Exposé no. 5
Chaim Samuel Hönig

Année 1981-82

EQUATIONS INTEGRALES GENERALISEES ET APPLICATIONS

Résumé. Dans cet exposé on donne des théorèmes de représentation intégrale pour les opérateurs définis dans l'espace des fonctions réglées. Ces théorèmes permettent de caractériser les opérateurs de causalité et d'étudier les équations linéaires intégrales de Volterra-Stieltjes. Il en résulte des applications à la théorie des semi-groupes d'opérateurs et à l'inégalité linéaire de Gronwall-Bellman. On mentionne d'autres applications et résultats et on présente plusieurs problèmes ouverts, en particulier des problèmes de géométrie des espaces de Banach issus des questions précédentes.

INTRODUCTION

Dans cet exposé nous présentons les principaux résultats de la théorie des équations linéaires intégrales de Volterra-Stieltjes

$$\text{(K)} \qquad y(t) - x + \int_a^t d_s K(t,s).y(s) = f(t) - f(a), \qquad a \leq t \leq b$$

dans le cadre d'un espace de Banach X. Les fonctions $f, y : [a,b] \longrightarrow X$ sont réglées (c'est-à-dire n'ont que des discontinuités de première espèce) et $K:[a, b] \times [a,b] \longrightarrow L(X)$ est telle que l'intégrale dans (K) soit encore une fonction réglée (voir Théorème 2.8). Ces noyaux permettent d'ailleurs de représenter tout opérateur F de l'espace des fonctions réglées qui soit de causalité, c'est-à-dire, pour tout $t \in [a, b]$ $(Fy)(t)$ ne dépend que de y dans $[a,t]$ (voir Théorème 2.10). Le fait que les données f et les solutions y puissent être discontinues est important dans beaucoup de questions de mathématique, physique et technologie.

Puisque K et y dans (K) peuvent avoir des points communs de discontinuité il faut remplacer l'intégrale de Riemann-Stieltjes par une intégrale plus générale : nous utilisons l'intégrale intérieure (voir Définition 1.9).

L'équation (K) contient comme cas particuliers les équations intégrales linéaires de Volterra

$$y(t) - x + \int_a^t H(t,s).y(s)ds = f(t) - f(a), \qquad a \leq t \leq b$$

(en effet, on prend $K(t,s) = \int_a^s H(t,\sigma)d\sigma$, voir aussi le Théorème 3.22) et les équations linéaires intégrales de Stieltjes

$$\text{(L)} \qquad y(t) - x + \int_a^t dA(s).y(s) = f(t) - f(a), \qquad a \leq t \leq b.$$

Rappelons que les équations différentielles linéaires à retard peuvent être mises sous la forme (K) (voir [18], p.91)et que l'équation (L) contient les équations différentielles linéaires

$$y'(t) + B(t).y(t) = g(t), \qquad a \leq t \leq b$$
$$y(a) = x$$

(en effet, on prend $A(t) = \int_a^t B(s)ds$ et $f(t) = \int_a^t g(s)\, ds$).

Dans l'étude des équations (K) et (L) on cherche des conditions pour qu'elles aient une solution unique et une résolvante telle que la solution soit donnée par

$$y(t) = f(t) + R(t,a).\,[x-f(a)] - \int_a^{\bullet t} d_sR(t,s).f(s), \qquad a \leq t \leq b.$$

Les premiers à étudier l'équation (L) ont été Wall (1954) [45] et Mac Nerney (1955) [30]. Dans [30], Mac Nerney suppose que $A : [a,b] \longrightarrow L(X)$ est continue et à variation bornée ; les fonctions f, $y : [a,b] \longrightarrow X$ sont à variation bornée (mais ses résultats sont encore valables si elles ne sont que réglées). Il démontre l'existence de la résolvante donnée par une intégrale multiplicative. Dans [12] Hildebrandt (1959) étend les résultats de [30] au cas où A n'est que de variation bornée, ainsi que f et y (mais ses résultats sont encore valables si f et y sont seulement réglées).

Il utilise l'intégrale de Young (voir Définition 1.10) et trouve des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la résolvante (analogue à 1) du Théorème 3.19).

Le premier auteur qui a étudié l'équation (K) fut Hinton (1966) dans [14] où il considère une classe particulière de noyaux K (à variation bornée dans la seconde variable, voir la Définition 3.6) et f,y réglées. Pour cette classe, il démontre l'existence d'une résolvante ; il travaille avec les intégrales de Riemann-Stieltjes à gauche et à droite. Schwabik (1974) dans [39] (voir aussi [40]) donne des conditions pour l'existence de la résolvante de (K) si K est à variation bornée selon Vitali (voir Définition 3.7) et y,f sont à variation bornée (mais ses résultats sont encore valables si elles ne sont que réglées) ; il utilise une intégrale équivalente à celle de Young et suppose que $\dim X < \infty$.

En 1974, dans [18] nous avons commencé l'étude de (K) dans des conditions plus générales en ne supposant plus que le noyau K soit à variation bornée dans la seconde variable mais seulement à semi-variation bornée (voir Définition 1.7). Nos résultats ont été étendus par Souza (1974) dans [8] pour l'équation (L) et par Arbex (1976) dans [1] et Gomes (1980) dans [10] pour l'équation (K). Dans [24], nous obtenons un théorème assez simple pour l'existence de la résolvante de (K) et de ce théorème, on déduit d'une façon très simple tous les théorèmes d'existence de la résolvante pour les noyaux considérés auparavant dans [14], [39], [40], [18], [1], [10] et [21] pour (K) et dans [30], [12], [18], [8] et [23] pour (L) (voir le Théorème 3.8 et ceux qui le suivent).

Aux paragraphes 1 et 2 de cet exposé, nous donnons la partie de l' "Analyse" dont nous avons besoin dans la suite. Le § 3 contient les résultats pour les équations (K) et (L). Ces résultats ont beaucoup d'applications. Au § 4, nous démontrons un résultat de Travis [44] de la théorie des semi-groupes fortement continus.

Au paragraphe 5, nous appliquons nos résultats pour obtenir des généralisations de l'inégalité de Gronwall-Bellman. Au paragraphe 6, nous mentionnons rapidement plusieurs autres applications et directions de recherche. Dans cet exposé, nous présentons plusieurs problèmes ouverts et au paragraphe 7 nous donnons quelques problèmes ouver de géométrie des espaces de Banach issus des questions précédentes.

Les résultats développés ici ont fait l'objet de [21], [24], [28] et [5] principalement.

1. NOTATIONS ET RESULTATS FONDAMENTAUX

Nous suivons de près les notations de [21] ; voir aussi [18] et [17].

Nous considérons toujours des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels mais tous nos résultats sont encore valables pour des espaces vectoriels complexes W,X,Y,Z désignent toujours des espaces de Banach. $L(X,Y)$ désigne l'espace de Banach des applications linéaires continues $u : X \longrightarrow Y$; on note $\underline{\underline{K}}(X,Y)$ le sous-espace de celles qui sont compactes et $\Pi_1(X,Y)$ celui des 1-sommantes (c'est-à-dire q transforment une série sommable de X dans une série absolument sommable de Y). On écrit $L(X) = L(X,X)$ et $X' = L(X,\mathbb{R})$. Par I_X on note l'automorphisme identique de X. Par χ_A on note la fonction caractéristique de l'ensemble $A(\chi_A(t) = 1$ si $t\in A$ et $\chi_A(t) = 0$ si $t\notin A)$.

DEFINITION 1.1. Une <u>division</u> d'un intervalle $[a,b]$ est une suite finie

$$d : t_o = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

Nous écrivons $|d| = n$ et $\Delta d = \sup_{1\leq i\leq |d|} |t_i - t_{i-1}|$. On note par $D_{[a,b]}$, ou simplement par D, l'ensemble de toutes les divisions de $[a,b]$. On dit qu'une division $\bar{d}$ est <u>plus fine</u> qu'une division d, on écrit $\bar{d} \geq d$, si tout point t_i de d est un point de $\bar{d}$.

DEFINITION 1.2. Si $x,(x_d)_{d\in D}$ sont des points d'un espace topologique E on écrit $x = \lim_{d\in D} x_d$ si pour tout voisinage V de x il existe $d_V\in D$ tel que pour $d \geq d_V$ on a $x_d\in V$. La notation $x = \lim_{\Delta d\to 0} x_d$ est évidente.

On dit que $f : [a,b] \to X$ est une <u>fonction en escalier</u>, on écrit $f \in E([a,b],X)$, s'il existe $d \in D_{[a,b]}$ telle que f soit constante dans chaque intervalle ouvert de d.

DEFINITION 1.3. On dit que $f : [a,b] \longrightarrow X$ est une <u>fonction réglée</u>, on écrit $f \in G([a,b],X)$, si pour tout $t \in [a,b[\; [t \in]a,b]]$ il existe $f(t+) = \lim_{\tau \downarrow t} f(\tau)$ $[f(t-) = \lim_{\tau \uparrow t} f(\tau)]$.

1.1. $G([a,b],X)$ <u>est un espace de Banach quand on le munit de la norme</u> $\sup(\|f\| = \sup_{a \le t \le b} \|f(t)\|$ - Voir [18], <u>Théorème</u> I.3.6).

1.2. ([18], Théorème I.3.1) <u>Soit</u> $f : [a,b] \longrightarrow X$; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) $f \in G([a,b],X)$

ii) <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $f_\varepsilon \in E([a,b],X)$ <u>telle que</u> $\|f - f_\varepsilon\| \le \varepsilon$

iii) <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $d \in D_{[a,b]}$ <u>telle que</u> $\omega_d^{\cdot}(f) \le \varepsilon$ <u>où</u> $\omega_d^{\cdot}(f) = \sup_{1 \le i \le |d|} \sup\{\|f(t) - f(s)\| \;|\; t_{i-1} < s < t < t_i\}$.

DEFINITION 1.4. On dit qu'un ensemble $\mathcal{E} \subset G([a,b],X)$ est <u>équiréglé</u> si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $d \in D_{[a,b]}$ telle que $\omega_d^{\cdot}(f) \le \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{E}$.

THEOREME 1.3 ([22], Theorem 3). $\mathcal{E} \subset G([a,b],X)$ <u>est relativement compact si et seulement si l'on a</u>

A_1. $\mathcal{E}$ <u>est équiréglé</u>

A_2. <u>Pour tout</u> $t \in [a,b]$ <u>l'ensemble</u> $\mathcal{E}(t) = \{f(t) \in X \;|\; f \in \mathcal{E}\}$ <u>est relativement compact</u>.

