjunto Q, se $W(x) = 0$ para qualquer $x \in \Omega$, e se, para cada número $\varepsilon > 0$ e para cada conjunto compacto Q^* de $\mathcal{F}$ contido em Q, existe um número $\delta(Q^*, \varepsilon) > 0$ tal que a relação $W(x) \geqslant \delta(Q^*, \varepsilon)$ é acarretada pela relação $x \in Q^* \cap {}^cU(\Omega, \varepsilon)$, onde $U(\Omega, \varepsilon)$ designa a vizinhança-ε de Ω (isto é, $U(\Omega, \varepsilon)$ designa o conjunto dos pontos $y \in \mathcal{F}$ tais que a distância de y a Ω é menor do que ε). [Cf. vi, p. 382].

IX. A função $F(x,t)$ é tal que para cada número $\varepsilon > 0$ e cada ponto $y \in \Omega$, existem dois números $\delta(y, \varepsilon) > 0$ e $T(y, \varepsilon) > t_o$ para os quais

$$(71) \qquad |F(x,t) - F(y,t)| < \varepsilon$$

sempre que $|x - y| < \delta(y, \varepsilon)$ e que $t \geqslant T(y, \varepsilon)$.

X. Para x variável em Ω e para t tendendo a $+\infty$, a função $F(x,t)$ converge para uma função $H(x)$, sendo esta convergência uniforme sôbre qualquer conjunto compacto de $\mathcal{F}$ contido em Ω.

Note-se que, desta forma, a função

$$(72) \qquad H(x) = \lim_{t \to +\infty} F(x,t)$$

é uma função contínua em Ω.

Introduza-se agora o sistema de equações diferenciais autônomo

$$(73) \qquad \dot{x} = H(x) ,$$

considerado no conjunto Ω.

Um conjunto I é dito um conjunto semi-invariante do sistema (73), se I é um subconjunto de Ω, e se de cada ponto de I parte pelo menos uma trajetória de (73) que permanece em I por todo o futuro. [Cf. vi, ps. 377-378].

Subsiste o seguinte teorema:

TEOREMA A (Teorema de Yoshizawa)- Sendo verificadas as hipóteses I, II, ..., IX e X, todas as soluções $x(t)$ do sistema (67) tendem, quando t tende a $+\infty$, ao maior conjunto semi-invariante J do sistema (73).

Frizemos que êsse teorema diz respeito ao comportamento assintótico de soluções de sistemas de equações diferenciais não (necessàriamente) autônomos. Sem entrarmos em maiores comentários, diremos que se trata de um teorema com apreciável generalidade. Para se adquirir uma idéia da consecução que êste teorema representa, pode-se ler com proveito o relatório [vii] de La Salle.

Como passamos a mostrar, do teorema de Yoshizawa pode-se obter um outro teorema, um corolário de demonstração imediata.

Em acréscimo às hipóteses I, II, ..., IX e X, pode-se formular as hipóteses XI, XII e XIII abaixo.

XI. A origem 0 do espaço de fase $\mathcal{F}$ pertence ao conjunto Q, e é um ponto de equilíbrio do sistema (67):

$$F(0,t) + G(0,t) = 0 \tag{74}$$

idênticamente no intervalo $t_0 \leqslant t < +\infty$.

XII. A origem 0 é um ponto de equilíbrio estável (*) do sistema (67).

XIII. O maior conjunto semi-invariante J do sistema (73) se reduz a $\{0\}$:

$$J = \{0\}. \tag{75}$$

Subsiste o seguinte teorema:

TEOREMA B (Corolário do teorema de Yoshizawa)- Sendo verificadas as hipóteses I, II, ..., XII e XIII, o conjunto Q é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (67) (em tôrno do ponto de equilíbrio 0).

(*) No sentido de Liapounoff.

Considerando as hipóteses adicionais XI, XII e XIII, bem como a definição 010 [cf. introdução geral, 2.4, a], é fácil constantar-se que o teorema B segue do teorema A.

Êste último teorema diz respeito à estabilidade global assintótica de sistemas de equações diferenciais não (necessàriamente) autônomos em tôrno de um ponto de equilíbrio. Como fàcilmente se depreende, trata-se de um teorema que se presta à determinação de domínios de estabilidade assintótica. Essa determinação é feita com auxílio de uma função $v(x,t)$, utilizada (em grandes linhas) como no método direto de Liapounoff. Dentre todos tais teoremas que chegaram ao nosso conhecimento, julgamos, geralmente falando, que o teorema B se constitua no de maior generalidade. Sem maiores comentários, diremos que essa generalidade advém da do teorema A.

5.2. Algumas observações de carater comparativo.

Precedentemente apresentámos o teorema 2. O mesmo, anàlogamente ao que sucede com o teorema B, constitui-se num teorema que se presta à determinação de domínios de estabilidade assintótica de sistemas de equações diferenciais não (necessàriamente) autônomos em tôrno de um ponto de equilíbrio, determinação essa que é feita com auxílio de uma função $v(x,t)$, utilizada (em grandes linhas) como no método direto de Liapounoff.

Assim, fomos naturalmente conduzidos à questão de se comparar o teorema 2 com o teorema B. Considerando os objetivos principais do presente trabalho (obtenção de resultados pertinentes à teoria dos sistemas associados), decidimos não nos deter numa extensa análise comparativa, que pudesse ser qualificada de completa. O que simplesmente a seguir faremos, será a apresentação de certos argumentos que conduzirão ao estabelecimento da seguinte afirmação:

O teorema 2 não é mais geral do que o teorema B, e o teorema B não é mais geral do que o teorema 2.

Comecemos com uma breve discussão de um exemplo bastante simples de aplicação do teorema B. Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = M(x,t)\, x \,, \tag{76}$$

onde

$$(77)\qquad M(x,t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{1+t}x_2 & \frac{1}{1+t}x_3 & \cdots & \frac{1}{1+t}x_n \\ 0 & -\frac{1}{1+t}x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+t}x_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{1+t}x_1 \end{pmatrix},$$

no cilindro $K(\mathcal{F},0)$. Êsse sistema se enquadra no tipo daqueles inicialmente considerados na subsecção precedente: tome-se $Q = \mathcal{F}$, $t_o = 0$, e tome-se $F(x,t)$ e $G(x,t)$ como sendo dadas no cilindro $K(\mathcal{F},0)$ pelas expressões $F(x,t) = M(x,t)x$ e $G(x,t) = 0$. Como função $v(x,t)$, tomemos aquela dada no cilindro $K(\mathcal{F},0)$ pela expressão

$$(78)\qquad v(x,t) = x'x = |x|^2 .$$

Sem maiores dificuldades, pode-se constatar que as hipóteses I, ..., VII estão verificadas.(*) Levando em conta que $v(x,t)$ pertence à classe $C_1(K(\mathcal{F},0))$, obtém-se fàcilmente que

$$(79)\qquad v^*(x,t) = v^{\cdot}(x,t) = [M(x,t)x]' \operatorname{grad}_x |x|^2 =$$

$$= 2\, x'M'(x,t)x = -\, 2\, x_1^2$$

no cilindro $K(\mathcal{F},0)$. Como conjunto Ω, tomemos o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{F}$ tais que $x_1 = 0$. Tomando-se $W(x)$ dada em $\mathcal{F}$ pela expressão $W(x) = 2\, x_1^2$, fàcilmente se constata que a hipótese VIII fica verificada. Também fàcilmente se constata que as hipóteses IX e X ficam verificadas, esta última com $H(x)$ dada em Ω pela expressão $H(x) = M_\infty(x)x$, onde comparece a matriz $M_\infty(x)$ que definimos em $\mathcal{F}$ pela expressão

---

(*) A constatação de que a hipótese IV está verificada pode ser feita utilizando-se o fato de que $v^{\cdot}(x,t) \leqslant 0$ em $K(\mathcal{F},0)$, como o mostra a (79).

$$(80) \qquad M_\infty(x) = \begin{pmatrix} -1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ 0 & -x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Assim, vê-se que o sistema autônomo (73) resulta ser o sistema

$$(81) \qquad \dot{x} = M_\infty(x)\, x$$

considerado no conjunto Ω. Não oferece maiores dificuldades a constatação de que as hipóteses XI e XII estão verificadas.(*) A fim de se constatar que a hipótese XIII também está verificada, faça-se a suposição de que $x(t)$ seja, no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$, uma solução qualquer do sistema (81). Como êsse sistema é considerado no conjunto Ω, tem-se que a primeira componente $x_1(t)$ de $x(t)$ é tal que $x_1(t) = 0$, idênticamente no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$. Ora, a primeira equação escalar do sistema (81) é

$$(82) \qquad \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 .$$

Vê-se daí que as demais componentes $x_2(t)$, $x_3(t)$, ..., $x_n(t)$ de $x(t)$ são tais que $x_2(t) = x_3(t) = \ldots = x_n(t) = 0$, idênticamente no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$. Assim sendo, deduz-se que a suposição acima acarreta que $x(t) = 0$, idênticamente no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$. Êste fato, combinado com o de que a função $x(t) = 0$ é, no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$, uma solução do sistema (81), conduz fàcilmente à constatação de que a hipótese XIII também está verificada. Em suma, sendo verificadas tôdas as hipóteses I, II, ..., XII e XIII, vê-se que através do emprêgo do teorema B, e com auxílio da função $v(x,t)$ dada pela (78), pode-se obter a seguinte conclusão: o sistema (76) admite todo o espaço de fase $\mathcal{F}$ por domínio de estabilidade assintótica.

Mostremos que através do emprêgo do teorema 2, e com auxílio da função $v(x,t)$ dada pela (78), não se pode obter a mesma conclusão. Com efeito, fàcilmente se constata que o sistema (76) pertence à classe $\mathfrak{E}(\mathcal{F},0)$,

---

(*) A constatação de que a hipótese XII está verificada pode ser feita utilizando-se o fato de que $v^{\cdot}(x,t) \leqslant 0$ em $K(\mathcal{F},0)$, como o mostra a (79).

e que as condições (a'), (b') e (c') do referido teorema resultam satisfeitas por essa função $v(x,t)$ quando como R se toma um qualquer conjunto de $\mathfrak{F}$ que é aberto e que contém a origem 0. No entanto, como se passa a constatar, o conjunto R^* resulta ser tal que o seu interior não contém a origem 0. Levando em conta a (79), por uma aplicação da expressão (24) deduz-se imediatamente que no presente caso a derivada autônoma $v'(x)$ é dada em $\mathfrak{F}$ pela expressão

$$v'(x) = -2x_1^2 . \tag{83}$$

Conseqüentemente o conjunto R^* fica determinado como a reunião do conjunto $\{0\}$ com o conjunto R_0^* dos pontos $x \in \mathfrak{F}$ tais que $x_1 \neq 0$. Obtém-se daí que o interior do conjunto R^* não contém a origem 0. Levando em conta êste fato, vê-se imediatamente que através do emprêgo do teorema 2, e com auxílio da função $v(x,t)$ dada pela (78), não se pode chegar a estabelecer qualquer domínio de estabilidade assintótica do sistema (76), em particular o domínio $\mathfrak{F}$.

Da argumentação que acaba de ser apresentada resulta que o teorema 2 não é mais geral do que o teorema B.

Notemos que a mesma argumentação ilustra um dos maiores méritos do teorema B: o de poder conduzir ao estabelecimento de domínios de estabilidade assintótica mesmo cóm o auxílio de uma função $v(x,t)$ tal que a função $v'(x,t)$ não é definida-negativa em algum cilindro $K(R,t_0)$. Ao contrário, sem dificuldade pode-se constatar que o teorema 2 não é suficientemente forte para isso.

Entretanto, o teorema B, apesar de ser aplicável a uma classe bastante ampla de sistemas de equações diferenciais, impõe à função $F(x,t)$ a restrição de ser limitada em qualquer cilindro $K(Q^*,t_0)$, onde Q^* designa um qualquer conjunto compacto de $\mathfrak{F}$ contido em Q. Essa restrição torna-se relativamente sensível em face das demais que delimitam a aludida classe, especialmente em face da restrição de convergência da integral (68) envolvendo a função $G(x,t)$. De seu lado, o teorema 2, também aplicável a uma classe bastante ampla de sistemas de equações diferenciais, possui o mérito de não impor nenhuma restrição de limitação à função $f(x,t)$. Pode-se entrever daí a existência de sistemas de equações diferenciais aos quais o teorema 2 se aplica, de forma a permitir o estabelecimento de domínios de estabilidade assintótica dos mesmos, sistemas êsses aos quais o teorema B não se aplica, de forma a permitir o estabelecimento de domínios de estabilidade assintótica dos mesmos. Veremos abaixo que essa existência é efetiva.

Comecemos com uma breve discussão de um exemplo particularmente simples de aplicação do teorema 2. Consideremos o sistema (linear) de equações diferenciais

$$\dot{x} = -(1+t)\,x \tag{84}$$

no cilindro K ($\mathfrak{F}$,0). Sem maiores dificuldades, pode-se constatar que o sistema (84) pertence à classe $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{F}$,0). Como função v(x,t), tomemos aquela dada no cilindro K($\mathfrak{F}$,0) pela expressão

$$v(x,t) = x'x = |x|^2 . \tag{85}$$

Fàcilmente se constata que as condições (a'), (b') e (c') do referido teorema resultam satisfeitas por essa função v(x,t) quando como R se toma o espaço de fase $\mathfrak{F}$. Como $\varphi(x)$, pode-se tomar a função dada em $\mathfrak{F}$ pela expressão $\varphi(x) = x'x$. A derivada autônoma $v'(x)$ da função v(x,t) em relação ao sistema (84) pode ser fàcilmente calculada. Obtém-se sucessivamente:

$$v^{\circ}(x,t) = \left[-(1+t)\,x\right]'\,\mathrm{grad}_x\,|x|^2 = -2\,(1+t)\,|x|^2, \tag{86}$$

no cilindro K($\mathfrak{F}$,0), e

$$v'(x) = \lim_{r\to 0+}\ \sup_{|y-x|\leq r}\ \sup_{t\geq 0}\ \left[-2\,(1+t)\,|y|^2\right] = -2\,|x|^2 , \tag{87}$$

em $\mathfrak{F}$. Empregando a (87), constata-se fàcilmente que o conjunto R^* resulta ser igual a $\mathfrak{F}$, e, portanto, que o interior de R^* contém a origem 0. Levando em conta as constatações acima feitas, vê-se fàcilmente que, em virtude do teorema 2, o conjunto $\mathfrak{S}(x'x, \mathfrak{F}\cap\mathfrak{F}, x'x)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (84). Utilizando a definição 09 [cf. introdução geral, 2.3, d], obtém-se com facilidade que $\mathfrak{S}(x'x, \mathfrak{F}\cap\mathfrak{F}, x'x) = \mathfrak{F}$. Em suma: o teorema 2 se aplica ao sistema (84), de forma a permitir o estabelecimento de todo o espaço de fase $\mathfrak{F}$ como domínio de estabilidade assintótica do mesmo. (*)

(*) O sistema (84) é tão simples, que a sua solução geral pode ser obtida imediatamente. É interessante que se observe que o referido estabelecimento pode ser fàcilmente conseguido com o uso dessa solução, sem o emprêgo de qualquer teorema especial.

Mostremos que o teorema B não se aplica ao sistema (84), de forma a permitir o estabelecimento do espaço de fase $\mathcal{F}$ como domínio de estabilidade assintótica do mesmo. Neste sentido, é interessante que provemos um fato um pouco mais geral. Seja Q um qualquer conjunto aberto de $\mathcal{F}$ que contém a origem O. Em particular, poderá ser $Q = \mathcal{F}$. Consideremos o sistema

$$\dot{x} = -(1+t)\,x \tag{88}$$

no cilindro K(Q,O). Provemos que o teorema B não se aplica ao sistema (88), de forma a permitir o estabelecimento do conjunto Q como domínio de estabilidade assintótica do mesmo. Com efeito, para que uma tal aplicação seja possível, é necessário que no cilindro K(Q,O) o segundo membro $-(1+t)x$ possa ser decomposto numa soma $F(x,t) + G(x,t)$, onde $F(x,t)$ e $G(x,t)$ designam funções definidas no referido cilindro tais que as hipóteses I, II e III com $t_o = 0$ são verificadas. Faça-se a suposição de que exista uma tal decomposição. Desta forma, tem-se que

$$G(x,t) = -F(x,t) - (1+t)\,x \tag{89}$$

para qualquer $x \in Q$ e qualquer $t \geqslant 0$. Tome-se em Q um ponto qualquer $\bar{x} \neq 0$. (Como Q é um aberto que contém O, tais pontos certamente podem ser tomados.) Da (89) tira-se que

$$G(\bar{x},t) = -F(\bar{x},t) - (1+t)\,\bar{x} \tag{90}$$

no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$. Estando verificadas as hipóteses I e II, fàcilmente se deduz que $F(\bar{x},t)$ é uma função de t limitada no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$, e que $G(\bar{x},t)$ é uma função de t contínua no intervalo $0 \leqslant t < +\infty$. Levando em conta (90), bem como a continuidade de $G(\bar{x},t)$, obtém-se a relação

$$\int_0^{+\infty} |G(\bar{x},s)|\,ds = \int_0^{+\infty} |F(\bar{x},s) + (1+s)\,\bar{x}|\,ds\,. \tag{91}$$

Considerando que $F(\bar{x},t)$ é limitada, e que $\bar{x} \neq 0$, constata-se imediatamente que $\lim\limits_{t \to +\infty} |F(\bar{x},t) + (1+t)\,\bar{x}| = +\infty$. Conseqüentemente a integral do segundo membro da (91) não converge. O mesmo acontece portanto com a integral do primeiro membro. Conclui-se fàcilmente daí que a hipótese III não está verificada. (Basta que se considere a função $x(t) = \bar{x}$ num intervalo $t_o' \leqslant t < +\infty$, com $t_o' > 0$). Esta conclusão mostra que a suposição inicialmente feita é absurda. Isto significa que o teorema B não se aplica ao sistema (88), de forma a permitir o estabelecimento do conjunto Q como domínio de estabilidade assintótica do mesmo.

Da argumentação que acaba de ser apresentada resulta que o teorema B não é mais geral do que o teorema 2.

Fica assim completo o estabelecimento da afirmação feita no início da presente subseoção.

Tendo presente a equivalência dos teoremas 1 e 2, vê-se que a mesma afirmação pode ser feita relativamente ao teorema 1: dos teoremas 1 e B, nenhum é mais geral do que o outro. (*)

(*) A propósito dêste assunto, podemos também fazer a seguinte outra afirmação, relativa ao teorema 01 da introdução geral - anteriormente publicado em [TAS]: o teorema 01 (ainda que menos geral do que qualquer um dos teoremas 1 e 2) já possuia um campo de aplicabilidade não contido no do teorema B. Como sem dificuldade se pode constatar, o mesmo exemplo (84) acima se presta para uma verificação dêste fato.

PARTE II

SÔBRE O ESTUDO DA ESTABILIDADE GLOBAL ASSINTÓTICA POR MEIO DE SISTEMAS ASSOCIADOS

1. INTRODUÇÃO.

Consideremos novamente um sistema qualquer,

$$\dot{x} = f(x,t) \ , \tag{1}$$

dado na classe $\mathfrak{E}$. Suponhamos que o mesmo pertença à classe $\mathfrak{E}(D,t_o)$.

A propósito de tais sistemas, e relativamente ao seu ponto de equilíbrio O, origem do espaço de fase $\mathcal{F}$, estabelecemos em [TAS, parte II, secção 6 (6.2), pgs. 52-55] o método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Sôbre êsse método, podemos dizer que é o principal dentre os mais gerais resultados da teoria dos sistemas associados concernentes à estabilidade assintótica obtidos em [TAS].

Nesta parte II, utilizando os desenvolvimentos da parte precedente, atingiremos aquêles que consideramos os principais objetivos do presente trabalho. Trataremos do estabelecimento de novos resultados de teoria dos sistemas associados concernentes à estabilidade assintótica. Principiaremos fazendo um estudo que consiste essencialmente na introdução e discussão do novo conceito de derivada autônoma de uma função em relação a uma família de sistemas associada. Empregando êsse estudo, enunciaremos e demonstraremos dois teoremas sôbre a estabilidade global assintótica, os quais podem ser qualificados de resultados básicos da teoria dos sistemas associados. Posteriormente, estabeleceremos e discutiremos dois novos métodos para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Trata-se de métodos análogos àquele acima citado. Os mesmos podem ser considerados (em certos sentidos) como formas aperfeiçoadas do método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Essas formas aperfeiçoadas não são outra coisa que certas reformulações dos dois teoremas acima aludidos.

2. DOIS TEOREMAS SÔBRE A ESTABILIDADE GLOBAL ASSINTÓTICA.

O objetivo principal da presente secção é o estabelecimento de dois teoremas sôbre a estabilidade global assintótica. É com fundamento nesses teoremas, os quais podem ser qualificados de resultados básicos da teoria dos sistemas associados, que será desenvolvida a matéria da secção seguinte. Visando a obtenção dêsses teoremas, principiaremos introduzindo uma nova noção de derivada autônoma (em relação a uma família de sistemas associada).

2.1. A noção de derivada autônoma em relação a uma família de sistemas associada.

Considere-se uma qualquer família de sistemas associada ao sistema dado (1). Parametrizada por z, seja ela

$$\dot{x} = u(x,t;z) \ . \tag{2}$$

De acôrdo com a definição 012 [cf. introdução geral, 2.5], tem-se que a matriz coluna $u(x,t;z)$ é uma função definida para x, t e z variáveis independente e respectivamente em D, no intervalo $t_o \leq t < +\infty$ e em D.

Juntamente com a família (2), considere-se uma qualquer função $v(x,t)$ da classe $C_1(K(D,t_o))$.

Nestas condições fica perfeitamente determinada a função derivada de $v(x,t)$ em relação a t ao longo das trajetórias dos sistemas associados (2), isto é, a função que designamos por $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$ e que, para qualquer $x \in D$, qualquer $t \geq t_o$ e qualquer $z \in D$, é dada pela seguinte expressão:

$$\bar{v}^{\bullet}(x,t;z) = v_t(x,t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(x,t;z)\, v_{x_i}(x,t) \ . \tag{3}$$

Essa expressão pode ser alternativamente apresentada como segue:

$$(4) \qquad \bar{v}^{\bullet}(x,t;z) = v_t(x,t) + u'(x,t;z)\ \mathrm{grad}_x\ v(x,t)\ .$$

Nesta subsecção introduziremos uma nova função, construindo-a a partir de $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$. Essa nova função, que será designada pela notação $\bar{v}'(x;z)$, em geral dependerá de x e de z, porém, ao contrário de $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$, será sempre <u>independente</u> de t. Podemos dizer que a função $\bar{v}'(x;z)$ se constituirá numa espécie de derivada de $v(x,t)$ em relação à família de sistemas associada (2), numa espécie de "derivada autônoma".

Inicialmente, consideremos a função $\bar{v}^{\acute{}}(x;z)$ definida pela expressão

$$(5) \qquad \bar{v}^{\acute{}}(x;z) = \sup_{t \geq t_o} \bar{v}^{\bullet}(x,t;z)\ .$$

Vê-se fàcilmente que $\bar{v}^{\acute{}}(x;z)$ é definida para x e z variáveis (independentemente) em D, e que $\bar{v}^{\acute{}}(x;z)$ assume valores no sistema ampliado de números reais. ($\bar{v}^{\acute{}}(x;z)$ poderá eventualmente assumir o valor $+\infty$, porém nunca o valor $-\infty$). A função $\bar{v}^{\acute{}}(x;z)$ fica perfeitamente determinada pela família (2) e pela função $v(x,t)$.

Para x e z variáveis (independentemente) em D, designemos agora por $\beta(x;z)$ a mínima das distâncias de x à fronteira de D e de z à fronteira de D. (No caso em que a fronteira de D é vazia, $\beta(x;z) = +\infty$.) Considerando que D é aberto, vê-se que $\beta(x;z)$ é sempre um elemento (estritamente) positivo do sistema ampliado de números reais. Designemos ainda por r uma variável auxiliar real e por y e por w duas variáveis auxiliares (independentes) em $\mathcal{F}$. Constata-se fàcilmente que, para cada $x \in D$ e cada $z \in D$,

$$(6) \qquad \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ |w-z| \leq r}} \bar{v}^{\acute{}}(y;w)$$

é uma função de r definida no intervalo $0 < r < \beta(x;z)$, a qual assume valores no sistema ampliado de números reais. Essa função é claramente não decrescente no referido intervalo. Assim sendo, podemos considerar a função $\bar{v}'(x;z)$ definida pela expressão

$$(7) \qquad \bar{v}'(x;z) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ |w-z| \leq r}} \bar{v}^{\acute{}}(y;w)\ ,$$

ou seja, pela expressão

$$(8) \qquad \bar{v}'(x;z) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ |w-z| \leq r}} \sup_{t \geq t_o} \bar{v}^{\bullet}(y,t;w) .$$

Vê-se fàcilmente que $\bar{v}'(x;z)$ é definida para x e z variáveis (independentemente) em D, e que $\bar{v}'(x;z)$ assume valores no sistema ampliado de números reais. ($\bar{v}'(x;z)$ poderá eventualmente assumir o valor $+\infty$, porém nunca o valor $-\infty$.) A função $\bar{v}'(x;z)$ fica perfeitamente determinada pela família (2) e pela função $v(x,t)$.

DEFINIÇÃO 4 - Dizemos que a função $\bar{v}'(x;z)$ acima construída é a <u>derivada autônoma da função</u> $v(x,t)$ <u>em relação à família de sistema associada</u> (2).

Não oferece maiores dificuldades a verificação de que para se definir a função $\bar{v}'(x;z)$ pode-se, em lugar da expressão (8) (ou da (7)), equivalentemente empregar a expressão

$$(9) \qquad \bar{v}'(x;z) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ |w-z| \leq r \\ t \geq t_o}} \bar{v}^{\bullet}(y,t;w) .$$

É conveniente que façamos a nota que segue. A família de sistemas (2) foi considerada como sendo uma família de sistemas associada ao sistema dado (1). Como vimos, de acôrdo com a definição de família de sistemas associada, a função $u(x,t;z)$ é definida para x, t e z variáveis independente e respectivamente em D, no intervalo $t_o \leq t < +\infty$ e em D. Êste fato foi efetivamente utilizado na construção acima feita da função $\bar{v}'(x;z)$. Entretanto, desejamos salientar que, de acôrdo com a mesma definição, têm ainda lugar os seguintes outros fatos: para cada $z \in D$, o correspondente sistema $\dot{x} = u(x,t;z)$ pertence à classe $\mathfrak{C}(D,t_o)$, e, além disso, é satisfeita a condição de associação, isto é,

$$(10) \qquad u(z,t;z) = f(z,t)$$

para qualquer $z \in D$ e qualquer $t \geq t_o$. Ora, vê-se fàcilmente que a construção acima feita da função $\bar{v}'(x;z)$ poderia ter sido levada a cabo mesmo que êsses outros fatos não tivessem lugar. Assim sendo, compreende-se que poderíamos ter apresentado uma noção mais geral: uma noção de "derivada autônoma em relação a uma família de sistemas" - família essa não necessàriamente associada a um sistema pràviamente dado. Foi tendo em vista que as famílias de sistemas que consideraremos serão sempre associadas a algum sistema prèviamente dado, que preferimos - ganhando em simplicidade - proceder da forma precedentemente exposta.

Observemos que a partir das expressões (5) e (7) estabelece-se fàcilmente que

$$\bar{v}'(x;z) \geqslant \bar{v}'(x;z) \geqslant \bar{v}^{\circ}(x,t;z) \tag{11}$$

para qualquer $x \in D$, qualquer $z \in D$ e qualquer $t \geqslant t_0$.

Sem preocupações de sermos precisos ou completos, diremos que a matéria apresentada na presente subsecção pode ser considerada como correspondente àquela apresentada na subsecção 4.1 da parte I: sistemas são substituídos por famílias de sistemas associadas. A propósito, julgamos que seja importante observarmos que certos fatos que lá se verificam não encontram correspondentes aquí. Neste sentido, faremos a seguir algumas considerações das quais poder-se-á depreender que uma proposição correspondente à proposição 5 não tem lugar aquí.