Pour $f \in G([a,b],X)$ on définit $f^-(t) = f(t-)$ si $a < t \le b$ et $f^-(a) = f(a+)$. $G^-([a,b],X) = \{f \in G([a,b],X) \;|\; f^- = f\}$ est un sous espace vectoriel fermé de $G([a,b],X)$.

Pour $f,g \in G([a,b],X)$ les propriétés suivantes sont équivalentes

i) On a $\int_a^t f(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds$ pour tout $t \in [a,b]$

ii) $f(t+) = g(t+)$ pour tout $t \in [a,b[$

iii) $f(t-) = g(t-)$ pour tout $t \in]a,b]$.

DEFINITION 1.5. Nous considérons comme équivalentes deux fonctions réglées f,g qui satisfont aux propriétés ci-dessus. La classe d'équivalence de f contient une et une seule fonction de $G^-([a,b],X) : f^-$. Voir [18], p. 20.

DEFINITION 1.6. On dit que $f : [a,b] \longrightarrow L(W,X)$ est une fonction simplement réglée, on écrit $f \in G^\sigma([a,b],L(W,X))$, si pour tout $w \in W$ on a $f.w \in G([a,b],X)$ où $(f.w)(t) = f(t)w$, $a \leq t \leq b$. Du théorème de Banach-Steinhaus il s'ensuit que pour tout $t \in [a,b[$ $[t \in]a,b]]$ il existe un élément de $L(W,X)$ qu'on note $f(t\dot{+})$ $[f(t\dot{-})]$ tel que $\lim_{\tau\downarrow t} f(\tau)w = f(t\dot{+})w$ $[\lim_{\tau\uparrow t} f(\tau)\,w = f(t\dot{-})\,w]$ pour tout $w \in W$. Du principe de la limitation uniforme il s'ensuit que

1.4. Toute fonction simplement réglée est bornée. $G^\sigma([a,b],L(W,X))$ avec la norme du sup est un espace de Banach.

1.5. $G([a,b],L(W,X)) \subset G^\sigma([a,b],L(W,X))$. On a l'égalité si et seulement si $\dim W < \infty$.

DEFINITION 1.7. Pour $\alpha : [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ on définit sa semi-variation (dans $[a,b]$) par $SV[\alpha] = SV_{[a,b]}[\alpha] = \sup_{\alpha \in D} SV_d[\alpha]$ où

$$SV_\alpha[\alpha] = \sup\left\{\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]x_i \right\| \,\middle|\, x_i \in X,\ \|x_i\| \leq 1\right\}.$$

Si $SV[\alpha] < \infty$ on dit que α est une fonction à semi-variation bornée et on écrit $\alpha \in SV([a,b],L(X,Y))$. Si de plus on a $\alpha(c) = 0$ pour un point $c \in [a,b]$ on note $\alpha \in SV_c([a,b]),L(X,Y))$. Pour $[c,d] \subset [a,b]$ on définit $SV_{]c,d]}[\alpha] = \lim_{\tau\downarrow c} SV_{[\tau,d]}[\alpha] = \sup_{c<\tau\leq d} SV_{[\tau,d]}[\alpha]$ et de même pour $SV_{[c,d[}[\alpha]$.
Il est immédiat que toute fonction à semi-variation bornée est bornée.

THEOREME 1.6. $SV_a([a,b],L(X,Y))$ <u>est un espace de Banach quand il est muni de la norme</u> $\alpha \longmapsto SV[\alpha]$.

La démonstration s'ensuit du théorème 1.11 ; voir aussi [15], I.3.3.

Pour $Y = \mathbb{R}$ on a $SV_d[\alpha] = V_d[\alpha] = \sum_{i=1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$; ceci montre que $\sup_{d\in D} V_d[\alpha] = V[\alpha]$, la <u>variation</u> de α. Si $V[\alpha] < \infty$ on dit que α est une <u>fonction à variation bornée</u> et on note $\alpha \in BV([a, b],X')$. De façon analogue on définit $BV([a,b],X)$, $BV_c([a,b],X)$ etc.

DEFINITION 1.8. $BW([a, b],Y) = SV([a,b],L(\mathbb{R},Y))$; un élément de $BW([a, b],Y)$ est dit une <u>fonction à variation faible bornée</u>.

Du théorème de Dvoretzky-Rogers il s'ensuit

1.7. $BV([a,b],Y) \subset BW([a,b],Y)$ <u>et l'on a l'égalité si et seulement si</u> $\dim Y < \infty$.

1.8. $BV([a,b],L(X,Y)) \subset SV([a,b],L(X,Y))$ <u>et l'on a l'égalité si et seulement si</u> $\dim Y < \infty$.

DEFINITION 1.9. Si $\alpha : [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ et $f : [a,b] \longrightarrow X$ on définit <u>l'intégrale de Riemann-Stieltjes</u> $\int_a^b d\alpha(t).f(t)$ <u>et l'intégrale intérieure</u> $\int_a^{\bullet b} d\alpha(t).f(t)$ par

$$\int_a^b d\alpha(t).f(t) = \lim_{\Delta d\to 0} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})].f(\xi_i) \quad \text{où} \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\int_a^{\bullet b} d\alpha(t).f(t) = \lim_{d\in D} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})].f(\xi_i^{\bullet}) \quad \text{où} \quad \xi_i^{\bullet} \in]t_{i-1}, t_i[$$

quand ces limites existent. De façon analogue on définit $\int_a^b \alpha(t).df(t)$ etc.

1.9. <u>S'il existe</u> $\int_a^b d\alpha(t).f(t)$ <u>alors il existe</u> $\int_a^{\bullet b} d\alpha(t).f(t) = \int_a^b d\alpha(t).f(t)$. <u>Si</u> $\int_a^{\bullet b} d\alpha(t).f(t)$ <u>existe et si</u> α <u>et</u> f <u>n'ont pas des points communs de discontinuité alors</u> $\int_a^b d\alpha(t).f(t)$ <u>existe</u>.(Voir [18], Theorem I.1.2).

Pour l'intégrale $\int_a^b d\alpha(t).f(t)$ on a la formule d'intégration par parties

$$\int_\alpha^b d\alpha(t).f(t) + \int_a^b \alpha(t).df(t) = \alpha(b).f(b) - \alpha(a).f(a)$$

laquelle, en général, n'est pas valable pour l'intégrale intérieure (mais voir [18], Theorem I.4.21).

THEOREME 1.10. <u>Soient</u> $\alpha \in SV([a,b],L(X,Y))$ <u>et</u> $f \in G([a,b],X)$.

a) <u>Il existe</u> $F_\alpha(f) = \int_a^{b\,\bullet} d\alpha(t).f(t)$; $\|F_\alpha(f)\| \leq SV[\alpha]\|f^-\|$

b) $\left\|\int_a^{b\,\bullet} d\alpha(t).f(t) - \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})].f(\xi_i^{\cdot})\right\| \leq SV[\alpha]\omega_d^{\cdot}(f)$

c) <u>L'image par</u> F_α <u>de tout ensemble équiréglé est relativement compact si et seulement si</u> $\alpha(t) \in \underline{\underline{K}}(X,Y)$ <u>pour tout</u> $t \in [a,b]$.

Voir [18], Theorem I.4.12 et [22], Theorem 4 d) pour la démonstration.

La généralisation suivante du théorème de représentation du Riesz pour les éléments $f \in \mathcal{C}([a,b])'$ justifie les notions de semi-variation et d'intégrale intérieu

THEOREME 1.11 ([18], Theorem I.5.1). <u>L'application</u>

$$\alpha \in SV_a([a,b],L(X,Y)) \longmapsto F_\alpha \in L[G^-([a,b],X),Y]$$

<u>est une isométrie (c'est-à-dire,</u> $\|F_\alpha\| = SV[\alpha]$) <u>du premier espace de Banach sur le second. On a</u> $\alpha(t)x = F_\alpha[\chi_{]a,b]}x]$ <u>pour</u> $a < t \leq b$ <u>et</u> $x \in X$.

De [7], p. 184, il s'ensuit le

THEOREME 1.12. <u>Soit</u> $\alpha \in SV_a([a,b]),L(X,Y))$:

$$\alpha \in BV_a([a,b],\Pi_1(X,Y)) \Longleftrightarrow F_\alpha \in \Pi_1[G([a,b],X),Y].$$

PROBLEME OUVERT 1. Nous ignorons une caractérisation des $\alpha \in SV_a([a,b],L(X,Y))$ tels que $F_\alpha \in \underline{\underline{K}}[G([a,b],X),Y]$.

THEOREME 1.13. *Soient* $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$ *et* $g \in G^{\sigma}([a,b], L(W,X))$. *Il existe l'intégrale intérieure simple* $I = {}^{\sigma}\!\!\int_a^b d\alpha(t) \circ g(t) \in L(W,Y)$ *définie par* $Iw = \int_a^b d\alpha(t).g(t)w$ *pour tout* $w \in W$. *On a* $\|I\| \leq SV[\alpha]\,\|g\|$. (Parfois nous supprimons le signe σ).

THEOREME 1.14 ([18], Theorem I.4.20). *Soit* $\alpha : [a,b] \longmapsto L(X,Y)$ *tel que pour tout* $f \in G([a,b],X)$ $[g \in G^{\sigma}([a,b], L(X))]$ *il existe* $\int_a^b d\alpha(t).f(t)$ $\left[{}^{\sigma}\!\!\int_a^b d\alpha(t) \circ g(t)\right]$. *Alors on a* $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$.

THEOREME 1.15 (Helly [18], Theorem I.5.8). *Si la suite* $\alpha_n \in SV([a,b], L(X,Y))$ *est telle que*

a) $\sup_n SV[\alpha_n] < \infty$

b) *Il existe* $\alpha : [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ *tel que* $\alpha_n(t)\,x \longrightarrow \alpha(t)\,x$ *pour tout* $t \in [a,b]$ *et tout* $x \in X$

alors on a

i) $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$ *et* $SV[\alpha] \leq \liminf SV[\alpha_n]$

ii) $\int_a^b d\alpha_n(t).f(t) \longrightarrow \int_a^b d\alpha(t).f(t)$ *pour tout* $f \in G([a,b],X)$

iii) $\left[{}^{\sigma}\!\!\int_a^b d\alpha_n(t) \circ g(t)\right] w \longrightarrow \left[{}^{\sigma}\!\!\int_a^b d\alpha(t) \circ g(t)\right] w$ *pour tout* $g \in G^{\sigma}([a,b], L(W,X))$ *et tout* $w \in W$.

Commentaires. L'intégrale intérieure semble avoir été définie pour la première fois par Pollard en 1920, [35], mais il n'en a pas donné beaucoup de résultats. En 1931, elle fut étudiée dans la thèse de Dushnik, voir [13], p. 96 et a été utilisée en 1934 par Kaltenborn, [29], pour donner un théorème de représentation pour les éléments de $G([a,b])'$ dont notre théorème 1.11 est une généralisation. Voir [18], Théorème I.5.6 pour une représentation des éléments de $L[G([a,b],X),Y]$. La notion de semi-variation a été créée en 1936 par Gowurin, [11]. Le théorème 1.15 a été démontré par Helly dans le cas numérique $(X = Y = \mathbb{R})$ et pour f continue.

Les résultats du § 3 pour les équations (K) et (L) utilisent l'intégrale intérieure tandis que plusieurs des auteurs dont nous donnons des références font usage de l'intégrale de Young.

DEFINITION 1.10. <u>Pour</u> $\alpha : [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ <u>et</u> $f : [a,b] \longrightarrow X$ <u>on définit l'intégrale de Young</u> $Y\int_a^b d\alpha(t).f(t)$ <u>par</u>

$$Y\int_a^b d\alpha(t).f(t) = \lim_{d\in D} \sum_{i=1}^{|d|} \Big\{ [\alpha(t_{i-1}\dot{+}) - \alpha(t_{i-1})].f(t_{i-1}) + [\alpha(t_i\dot{-}) - \alpha(t_{i-1}\dot{+})].f(\xi_i^{\cdot}) +$$

$$+ [\alpha(t_i) - \alpha(t_i\dot{-})].f(t_i)\Big\} \quad \text{où} \quad \xi_i^{\cdot} \in \,]t_{i-1}, t_i[$$

quand cette limite existe (aussi bien que les limites $\alpha(t\dot{+})$ et $\alpha(t\dot{-})$). De façon analogue on définit $Y\int_a^b \alpha(t).df(t)$, $Y\int_a^b d\alpha(t)\circ g(t)$ pour $g : [a,b] \longrightarrow L(W,X)$ etc.

<u>Remarque</u>. La définition habituelle de l'intégrale de Young suppose que α, f et g sont des fonctions à variation bornée.

Il est facile de passer de l'intégrale intérieure à l'intégrale de Young et réciproquement car les deux intégrales sont <u>associées</u>, c'est-à-dire, on a le

THEOREME 1.16. a) <u>Pour</u> $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$ <u>et</u> $f \in G([a,b],X)$ <u>il existe</u> $Y\int_a^b \alpha(t).df(t)$ <u>et on a</u>

$$\int_a^{b}\!\!\bullet\; d\alpha(t).f(t) + Y\int_a^b \alpha(t).df(t) = \alpha(b).f(b) - \alpha(a).f(a) .$$

b) <u>Pour</u> $\alpha \in SVG^{\sigma}([a,b], L(X,Y)) = SV([a,b],L(X,Y)) \cap G^{\sigma}([a,b],L(X,Y))$ <u>et</u> $f \in G([a,b],X)$ <u>il existe</u> $Y\int_a^b d\alpha(t).f(t)$ <u>et on a</u>

$$Y\int_a^b d\alpha(t).f(t) + \int_a^{b}\!\!\bullet\; \alpha(t).df(t) = \alpha(b).f(b) - \alpha(a).f(a).$$

La démonstration s'ensuit du Théorème I.4.21 de [18].

2. REPRESENTATIONS INTEGRALES D'OPERATEURS.

DEFINITION 2.1. Soit $K : T\times S \longrightarrow Z$. Pour tout $(t,s)\in T\times S$ on écrit

$$K^t(s) = K_s(t) = K(t,s).$$

Les fonctions $K^{\square}$ et $K_{\square}$ sont définies par

$$K^{\square} : t\in T \longmapsto K^t \in Z^S \quad \text{et} \quad K_{\square} : s\in S \longmapsto K_s \in Z^T.$$

DEFINITION 2.2. Pour $K : [c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ nous considérons les propriétés suivantes :

(G^{σ}): K est simplement réglée en tant que fonction de la première variable, c'est-à-dire, pour tout $s\in[a,b]$ on a $K_s \in G^{\sigma}([c,d],L(X,Y))$

(G): K est réglée en tant que fonction de la première variable

(SV^u): K est uniformément à semivariation bornée en tant que fonction de la seconde variable, c'est-à-dire, on a

$$SV^u[K] = \sup_{c\leq t\leq d} SV[K^t] < \infty.$$

(SV^u_a): K satisfait (SV^u) et $K(t,a)=0$ pour tout $t\in[c,d]$.

On note $K\in G^{\sigma}.SV^u_a([c,d]\times[a,b],L(X,Y))$ si K satisfait (G^{σ}) et (SV^u_a). De façon analogue on définit $G^{\sigma}.BV^u([c,d]\times[a,b],L(X,Y))$, $G.BV^u_a([c,d]\times[a,b], L(X,Y))$ etc.

Du théorème 2.2, il s'ensuit le

THEOREME 2.1. $G^{\sigma}.SV^u_a([c,d]\times[a,b],L(X,Y))$ <u>est un espace de Banach quand il est muni de la norme</u> $K\longmapsto SV^u[K]$.

THEOREME 2.2. a) ([18], Theorem I.5.10). <u>L'application</u>

$$K\in G^{\sigma}.SV^u_a([c,d]\times[a,b],L(X,Y)) \mapsto F_K\in L[G^{-}([a,b],X),G([c,d],Y)]$$

<u>est une isométrie (c'est-à-dire,</u> $\|F_K\| = SV^u[K]$) <u>du premier espace de Banach sur le</u>

second où pour tout $f \in G([a,b],X)$ nous définissons

$$(F_K f)(t) = \int_a^{b} \cdot\, d_s K(t,s).f(s)\ , \qquad a \leq t \leq b.$$

On a $K(t,s)x = F_K\left[\chi_{[a,s]}x\right](t)$ pour $s \in]a,b]$, $t \in [c,d]$ et $x \in X$.

b) ([22], Theorem 10). L'image par F_K de tout ensemble borné de $G([a,b],X)$ est un ensemble équiréglé de $G([c,d],Y)$ si et seulement si on a

$$K^{\square} \in G([a,d], SV_a([a,b], L(X,Y))).$$

THEOREME 2.3 ([22], Théorèmes 11 et 13). Soit $K \in G^{\sigma}.SV_a^{u}([c,d]\times[a,b], L(X,Y))$. Si $F_K \in \underline{\underline{K}}[G([a,b],X), G([c,d],Y)]$ alors $K^{\square} \in G([c,d], SV_a([a,b], \underline{\underline{K}}(X,Y)))$. Réciproquement, si $[c,d] = [a,b]$ et $Y = X$ alors de $K^{\square} \in G([a,b], SV_a([a,b], \underline{\underline{K}}(X)))$ il s'ensuit que $(F_K)^2 \in \underline{\underline{K}}[G([a,b],X)]$.

THEOREME 2.4 (Bray [18], Theorem II.1.1). Soient $\alpha \in SV([c,d], L(Y,Z))$, $K \in G^{\sigma}.SV^{u}([c,d]\times[a,d], L(X,Y))$, et $f \in G([a,b],X)$ $[f \in G^{\sigma}([a,b], L(W,X))]$. On définit

$$(F_\alpha K)(s) = {}^{\sigma}\!\int_c^{d} \cdot\, d\alpha(t) \circ K(t,s), \qquad a \leq s \leq b, \quad \text{et}$$

$$(F_K f)(t) = \int_a^{b} \cdot\, d_s K(t,s).f(s), \qquad c \leq t \leq d.$$

Alors on a

a) $F_\alpha K \in SV([a,b], L(X,Y))$ et $SV[F_\alpha K] \leq SV[\alpha]\, SV^{u}[K]$

b) $F_K f \in G([c,d],Y)$ $[F_K f \in G^{\sigma}([c,d], L(W,Y))]$ et $\|F_K f\| \leq SV^{u}[K]\, \|f\|$

c) $\displaystyle\int_a^{b} \cdot\, d_s \left[{}^{\sigma}\!\int_c^{d} \cdot\, d\alpha(t) \circ K(t,s)\right].f(s) = \int_c^{d} \cdot\, d\alpha(t).\left[\int_a^{b} \cdot\, d_s K(t,s).f(s)\right].$

Dans le cas numérique $(W = X = Y = Z = \mathbb{R})$ et pour f continue, Bray a démontré ce théorème vers 1918 dans [4].

2.5. Si $F_1 \in L[G([a,b],X), G([c,d],Y)]$ et $F_2 \in G[G([c,d],Y), G([e,f],Z)]$ sont définies, respectivement, par $K_1 \in G^{\sigma}.SV^{u}([c,d]\times[a,b], L(X,Y))$ et $K_2 \in G^{\sigma}([e,f]\times[c,d], L(Y,Z))$ alors $F_2 \circ F_1 \in L[G([a,b],X), G([c,d],Y)]$ est définie par $K \in G^\sigma . SV^u([e,f]\times[a,b], L(X,Z))$ où

$$K(t,s) = {}^\sigma\!\!\int_c^d \cdot\, d_\tau K_2(t,\tau) \circ K_1(\tau,s), \quad (t,s) \in [e,f]\times[a,b].$$

THEOREME 2.6 (La formule de Dirichlet [18], Theorem II.1.6). Avec les hypothèses du Théorème 2.4 prenons $[c,d] = [a,b]$. On a

$$\int_a^b \cdot\, d_s \left[\int_a^s \cdot\, d\alpha(t) \circ K(t,s)\right].f(s) = \int_a^b \cdot\, d\alpha(t). \left[\int_t^b \cdot\, d_s K(t,s).f(s) + K(t,t).f(t)\right]$$

$$\int_a^b \cdot\, d_s \left[\int_s^b \cdot\, d\alpha(t).K(t,s)\right].f(s) = \int_a^b \cdot\, d\alpha(t). \left[\int_a^t \cdot\, d_s K(t,s).f(s) - K(t,t).f(t)\right].$$

Du Théorème précédent s'ensuit immédiatement le

THEOREME 2.7. (La formule de substitution). Soient $\alpha \in SV([a,b], L(Y,Z))$, $g \in G^\sigma([a,b], L(X,Y))$ et $f \in G([a,b], X)$ $[f \in G^\sigma([a,b], L(W,X))]$. On a

$$\int_a^b \cdot\, d_s \left[\int_a^s \cdot\, d\alpha(t) \quad g(t)\right].f(s) = \int_a^b \cdot\, d\alpha(s).g(s)\, f(s).$$

Dans [20], il y a d'autres versions du Théorème de Dirichlet et de la formule de substitution.