Consideremos o caso em que as funções $u(x,t;z)$ e $v(x,t)$ são independentes de t. Nesse caso, a (4) mostra que o mesmo ocorre com a função $\bar{v}^{\circ}(x,t;z)$, e pela (5) deduz-se imediatamente que

$$\bar{v}'(x;z) = \bar{v}^{\circ}(x,t;z) \tag{12}$$

para qualquer $x \in D$, qualquer $z \in D$ e qualquer $t \geqslant t_0$; entretanto, pode-se fazer a seguinte afirmação: nem sempre subsiste a igualdade $\bar{v}'(x;z) = \bar{v}'(x;z)$ para qualquer $x \in D$ e qualquer $z \in D$. Fàcilmente se depreende que se tivesse lugar aquí uma proposição correspondente à proposição 5, no caso em consideração essa igualdade deveria sempre subsistir. A referida afirmação será abaixo justificada através da análise de um exemplo.

Seja o sistema

$$\dot{x} = -x, \tag{13}$$

considerado no cilindro $K(\mathcal{F},0)$. Trata-se de um sistema extremamente simples, que certamente pertence à classe $\mathfrak{E}(\mathcal{F},0)$.

Sem dificuldade pode-se constatar que, de acôrdo com a definição de família de sistemas associada, existe uma grande arbitrariedade na fixação de uma família de sistemas associada a um dado sistema da classe $\mathfrak{E}$. Aproveitando-nos dessa arbitrariedade, consideraremos a seguir uma família de sistemas associada ao sistema (13). Será uma família que, como família de sistemas associada ao sistema (13), poderá à primeira vista aparecer como um tanto artificial. Mas será uma família que se prestará bem aos nossos objetivos.

Sejam fixados em $\mathfrak{F}$ dois pontos c e z_o tais que $c \neq 0$ e

$$c'z_o = 0 . \tag{14}$$

(É manifesta a existência de tais pontos.) Para x e z variáveis (independentemente) em $\mathfrak{F}$, definamos uma função escalar $g(x;z)$ pela seguinte expressão:

$$g(x;z) = \begin{cases} 0 & \text{sempre que } z \neq z_o \\ c'x & \text{sempre que } z = z_o . \end{cases} \tag{15}$$

Consideremos agora a família de sistemas

$$\dot{x} = - x - g(x;z)\, x , \tag{16}$$

onde z é um parâmetro que varia em $\mathfrak{F}$, e onde, para cada valor de z, o correspondente sistema é considerado no cilindro $K(\mathfrak{F},0)$. Essa é uma família de sistemas associada ao sistema (13). Efetivamente, levando em conta as (14) e (15), sem maiores dificuldades pode-se verificar que tanto a condição I como a condição II (condição de associação) da definição 012 [cf. introdução geral, 2.5] resultam satisfeitas. Note-se que o segundo membro $u(x,t;z) = - x - g(x;z)x$ é independente de t.

Juntamente com a família (16), consideremos a função

$$v(x,t) = x'x = |x|^2 \tag{17}$$

no cilindro $K(\mathfrak{F},0)$. Manifestamente, essa função é da classe $C_1(K(\mathfrak{F},0))$. Note-se que a mesma é independente de t.

Empregando a expressão (4), fàcilmente se calcula a função $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$:

$$(18) \qquad \dot{\bar{v}}(x,t;z) = \left[- x - g(x;z)\ x \right]'\ \mathrm{grad}_x\ |x|^2 = $$

$$= -2\ |x|^2 \left[1 + g(x;z)\right]$$

para qualquer $x \in \mathcal{F}$, qualquer $z \in \mathcal{F}$ e qualquer $t \geq 0$.

Levando em conta que as funções $u(x,t;z)$ e $v(x,t)$ são independentes de t, vê-se que subsiste a (12). Então, em virtude da (18), resulta que

$$(19) \qquad \bar{v}'(x;z) = -2\ |x|^2 \left[1 + g(x;z)\right]$$

para qualquer $x \in \mathcal{F}$ e qualquer $z \in \mathcal{F}$. Utilizando a expressão (15), fàcilmente se deduz da (19) que, para x variável em $\mathcal{F}$ e z variável em $\mathcal{F}$, a função $\bar{v}'(x;z)$ é dada pela seguinte expressão:

$$(20) \qquad \bar{v}'(x;z) = \begin{cases} -2\ |x|^2 & \text{sempre que } z \neq z_o \\ -2\ |x|^2\ (1 + c'x) & \text{sempre que } z = z_o\ . \end{cases}$$

A obtenção da função $\bar{v}'(x;z)$ é um pouco mais trabalhosa do que aquela acima feita da função $\bar{v}'(x;z)$. De acôrdo com a expressão (7), em vista da (19) tem-se que

$$(21) \qquad \bar{v}'(x;z) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ |w-z| \leq r}} \left[-2\ |y|^2 \left[1 + g(y;w)\right] \right]$$

para qualquer $x \in \mathcal{F}$ e qualquer $z \in \mathcal{F}$. Num primeiro caso, suponha-se que $z \neq z_o$. Nesse caso, levando em conta a (15), a partir da (21) fàcilmente se constata que

$$(22) \qquad \bar{v}'(x;z) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ |w-z| \leq r}} \left[-2\ |y|^2 \right] =$$

$$= \lim_{r \to 0+} \sup_{|y-x| \leq r} \left[-2\ |y|^2 \right] ,$$

donde imediatamente se obtém que

$$(23) \qquad \bar{v}'(x;z) = -2\ |x|^2\ .$$

Num segundo caso, suponha-se que $z = z_o$. Nesse caso, mais uma vez levando em conta a (15), ainda a partir da (21) fàcilmente se constata que

$$(24) \qquad \bar{v}'(x;z) = \lim_{r\to 0+} \max \left\{ \sup_{\substack{|y-x|\le r \\ 0<|w-z_o|\le r}} [-2\,|y|^2]\,, \sup_{\substack{|y-x|\le r \\ w=z_o}} [-2\,|y|^2(1+c'y)] \right\} =$$

$$= \lim_{r\to 0+} \max \left\{ \sup_{|y-x|\le r} [-2\,|y|^2]\,, \sup_{|y-x|\le r} [-2\,|y|^2(1+c'y)] \right\} =$$

$$= \max \left\{ \lim_{r\to 0+} \sup_{|y-x|\le r} [-2\,|y|^2]\,, \lim_{r\to 0+} \sup_{|y-x|\le r} [-2\,|y|^2(1+c'y)] \right\},$$

donde imediatamente se obtém que

$$(25) \qquad \bar{v}'(x;z) = \max \left\{ -2\,|x|^2\,,\ -2\,|x|^2(1+c'x) \right\}.$$

Reunindo os resultados obtidos nos dois casos acima considerados, fàcilmente se deduz das (23) e (25) que, para x variável em $\mathfrak{F}$ e z variável em $\mathfrak{F}$, a função $\bar{v}'(x;z)$ é dada pela seguinte expressão:

$$(26) \qquad \bar{v}'(x;z) = \begin{cases} -2\,|x|^2 & \text{sempre que } z \ne z_o \\ \max\left\{-2\,|x|^2\,,\ -2\,|x|^2(1+c'x)\right\} & \text{sempre que } z = z_o. \end{cases}$$

Comparando agora as expressões (20) e (26), estabelece-se imediatamente que a relação

$$(27) \qquad \bar{v}'(x;z) > \bar{v}'(x;z)$$

subsiste para (e sòmente para) $z = z_o$ e qualquer $x \in \mathfrak{F}$ tal que $c'x > 0$. Note-se que, sendo $c \ne 0$, a existência de tais $x \in \mathfrak{F}$ é efetiva. Através da análise do exemplo que acaba de ser apresentado, podemos pois concluir que, mesmo no caso em que as funções $u(x,t;z)$ e $v(x,t)$ são independentes de t, nem sempre subsiste a igualdade $\bar{v}'(x;z) = \bar{v}'(x;z)$ para qualquer $x \in D$ e qualquer $z \in D$.

2.2. Dois teoremas.

Nesta subsecção estabeleceremos os dois teoremas sôbre a estabilidade global assintótica mencionados no início da presente secção. O seu estabelecimento será essencialmente fundamentado no teorema 2 [cf. parte I, 4.3].

Dado o sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente à classe $\mathfrak{C}(D,t_o)$, consideremos uma qualquer família de sistemas associada ao mesmo,

$$\dot{x} = u(x,t;z) \quad (28)$$

Consideremos também uma função $v(x,t)$, supondo inicialmente que a mesma satisfaça a seguinte condição:

(a') $v(x,t)$ é da classe $C_1(K(D,t_o))$.

Como sabemos, a derivada autônoma $v'(x)$ da função $v(x,t)$ em relação ao sistema (1) fica perfeitamente determinada [cf. parte I, 4.1]. A mesma coisa podemos dizer dos conjuntos R_o^* e R^*, definidos a partir de $v'(x)$ [cf. parte I, 4.3]. Como ainda sabemos, a derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$ da função $v(x,t)$ em relação à família de sistemas associada (28) também fica perfeitamente determinada [cf. 2.1]. Em têrmos de $\bar{v}'(x;z)$ introduziremos abaixo dois conjuntos, E_o^* e E^*.

Prèviamente à introdução dêsses conjuntos, suponhamos que, além da condição (a'), a função $v(x,t)$ satisfaça também a seguinte condição:

(b') $v(x,t)$ é definida-positiva num cilindro $K(R,t_o)$, onde R designa um conjunto contido em D.

De acôrdo com o enunciado da condição (b'), o conjunto R que nele comparece deverá ser considerado como dado. Tendo presente a definição 04 [cf. introdução geral, 2.3, b], vê-se que R é um conjunto aberto de $\mathfrak{F}$ que contém a origem 0. As definições dos conjuntos E_o^* e E^* envolverão êsse conjunto R.

Em primeiro lugar, introduzamos o conjunto E_o^*, definindo-o da seguinte maneira: E_o^* é o conjunto dos pontos $z \in D - \{0\}$ tais que

$$\bar{v}'(x;z) < 0 \quad (29)$$

para qualquer $x \in R - \{0\}$.

Relativamente a êsse conjunto, subsiste a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 13 - A intersecção dos conjuntos R e E_o^* está contida no conjunto R_o^*:

(30) $$R \cap E_o^* \subset R_o^* .$$

De fato, suponha-se que $\bar{z}$ seja um ponto qualquer tal que $\bar{z} \in R \cap E_o^*$. Considerando que $\bar{z} \in E_o^*$, pela definição de E_o^* tem-se que $\bar{z} \in D - \{0\}$, sendo portanto $\bar{z} \neq 0$. Mas, mais do que isso, combinando a referida definição com a expressão (9) obtém-se que

(31) $$\bar{v}'(x;\bar{z}) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leq r \\ |w-\bar{z}| \leq r \\ t \geq t_o}} \bar{v}^{\cdot}(y,t;w) < 0$$

para qualquer $x \in R - \{0\}$. Considerando que $\bar{z} \in R$, e que $\bar{z} \neq 0$, vê-se que $\bar{z} \in R - \{0\}$. Segue-se que a (31) subsiste para $x = \bar{z}$, podendo-se portanto afirmar que

(32) $$\bar{v}'(\bar{z};\bar{z}) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-\bar{z}| \leq r \\ |w-\bar{z}| \leq r \\ t \geq t_o}} \bar{v}^{\cdot}(y,t;w) < 0 .$$

Sem maiores dificuldades, a partir da (32) deduz-se que tem lugar a desigualdade

(33) $$\lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-\bar{z}| \leq r \\ t \geq t_o}} \bar{v}^{\cdot}(y,t;y) < 0 .$$

Como se passa a ver, a condição de associação será a seguir utilizada de modo decisivo. Essa condição diz que $u(z,t;z) = f(z,t)$ para qualquer $z \in D$ e qualquer $t \geq t_o$. Com base neste fato, por meio da expressão (4) e por meio da expressão (22) da introdução geral pode-se chegar imediatamente à constatação de que subsiste a seguinte relação:

(34) $$v^{\cdot}(z,t) = \bar{v}^{\cdot}(z,t;z)$$

<u>para qualquer</u> $z \in D$ <u>e qualquer</u> $t \geq t_o$. (Trata-se de uma relação bastante importante, no sentido de que a mesma estabelece uma conexão entre as duas derivadas $v^{\bullet}(x,t)$ e $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$.)

Em virtude da relação (34), vê-se que a desigualdade (33) equivale à desigualdade

$$(35) \qquad \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-\bar{z}| \leq r \\ t \geq t_o}} v^{\bullet}(y,t) < 0 \,.$$

Conseqüentemente, devido à expressão (25) da parte I, pode-se afirmar que

$$(36) \qquad v'(\bar{z}) < 0 \,.$$

Assim sendo, como $\bar{z} \in D - \{0\}$, pela definição do conjunto R_o^* [cf. parte I, (60)] deduz-se imediatamente que o ponto $\bar{z}$ é tal que $\bar{z} \in R_o^*$. Em conclusão: $R \cap E_o^* \subset R_o^*$.

Em segundo lugar, introduzamos o conjunto E^*, definindo-o da seguinte maneira: E^* <u>é a reunião do conjunto</u> E_o^* <u>com o conjunto</u> $\{0\}$, isto é,

$$(37) \qquad E^* = E_o^* \cup \{0\} \,.$$

A respeito do conjunto E^*, podemos desde logo observar que subsistem as seguintes duas relações, imediatamente obteníveis a partir da proposição 13:

$$(38) \qquad R \cap E^* \subset R^* \,,$$

$$(39) \qquad R \cap \operatorname{int} E^* \subset \operatorname{int} R^* \,.$$

Com efeito, considerando a (37) e a definição do conjunto R^* [cf. parte I, (64)], vê-se que a (38) segue imediatamente da proposição 13. Quanto à (39), a mesma pode ser imediatamente obtida da (38), por meio da consideração de que R é aberto.

Observemos que os conjuntos E_o^* e E^* ficam perfeitamente determinados pela família de sistemas associada (28), pela função $v(x,t)$ e pelo conjunto R. Ambos, E_o^* e E^*, são conjuntos de $\mathcal{F}$ contidos em D. O conjunto E^* contém a origem 0, enquanto que o conjunto E_o^* não a contém. A propósito de relações entre êsses conjuntos e a referida origem, pode-se considerar uma divisão de possibilidades em dois casos: ou o interior int E^* do conjunto E^* contém a origem 0, ou não a contém. Subsiste a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 14 - No caso em que $0 \in \text{int } E^*$, pode-se afirmar que $0 \in \text{int } R^*$. (E, além disso, pode-se ainda afirmar que $\text{int } R^* = R^*$.)