Dans le Théorème 2.6 la fonction $t \in [a,b] \mapsto \int_a^t .d_s K(t,s) f(s) - K(t,t) \cdot f(t)$ est réglée mais les deux termes de la somme ne le sont pas nécessairement. Pour cette raison quand nous considérons l'équation (avec $Y = X$)

$$\text{(K)} \qquad y(t) - x + \int_a^t \cdot\, d_s K(t,s).y(s) = f(t) - f(a), \qquad a \le t \le b$$

il faut faire une hypothèse supplémentaire pour assurer que l'intégrale dans (K) est une fonction réglée de t pour tout $y \in G([a,b], X)$.

DEFINITION 2.3. Soit $K \in G^\sigma . SV^u([a,b]\times[a,b], L(X,Y))$; pour tout $f \in G([a,b], X)$ on définit

$$(kf)(t) = \int_a^t \cdot\, d_s K(t,s).f(s), \qquad a \le t \le b.$$

THEOREME 2.8 ([21], Theorem 2.6). Soit $K \in G^\sigma . SV^u([a,b]\times[a,b], L(X,Y))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) K <u>est simplement réglée sur la diagonale, c'est-à-dire, pour tout</u> $x\in X$ <u>la fonction</u> $t \in [a,b] \longmapsto K(t,t)x \in Y$ <u>est réglée</u>.

b) <u>Pour tout</u> $f \in G([a,b],X)$ <u>on a</u> $kf \in G([a,b],Y)$

Ce théorème est du à Arbex, [1] p. 30.

Si le noyau K du Théorème 2.8 satisfait la propriété a) ci-dessus, on écrit

$$K \in G^{\sigma}_{\Delta}.SV^{u}([a,b]\times[a,b],L(X,Y)).$$

2.9 ([21], Theorem 2.11). <u>Pour</u> $K\in G^{\sigma}_{\Delta}.SV^{u}([a,b]\times[a,b],L(X,Y))$ <u>on a</u>

$$(kf)(t+) = \int_a^{t} \cdot\, d_s K(t\dot{+},s).f(s) + [K(t\dot{+},t\dot{+}) - K(t\dot{+},t)].f(t+), \qquad a \le t < b$$

$$(kf)(t-) = \int_a^{t} \cdot\, d_s K(t\dot{-},s).f(s), \qquad a < t \le b.$$

Quand $K \in G^{\sigma}_{\Delta}.SV^{u}([a,b],L(X,Y))$ on peut remplacer $K(t,s)$ par $K(t,s) - K(t,t)$ sans altérer l'opérateur k. De cette façon on obtient un noyau de $G^{\sigma}.SV^{u}([a,b]\times[a,b],L(X,Y))$ qui est nul sur la diagonale et on écrit alors $K\in G^{\sigma}_{0}.SV^{u}([a,b]\times[a,b],L(X,Y))$; on suppose même que $K(t,s) = 0$ pour $s \ge t$ car cela ne change pas k.

DEFINITION 2.4. On dit que $F \in L[G([a,b],X),G([a,b],Y)]$ est un <u>opérateur de causalité</u> si pour tout $f \in G([a,b],X)$ et pour tout $c \in [a,b]$, $f|_{[a,c]} = 0$ implique $(Ff)|_{[a,c]} = 0$.

THEOREME 2.10 ([21], Theorem 2.10). <u>L'application</u>

$$K\in G^{\sigma}_{0}.SV^{u}([a,b]\times[a,b],L(X,Y)) \longmapsto k\in L[G^{-}([a,b],X),G([a,b],Y)]$$

<u>est une isométrie</u> (<u>c'est-à-dire</u>, $\|k\| = SV^{u}[K]$) <u>du premier espace de Banach sur le sous espace des opérateurs de causalité du second</u>. <u>On a</u> $K(t,s).x = -k[\chi_{[s,t]}x](t)$ <u>pour</u> $s,t \in [a,b]$ <u>et</u> $x\in X$.

3. L'EQUATION LINEAIRE INTEGRALE DE VOLTERRA-STIELTJES

Dans ce paragraphe, on note en abrégé $G_0^\sigma.SV^u = G_0^\sigma.SV^u([a,b]\times[a,b],L(X))$ et analoguement $G_\Delta^\sigma.SV^u$, $G_0.BV^u$ etc. Si $K\in G_\Delta^\sigma.SV^u$ satisfait $K(t,s)=I_X$ pour $s\geq t$ on écrit $K\in G_I^\sigma.SV^u$.

Pour $K\in G_\Delta^\sigma.SV^u$ et $[c,d]\subset[a,b]$ considérons l'équation

$$(K)_c^d \qquad y(t)-x+\int_c^{\cdot t} d_sK(t,s).y(s)=f(t)-f(c), \qquad c\leq t\leq d$$

où $f,y\in G([c,d],X)$ et $x\in X$. Nous cherchons des conditions pour que l'équation $(K)_c^d$ ait toujours (c'est-à-dire, pour tout $f\in G([c,d],X)$ et tout $x\in X$) une et une seule solution réglée $y\in G([c,d],X)$.

3.1 ([21], 3.1) Soient $K\in G_\Delta^\sigma.SV^u$ et $a\leq c<d<e\leq b$.

a) Si $(K)_c^e$ a toujours (c'est-à-dire, pour tout $f\in G([c,e],X)$ et tout $x\in X$) au plus une solution réglée alors le même est vrai pour $(K)_d^e$.

b) Si $(K)_c^e$ a toujours une solution réglée, on a le même pour $(K)_c^d$.

c) Si $(K)_c^d$ et $(K)_d^e$ ont toujours au plus une solution réglée, alors on a le même pour $(K)_c^e$.

d) Si $(K)_c^d$ et $(K)_d^e$ ont toujours une solution réglée alors on a le même pour $(K)_c^e$.

DEFINITION 3.1. On dit qu'une fonction $R:[a,b]\times[a,b]\longrightarrow L(X)$ qui satisfait (G^σ) (voir Définition 2.2) est une quasi-résolvante de K si elle satisfait l'équation de la résolvante

$$(R^*) \qquad R(t,s)-I_X+{}^\sigma\!\int_s^{\cdot t} d_\tau K(t,\tau)\circ R(\tau,s)=0, \qquad a\leq s\leq t\leq b.$$

THEOREME 3.2. ([21], Theorem 3.2) Soit $K\in G_\Delta^\sigma SV^u$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $s\in[a,b]$ et $x\in X$ l'équation homogène

$$y(t)-x+\int_s^t d_\tau K(t,\tau).y(\tau)=0, \qquad s\leq t\leq b$$

a une et une seule solution réglée $y_{s,x}\in G([s,b],X)$.

2) K a une et une seule quasi-résolvante R.

Dans ces conditions on a $y_{s,x}(t) = R(t,s).x, \quad s \leq t \leq b$.

PROBLEME OUVERT 2. Supposons satisfaites les propriétés équivalentes du Théorème 3.2 ; nous ignorons si (R^*) a des solutions qui ne satisfont pas (G^σ), ou encore, si l'équation homogène de 1) a des solutions non réglées. Pour l'équation (L) la réponse est négative : voir le Théorème 6.3 et [25].

THEOREME 3.3 ([21], Theorem 3.3) Soit R une quasi-résolvante de $K \in G^\sigma_\Delta.SV^u$ (non nécessairement unique). Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) Pour tout $s \in [a,b]$, $x \in X$ et $f \in G([s,b],X)$ la fonction

$$(\rho) \qquad y(t) = f(t) + R(t,s).[x-f(s)] - \int_s^t d_\tau R(t,\tau).f(\tau), \qquad s \leq t \leq b$$

est une solution réglée de $(K)_s^b$.

1_a) La propriété 1) avec $s = a$

2) $R \in G^\sigma_I.SV^u$.

DEFINITION 3.2. Une résolvante de K est une quasi-résolvante qui satisfait la propriété 2) du Théorème 3.3.

PROBLEME OUVERT 3. Si $K \in G^\sigma_\Delta.SV^u$ a une seule quasi-résolvante R a-t-on $R \in G^\sigma_I.SV^u$? La réponse est positive si pour un entier m l'opérateur k^m est compact (voir [21], la remarque g) qui suit le Théorème 3.4).

PROBLEME OUVERT 4. Si $K \in G^\sigma_0.BV^u$ a une seule résolvante, a-t-on $R \in G^\sigma_I.BV^u$? Pour l'équation (L) la réponse est positive.

Pour l'équation (K) il peut arriver des situations assez inatendues même dans le cas numérique $(X = \mathbb{R})$.

EXEMPLE. Soit $[a,b] = [0,1]$ et considérons le noyau

$$K(t,s) = \chi_{[t^2,t[}(s), \qquad s,t \in [0,1].$$

On a $K \in G_0.BV^u([0,1]\times[0,1])$ et il n'est pas difficile de démontrer que pour tout $f \in G([0,1])$ l'équation

$$y(t) + \int_0^t d_s K(t,s).y(s) = f(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

a une et une seule solution réglée $y_f \in G([0,1])$ mais l'opérateur $f \in G([0,1]) \longmapsto y_f \in G([0,1])$ n'est pas de causalité car

$$y_f(t) = f(t) - f^-(t) + f^-(\sqrt{t}), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Voir [21], Exemple 1 ; voir aussi l'Exemple 2.

Dans le théorème suivant, nous donnons des conditions équivalentes qui assurent que pour tout $[c,d] \subset [a,b]$ l'équation $(K)_c^d$ a toujours une et une seule solution réglée (donnée par (ρ)).

THEOREME 3.4 ([21], Theorem 2.4 et [24]). Soit $K \in G_0^\sigma.SV^u$.
I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout $g \in G([a,b],X)$ l'équation

$$y(t) + \int_a^t d_\tau K(t,\tau).y(\tau) = g(t), \qquad a \leq t \leq b$$

a une et une seule solution réglée $y_g \in G([a,b],X)$ et l'opérateur

$$g \in G([a,b],X) \longmapsto y_g \in G([a,b],X)$$

est de causalité.

2) Pour tout $d \in]a,b]$, $x \in X$ et $f \in G([a,d],X)$ l'équation $(K)_a^d$ a une et une seule solution réglée.

3) Pour tout $c \in [a,b[$, $x \in X$ et $f \in G([c,b],X)$ l'équation $(K)_c^b$ a une et une seule solution réglée.

4) Pour tout $[c,d] \subset [a,b]$, $x \in X$ et $f \in G([c,d],X)$ l'équation $(K)_c^d$ a une et une seule solution réglée.