Com efeito, à vista da (39), basta que se leve em conta que $0 \in R$ para que se possa concluir que se $0 \in \text{int } E^*$, então $0 \in \text{int } R^*$. (E, além disso, considerando êste fato, pela proposição 10 constata-se imediatamente que se $0 \in \text{int } E^*$, então $\text{int } R^* = R^*$.)

No sentido de virmos a utilizar o teorema 2, façamos agora a suposição de que, em acréscimo às condições (a') e (b'), a função $v(x,t)$ satisfaça ainda a seguinte condição:

(c') $v(x,t)$ é Π-limitada em algum cilindro $K(N,t_o)$, onde N designa uma vizinhança esférica da origem 0 contida em R.

Consideremos também uma função $\varphi(x)$ à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R,t_o)$. (*)

Nas presentes circunstâncias, subsiste o seguinte fato: no caso em que $0 \in \text{int } E^*$, o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1). Mostraremos a seguir que êsse fato pode ser estabelecido através de uma aplicação do teorema 2.

Admita-se que se verifique o caso em que $0 \in \text{int } E^*$. No teorema 2, como função $v(x,t)$, tomemos aquela mesma acima considerada. Como conjunto R do teorema 2, tomemos o conjunto $R \cap \text{int } E^*$ (onde R tem a significação fixada precedentemente nesta subsecção). Desta forma, considerando que $0 \in \text{int } E^*$, sem dificuldade se constata que as condições (a'), (b') e (c') do teorema 2 resultam satisfeitas. Como função $\varphi(x)$ do teorema 2, tomemos a mesma função $\varphi(x)$ acima considerada. Podemos assim proceder, pois, como sem dificuldade se constata, essa $\varphi(x)$ é uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R \cap \text{int } E^*, t_o)$. Considerando mais uma vez que

---

(*) Observe-se que tais $\varphi(x)$ existem e que necessàriamente pertencem à classe Π (pois estamos supondo que a condição (b') é satisfeita).

$0 \in \text{int } E^*$, vê-se que em virtude da proposição 14 pode-se garantir que o interior do conjunto R^* resulta conter a origem 0. Assim sendo, por fôrça do teorema 2, podemos concluir que o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^* \cap R^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1). Ora, em virtude da (39) constata-se imediatamente que $R \cap \text{int } E^* \cap R^* = R \cap \text{int } E^*$. Vê-se daí que o referido domínio de estabilidade assintótica do sistema (1) é precisamente $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$.

O fato acima considerado, e que acaba de ser estabelecido, pode, de um modo mais completo, ser enunciado na forma do seguinte teorema:

TEOREMA 4 - Dado o sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente à classe $\mathfrak{E}(D, t_o)$, seja

(40) $$\dot{x} = u(x,t;z)$$

uma qualquer família de sistemas associada ao mesmo. Seja ainda $v(x,t)$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

(a') $v(x,t)$ é da classe $C_1(K(D,t_o))$,

(b') $v(x,t)$ é definida-positiva num cilindro $K(R,t_o)$, onde R designa um conjunto contido em D,

(c') $v(x,t)$ é Π-limitada em algum cilindro $K(N,t_o)$, onde N designa uma vizinhança esférica da origem 0 contida em R.

Seja $\varphi(x)$ uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R,t_o)$. Designe-se por E^* a reunião do conjunto $\{0\}$ com o conjunto E^*_o dos pontos $z \in D - \{0\}$ tais que a derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$ de $v(x,t)$ em relação à família de sistemas associada (40) é negativa para qualquer $x \in R - \{0\}$. Nestas circunstâncias, se o interior do conjunto E^* contém a origem 0, então o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1).

Por meio da argumentação que acaba de ser feita, o teorema 4 foi obtido como conseqüência do teorema 2. A propósito, julgamos que seja interessante que mostremos que, vice-versa, o teorema 2 pode ser obtido como conseqüência do teorema 4. Êste nosso objetivo será atingido por meio da argumentação apresentada a seguir.

Principiemos considerando o teorema 2. Dado o sistema (1), seja $v(x,t)$ uma função que satisfaz as condições (a'), (b') e (c'). Com a condição (b') fica introduzido um dado conjunto R. Seja $\varphi(x)$ uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R,t_o)$. Admita-se que se verifique o ca so em que $0 \in \text{int } R^*$. O teorema 2 afirma que, nestas circunstâncias, pode se tirar a seguinte conclusão: o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap R^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1). Mostraremos abaixo que, nas referidas circunstâncias, essa mesma conclusão pode ser obtida através de uma aplicação do teorema 4. Será o quanto basta para que o nosso objetivo seja atingido.

No teorema 4, como família de sistemas associada $\dot{x} = u(x,t;z)$, tomemos aquela definida pela função $u(x,t;z) = f(x,t)$ para qualquer $x \in D$, qualquer $z \in D$ e qualquer $t \geqslant t_o$. Verifica-se fàcilmente que a família assim obtida é de fato uma família de sistemas associada ao sistema (1). Trata-se da associação trivial, já considerada em [TAS, p. 40]. Como passamos a ver, uma vez feita a associação trivial, pode-se afirmar que a igualdade $\bar{v}'(x;z) = v'(x)$ subsiste para qualquer $x \in D$ e qualquer $z \in D$. Com efeito, por meio da expressão (4) e por meio da expressão (22) da introdução geral, constanta-se imediatamente que $\bar{v}^\circ(x,t;z) = v^\circ(x,t)$ para qualquer $x \in D$, qualquer $z \in D$ e qualquer $t \geqslant t_o$. A partir daí, empregando a expressão (9) e empregando a expressão (25) da parte I, estabelece-se fàcilmente que de fato a referida igualdade tem lugar:

$$(41) \qquad \bar{v}'(x;z) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leqslant r \\ |w-z| \leqslant r \\ t \geqslant t_o}} \bar{v}^\circ(y,t;w) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leqslant r \\ |w-z| \leqslant r \\ t \geqslant t_o}} v^\circ(y,t) = \lim_{r \to 0+} \sup_{\substack{|y-x| \leqslant r \\ t \geqslant t_o}} v^\circ(y,t) = v'(x)$$

para qualquer $x \in D$ e qualquer $z \in D$. Ainda no teorema 4, como função $v(x,t)$, tomemos aquela mesma acima considerada. Como conjunto R do teorema 4, tomemos o conjunto $R \cap R^*$ (onde R tem a significação acima fixada). Desta forma, considerando que $0 \in \text{int } R^*$, sem dificuldade se constata que as condições (a'), (b') e (c') do teorema 4 resultam satisfeitas. Como função $\varphi(x)$ do teorema 4, tomemos a mesma $\varphi(x)$ acima considerada. Podemos assim proceder, pois, como sem dificuldade se constata, essa $\varphi(x)$ é uma função à qual $v(x,t)$ pertence no cilindro $K(R \cap R^*, t_o)$. Passamos agora a ver que o conjunto E^* resulta ser igual a D. Com efeito, pela definição do conjunto R_o^*, obtém-se fàcilmente que $v'(x) < 0$ para qualquer $x \in R \cap R_o^*$. Daí, pela definição do conjunto R^*, segue-se que $v'(x) < 0$ para qualquer $x \in R \cap R^* - \{0\}$. Assim sendo, por meio do emprêgo da igualdade $\bar{v}'(x;z) = v'(x)$ acima estabelecida, a partir da definição do conjunto E_o^* constata-se fàcilmente que o mesmo E_o^* resulta ser igual a $D - \{0\}$. Tendo presente a definição do conjunto E^*, deduz-se imediatamente daí que de fato o conjunto E^* resulta ser igual a D. Uma vez estabelecido isto, fica manifesto que o interior do conjunto E^* resulta conter a origem O. Nestas circunstâncias, por fôrça do teorema 4, pode-se tirar a seguinte conclusão: o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap R^* \cap \text{int } E^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1). Ora, considerando que $E^* = D$, constata-se sem dificuldade que int $E^* = D$, e, logo em seguida, que $R \cap R^* \cap \text{int } E^* = R \cap R^*$. Vê-se daí que o referido domínio de estabilidade assintótica do sistema (1) é precisamente $\mathfrak{S}(v, R \cap R^*, \varphi)$.

A discussão precedentemente feita, relacionando os teoremas 2 e 4, nos permite chegar sem qualquer dificuldade à seguinte conclusão: <u>no que diz respeito à capacidade de estabelecer conjuntos como domínios de estabilidade assintótica, os teoremas 2 e 4 se equivalem</u>.

Ao lado do teorema 4, passamos agora à apresentação de um outro teorema do mesmo tipo. Trata-se do teorema 5 enunciado abaixo.

Comecemos observando que o teorema 4 emprega a derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$, definida pela expressão (8), bem como os conjuntos E_o^* e E^*, definidos a partir de $\bar{v}'(x;z)$. Em seguida consideremos a função $\bar{v}'(x;z)$, definida pela expressão (5), e introduzamos dois novos conjuntos, $\hat{E}_o^*$ e $\hat{E}^*$, definidos a partir de $\bar{v}'(x;z)$ da mesma forma que os conjuntos E_o^* e E^* são definidos a partir de $\bar{v}'(x;z)$: $\hat{E}_o^*$ <u>é o conjunto dos pontos</u> $z \in D - \{0\}$ <u>tais que</u>

$$(42) \qquad \bar{v}'(x;z) < 0$$

<u>para qualquer</u> $x \in R - \{0\}$, e $\hat{E}^*$ <u>é a reunião do conjunto</u> $\hat{E}_o^*$ <u>com o conjunto</u> $\{0\}$, isto é,

$$(43) \qquad \hat{E}^* = \hat{E}_o^* \cup \{0\} .$$

Podemos agora nos propor a seguinte questão: Se, no enunciado do teorema 4, substituirmos "<u>derivada autônoma</u> $\bar{v}'(x;z)$ <u>de</u> $v(x,t)$ <u>em relação à</u>

família de sistemas associada (40)" por "*função* $\bar{v}'(x;z)$ *definida a partir de* $v(x,t)$ *e da família de sistemas associada* (40)", bem como "E_o^*" e "E^*" respectivamente por "$\hat{E}_o^*$" e "$\hat{E}^*$", obteremos um enunciado verdadeiro?

Para essa questão, que manifestamente visa uma substituição de $\bar{v}'(x;z)$ por $\bar{v}'(x;z)$, e que se põe de um modo bastante natural, daremos a resposta que segue.

Na parte I, subsecção 4.2, definimos o caso eqüicontínuo, caracterizado por certas restrições especiais impostas às funções $f(x,t)$ e $v(x,t)$. Pois bem, podemos dizer que na hipótese de se verificar o caso eqüicontínuo, a questão acima admite uma resposta afirmativa.(*) Mais especificadamente, podemos asseverar a subsistência do seguinte teorema:

TEOREMA 5 - *Dado o sistema* (1), $\dot{x} = f(x,t)$ *pertencente à classe* $\mathfrak{E}(D,t_o)$, *seja*

$$\dot{x} = u(x,t;z) \tag{44}$$

uma qualquer família de sistemas associada ao mesmo. Seja ainda $v(x,t)$ *uma função que satisfaz as seguintes condições:*

(a') $v(x,t)$ *é da classe* $C_1(K(D,t_o))$,

(b') $v(x,t)$ *é definida-positiva num cilindro* $K(R,t_o)$, *onde* R *designa um conjunto contido em* D,

(c') $v(x,t)$ *é* Π*-limitada em algum cilindro* $K(N,t_o)$, *onde* N *designa uma vizinhança esférica da origem* O *contida em* R.

Seja $\varphi(x)$ *uma função à qual* $v(x,t)$ *pertence no cilindro* $K(R,t_o)$.

Suponha-se que se verifique o caso eqüicontínuo, isto é, suponha-se que as funções $f(x,t)$, $\text{grad}_x\, v(x,t)$ *e* $v_t(x,t)$ *são eqüicontínuas em* $D - \{0\}$, *para* t *variável no intervalo* $t_o \leq t < +\infty$, *e, além disso, que, para cada* $x \in D - \{0\}$, *as funções* $f(x,t)$ *e* $\text{grad}_x\, v(x,t)$ *são limitadas como funções de* t *no intervalo* $t_o \leq t < +\infty$.

Designe-se por $\hat{E}^*$ *a reunião do conjunto* $\{0\}$ *com o conjunto* $\hat{E}_o^*$ *dos pontos* $z \in D - \{0\}$, *tais que a função* $\bar{v}'(x;z)$ *definida a partir de*

(*) Convém que se note que esta não aparece aquí como uma afirmação que mereça ser taxada de trivial; de acôrdo com o exemplo analisado na subsecção 2.1, nem mesmo no caso autônomo - que é menos amplo do que o caso eqüicontínuo - pode-se garantir que sempre subsiste a igualdade das duas funções $\bar{v}'(x;z)$ e $\bar{v}'(x;z)$.

$v(x,t)$ e da família de sistemas associada (44) é negativa para qualquer $x \in R - \{0\}$. Nestas circunstâncias, se o interior do conjunto $\hat{E}^*$ contém a origem 0, então o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } \hat{E}^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1).

Com auxílio dos desenvolvimentos feitos na subsecção 4.2 da parte I, em especial com auxílio da proposição 8, o teorema 5 pode ser demonstrado a partir do teorema 2 por uma linha de considerações e raciocínios bastante semelhante àquela anteriormente seguida na presente subsecção para se demonstrar o teorema 4. Não exporemos de modo completo uma demonstração do teorema 5: julgamos que sejam bastantes as breves indicações que serão dadas abaixo - por meio das quais, e sem maiores dificuldades, poder-se-á chegar à exibição de uma demonstração completa do teorema 5.

Na argumentação da presente subsecção que levou ao estabelecimento do teorema 4, considere-se em lugar da derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$ a função $\bar{v}'(x;z)$, bem como em lugar dos conjuntos E_o^* e E^* respectivamente os conjuntos $\hat{E}_o^*$ e $\hat{E}^*$.

Em lugar da proposição 13, pode-se afirmar que subsiste uma proposição correspondente, ou melhor, pode-se afirmar que $R \cap \hat{E}_o^* \subset R_o^*$. No estabelecimento dêste fato, sucintamente indicado a seguir, é que se encontram as diferenças essenciais de demonstração entre os teoremas 4 e 5. Tenha-se em vista a seqüência de raciocínios que conduziram ao estabelecimento da proposição 13. Anàlogamente ao que lá foi feito, comece-se supondo que $\bar{z}$ seja um ponto qualquer tal que $\bar{z} \in R \cap \hat{E}_o^*$. Note-se que $\bar{z} \in D - \{0\}$. Em substituição às (31) e (32) é-se levado às relações

(45) $$\bar{v}'(x,\bar{z}) = \sup_{t \geq t_o} \bar{v}^{\circ}(x,t;\bar{z}) < 0$$

e

(46) $$\bar{v}'(\bar{z};\bar{z}) = \sup_{t \geq t_o} \bar{v}^{\circ}(\bar{z},t;\bar{z}) < 0 \,.$$

(Não tem lugar aquí a passagem por uma relação que substitua a (33).) Em virtude da relação (34), a partir da (46) passa-se às relações

(47) $$\sup_{t \geq t_o} v^{\bullet}(\bar{z},t) < 0$$

e

(48) $$v'(\bar{z}) < 0 \,,$$

que substituem as (35) e (36). A esta altura, considerando que se verifica o caso eqüicontínuo, por meio do emprêgo da proposição 8 constata-se que a (48) pode ser assim expressa:

$$(49) \qquad v'(\bar{z}) < 0 \,. \text{(*)}$$

À vista disso, como $\bar{z} \in D - \{0\}$, deduz-se que o ponto $\bar{z}$ é tal que $\bar{z} \in R_o^*$. Em conclusão: $R \cap \hat{E}_o^* \subset R_o^*$.

Note-se que, em substituição à (39), pode-se afirmar que

$$(50) \qquad R \cap \text{int } \hat{E}^* \subset \text{int } R^* \,.$$

Em lugar da proposição 14, também subsiste uma proposição correspondente, ou melhor, se $0 \in \text{int } \hat{E}^*$, então $0 \in \text{int } R^*$ (e, além disso, $\text{int } R^* = R^*$). Daí por diante, tôda a argumentação subseqüente à proposição 14 pode ser utilizada, de modo que através de uma aplicação do teorema 2 chega-se fàcilmente ao estabelecimento do teorema 5.

Terminando a presente subsecção, façamos as observações que seguem. Os teoremas 4 e 5 são, em muitos aspectos, semelhantes ao teorema 2. Tanto aquêles primeiros quanto êste último afirmam que, em determinadas circunstâncias, certos conjuntos são domínios de estabilidade assintótica de um sistema dado. No entanto, os teoremas 4 e 5 distiguem-se do teorema 2 por um caráter essencial: contràriamente ao que ocorre com o teorema 2, os teoremas 4 e 5 envolvem uma (arbitrária) família de sistemas associada ao sistema dado. Êste fato confere aos teoremas 4 e 5 o carater de resultados da teoria dos sistemas associados. Assim como o teorema 2 desempenha um papel básico na teoria do método direto de Liapounoff, podemos dizer que os teoremas 4 e 5 desempenham um papel básico na teoria dos sistemas associados.

3. MÉTODO DOS SISTEMAS ASSOCIADOS PARA A DETERMINAÇÃO DOS DOMÍNIOS DE ESTABILIDADE ASSINTÓTICA. FORMAS APERFEIÇOADAS.

Como já foi mencionado, em [TAS] estabelecemos o método dos sistemas

---

(*) Frizemos: na ausência da hipótese de que se verifica o caso eqüicontínuo, não teríamos condições de fazer esta afirmação.

associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica [cf. TAS, parte II, secção 6 (6.2), ps. 52-55]. Trata-se de um método bastante geral, que possui o caráter de envolver a escolha de uma família de sistemas associada ao sistema que é objeto de sua aplicação, família essa que pode ser absolutamente qualquer. A finalidade principal da presente secção é o estabelecimento de dois novos métodos análogos, que possuem o mesmo caráter, e que podem ser considerados como formas aperfeiçoadas do método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Uma dessas formas aperfeiçoadas é aplicável a qualquer sistema da classe $\mathfrak{E}$. A outra dessas formas aperfeiçoadas, relativa ao caso eqüicontínuo, só é aplicável a sistemas de uma subclasse de $\mathfrak{E}$. Entretanto, dentro do caso eqüicontínuo, esta segunda forma apresenta-se como sendo mais conveniente do que aquela primeira forma. Serão desenvolvidos comentários de caráter comparativo, com os quais ficarão especificados os sentidos nos quais os mencionados dois novos métodos aperfeiçoam o método estabelecido em [TAS].

3.1. Método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Uma forma aperfeiçoada.

Assim como na subsecção 4.4 da parte I exprimimos o teorema 2 na forma de um método, podemos aqui também exprimir o teorema 4 numa outra forma (bastante conveniente para aplicações e certas discussões), na forma de um método para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Daremos para tal método a formulação que segue.

Dado o sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente à classe $\mathfrak{E}(D,t_o)$, para se fazer a determinação de domínios de estabilidade assintótica do mesmo, pode-se proceder executando as quatro etapas A_I, A_{II}, A_{III} e A_{IV}, abaixo apresentadas, e, em seguida, utilizando o teorema 6, posteriormente enunciado.

ETAPA A_I - Escolha de uma (qualquer) família de sistemas associada (ao sistema (1))

$$\dot{x} = u(x,t;z) \;. \tag{51}$$

ETAPA A_{II} - Escolha de uma função $v(x,t)$ da classe $C_1(K(D,t_o))$, que pertence a uma função $\varphi(x)$ num cilindro $K(R,t_o)$, com $R \subset D$, e que é Π-limitada em algum cilindro $K(N,t_o)$, onde $N \subset R$ designa uma vizinhança esférica da origem O.

ETAPA A_{III} - Obtenção da derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$ (de $v(x,t)$ em relação à família de sistemas associada (51)).

ETAPA A_{IV} - Determinação do conjunto E^*, reunião do conjunto $\{0\}$ com o conjunto E^*_o dos pontos $z \in D - \{0\}$ tais que

$$\bar{v}'(x;z) < 0 \tag{52}$$

para qualquer $x \in R - \{0\}$.

TEOREMA 6 - Se $0 \in \text{int } E^*$, então o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1).

Um exame da formulação que acaba de ser dada mostra imediatamente que o método acima constitui-se numa outra forma de expressão para o teorema 4. Na verificação dêste fato reside a justificação do método, em especial do teorema 6.

O método estabelecido acima visìvelmente marcha seguindo as linhas gerais do método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica estabelecido em [TAS, parte II, secção 6 (6.2), ps. 52-55]. (*) Ambos êsses métodos apresentam os seguintes caracteres em comum: ambos são aplicáveis a qualquer sistema da classe $\mathfrak{C}$, e ambos envolvem a escolha de uma família de sistemas associada ao sistema que é objeto de sua aplicação, família essa que pode ser absolutamente qualquer. No entanto, como se verá na subsecção seguinte, o método estabelecido acima apresenta certas características realmente vantajosas sôbre o método estabelecido em [TAS]. São tais características que virão a justificar a consideração do método estabelecido acima como uma forma aperfeiçoada do método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica.

Terminando a presente subsecção, é interessante que chamemos a atenção para o seguinte ponto, que diz respeito a uma confrontação entre o mé-

---

(*) Julgamos que existe conveniência em se incluir também o método estabelecido acima na designação "método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica". O caráter geral do mesmo justifica êste pequeno abuso de linguagem, que resulta exclusivamente da nomenclatura anteriormente empregada em [TAS].

todo exposto na subsecção 4.4 da parte I e o método estabelecido acima. Considerando que o primeiro é uma forma de expressão para o teorema 2 e que o segundo é uma forma de expressão para o teorema 4, de acôrdo com a equivalência entre êsses teoremas (constatada na subsecção 2.2), pode-se afirmar que os dois referidos métodos se equivalem quanto à capacidade de fornecimento de domínios de estabilidade assintótica.

3.2. Alguns comentários de caráter comparativo.

Nesta subsecção faremos alguns comentários de caráter comparativo, os quais consistirão essencialmente na consideração de certos fatos que exibem características realmente vantajosas do método estabelecido na subsecção 3.1 sôbre o precedentemente citado método estabelecido em [TAS]. (A fim de evitarmos longas repetições, no decorrer dêsses comentários permitir-nos-emos empregar livremente as notações e designações adotadas em [TAS] a propósito do método lá estabelecido).

Um primeiro dos fatos acima aludidos pode ser expresso como segue.

Tôda função v(x,t) passível de escolha no método estabelecido em [TAS] é também passível de escolha no método estabelecido em 3.1. A recíproca não é verdadeira.

Êste fato pode ser fàcilmente constatado através da consideração de que as duas etapas A_2 e A_{II} distinguem-se sòmente no que diz respeito às condições de Π-limitação que impõem à função v(x,t): a condição imposta na etapa A_2 é estritamente mais restritiva do que a condição imposta na etapa A_{II}.

É óbvio que o fato acima constitui-se numa vantagem do método estabelecido em 3.1 sôbre o método estabelecido em [TAS]. Desejamos no entanto declarar que essa vantagem nos parece relativamente pequena em comparação com as outras vantagens que serão vistas abaixo.

Um segundo dos fatos anteriormente aludidos pode ser expresso como segue.

Com o método estabelecido em 3.1 fica eliminada a escolha de uma função θ(x) da classe Π, escolha essa que é indispensável no método estabelecido em [TAS].

A procedência dêste fato pode ser constatada através de um simples exame dos dois métodos, com especial consideração das etapas A_4 e A_{IV}.

A presença da escolha da função $\theta(x)$ no método estabelecido em [TAS] apresenta-se como algo indesejável. Isto pela razão de que se trata de uma escolha arbitrária, à qual estão associadas certas circunstâncias bastante inconvenientes. Sem nos preocuparmos em discutir completamente esta situação, limitar-nos-emos à seguinte breve menção a sòmente uma dessas circunstâncias: dependendo exclusivamente de como tenha sido feita a escolha da função $\theta(x)$, o método estabelecido em [TAS] pode conduzir, ou deixar de conduzir a um domínio de estabilidade assintótica. (De passagem, observemos que esta circunstância poderá ser fàcilmente comprovada por meio do próximo exemplo, a ser considerado mais abaixo.) Conseqüentemente, pode-se dizer que a eliminação da escolha da função $\theta(x)$, já em si, constitui-se numa vantagem do método estabelecido em 3.1 sôbre o método estabelecido em [TAS]. Entretanto, a propósito dessa eliminação, podemos dizer que a mesma torna-se realmente significativa por vir acompanhada das novas vantagens que serão discutidas abaixo.

Um terceiro dos fatos inicialmente aludidos pode ser expresso como segue. (*)

Seja $\dot{x} = f(x,t)$ um qualquer sistema de uma classe $\mathcal{E}(D,t_o)$. Considere-se duas aplicações a tal sistema, uma do método estabelecido em [TAS] e outra do método estabelecido em 3.1. Faça-se a suposição de que tanto numa como noutra aplicação sejam escolhidas a mesma família de sistemas associada $\dot{x} = u(x,t;z)$, a mesma função $v(x,t)$ (a qual certamente deverá satisfazer a condição de Π-limitação imposta na etapa A_2), juntamente com o mesmo conjunto R e com a mesma função $\varphi(x)$.

Nestas circunstâncias, <u>qualquer que seja a função</u> $\theta(x)$ <u>escolhida para a aplicação do método estabelecido em</u> [TAS], pode-se fazer a seguinte afirmação:

(*) Por razões de comodidade, consideraremos daquí por diante o conjunto $F(\theta)$ do método estabelecido em [TAS] como sendo dado pela seguinte definição: $F(\theta)$ é o conjunto dos pontos $z \in D$ tais que $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z) \leq -\theta(x)$ para qualquer $x \in R$ e qualquer $t \geq t_o$. A inclusão da exigência de que $z \in D$ constitui-se nu'a modificação inessencial, dado que, como fàcilmente se pode constatar, no referido método o conjunto $F(\theta)$ é aproveitado sòmente através da sua intersecção com D.

(o) Entre os conjuntos $F(\theta)$ e E^* subsiste a relação de inclusão $\text{int } F(\theta) \subset \text{int } E^*$.

Além disso, pode-se ainda fazer a seguinte afirmação:

(i) Se $0 \in \text{int } F(\theta)$, isto é, se se verifica o caso em que o método estabelecido em [TAS] conduz a um domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi)$, então também $0 \in \text{int } E^*$, isto é, também se verifica o caso em que o método estabelecido em 3.1 conduz a um domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$, e mais, entre tais domínios de estabilidade assintótica subsiste a relação de inclusão $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi) \subset \mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$.

Nas mesmas referidas circunstâncias, e suposta escolhida a função $\theta(x)$, também têm lugar as seguintes afirmações adicionais:

(ii) Pode efetivamente ocorrer que $0 \notin \text{int } F(\theta)$ e que $0 \in \text{int } E^*$, isto é, pode efetivamente ocorrer que o método estabelecido em [TAS] não conduz a um domínio de estabilidade assintótica e que o método estabelecido em 3.1 conduz a um domínio de estabilidade assintótica.

(iii) Pode efetivamente ocorrer que $0 \in \text{int } F(\theta)$, que $0 \in \text{int } E^*$ e que a relação de inclusão $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi) \subset \mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ subsiste no sentido estrito, isto é, pode efetivamente ocorrer que ambos os métodos conduzem a domínios de estabilidade assintótica e que o domínio fornecido pelo método estabelecido em [TAS] é estritamente menor do que o domínio fornecido pelo método estabelecido em 3.1.

O fato que acaba de ser expresso será justificado por meio da argumentação que passa a ser apresentada.