5) Pour tout $t \in [a,b]$ il existe $\varepsilon_t > 0$ tel que

i) Pour tout $c \in [a,b[$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_c]$ et $f \in G([c,c+\varepsilon],X)$ l'équation $(K)_c^{c+\varepsilon}$ a une et une seule solution réglée.

ii) Pour tout $d \in]a,b]$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_d]$ et $f \in G([d-\varepsilon,d],X)$ l'équation $(K)_{d-\varepsilon}^d$ a une et une seule solution réglée.

6) Le noyau K a une et une seule quasi-résolvante R et on a $R \in G_I^\sigma.SV^u$.

7) Le noyau K a une et une seule résolvante R.

8) Il existe $R \in G_I^\sigma.SV^u$ qui satisfait

$$(R^*) \qquad R(t,s) - I_X + {}^\sigma\!\int_s^t d_\tau K(t,\tau)\; R(\tau,s) = 0, \qquad a \leq s \leq t \leq b$$

et

$$(R_*) \qquad R(t,s) - K(t,s) - I_X + {}^\sigma\!\int_s^t d_\tau R(t,\tau) \circ K(\tau,s) = 0, \qquad a \leq s \leq t \leq b.$$

II. Si les propriétés équivalentes de I sont satisfaites, on a

9) Pour tout $[c,d] \subset [a,b]$ la solution de $(K)_c^d$ est donnée par

$$(\rho) \qquad y(t) = f(t) + R(t,c).\,[x - f(c)] - \int_c^t d_s R(t,s).f(s), \qquad c \leq t \leq d.$$

10) Pour tout $t \in [a,b[$ l'opérateur $I_X - K(t+,t)$ est inversible, c'est-à-dire, il existe $[I_X - K(t+,t)]^{-1} \in L(X)$.

III. Si l'opérateur $k \in L[G([a,b],X)]$ défini par K est compact alors la propriété 10) est équivalente aux propriétés de I.

Pour $K \in G_0^\sigma.SV^u$ nous définissons $K^{(n)} \in G_0^\sigma.SV^u$ par $K^{(1)} = K$ et

$$K^{(n+1)}(t,s) = {}^\sigma\!\int_s^t d_\tau K(t,\tau) \circ K^{(n)}(\tau,s), \qquad a \leq s \leq t \leq b.$$

L'opérateur défini par $K^{(n)}$ est k^n (voir 2.5).

DEFINITION 3.3. On dit qu'une résolvante R de K est donnée par la série de Neumann si l'on a

$$I_X - R(t,s) = K(t,s) - K^{(2)}(t,s) + K^{(3)}(t,s) - \ldots$$

la série étant convergente dans $G_0^\sigma.SV^u$. Dans ce cas K a une seule résolvante car si $r \in L[G([a,b],X)]$ est l'opérateur défini par une résolvante R (voir définition 2.3) alors $I - r$ est un inverse à droite de $I + k$ et si R est donnée par la série de Neumann alors $I-r$ est l'inverse de $I+k$ et $I+k$ n'a donc pas d'autres inverses à droite.

REMARQUES. 1) La démonstration de III du Théorème 3.4 est relativement simple : si k est compact il s'ensuit du Théorème 2.3 qu'on a $K^\square \in G([a,b],SV_b([a,b],L(X)))$

et en utilisant cette propriété et 10) du Théorème 3.4 on démontre que pour tout $[c,d]\subset[a,b]$ l'équation $(K)_c^d$ avec $f=0$ et $x=0$ n'a que la solution $y=0$. Il s'ensuit de la théorie des opérateurs compacts que $(K)_c^d$ a toujours une et une seule solution, c'est-à-dire, on a 4) du Théorème 3.4 (voir aussi le Théorème 3.13).

2) De la théorie de l'inversion des opérateurs dans une algèbre de Banach il s'ensuit que l'ensemble $\mathcal{H}$ des noyaux $K\in G_0^\sigma.SV^u$ qui satisfont aux propriétés équivalentes de I du Théorème 3.4 est un sous-ensemble ouvert de $G_0^\sigma.SV^u$ et que l'application (non linéaire) $K\in\mathcal{H}\longmapsto R-I_x\in\mathcal{H}$ est bicontinue. On conclut que si $K\in\mathcal{H}$ alors la solution y de $(K)_c^d$ est une fonction continue de x,f et K.

3) De 5) du Théorème 3.4 on conclut que les propriétés équivalentes de I ne dépendent que de K dans un ensemble arbitrairement petit de la forme

$$\bigcup_{1\le i\le |d|}\left\{(t,s)\mid t_{i-1}\le s\le t\le t_i\right\}$$

où d est une division de $[a,b]$. Un résultat de ce type a été démontré d'abord par Arbex, [1], et, dans un autre cadre, par Bitzer, [3].

De 4)$\Longleftrightarrow$5) du Théorème 3.4 il s'ensuit le

THEOREME 3.5. Soit $K\in G_0^\sigma.SV^u$. S'il existe $d\in D_{[a,b]}$ tel que dans chaque intervalle $[t_{i-1},t_i]$ l'équation $(K)_{t_{i-1}}^{t_i}$ a une résolvante unique alors $(K)_a^b$ a une résolvante unique.

REMARQUE 4. Un résultat très profond du à Arbex [1] dit qu'on a un résultat analogue en remplaçant "résolvante unique" par "résolvante donnée par la série de Neumann".

DEFINITION 3.4. Si $K\in G_0^\sigma.SV^u$ on définit $K^-\in G_0^\sigma.SV^u$ par $K^-(t,s)=$ $=K(t-,s)$ si $a\le s<t$.

Le théorème qui suit montre que l'étude de l'équation $(K)_a^b$ peut se réduire à l'étude de $(K^-)_a^b$. Un premier résultat de ce type est du à Arbex [1].

THEOREME 3.6 ([24]). Soit $K \in G_0^\sigma.SV^u$.

a) R est une quasi-résolvante [résolvante] [unique] de $K \Longrightarrow R^-$ est une quasi-résolvante [résolvante][unique] de K^-.

b) S est une quasi-résolvante [résolvante][unique] de $K^- \Longrightarrow R$ est une quasi-résolvante [résolvante][unique] de K où

$$R(t,s) = S(t,s) - {}^{\sigma}\!\!\int_s^t d_\tau \left[K(t,\tau) - K^-(t,\tau)\right] \circ S(\tau,s), \qquad a \le s \le t \le b \ \text{ et } \ R^- = S.$$

c) R est donné par la série de Neumann $\Longleftrightarrow$ S est donné par la série de Neumann.

DEFINITION 3.5. Pour $K \in G_0^\sigma SV^u$ et $d \in D_{[a,b]}$ on note

$$c(K,d) = \sup_{1 \le i \le |d|} \sup\left\{SV_{[s_{i-1},t]}\left[K^t\right] \mid s_{i-1} \le t \le s_i\right\}$$

$$c(K,d^\cdot) = \sup_{1 \le i \le |d|} \sup\left\{SV_{]s_{i-1},t]}\left[K^t\right] \mid s_{i-1} \le t \le s_i\right\} .$$

LEMME 3.7. Soit $K \in G_0^\sigma SV^u$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) Il existe $d \in D_{[a,b]}$ tel que $c(K,d) < 1$ $\left[c(K,d^\cdot) < 1\right]$.

2) a) Pour tout $c \in [a,b[$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup\left\{SV_{[c,t]}\left[K^t\right] \mid c \le t \le c+\delta\right\} < 1 \quad \left[\sup\left\{SV_{]c,t]}\left[K^t\right] \mid c \le t \le c+\delta\right\} < 1\right].$$

b) Pour tout $d \in]a,b]$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup\left\{SV_{[d-\delta,t]}\left[K^t\right] \mid d-\delta \le t \le d\right\} < 1 \quad \left[\sup\left\{SV_{]d-\delta,t]}\left[K^t\right] \mid d-\delta \le t \le \delta\right\} < 1\right].$$

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) est évident 2) $\Longrightarrow$ 1) suit de la compacité de $[a,b]$ (Voir [24]).

THEOREME 3.8 ([24]). Soit $K \in G_0^\sigma.SV^u$ tel qu'il existe $d \in D_{[a,b]}$ avec $c(K^-,d^\cdot) < 1$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $t \in [a,b[$ l'opérateur $I_X - K(t+,t)$ est inversible.

2) K satisfait aux propriétés équivalentes de I du Théorème 3.4.

Démonstration. Par II du Théorème 3.4, on a $2) \Longrightarrow 1)$. Pour démontrer que $1) \Longrightarrow 2)$ par le Théorème 3.6, il suffit de le faire pour $H = K^-$. Par 3) du Théorème 3.4 et par le Théorème 3.5, il suffit de démontrer que pour tout $i = 1, 2, \ldots |d|$ et tout $c \in [t_{i-1}, t_i[$ l'équation

$$(H)_c^{t_i} \qquad y(t) - x + \int_c^t d_\tau H(t,\tau).y(\tau) = f(t) - f(c), \qquad c \leq t \leq t_i$$

a une et une seule solution $y \in G([c,t_i],X)$.

Par 2.9 on a $\lim_{t \downarrow c} \int_c^t d_\tau H(t,\tau).y(\tau) = -H(c\dot{+},c).y(c+)$. Ceci montre qu'une solution y de $(H)_c^{t_i}$ satisfait

$$y(c+) - x - H(c\dot{+},c).y(c+) = f(c+) - f(c).$$

Puisque $H(c\dot{+},c) = K(c\dot{+},c)$, on conclut par 1) que

$$y(c+) = [I_X - K(c\dot{+},c)]^{-1}.[x + f(c+) - f(c)].$$

Pour tout $x \in X$ et $f \in G([c,t_i], X)$, nous posons

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x,f} = \{u \in G([c,t_i],X) \mid u(c) = x, u(c+) = [I - K(c\dot{+},c)]^{-1}.[x+f(c+) - f(c)]\}.$$

Il est immédiat que $\mathcal{H}$ est fermé dans $G([c,t_i],X)$. Pour $z \in G([c,t_i],X)$ nous posons

$$(Tz)(t) = x + f(t) - f(c) - \int_c^t d_\tau H(t,\tau).z(\tau), \qquad c \leq t \leq t_i$$

on a $Tz \in G([c,t_i],X)$ et $Ty = y$ si et seulement si y est une solution de $(H)_c^{t_i}$. Pour démontrer l'existence d'une solution unique de $(H)_c^{t_i}$ il est donc suffisant de montrer que $T\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ (ce qui est immédiat) et que T est une contraction de $\mathcal{H}$: pour $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ on a

$$\begin{aligned} \|Tu_2 - Tu_1\| &= \sup\{\|(Tu_2)(t) - (Tu_1)(t)\| \mid c \leq t \leq t_i\} \\ &= \sup\{\|\int_c^t d_\tau H(t,\tau).[u_2(\tau) - u_1(\tau)]\| \mid c \leq t \leq t_i\}. \end{aligned}$$

Si on remarque que $(u_2 - u_1)(c+) = 0$ on conclut par 2.9 que

$$\int_c^t d_\tau H(t,\tau).[u_2(\tau) - u_1(\tau)] = \lim_{s \downarrow c} \int_s^t d_\tau H(t,\tau).[u_2(\tau) - u_1(\tau)]$$

donc $\left\|\int_{c}^{t} d_\tau H(t,\tau).\left[u_2(\tau)-u_1(\tau)\right]\right\| \leq \lim_{s\downarrow c} SV_{[s,t]}\left[H^t\right]\|u_2-u_1\| = SV_{]c,t]}\left[H^t\right]\|u_2-u_1\|$

alors $\|Tu_2 - Tu_1\| \leq \sup_{c\leq t\leq t_i} SV_{]c,t]}\left[H^t\right]\|u_2-u_1\| \leq$

$\sup_{t_{i-1}\leq t\leq t_i} SV_{]t_{i-1},t]}\left[K^{t\cdot}\right]\|u_2-u_1\| \leq c(K^-,d^\cdot)\|u_2-u_1\|$, ce qui conclut la démonstration car $c(K^-,d^\cdot) < 1$ par hypothèse.