Para se demonstrar a afirmação (o), demonstrar-se-á a seguir que $\text{int } F(\theta) \subset E^*$. Considerando que $\text{int } F(\theta)$ é um conjunto aberto, vê-se facilmente que isto é o quanto basta. Preliminarmente, note-se que, pela definição de $F(\theta)$ [cf. precedente nota de rodapé], qualquer que seja $z \in F(\theta)$, a desigualdade

$$\bar{v}^{\cdot}(x,t;z) \leq -\theta(x) \tag{53}$$

verifica-se para qualquer $x \in R$ e qualquer $t \geq t_o$. Suponha-se agora que $\bar{z}$ seja um ponto qualquer tal que $\bar{z} \in \text{int } F(\theta)$. Considerando que $R \subset D$, que $\text{int } F(\theta) \subset F(\theta) \subset D$, e que tanto R como $\text{int } F(\theta)$ são conjuntos abertos, por meio da utilização da expressão (9) e da desigualdade (53) fàcilmente se obtém que

$$(54) \qquad \bar{v}'(x;\bar{z}) = \lim_{r\to 0+} \sup_{\substack{|y-x|\leq r \\ |w-\bar{z}|\leq r \\ t\geq t_o}} \bar{v}'(y,t;w) \leq \lim_{r\to 0+} \sup_{|y-x|\leq r} \left[-\theta(y) \right]$$

para qualquer $x \in R - \{0\}$. Sendo $\theta(x)$ uma função da classe Π, tem-se que $\theta(x)$ é contínua em qualquer ponto $x \in R - \{0\}$, já que $\theta(x)$ é contínua em todo o espaço da fase $\mathcal{F}$. Vê-se daí que o último membro da (54) não é outra coisa que $-\theta(x)$, pòdendo-se portanto afirmar que

$$(55) \qquad \bar{v}'(x;\bar{z}) \leq -\theta(x)$$

para qualquer $x \in R - \{0\}$. Mas, ainda por ser $\theta(x)$ uma função da classe Π, tem-se que $\theta(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$ do espaço de fase $\mathcal{F}$. Assim sendo, pela (55) deduz-se que a relação

$$(56) \qquad \bar{v}'(x;\bar{z}) < 0$$

subsiste para qualquer $x \in R - \{0\}$. Recordando a definição do conjunto E_o^*, vê-se imediatamente que se $\bar{z} \neq 0$, então, por fôrça da relação (56), resulta que $\bar{z} \in E_o^*$. Daí, pela definição do conjunto E^*, conclui-se que no caso de ser $\bar{z} \neq 0$, o ponto $\bar{z}$ é tal que $\bar{z} \in E^*$. Ora, ainda pela definição do conjunto E^* (e de modo independente da argumentação que precede), também conclui-se que no caso de ser $\bar{z} = 0$, o ponto $\bar{z}$ é tal que $\bar{z} \in E^*$. Desta forma, vê-se que int $F(\theta) \in E^*$, ficando pois demonstrada a afirmação (o).

Uma demonstração da afirmação (i) pode ser muito simplesmente dada com base na afirmação (o). Faça-se a hipótese de que $0 \in$ int $F(\theta)$. Note-se que, de acôrdo com o teorema 8 do método estabelecido em [TAS], o caso em que $0 \in$ int $F(\theta)$ é precisamente o caso em que o referido método conduz a um domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi)$. Nessa hipótese, tem-se que também $0 \in$ int E^*. Efetivamente, pela afirmação (o) pode-se asseverar que int $F(\theta) \in$ int E^*. Note-se que de acôrdo com o teorema 6 do método estabelecido em 3.1, o caso em que $0 \in$ int E^* é precisamente o caso em que o referido método conduz a um domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$. Fica assim demonstrada a primeira parte da afirmação (i). Levando isto em conta, pode-se assegurar que na hipótese de que $0 \in$ int $F(\theta)$, os dois domínios de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi)$ e $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ estão perfeitamente definidos.

De acôrdo com a definição 09 [cf. introdução geral, 2.3, d], o primeiro é o conjunto dos pontos z do espaço de fase $\mathfrak{F}$ tais que $z \in R \cap \text{int } F(\theta)$ e que z verifica a desigualdade $v(z,t_o) < h(\varphi, R \cap \text{int } F(\theta))$, e o segundo é o conjunto dos pontos z do espaço de fase $\mathfrak{F}$ tais que $z \in R \cap \text{int } E^*$ e que z verifica a desigualdade $v(z,t_o) < h(\varphi, R \cap \text{int } E^*)$. Ora, utilizando a afirmação (o) pode-se afirmar que subsiste a relação $R \cap \text{int } F(\theta) \subset R \cap \text{int } E^*$. Daí, pela definição 07 [cf. introdução geral, 2.3, d], deduz-se sem maiores dificuldades que também subsiste a relação $h(\varphi, R \cap \text{int } F(\theta)) \leq h(\varphi, R \cap \text{int } E^*)$. Levando em conta as definições dos domínios de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi)$ e $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ acima fornecidas, estas duas últimas relações conduzem imediatamente à conclusão de que entre êsses domínios de estabilidade assintótica subsiste a relação de inclusão $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi) \subset \mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$. Fica assim demonstrada a segunda parte da afirmação (i). Isto completa a presente demonstração.

As afirmações (ii) e (iii) serão a seguir demonstradas por meio da consideração de um exemplo, aliás bastante simples, mas que, como sem dificuldade se verá, presta-se bastante bem para evidenciar diferenças essenciais entre o método estabelecido em [TAS] e o método estabelecido em 3.1. Bàsicamente, êsse exemplo consistirá numa análise de certas aplicações dos referidos métodos a um sistema de equações diferenciais. Alguns detalhes dessas aplicações serão omitidos por razões de brevidade, visto que as referidas aplicações poderão ser discutidas de modo completo sem qualquer dificuldade.

No cilindro $K(\mathfrak{F}, 0)$, considere-se o sistema

(57) $$\dot{x} = H\,x + (|x| - 1)\,x\,,$$

onde H designa u'a matriz constante hemissimétrica fixada arbitràriamente. Êsse é um sistema da classe $\mathfrak{E}(\mathfrak{F}, 0)$.(*) Tanto para aplicar o método estabelecido em [TAS] como o método estabelecido em 3.1, escolha-se a família

(58) $$\dot{x} = H\,x + (|z| - 1)\,x\,,$$

parametrizada por z variável em $\mathfrak{F}$, como família de sistemas associada ao

(*) O sistema (57) é do tipo do sistema (29) considerado na parte I.

sistema (57), e, como função $v(x,t)$, escolha-se aquela dada em $K(\mathfrak{F},0)$ pela expressão

$$(59) \qquad v(x,t) = x'x = |x|^2 ,$$

tomando simultâneamente $R = \mathfrak{F}$ e $\varphi(x) = x'x$ em $\mathfrak{F}$. A obtenção das funções $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$ e $\bar{v}'(x;z)$ não oferece qualquer dificuldade, e conduz às expressões

$$(60) \qquad \bar{v}^{\bullet}(x,t;z) = 2\,(|z| - 1)\,|x|^2$$

e

$$(61) \qquad \bar{v}'(x;z) = 2\,(|z| - 1)\,|x|^2 ,$$

válidas para qualquer $x \in \mathfrak{F}$, qualquer $z \in \mathfrak{F}$ e qualquer $t \geqslant 0$. Para aplicar o método estabelecido em [TAS], escolha-se como $\theta(x)$ uma função dada em $\mathfrak{F}$ pela expressão

$$(62) \qquad \theta(x) = \gamma\, x'x ,$$

onde γ designa um parâmetro positivo. Levando em conta as (60), (61) e (62), as determinações dos conjuntos $F(\theta)$ e E^* podem ser fàcilmente feitas, e conduzem aos seguintes resultados: $F(\theta)$ é o conjunto dos pontos $z \in \mathfrak{F}$ tais que

$$(63) \qquad |z| \leqslant 1 - \frac{\gamma}{2} ,$$

e E^* é o conjunto dos pontos $z \in \mathfrak{F}$ tais que

$$(64) \qquad |z| < 1 .$$

Posto isto, atribua-se ao parâmetro γ um valor qualquer tal que $1 - \frac{\gamma}{2} \leqslant 0$. Assim fazendo, pela (63) deduz-se imediatamente que o conjunto int $F(\theta)$ resulta ser vazio. De conseqüência, obtém-se que $0 \notin$ int $F(\theta)$. Mas, por outro lado, pela (64) constata-se imediatamente que $0 \in$ int E^*. Desta forma vê-se que pode efetivamente ocorrer que $0 \notin$ int $F(\theta)$ e que $0 \in$ int E^*. De acôrdo com os teoremas 8 de [TAS] e 6 da subsecção 3.1, isto significa que pode efetivamente ocorrer que o método estabelecido em [TAS] não conduz a um domínio de estabilidade assintótica e que o método estabelecido em 3.1 conduz a um domínio de estabilidade assintótica. Fica assim demonstrada a afirmação (ii).

Atribua-se agora ao parâmetro γ um valor qualquer tal que $1 - \frac{\gamma}{2} > 0$ (com $\gamma > 0$). Assim fazendo, pela (63) resulta imediatamente que $0 \in \text{int } F(\theta)$. Por outro lado, como já se constatou acima, tem-se que $0 \in \text{int } E^*$. Nestas condições, de acôrdo com os teoremas 8 de [TAS] e 6 da subsecção 3.1, o método estabelecido em [TAS] conduz ao domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi)$ e o método estabelecido em 3.1 conduz ao domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$. Assim, os conjuntos $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi)$ e $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ estão perfeitamente definidos. A sua determinação não oferece dificuldades. Chega-se aos seguintes resultados: $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi)$ é o conjunto dos pontos $z \in \mathfrak{F}$ tais que

(65) $$|z| < 1 - \frac{\gamma}{2},$$

e $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ é o conjunto dos pontos $z \in \mathfrak{F}$ tais que

(66) $$|z| < 1 .$$

Considerando que $1 - \frac{\gamma}{2} < 1$ (pois $\gamma > 0$), pelas (65) e (66) constata-se imediatamente que o primeiro conjunto está pròpriamente contido no segundo conjunto. Desta forma vê-se que pode efetivamente ocorrer que $0 \in \text{int } F(\theta)$, que $0 \in \text{int } E^*$ e que a relação de inclusão $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } F(\theta), \varphi) \subset \mathfrak{S}(v, R \cap \text{int } E^*, \varphi)$ subsiste no sentido estrito. Em outros têrmos, pode efetivamente ocorrer que ambos os métodos conduzem a domínios de estabilidade assintótica e que o domínio fornecido pelo método estabelecido em [TAS] é estritamente menor do que o domínio fornecido pelo método estabelecido em 3.1. Fica assim demonstrada a afirmação (iii).

Examinando as afirmações (i), (ii) e (iii) do terceiro fato acima considerado, vê-se que as mesmas exibem novas e bastante importantes vantagens do método estabelecido em 3.1 sôbre o método estabelecido em [TAS]. O conteúdo dessas afirmações, não muito precisa, porém sugestivamente, pode ser expresso da seguinte maneira:

Sempre que o método estabelecido em [TAS] conduz a um domínio de estabilidade assintótica, o mesmo ocorre com o método estabelecido em 3.1, porém não vice-versa. Além disso, os domínios de estabilidade assintótica fornecidos pelo método estabelecido em 3.1 são sempre não menores, podendo ser estritamente maiores (*) do que os domínios de estabilidade assintótica

---

(*) Em geral é êste o caso que se verifica.

fornecidos pelo método estabelecido em [TAS].

Numa palavra, pode-se dizer que o método estabelecido em 3.1 tem qualidade melhor do que o método estabelecido em [TAS].

Terminando, parece-nos que seja interessante dar realce à seguinte observação. Em lugar da derivada $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$ empregada pelo método estabelecido em [TAS], o método estabelecido em 3.1 emprega a derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$. Pode-se dizer que os aperfeiçoamentos dados pelas características vantajosas correspondentes aos dois últimos fatos acima considerados, foram conseguidos em virtude da utilização da derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$ em lugar da derivada $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$.

3.3. Método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Uma forma aperfeiçoada relativa ao caso eqüicontínuo.

Assim como na subsecção 3.1 exprimimos o teorema 4 na forma de um método, podemos aquí também exprimir o teorema 5 numa outra forma (bastante conveniente para aplicações e certas discussões), na forma de um método para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Daremos para tal método a formulação que segue.

Dado o sistema (1), $\dot{x} = f(x,t)$ pertencente à classe $\mathfrak{E}(D,t_o)$, faça-se a hipótese de que a função $f(x,t)$ é eqüicontínua em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_o \leq t < +\infty$, e, além disso, a hipótese de que, para cada $x \in D - \{0\}$, a função $f(x,t)$ é limitada como função de t no intervalo $t_o \leq t < +\infty$. Nestas condições, para se fazer a determinação de domínios de estabilidade assintótica do referido sistema, pode-se proceder executando as quatro etapas $\hat{A}_I$, $\hat{A}_{II}$, $\hat{A}_{III}$ e $\hat{A}_{IV}$, abaixo apresentadas, e, em seguida, utilizando o teorema 7, posteriormente enunciado.

ETAPA $\hat{A}_I$ - Escolha de uma (qualquer) família de sistemas associada (ao sistema (1))

$$\dot{x} = u(x,t;z) \quad . \tag{67}$$

ETAPA $\hat{A}_{II}$ - Escolha de uma função $v(x,t)$ da classe $C_1(K(D,t_o))$, que pertence a uma função $\varphi(x)$ num cilindro $K(R,t_o)$, com $R \subset D$, e que é Π-limitada em algum cilindro $K(N,t_o)$, onde $N \subset R$ designa uma vizinhança esférica da origem 0, função $v(x,t)$ essa que ainda preenche o requisito de que as funções $grad_x\, v(x,t)$ e $v_t(x,t)$ são eqüicontínuas em $D - \{0\}$, para t variável no intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$, e, além disso, o requisito de que, para cada $x \in D - \{0\}$, a função $grad_x\, v(x,t)$ é limitada como função de t no intervalo $t_o \leqslant t < +\infty$.

ETAPA $\hat{A}_{III}$ - Obtenção da função $\bar{v}'(x;z)$ (definida a partir de $v(x,t)$ e da família de sistemas associada (67)).

ETAPA $\hat{A}_{IV}$ - Determinação do conjunto $\hat{E}^*$, reunião do conjunto $\{0\}$ com o conjunto $\hat{E}^*_o$ dos pontos $z \in D - \{0\}$ tais que

$$\bar{v}'(x;z) < 0 \tag{68}$$

para qualquer $x \in R - \{0\}$.

TEOREMA 7 - Se $0 \in$ int $\hat{E}^*$, então o conjunto $\mathfrak{S}(v, R \cap \text{int}\, \hat{E}^*, \varphi)$ é um domínio de estabilidade assintótica do sistema (1).

Um exame da formulação que acaba de ser dada mostra imediatamente que o método acima constitui-se numa outra forma de expressão para o teorema 5. Na verificação dêste fato reside a justificação do método, em especial do teorema 7.

Na subsecção 3.1 foi estabelecido um método que se constitui numa forma aperfeiçoada do método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Êsse método e o método estabelecido acima visìvelmente marcham seguindo as mesmas linhas gerais. (*) Ambos êsses métodos apresentam o seguinte caráter em comum: ambos envolvem a escolha de uma família de sistemas associada ao sistema que é objeto de sua aplicação, família essa que pode ser absolutamente qualquer. Às restrições que o citado método estabelecido em 3.1 impõe às funções $f(x,t)$ e $v(x,t)$, o método estabelecido acima acrescenta certas outras restrições. Pode-se fàcilmente constatar que estas últimas restrições correspondem precisamente à exigência de verificação do caso eqüicontínuo, definido na par

---

(*) Julgamos que existe conveniência em se incluir também o método estabelecido acima na designação "método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica". O caráter geral do mesmo justifica êste pequeno abuso de linguagem, que resulta exclusivamente da nomenclatura anteriormente empregada em [TAS].

te I, subsecção 4.2. Assim sendo, pode-se ainda fàcilmente ver que o método estabelecido acima tem uma generalidade menor, no sentido de que o seu âmbito de aplicação é (estritamente) mais restrito do que o do método estabelecido em 3.1. Diremos que o método estabelecido acima é relativo ao caso eqüicontínuo. Mas, em compensação, podemos afirmar que o método estabelecido acima vai além de uma simples restrição do método estabelecido em 3.1 ao caso eqüicontínuo. Efetivamente, como se verá na subsecção seguinte, dentro do seu âmbito de aplicação, o método estabelecido acima apresenta certas características realmente vantajosas sôbre o método estabelecido em 3.1. São essas características que virão não só a justificar a consideração em separado do método estabelecido acima, mas também, em face dos comentários feitos na subsecção 3.2, a conceituá-lo como uma forma aperfeiçoada do método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica relativa ao caso eqüicontínuo.

3.4. Novos comentários de caráter comparativo.

Nesta subsecção, aos comentários com os quais terminámos a subsecção precedente, acrescentaremos alguns outros comentários de caráter comparativo, os quais consistirão essencialmente na consideração de certos fatos que exibem características realmente vantajosas do método estabelecido na subsecção 3.3 sôbre o método estabelecido na subsecção 3.1. (*)

Um primeiro dos fatos acima aludidos pode ser expresso como segue.

Em lugar da derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$, empregada pelo método estabelecido em 3.1, o método estabelecido em 3.3 emprega (exatamente do mesmo modo) a função $\bar{v}^{\prime}(x;z)$.

A procedência dêste fato pode ser imediatamente constatada.

Pode-se dizer que o referido fato constitui-se numa vantagem do método estabelecido em 3.3 sôbre o método estabelecido em 3.1. Com efeito, a derivada autônoma $\bar{v}'(x;z)$ é definida pela expressão (8), enquanto que a função $\bar{v}^{\prime}(x;z)$ é definida pela expressão (5) - bastante mais simples. En-

---

(*) Considerando que êsses métodos não são outra coisa que formas de expressão para os teoremas 4 e 5, compreende-se que todos os mencionados comentários poderão ser interpretados como comentários que dizem respeito a uma comparação entre os referidos teoremas.

tretanto, a propósito desta substituição de $\bar{v}'(x;z)$ por $\bar{v}'(x;z)$, podemos dizer que a mesma se torna realmente interessante por vir acompanhada das novas vantagens que serão discutidas abaixo.

Um segundo dos fatos anteriormente aludidos pode ser expresso como segue.

Seja $\dot{x} = f(x,t)$ um qualquer sistema da classe $\mathfrak{E}(D,t_o)$, ao qual o método estabelecido em 3.3 é aplicável (isto é, para o qual estão satisfeitas as hipóteses sôbre $f(x,t)$ explicitadas no início da formulação do referido método). Considere-se duas aplicações a tal sistema, uma do método estabelecido em 3.1 e outra do método estabelecido em 3.3. Faça-se a suposição de que tanto numa como noutra aplicação sejam escolhidas a mesma família de sistemas associada $\dot{x} = u(x,t;z)$, a mesma função $v(x,t)$ (a qual certamente deverá preencher os requisitos explìcitamente formulados na etapa $\hat{A}_{II}$), juntamente com o mesmo conjunto R e com a mesma função $\varphi(x)$.

Nestas circunstâncias, pode-se fazer a seguinte afirmação:

(o) Entre os conjuntos E^* e $\hat{E}^*$ subsiste a relação de inclusão $\text{int } E^* \subset \text{int } \hat{E}^*$.

Além disso, pode-se ainda fazer a seguinte afirmação:

(i) Se $0 \in \text{int } E^*$, isto é, se se verifica o caso em que o método estabelecido em 3.1 conduz a um domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v,R \cap \text{int } E^*,\varphi)$, então também $0 \in \text{int } \hat{E}^*$, isto é, também se verifica o caso em que o método estabelecido em 3.3 conduz a um domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v,R \cap \text{int } \hat{E}^*,\varphi)$, e mais, entre tais domínios de estabilidade assintótica subsiste a relação de inclusão $\mathfrak{S}(v,R \cap \text{int } E^*,\varphi) \subset \mathfrak{S}(v,R \cap \text{int } \hat{E}^*,\varphi)$.

Nas mesmas referidas circunstâncias, também têm lugar as seguintes afirmações adicionais:

(ii) Pode efetivamente ocorrer que $0 \notin \text{int } E^*$ e que $0 \in \text{int } \hat{E}^*$, isto é, pode efetivamente ocorrer que o método estabelecido em 3.1 não conduz a um domínio de estabilidade assintótica e que o método estabelecido em 3.3 conduz a um domínio de estabilidade assintótica.

(iii) Pode efetivamente ocorrer que $0 \in \text{int } E^*$, que $0 \in \text{int } \hat{E}^*$ e que a relação de inclusão $\mathfrak{S}(v,R \cap \text{int } E^*,\varphi) \subset \mathfrak{S}(v,R \cap \text{int } \hat{E}^*,\varphi)$ subsis te no sentido estrito, isto é, pode efetivamente ocorrer que ambos os métodos conduzem a domínios de estabilidade assintótica e que o domínio fornecido pelo método estabelecido em 3.1 é estritamente menor do que o domínio fornecido pelo método estabelecido em 3.3.

O fato que acaba de ser expresso será justificado por meio da argumentação que passa a ser apresentada.

Para se demonstrar a afirmação (o), demonstrar-se-á a seguir que $E^* \subset \hat{E}^*$. Como se vê imediatamente, isto é o quanto basta. De acôrdo com a (11), obtém-se sem dificuldade que a relação $\bar{v}'(x;z) \geqslant \bar{v}'(x;z)$ subsiste para qualquer $x \in D$ e qualquer $z \in D$. Em seguida, utilizando essa relação, e levando em conta que $R \subset D$, pelas definições dos conjuntos E^*_o e $\hat{E}^*_o$ deduz-se fàcilmente que $E^*_o \subset \hat{E}^*_o$. Daí, pelas definições dos conjuntos E^* e $\hat{E}^*$, conclui-se que $E^* \subset \hat{E}^*$, ficando pois demonstrada a afirmação (o).

Uma demonstração da afirmação (i) pode ser muito simplesmente dada com base na afirmação (o), seguindo-se as mesmas linhas de argumentação anteriormente seguidas na subsecção 3.2 para se demonstrar a afirmação (i) dessa subsecção com base na afirmação (o) dessa mesma subsecção. Podemos perfeitamente omitir uma exibição específica da referida demonstração, pois, para obter tal exibição, basta que se tome o texto da demonstração da afirmação (i) da subsecção 3.2, e que no mesmo se substitua "$F(\theta)$" por "E^*", "teorema 8" por "teorema 6", "[TAS]" por "3.1", "E^*" por "$\hat{E}^*$", "teorema 6" por "teorema 7" e "3.1" por "3.3".

As afirmações (ii) e (iii) serão a seguir demonstradas por meio da consideração de um exemplo. Bàsicamente, êsse exemplo consistirá numa análise de certas aplicações dos métodos estabelecidos nas subsecções 3.1 e 3.3 a um sistema de equações diferenciais extremamente simples. Alguns detalhes dessas aplicações serão omitidos por razões de brevidade, visto que as referidas aplicações poderão ser discutidas de modo completo sem qualquer dificuldade.

No cilindro $K(\mathcal{F},0)$, considere-se o sistema

$$\dot{x} = -x \,. \tag{69}$$

Êsse é um sistema da classe $\mathfrak{E}(\mathcal{F},0)$, ao qual o método estabelecido em 3.3 é aplicável.

Seja $\alpha(q)$ uma qualquer função que goza das seguintes propriedades: $\alpha(q)$ é definida no intervalo $0 \leq q < +\infty$, e assume valores reais de tal forma que

$$0 < \alpha(q) \leq 1 \tag{70}$$

para qualquer q do referido intervalo. Considere-se a família de sistemas

$$\dot{x} = -\Big[\alpha(|z|) + [1 - \alpha(|z|)]\ e^{-|x-z|t}\Big]\ x\ , \tag{71}$$

parametrizada por z variável em $\mathfrak{F}$. Sem maiores dificuldades pode-se constatar que essa é uma família de sistemas associada ao sistema (69). Trata-se de uma família que, como família de sistemas associada ao sistema (69), poderá à primeira vista parecer um tanto artificial. Mas é uma família que se prestará bem às finalidades que se tem em mira.

Tanto para aplicar o método estabelecido em 3.1 como o método estabelecido em 3.3, escolha-se a família (71) como família de sistemas associada, e, como função v(x,t), escolha-se aquela dada em $K(\mathfrak{F},0)$ pela expressão

$$v(x,t) = x'x = |x|^2\ , \tag{72}$$

tomando simultâneamente $R = \mathfrak{F}$ e $\varphi(x) = x'x$ em $\mathfrak{F}$.

A função $\bar{v}^{\bullet}(x,t;z)$ pode ser calculada sem nenhuma dificuldade. Chega-se à expressão

$$\bar{v}^{\bullet}(x,t;z) = -\,2\,|x|^2 \Big[\alpha(|z|) + [1 - \alpha(|z|)]\ e^{-|x-z|t}\Big]\ , \tag{73}$$

válida para qualquer $x \in \mathfrak{F}$, qualquer $z \in \mathfrak{F}$ e qualquer $t \geq 0$.

De acôrdo com a expressão (5), em virtude da (73), resulta que

$$\bar{v}'(x;z) = \sup_{t \geq 0} \Big[-\,2\,|x|^2 \Big[\alpha(|z|) + [1 - \alpha(|z|)]\ e^{-|x-z|t}\Big]\Big] \tag{74}$$

para qualquer $x \in \mathfrak{F}$ e qualquer $z \in \mathfrak{F}$. Posto isto, para x variável em $\mathfrak{F}$ e z variável em $\mathfrak{F}$, considere-se a função real $\beta(x;z)$ definida a partir de $\alpha(q)$ pela expressão

$$\beta(x;z) = \begin{cases} \alpha(|z|) & \text{sempre que } x \neq z \\ 1 & \text{sempre que } x = z. \end{cases} \tag{75}$$

Utilizando a (75) e levando em conta a (70), fàcilmente se deduz da (74) que, para x variável em $\mathcal{F}$ e z variável em $\mathcal{F}$, a função $\bar{v}'(x;z)$ é dada pela seguinte expressão:

(76) $$\bar{v}'(x;z) = -2\,|x|^2\,\beta(x;z)\ .$$

A obtenção da função $\bar{v}'(x;z)$ é um pouco mais trabalhosa do que aquela acima feita da função $\bar{v}'(x;z)$. De acôrdo com a expressão (7), em virtude da (76), tem-se que

(77) $$\bar{v}'(x;z) = \lim_{r\to 0+}\ \sup_{\substack{|y-x|\leq r\\ |w-z|\leq r}} \left[-2\,|y|^2\,\beta(y;w)\right]$$

para qualquer $x\in\mathcal{F}$ e qualquer $z\in\mathcal{F}$. Num primeiro caso, suponha-se que $x\neq z$. Nesse caso, levando em conta a (75), a partir da (77) fàcilmente se constata que

(78) $$\bar{v}'(x;z) = \lim_{r\to 0+}\ \sup_{\substack{|y-x|\leq r\\ |w-z|\leq r}} \left[-2\,|y|^2\,\alpha(|w|)\right] =$$

$$= \lim_{r\to 0+}\ \sup_{|w-z|\leq r}\ \sup_{|y-x|\leq r} \left[-2\,|y|^2\,\alpha(|w|)\right].$$

Separe-se agora dois subcasos: $x\neq 0$ e $x=0$. Se $x\neq 0$, tendo em vista a (70), a partir da (78) fàcilmente se constata que

(79) $$\bar{v}'(x;z) = \lim_{r\to 0+}\ \sup_{|w-z|\leq r} \left[-2\,(|x|-r)^2\,\alpha(|w|)\right] =$$

$$= -2\lim_{r\to 0+}\left[(|x|-r)^2\ \inf_{|w-z|\leq r}\ \alpha(|w|)\right] =$$

$$= -2\,|x|^2\lim_{r\to 0+}\ \inf_{\big||w|-|z|\big|\leq r}\ \alpha(|w|)\ .$$

Se $x=0$, tendo em vista a (70), a partir da (78) fàcilmente se constata que

(80) $$\bar{v}'(x;z) = 0\ .$$

Reunindo os dois subcasos, ainda com auxílio da (70), obtém-se fàcilmente que, para x variável em $\mathcal{F}$ e z variável em $\mathcal{F}$,

(81) $$\bar{v}'(x;z) = -2\,|x|^2 \lim_{r\to 0+} \inf_{||w|-|z||\leq r} \alpha(|w|)\ ,$$

desde que se verifique o caso $x \neq z$. Num segundo caso, suponha-se que $x = z$. Nesse caso, mais uma vez levando em conta a (75), ainda a partir da (77) fàcilmente se constata que