THEOREME 3.9 (Arbex). <u>Soit</u> $K \in G_0^\sigma.SV^u$ <u>tel qu'il existe</u> $d \in D_{[a,b]}$ <u>avec</u> $c(K^-,d) < 1$. <u>Alors</u> K <u>a une résolvante donnée par la série de Neumann</u>.

Démonstration. On note $q = c(K^-,d) < 1$. Soit $c \in [t_{i-1},t_i[$; on a $\sup_{c\leq t\leq t_i}\|H(t,c)\| \leq \sup_{c\leq t\leq t_i} SV_{[c,t]}\left[H^t\right] \leq q$ car $H(t,t) = 0$. De $K(c\dot{+},c) = H(c\dot{+},c)$ on conclut que $\|K(c\dot{+},c)\| \leq q < 1$ donc $I_X - K(c\dot{+},c)$ est inversible. Du Théorème 3.8 il s'ensuit donc que K a une résolvante. Par la remarque 4, il suffit de démontrer que la résolvante de chaque $(K^-)_{t_{i-1}}^{t_i}$ est donnée par la série de Neumann, ce qui est immédiat car on montre par récurrence que pour $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ on a $SV_{[t_{i-1},t]}\left[(H^{(n)})^t\right] \leq q^n$.

On va maintenant appliquer le Théorème 3.8 aux noyaux considérés par Hinton, Gomes et Schwabik.

DEFINITION 3.6. On note $G^\sigma.BV^{\leq}([c,d]\times[a,b],L(X,Y))$ l'ensemble des noyaux $K : [c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ qui satisfont (G^σ) et tels qu'il existe une fonction croissante $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\|K(t,s_2) - K(t,s_2)\| \leq g(s_2) - g(s_1) \quad \text{pour} \quad t \in [c,d] \text{ et } a \leq s_1 \leq s_2 \leq b.$$

Quand $[c,d] = [a,b]$, $Y = X$ et de plus on a $K(t,s) = 0$ pour $s \geq t$ on note en abrégé $K \in G_0^\sigma.BV^{\leq}$. Pour ces noyaux Hinton a démontré l'existence d'une résolvante, [14].

THEOREME 3.10. <u>Soit</u> $K \in G_0^\sigma.BV^{\leq}$. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>Pour tout</u> $t \in [a,b[$ <u>l'opérateur</u> $I_X - K(t\dot{+},t)$ <u>est inversible</u>.

2) K <u>satisfait aux propriétés équivalentes de</u> I <u>du Théorème 3.4</u>.

Démonstration. Il reste à montrer que 1) $\Longrightarrow$ 2). Puisque g est croissante pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $d \in D_{[a,b]}$ tel que $g(s_i-) - g(s_{i-1}+) \leq \varepsilon$ pour $i = 1, 2, \ldots |d|$. Alors pour $s_{i-1} < t < s_i$ on a

$$SV_{]s_{i-1},t]}[K^{t-}] \leq V_{]s_{i-1},s_i]}[K^{t-}] \leq g(s_i-) - g(s_{i-1}+) \leq \varepsilon$$

et le résultat suit du Théorème 3.8.

COROLLAIRE 3.11. <u>Soit</u> $K \in G_0^\sigma.BV^{\leq}$ <u>tel que</u> $\|K(t+,t)\| < 1$ <u>pour tout</u> $t \in [a,b[$. <u>Alors</u> K <u>a la résolvante donnée par la série de Neumann</u>.

Démonstration. On maintient la notation de la démonstration du Théorème 3.10 : on a $\|K(t+,t)\| \leq \varepsilon$ si $t \in]s_{i-1},s_i[$ car pour $s_{i-1} < t < \tau < s_i$ on a $\|K(\tau,t)\| \leq SV_{[t,\tau]}[K^\tau] \leq SV_{]s_{i-1},\tau]}[K^\tau] \leq \varepsilon$. D'autre part, par hypothèse, on a $\|K(s_i+,s_i)\| < 1$ pour $i = 0, 1, \ldots, |d|-1$. On conclut qu'il existe $\bar{d} \in D_{[a,b]}$ tel que $c(K,\bar{d}) < 1$ et le résultat suit du Théorème 3.9.

Par ailleurs, nous démontrons le

THEOREME 3.12 (à paraître). <u>Soit</u> $K \in G^\sigma.SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) $K \in G^\sigma.BV_a^{\leq}([c,d] \times [a,b], \Pi_1(X,Y))$
2) $K_\square \in BV_a([a,b], G([c,d], \Pi_1(X,Y)))$
3) $F_K \in \Pi_1[G([a,b],X), G([c,d],Y)]$.

THEOREME 3.13. (Gomes [10]). <u>Soit</u> $K \in G_0^\sigma.SV^u$ <u>tel que</u> $K^\square \in G([a,b], SV_b([a,b], L(X)))$. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>Pour tout</u> $t \in [a,b[$ <u>l'opérateur</u> $I_X - K(t+,t)$ <u>est inversible</u>.
2) K <u>satisfait aux propriétés équivalentes de</u> I <u>du Théorème</u> 3.4.

Démonstration. Pour appliquer le Théorème 3.8, montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $d \in D_{[a,b]}$ tel que $c(K^-,d^\cdot) \leq \varepsilon$. La fonction $K^\square$ étant réglée on conclut de c) de 1.2 que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $d \in D_{[a,b]}$ tel que pour $t', t'' \in]s_i, s_{i+1}[$

on a $SV_{[a,b]}[K^{t''}-K^{t'}] \leq \varepsilon$. Par le Théorème 1.15, on a $SV_{[a,b]}[K^{s_i+}-K^{t-}] \leqq \varepsilon$ pour $s_i < t \leq s_{i+1}$ donc $SV_{]s_i,t]}[K^{s_i+}-K^{t-}] \leq \varepsilon$ et comme $K^{s_i+}|_{]s_i,t]} = 0$ (car pour $s \in]s_i,t]$ on a $K^{s_i+}(s) = \lim_{\tau \downarrow s_i} K(\tau,s) = 0$ puisque $K(\tau,s) = 0$ si $\tau \leq s$) il s'ensuit que $SV_{]s_i,t]}[K^{t-}] \leq \varepsilon$ pour $s_i < t \leq s_{i+1}$.

COROLLAIRE 3.14. Soit $K \in G_0^{\sigma}.SV^u$ tel que $K^{\square} \in G([a,b], SV_b([a,b], L(X)))$ et $\|K(t+,t)\| < 1$ pour tout $t \in [a,b[$. Alors K a une résolvante qui est donnée par la série de Neumann.

La démonstration est analogue à celle du Corollaire 3.11.

Schwabik dans [39] et [40] considère l'équation (K) avec des noyaux qui sont à variation bornée selon Vitali.

DEFINITION 3.7. Soit $K : [c,d] \times [a,b] \longrightarrow Z$. Pour $d \in D_{[a,b]}$ et $\delta \in D_{[c,d]}$ on note $K_{ji} = K(t_j,s_i) - K(t_j,s_{i-1}) - K(t_{j-1},s_i) + K(t_{j-1},s_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots |d|$, $j = 1, 2, \ldots, |\delta|$ et $V_{\delta,d}[K] = \sum_{j,i} \|K_{ji}\|$. Si

$$V[K] = U_{[c,d] \times [a,b]}[K] = \sup\{V_{\delta,d}[K] \mid \delta \in D_{[c,d]}, d \in D_{[a,b]}\} < \infty$$

on dit que K est une fonction à variation bornée selon Vitali et on écrit $K \in BV([c,d] \times [a,b], Z)$. Si de plus on a $K(t,a) = K(c,s) = 0$ pour $t \in [c,d]$ et $s \in [a,b]$ on écrit $K \in BV_{c,a}([c,d] \times [a,b], Z)$.

THEOREME 3.15 ([36]). L'application

$$K \in B_{c,a}([c,d] \times [a,b], Z) \longrightarrow K^{\square} \in BV_c([c,d], BV_a([a,b], Z))$$

est une isométrie (c'est-à-dire $V_{[c,d]}[K^{\square}] = V[K]$) du premier espace de Banach sur le second.

Si $K \in BV([a,b] \times [a,b], L(X))$ satisfait $K(t,s) = 0$ pour $s \geq t$ on note en abrégé $K \in BV_0$.

THEOREME 3.16. Soit $K \in BV_o$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) Pour tout $t \in [a,b[$ l'opérateur $I_X - K(t+,t)$ est inversible.

2) K satisfait aux propriétés équivalentes de I du Théorème 3.4.

La démonstration suit immédiatement des Théorèmes 3.13 et 3.15 car

$$K^{\square} \in BV([a,b],BV_b([a,b],L(X))) \subset G([a,b],BV_b([a,b],L(X))).$$

Le théorème d'existence et unicité des équations différentielles linéaires à retard (voir [21], § 4) et III du Theorème 3.4 (voir Théorème 1.3 et b) du Théorème 2.2) s'ensuivent immédiatement du Théorème 3.13.