(82) $$\bar{v}'(x;z) = \lim_{r\to 0+} \max \left\{ \sup_{\substack{|y-x|\leq r \\ |w-z|\leq r \\ y\neq w}} \left[-2\,|y|^2 \alpha(|w|) \right],\ \sup_{\substack{|y-x|\leq r \\ |w-z|\leq r \\ y = w}} \left[-2\,|y|^2 \right] \right\} =$$

$$= \lim_{r\to 0+} \max \left\{ \sup_{|w-z|\leq r} \sup_{|y-x|\leq r} \left[-2\,|y|^2 \alpha(|w|) \right],\ \sup_{|y-x|\leq r} \left[-2\,|y|^2 \right] \right\} .$$

Separe-se agora dois subcasos: $x \neq 0$ e $x = 0$. Se $x \neq 0$, tendo em vista a (79), a partir da (82) fàcilmente se constata que

(83) $$\bar{v}'(x;z) = \lim_{r\to 0+} \max \left\{ \sup_{|w-z|\leq r} \left[-2\,(|x|-r)^2 \alpha(|w|) \right],\ \sup_{|y-x|\leq r} \left[-2\,|y|^2 \right] \right\} =$$

$$= \max \left\{ \lim_{r\to 0+} \sup_{|w-z|\leq r} \left[-2\,(|x|-r)^2 \alpha(|w|) \right],\ \lim_{r\to 0+} \sup_{|y-x|\leq r} \left[-2\,|y|^2 \right] \right\} =$$

$$= \max \left\{ -2 \lim_{r\to 0+} \left[(|x|-r)^2 \inf_{|w-z|\leq r} \alpha(|w|) \right],\ -2\,|x|^2 \right\} =$$

$$= \max \left\{ -2\,|x|^2 \lim_{r\to 0+} \inf_{||w|-|z||\leq r} \alpha(|w|),\ -2\,|x|^2 \right\} =$$

$$= -2\,|x|^2 \lim_{r\to 0+} \inf_{||w|-|z||\leq r} \alpha(|w|)\ .$$

Se $x = 0$, tendo em vista a (70), a partir da (82) fàcilmente se constata que

$$(84) \qquad \bar{v}'(x;z) = 0 .$$

Reunindo os dois subcasos, ainda com auxílio da (70), obtém-se fàcilmente que, para x variável em $\mathcal{F}$ e z variável em $\mathcal{F}$,

$$(85) \qquad \bar{v}'(x;z) = -2\,|x|^2 \lim_{r\to 0+} \inf_{\left||w|-|z|\right|\leqslant r} \alpha(|w|) ,$$

desde que se verifique o caso $x = z$. Posto isto, para q variável no intervalo $0 \leqslant q < +\infty$, considere-se a função real $\gamma(q)$ definida a partir de $\alpha(q)$ pela expressão

$$(86) \qquad \gamma(q) = \lim_{r\to 0+} \inf_{\substack{|p-q|\leqslant r \\ p\geqslant 0}} \alpha(p) .$$

Reunindo os resultados obtidos nos dois casos acima considerados, e utilizando a (86), à vista das (81) e (85) deduz-se fàcil e finalmente que, para x variável em $\mathcal{F}$ e z variável em $\mathcal{F}$, a função $\bar{v}'(x;z)$ é dada pela seguinte expressão:

$$(87) \qquad \bar{v}'(x;z) = -2\,|x|^2\,\gamma(|z|) .$$

Uma vez obtidas as funções $\bar{v}'(x;z)$ e $\bar{v}'(x;z)$, as determinações dos conjuntos E^* e $\hat{E}^*$ podem ser feitas sem qualquer dificuldade. A determinação do conjunto $\hat{E}^*$ conduz a um resultado que independe da função $\alpha(q)$ inicialmente considerada. Efetivamente, através do emprêgo da (76), e observando que, qualquer que seja a função $\alpha(q)$ inicialmente considerada, tem-se que $\beta(x;z) > 0$ para qualquer $x \in \mathcal{F}$ e qualquer $z \in \mathcal{F}$, chega-se fàcilmente ao seguinte resultado: $\hat{E}^*$ é todo $\mathcal{F}$. Ao contrário, a determinação do conjunto E^* conduz a um resultado que depende da função $\alpha(q)$ inicialmente considerada. Efetivamente, através do emprêgo da (87), chega-se fàcilmente ao seguinte resultado: E^* é a reunião do conjunto $\{0\}$ com o conjunto dos pontos $z \in \mathcal{F} - \{0\}$ tais que

$$(88) \qquad \gamma(|z|) > 0 .$$

Prosseguir-se-á agora com as presentes aplicações do método estabelecido em 3.1 e do método estabelecido em 3.3, através da adoção de convenientes especializações da função $\alpha(q)$ inicialmente considerada.

Em primeiro lugar, tome-se a função $\alpha(q)$ de tal forma que (além de gozar das propriedades que lhe foram inicialmente impostas) goze da seguinte propriedade [cf. (86)] :

$$\gamma(q) = 0 \tag{89}$$

para qualquer q do intervalo $0 \leq q < +\infty$. (*) Assim fazendo, de acôrdo com a determinação do conjunto E^* precedentemente apresentada, resulta imediatamente que $E^* = \{0\}$. De conseqüência, obtém-se que $0 \notin \text{int } E^*$. Por outro lado, de acôrdo com a determinação do conjunto $\hat{E}^*$ precedentemente apresentada, pode-se afirmar que $\hat{E}^* = \mathcal{F}$. De conseqüência, obtém-se que $0 \in \text{int } \hat{E}^*$. Desta forma vê-se que pode efetivamente ocorrer que $0 \notin \text{int } E^*$ e que $0 \in \text{int } \hat{E}^*$. Pelos teoremas 6 da subsecção 3.1 e 7 da subsecção 3.3, isto significa que pode efetivamente ocorrer que o método estabelecido em 3.1 não conduz a um domínio de estabilidade assintótica e que o método estabelecido em 3.3 conduz a um domínio de estabilidade assintótica. Fica assim demonstrada a afirmação (ii).

Em segundo lugar, tome-se a função $\alpha(q)$ de tal forma que (além de gozar das propriedades que lhe foram inicialmente impostas) goze das seguintes propriedades [cf. (86)]:

$$\gamma(q) > 0 \tag{90}$$

para qualquer q de um intervalo $0 \leq q < \bar{q}$, onde $\bar{q}$ designa um dado número positivo, e

$$\gamma(q) = 0 \tag{91}$$

(*) Sem grande dificuldade pode-se verificar que um exemplo de função que goza de tôdas as referidas propriedades é constituído pela função $\alpha_0(q)$ apresentada a seguir. Primeiramente defina-se a restrição de $\alpha_0(q)$ ao intervalo $0 < q \leq 1$, pondo $\alpha_0(q) = 1$ para q irracional, e, para q racional, pondo $\alpha_0(q) = \frac{1}{d}$, onde d é o denominador da fração irredutível de números inteiros e positivos que representa q. Posteriormente defina-se $\alpha_0(q)$ em todo o intervalo $0 \leq q < +\infty$, prolongando a referida restrição por meio da exigência de que $\alpha_0(q)$ resulte periódica de período 1 nesse intervalo. (A idéia da consideração dêsse exemplo provém da análise clássica, onde semelhantes exemplos são considerados em diversas circunstâncias).

para qualquer q do intervalo $\bar{q} \leqslant q < +\infty$. (*) Assim fazendo, de acôrdo com a determinação do conjunto E^* precedentemente apresentada, resulta imediatamente que E^* é o conjunto dos pontos $z \in \mathfrak{F}$ tais que

$$|z| < \bar{q} \,. \tag{92}$$

De conseqüência, como $\bar{q}$ é um número positivo, obtém-se que $0 \in \operatorname{int} E^*$. Por outro lado, de acôrdo com a determinação do conjunto $\hat{E}^*$ precedentemente apresentada, pode-se afirmar que $\hat{E}^* = \mathfrak{F}$. De conseqüência, obtém-se que $0 \in \operatorname{int} \hat{E}^*$. Nestas condições, pelos teoremas 6 da subsecção 3.1 e 7 da subsecção 3.3, o método estabelecido em 3.1 conduz ao domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} E^*, \varphi)$ e o método estabelecido em 3.3 conduz ao domínio de estabilidade assintótica $\mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} \hat{E}^*, \varphi)$. Assim, os conjuntos $\mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} E^*, \varphi)$ e $\mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} \hat{E}^*, \varphi)$ estão perfeitamente definidos. A sua determinação não oferece dificuldades. Chega-se aos seguintes resultados: $\mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} E^*, \varphi)$ é o conjunto dos pontos $z \in \mathfrak{F}$ tais que

$$|z| < \bar{q} \,, \tag{93}$$

e $\mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} \hat{E}^*, \varphi) = \mathfrak{F}$. É óbvio que o primeiro conjunto está pròpriamente contido no segundo conjunto. Desta forma vê-se que pode efetivamente ocorrer que $0 \in \operatorname{int} E^*$, que $0 \in \operatorname{int} \hat{E}^*$ e que a relação de inclusão $\mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} E^*, \varphi) \subset \mathfrak{S}(v, R \cap \operatorname{int} \hat{E}^*, \varphi)$ subsiste no sentido estrito. Em outros têrmos, pode efetivamente ocorrer que ambos os métodos conduzem a domínios de estabilidade assintótica e que o domínio fornecido pelo método estabelecido em 3.1 é estritamente menor do que o domínio fornecido pelo método estabelecido em 3.3. Fica assim demonstrada a afirmação (iii).

Examinando as afirmações (i), (ii) e (iii) do segundo fato acima considerado, vê-se que as mesmas exibem novas e bastante importantes vantagens do método estabelecido em 3.3 sôbre o método estabelecido em 3.1. O conteúdo dessas afirmações, não muito precisa, porém sugestivamente, pode ser expresso da seguinte maneira:

<u>Dentro do âmbito de aplicação do método estabelecido em</u> 3.3, <u>sempre</u>

(*) Um exemplo de uma tal função é constituído pela função $\alpha_1(q)$ definida a seguir. Sendo $\alpha_o(q)$ a função considerada na precedente nota de rodapé, ponha-se $\alpha_1(q) = 1$ para $0 \leqslant q < \bar{q}$, e $\alpha_1(q) = \alpha_o(q)$ para $\bar{q} \leqslant q < +\infty$.

que o método estabelecido em 3.1 conduz a um domínio de estabilidade assintótica, o mesmo ocorre com o método estabelecido em 3.3, porém não vice-versa. Além disso, os domínios de estabilidade assintótica fornecidos pelo método estabelecido em 3.3 são sempre não menores, podendo ser estritamente maiores do que os domínios de estabilidade assintótica fornecidos pelo método estabelecido em 3.1.

Numa palavra, pode-se dizer que o método estabelecido em 3.3, dentro do seu âmbito de aplicação, tem qualidade melhor do que o método estabelecido em 3.1.

SUMÁRIO

1. No presente trabalho, essencialmente composto de duas partes, I e II, são apresentados certos estudos sôbre a *estabilidade global assintótica* de sistemas de equações diferenciais ordinárias, em tôrno de um ponto de equilíbrio. Os sistemas de equações são aqueles pertencentes à classe $\mathfrak{S}$, definida em [TAS, parte I, secção 2, ps. 17-20]. Trata-se de uma classe bastante ampla, constituída de sistemas normais (em geral não lineares e não necessàriamente autônomos). Os resultados obtidos na parte I servem de fundamento para os desenvolvimentos feitos na parte II.

2. Em [TAS, parte I, secção 5 (5.3), ps. 34-36] foi enunciado e demonstrado um teorema sôbre a estabilidade global assintótica, lá designado por *segundo teorema de Liapounoff global*.

Na parte I é feita uma certa *generalização do segundo teorema de Liapounoff global*. O citado teorema e a aludida generalização enquadram-se tìpicamente na *teoria do método direto de Liapounoff*. Essa generalização é obtida em duas formas (equivalentes). Para a obtenção de uma dessas formas, que se apresenta como sendo de utilização mais conveniente do que a outra, é feita a introdução do conceito de *derivada autônoma de uma função em relação a um sistema*. Após a reprodução de um recente *teorema de Yoshizawa*, são discutidas certas conexões entre o mesmo e a aludida generalização do segundo teorema de Liapounoff global.

3. Em [TAS, parte II, secção 6 (6.2), ps. 52-55] foi estabelecido um método, lá designado por *método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica*, método êsse que possui o caráter de envolver a escolha de uma família de sistemas associada qualquer.

Na parte II são estabelecidos e discutidos certos dois métodos análogos ao citado método, métodos êsses que também possuem o aludido caráter. Os mesmos podem ser considerados (em certos sentidos) como *formas aperfei-*

çoadas do método dos sistemas associados para a determinação de domínios de estabilidade assintótica. Essas formas aperfeiçoadas não são outra coisa que certas reformulações de dois teoremas, prèviamente enunciados e demonstrados, os quais podem ser qualificados de resultados básicos da teoria dos sistemas associados. Visando a obtenção dêsses teoremas, é feita a introdução do conceito de derivada autônoma de uma função em relação a uma família de sistemas associada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(Por ordem de citação)

[i] L. R. BORGES VIEIRA, Relations entre la stabilité globale non linéaire et la stabilité linéaire. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Techniques, Vol. X, No. 2, ps. 115-121, (1962).

[ii] L. R. BORGES VIEIRA, Theory of associated systems for study of the stability in the large. Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, Vol. 14º., ps. 13-81, (1962). (*)

[iii] L. R. BORGES VIEIRA, Theory of associated systems for study of the stability in the large (continued). Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, Vol. 17º., ps. 1-117, (1965).

[iv] S. LEFSCHETZ, Differential Equations: Geometric Theory (Second Edition). Interscience Publishers. New York - London. 1957 (First Edition).

[v] J. P. LA SALLE, Some extensions of Liapunov's second method. IRE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-7, ps. 520-527, (1961).

[vi] T. YOSHIZAWA, Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations. Contributions to Differential Equations, Vol. I, ps. 371-387, (1963).

[vii] J. P. LA SALLE, Recent advances in Liapunov stability theory. SIAM Review, Vol. 6, No.1, ps. 1-11, (1964).

(*) Neste artigo, à página 29, linha 8, substitua-se "$0 < h < \sup \varphi$" por "$0 < h < h(\varphi, R)$".