Dans un article en préparation, nous démontrons le

THEOREME 3.17. Soit $K \in G.BV_a^u([c,d]\times[a,b])$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $K \in BV_{c,a}([c,d]\times[a,b])$

2) $K^{\square} \in BV_c([c,d],BV_a([a,b]))$

3) $K_{\square} \in BV_a([a,b],BV_c([c,d]))$

4) $F_K \in \Pi_1 [G([a,b]),BV_c([c,d])]$.

Pour appliquer les résultats précédents à l'équation

$$\text{(L)} \qquad y(t) - x + \int_a^t dA(s).y(s) = f(t) - f(a), \qquad a \leq t \leq b$$

on pose $K = K_A$ où $K_A(t,s) = A(s) - A(t)$, $a \leq s \leq t \leq b$. On conclut à partir du Théorème 2.8.

3.18. Soit $A \in SV([a,b],L(X,Y))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $A \in SVG^{\sigma}([a,b],L(X,Y))$ (voir b) du Théorème 1.16).

2) $K_A \in G_0^{\sigma}.SV^u([a,b]\times[a,b],L(X,Y))$.

3) $k_A [G([a,b],X)] \subset G([a,b],Y)$ où $(k_A f)(t) = \int_a^t dA(s).f(s)$, $a \leq t \leq b$

Par 3.18, on obtient comme cas particulier du Théorème 3.8 le

THEOREME 3.19. Soit $A \in SVG^{\sigma}([a,b], L(X))$ tel que pour tout $t \in [a,b[$ il existe $\delta > 0$ avec $SV_{]t,t+\delta]}[A] < 1$ et pour tout $t \in]a,b]$ il existe $\delta > 0$ avec $SV_{[t-\delta,t[}[A]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $t \in [a,b[$ l'opérateur $I_X + A(t+) - A(t)$ est inversible ;

2) A a une et une seule résolvante.

DEFINITION 3.8. Soit $A : [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$. On note $A \in SV^{\pm}([a,b], L(X,Y))$ si A satisfait la propriété

$(SV^{\pm})$ Pour tout $t \in [a,b[$ $[t \in]a,b]]$ on a

$$\lim_{\delta \downarrow 0} SV_{]t,t+\delta]}[A] = 0 \qquad [\lim_{\delta \downarrow 0} SV_{[t-\delta,t[}[A] = 0].$$

Les fonctions de $SV^{\pm}([a,b], L(X,Y))$ sont réglées : voir le Théorème 7.5.

3.20. Soit $A \in SV([a,b], L(X,Y))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) $A \in SV^{\pm}([a,b], L(X,Y))$;

2) $K_A^{\square} \in G([a,b], SV_b([a,b], L(X,Y)))$ (on fait $K_A(t,s) = 0$ si $s \geq t$) ;

3) k_A envoie les sous-ensembles bornés de $G([a,b], X)$ dans des sous-ensembles équiréglés de $G([a,b], Y)$.

Démonstration. 1)$\Longleftrightarrow$2). Il est immédiat que pour $a \leq c \leq d \leq b$ on a

$$SV_{[a,b]}[K_A^d - K_A^c] = SV_{[c,d]}[A] ;$$

donc $SV_{[a,b]}[K_A^{t+\delta} - K_A^{t+}] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} SV_{[a,b]}[K_A^{t+\delta} - K_A^{t+\varepsilon}] =$

$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} SV_{[t+\varepsilon,t+\delta]}[A] = SV_{]t,t+\delta]}[A]$ et de façon analogue on a

$SV_{[a,b]}[K_A^{t-} - K_A^{t-\delta}] = SV_{[t-\delta,t[}[A]$.

2)$\Longleftrightarrow$3) s'ensuit de b) du Théorème 2.2.

Le théorème qui suit est une conséquence du Théorème 3.19. Par 3.20, il s'ensuit aussi du Théorème 3.13.

THEOREME 3.21 ([23]). Soit $A \in SV^{\pm}([a,b], L(X))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $t \in [a, b[$ l'opérateur $I_X + A(t+) - A(t)$ est inversible.

2) A a une et une seule résolvante.

Le Théorème 3.21 contient comme cas particuliers les théorèmes d'existence de la résolvante pour l'équation (L) démontrés dans [30], [12], [18], [8], [43], etc. Dans [27], nous caractérisons la résolvante de A ; voir aussi [18] et [23].

PROBLEME OUVERT 5. Soit $A \in SVG^{\sigma}([a,b], L(X))$ qui satisfait la propriété 1) du Théorème 3.21. Nous ignorons si A admet une résolvante.

PROBLEME OUVERT 6. Soit $A \in SVG^{\sigma}([a,b], L(X))$ tel que pour tout $g \in G([a,b], X)$ l'équation

$$y(t) + \int_a^t dA(s).y(s) = g(t), \qquad a \leq t \leq b$$

a toujours une et une seule solution réglée $y_g \in G([a,b], X)$. Nous ignorons si l'opérateur $g \in G([a,b], X) \longmapsto y_g \in G([a,b], X)$ est de causalité. Il s'ensuit du théorème 3.21 que la réponse est positive si $A \in SV^{\pm}([a,b], L(X))$, donc en particulier si $X \not\supset c_0(N)$ (par le Théorème 7.5).

Soit $H : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On démontre aisément le

THEOREME 3.22. Pour tout $f \in G([a,b])$, la fonction

$$t \in [a,b] \longrightarrow {}^{L}\!\!\int_a^t H(t,s)\, f(s) \in \mathbb{R}$$

est réglée (où ${}^{L}\!\!\int$ note l'intégrale de Lebesgue) si et seulement si on a

1) $\sup_{a \leq t \leq b} \|H^t\|_1 < \infty$ où $\|H^t\|_1 = {}^{L}\!\!\int_a^t |H(t,s)|\, ds$

2) Pour tout $s \in [a,b]$ la fonction $t \in [s,b] \longmapsto {}^{L}\!\!\int_s^t H(t,\sigma)\, d\sigma$ est réglée.

Soit H satisfaisant aux propriétés du Théorème 3.22 et tel que pour tout $g \in G([a,b])$ l'équation

$$\text{(V)} \qquad y(t) + {}^{L}\!\!\int_a^t H(t,s)\, y(s)\, ds = g(t), \qquad a \leq t \leq b$$

a une et une seule solution réglée $y_g \in G([a,b])$.

PROBLEME OUVERT 7. Nous ignorons si l'opérateur $g \in G([a,b]) \longmapsto y_g \in G([a,b])$ est de causalité.

PROBLEME OUVERT 8. Quand l'équation (V) a une résolvante, nous ignorons s'il existe une fonction $S : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ satisfaisant aux propriétés 1) et 2) du Théorème 3.22 et telle que

$$y_g(t) = g(t) - \mathrm{L}\int_a^t S(t,s)\, g(s)\, ds, \qquad a \leq t \leq b.$$

L'opérateur intégral défini par H dans (V) en général n'est pas compact comme montre l'exemple $H(t,s) = \frac{1}{t-a}\chi_{[a,t]}(s)$.

Dans la suite nous supposons que $H(t,s) = 0$ si $s \geq t$.

THEOREME 3.23. <u>L'opérateur intégral défini par</u> H <u>est compact si et seulement si on a</u> $H^{\square} \in G([a,b], L_1([a,b]))$. <u>Dans ce cas on a une et une seule résolvante</u>.

REMARQUE 5. On définit $K(t,s) = -\mathrm{L}\int_s^t H(t,\sigma)\, d\sigma$; alors on a $K \in G_0.BV^u([a,b] \times [a,b])$, $\mathrm{L}\int H(t,s)\, y(s)\, ds = \int_a^t d_sK(t,s).y(s)$ et K satisfait la propriété 10) du Théorème 3.4 car $K(t+,t) = 0$ pour $a \leq t < b$ comme s'ensuit de $H^{\square} \in G([a,b], L_1([a,b]))$.

4. APPLICATIONS AUX SEMIGROUPES FORTEMENT CONTINUS

Soit X un espace de Banach. On dit qu'une application

$$T : t \in \mathbf{R}_+ \longmapsto T(t) \in L(X)$$

est un <u>semi-groupe</u> si

1) $T(0) = I_X$

2) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$ pour tous $t,s \in \mathbf{R}_+$.

On dit qu'un semi-groupe T est <u>fortement continu</u> (ou $(\mathcal{C}^0)$, ou encore, simplement continu) s'il satisfait aux propriétés équivalentes (voir [6], Prop. 1.18 et 1.23)

a) Pour tout $x \in X$ on a $\lim_{t \downarrow 0} T(t)\, x = x$

b) L'application $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times X \longmapsto T(t)\, x \in X$ est ccntinue

c) Pour tout $(x,x') \in X \times X'$ on a $\lim_{t \downarrow 0} \langle T(t)x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle$.

Si T est un semi-groupe fortement continu, on définit

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \exists Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[T(t)\, x - x \right] \right\}$$

et on dit que l'opérateur linéaire (non nécessairement continu) $A : D(A) \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe T.

4.1. $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur fermé (c'est-à-dire, $x_n \in D(A)$ et $x_n \longrightarrow x$ avec $Ax_n \longrightarrow y$ implique $x \in D(A)$ et $y = Ax$). A est continu si et seulement si $D(A) = X$ et dans ce cas on a $T(t) = \exp(tA)$ (voir [33]).

Dorénavant T note toujours un semigroupe fortement continu et $A : D(A) \longrightarrow X$ son générateur infinitésimal.

4.2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $SV_{[0,\varepsilon]}[T] < \infty$.

ii) Pour tout $r > 0$ on a $SV_{[0,r]}[T] < \infty$.

LEMME 4.3. Soit $T \in SV([0,r], L(X))$. Pour tout $f \in G([0,r], X)$ on a

a) $\int_0^r T(r-s).f(s)\, ds \in D(A)$ et $\tau \in [0,r] \longmapsto \int_0^\tau T(\tau - s).f(s) ds$ est une fonction continue ;

b) $A \int_0^r T(r-s).f(s)\, ds = \int_0^r d_s T(r-s).f(s)$.

Démonstration. Le résultat est immédiat si f est une fonction en escalier. Puisque la seconde intégrale dans b) et l'intégrale dans a) sont des fonctions continues de $f \in G([0,r], X)$ le résultat s'ensuit car A est fermé et les fonctions en escalier sont denses dans $G([a,b], X)$.

LEMME 4.4 ([18], Theorem I.3.8). Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow X$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $f \in G([a,b], X)$ et $g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)\, ds$ pour tout $t \in [a,b]$.

b) Pour tout $t \in [a,b[$ il existe $g'_+(t) = f(t+)$ et pour tout $t \in]a,b]$ il existe $g'_-(t) = f(t-)$;

c) $f \in G([a,b],X)$ et g est une primitive de f (c'est-à-dire g est continue et en dehors d'un sous-ensemble dénombrable de $[a,b]$ on a $g'(t) = f(t)$).

Dans la suite, nous écrivons $\frac{d^{\pm}g(t)}{dt} = f(t\pm)$ si nous avons b) du Lemme 4.4.

THEOREME 4.5. Soit $T : \mathbf{R}_+ \longrightarrow L(X)$ un semigroupe fortement continu avec générateur infinitésimal $A : D(A) \longrightarrow X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $f \in G([0,r],X)$ la fonction

$$v(t) = \int_0^t T(t-s).f(s)ds\,, \qquad 0 \leq t \leq r$$

est une solution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad \frac{d^{\pm}v(t)}{dt} = A\,v(t) + f(t\pm), \qquad 0 \leq t \leq r$$

b) $T \in SV([0,r],L(X))$.

Démonstration. b) $\Longrightarrow$ a) : Il existe v et il s'ensuit du Lemme 4.3 que $\int_0^\tau T(\tau-s).f(s)ds \in D(A)$ et $A\int_0^\tau T(\tau-s).f(s)ds = \int_0^\tau d_s\, T(\tau-s).f(s)$ et que la dernière intégrale est une fonction continue de τ. Il s'ensuit du Lemme 4.4 que pour démontrer (*) il suffit de démontrer l'égalité des primitives :

$$\int_0^t T(t-s).f(s)ds = \int_0^t A\left[\int_0^\tau T(\tau-s).f(s)\,ds\right]d\tau + \int_0^t f(s)\,ds, \qquad 0 \leq t \leq r$$

ou encore

$$\int_0^t \left[T(t-s).f(s) - f(s)\right]ds = \int_0^t \left[d_s T(\tau-s).f(s)\right]d\tau, \qquad 0 \leq t \leq r.$$

Comme les deux membres sont des fonctions continues de $f \in G([0,r],X)$ et les fonctions en escalier sont denses dans $G([0,r],X)$ il suffit de démontrer l'égalité pour $f = \chi_{[0,c]}x$ $(0 < c \leq t$ et $x \in X)$ et dans ce cas elle est immédiate.

a) $\Longrightarrow$ b) : Soit T tel que pour tout $f \in G([0,r],X)$ la fonction $v(t) = \int_0^t T(t-s).f(s)\,ds$ satisfait à (*). On a donc $v(t) \in D(A)$ et $Av \in G([0,r],X)$.

Alors $Av(r) = A\int_0^r T(r-s).f(s)\,ds$ existe et est une fonction continue de $f \in G([0,t]),X)$ par le théorème du graphe fermé (car l'intégrale est une fonction continue de f et A est fermé). Il existe donc $c > 0$ tel que pour tout $f \in G([0,r],X)$ on a

$$\left\|A\int_0^r T(r-s).f(s)\,ds\right\| \leq c\|f\| .$$

D'autre part, si $f \in E([0,r],X)$, c'est-à-dire, si f est une fonction en escalier, il existe

$$\int_0^r d_s T(r-s).f(s) = A\int_0^r T(r-s).f(s)\,ds$$

et on a donc $\left\|\int_0^r d_s T(r-s).f(s)\right\| \leq c\|f\|$ pour tout $f \in E([0,r],X)$, donc $SV_{[0,r]}[T] \leq c$.

COROLLAIRE 4.6. <u>Si le générateur infinitésimal</u> $A : D(A) \longrightarrow X$ <u>d'un semi-groupe fortement continu n'est pas continu alors</u> $X \supset c_0(N)$.

Démonstration. De [33], corollaire 4.14, il s'ensuit que si le générateur infinitésimal A de T n'est pas continu, on a $\limsup_{t\to 0}\|I_X-T(t)\| \geq 2$ et d'autre part si $X \not\supset c_0(N)$ on a, par le Théorème 7.5, que $\lim_{t\to 0} SV_{[0,t]}[T] = 0$ donc $\lim_{t\to 0}\|I_X-T(t)\| = 0$.

COROLLAIRE 4.7. <u>Soit</u> $X \not\supset c_0(N)$. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) $A\in L(X)$ <u>(et alors</u> $T(t) = \exp(tA)$)

2) $T \in SV([0,r],L(X))$

3) $T\in BV\mathscr{C}([0,r],L(X))$

4) <u>Pour tout</u> $f\in G([0,r],X)$ <u>la fonction</u> $v(t) = \int_0^t T(t-s).f(s)ds$ <u>satisfait</u>

$$\frac{d^{\pm} v(t)}{dt} = Av(t) + f(t\pm) , \qquad 0 \leq t \leq r.$$

PROBLEME OUVERT 9. Soit $X \supset c_0(N)$. Existe-t-il un semigroupe fortement continu $T : \mathbb{R}_+ \longrightarrow L(X)$ avec générateur infinitésimal non continu ?

REMARQUE. Il est bien connu que la formule de variation des constantes (c'est-à-dire, a) du Théorème 4.5) n'est pas vraie pour un semigroupe fortement continu T sans des restrictions sur T et/ ou f. Le Théorème 4.5 montre que la semi-variation est au centre de la question.

Les résultats de ce paragraphe sont essentiellement dus à Travis, [44], dont nous avons simplifié la démonstration en faisant usage des résultats du § 1.

5. EXTENSICN DE L'INEGALITE DE GRONWALL-BELLMAN

Nous allons maintenant utiliser les résultats des §§ 1, 2 et 3 pour faire des extensions de l'inégalité de Gronwall-Bellman aux équations (L) et (K) dans le cas numérique $(X = \mathbf{R})$. Nous suivons de près [5].

Rappelons la forme la plus générale de l'inégalité classique de Gronwall-Bellman.

5.1. <u>Soient</u> $\rho, f, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ <u>des fonctions continues</u>, $\beta \geq 0$, <u>telles que</u>

$$\rho(t) \leq f(t) + \int_a^t \rho(s)\,\beta(s)\,ds\,, \qquad a \leq t \leq b$$

<u>alors</u>

$$\rho(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)\,\beta(s)\exp\left[\int_s^t \beta(\sigma)\,d\sigma\right]ds, \qquad a \leq t \leq b.$$

Démonstration. Posons $(k\rho)(t) = \int_a^t \rho(s)\,\beta(s),ds$, $a \leq t \leq b$, et $(rf)(t) = \int_a^t f(s)\,\beta(s)\exp\left[\int_s^t \beta(\sigma)\,d\sigma\right]ds$, $a \leq t \leq b$.

i) Si $y(t) = f(t) + (ky)(t)$, $a \leq t \leq b$, alors $y(t) = f(t) + (rf)(t)$, $a \leq t \leq b$.

En effet, la première équation intégrale est équivalente à l'équation différentielle linéaire $(y-f)' = (y-f)\beta + f\beta$ dont la solution est $y - f = rf$.

ii) $f_1 \leq f_2$ dans $[a,b]$ implique $(rf_1)(t) \leq (rf_2)(t)$ pour $a \leq t \leq b$.
En effet, on a $\beta(s)\exp\left[\int_s^t \beta(\sigma)\,d\sigma\right] \geq 0$ pour $a \leq s \leq b$.

iii) Par hypothèse nous avons $\rho \leq f + k\rho$. Posons $f_o = \rho - k\rho$, alors $f_o \leq f$ et $\rho = f_o + rf_o$. De i) et ii), il s'ensuit donc que $\rho = f_o + rf_o \leq f + rf = y$.

REMARQUES. 1) La démonstration que nous venons de faire contient déjà les idées essentielles pour les généralisations.

2) Si dans 5.1, on prend $\beta \in L_1([a,b])$, $\beta \geq 0$, et $\rho, f \in L_\infty([a,b])$ on a un résultat analogue avec des inégalités presque partout.

Soit X un espace de Banach ordonné et $k \in L(X)$ tel qu'il existe $r \in L(X)$ avec $I - r = (I-k)^{-1}$ (c'est-à-dire, l'équation $x = kx + f$ a une résolvante). On dit qu'on a l'inégalité de Gronwall-Bellman pour k si pour tous $\rho, f \in X$, $\rho \le f + k\rho$ implique $\rho \le f - rf$.

LEMME 5.2. Sous les hypothèses précédentes les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) On a l'inégalité de Gronwall-Bellman pour k ;

b) $I - r \geq 0$.

Démonstration. a) $\Longrightarrow$ b) : Soit $x \in X$, $x \geq 0$. Donc $0 \le x + k.0$ et par a) on a $0 \le x - rx$, c'est-à-dire, $I - r \geq 0$. b) $\Longrightarrow$ a) : Si $\rho, f \in X$ sont tels que $\rho \le f + k\rho$ alors $f_o = \rho - k\rho$ satisfait à $f_o \le f$ et par b) on a $\rho = (I-r)f_o \le (I-r)f = f - rf$.

Nous allons appliquer le Lemme 5.2 avec $X = G([a,b])$ et $f \geq 0$ si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Pour maintenir l'analogie avec l'inégalité classique de Gronwall-Bellman nous allons, dans ce paragraphe, changer le signe des noyaux des équations (K) et (L), c'est-à-dire, nous considérons

$$(K) \qquad y(t) - \int_a^t d_\tau K(t,\tau).y(\tau) = f(t), \qquad a \le t \le b$$

$$(L) \qquad y(t) - \int_a^t dA(s).y(s) = f(t), \qquad a \le t \le b.$$

Pour appliquer le Lemme 5.2 dans cette situation il faut résoudre deux problèmes:

1) Trouver des conditions pour que K ait une résolvante unique R telle que la solution de (K) soit donnée par

$$y(t) = f(t) - \int_a^t d_s R(t,s).f(s), \qquad a \le t \le b.$$

(On a donc $I - r = (I - k)^{-1}$ où $k\,[r]$ est l'opérateur intégral défini par $K\,[R]$ - voir Définition 2.3).

2) Trouver des conditions pour avoir $I - r \geq 0$, c'est-à-dire pour que

$$f \geq 0 \quad \text{implique} \quad f(t) - \int_a^t .d_s R(t,s).f(s) \geq 0, \qquad a \le t \le b.$$

Rappelons que dans ce paragraphe on a $G_\Delta.BV^u = G_\Delta.BV^u([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$. Rappelons aussi que pour $H \in G_\Delta.BV^u$ l'opérateur intégral $h \in L[G([a,b])]$ est défini par

$$(hf)(t) = \int_a^t .d_s H(t,s).f(s), \qquad a \le t \le b.$$

LEMME 5.3. Soit $H \in G_o.BV^u$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $I + h \ge 0$

b) H^t est croissante pour tout $t \in [a,b]$

c) $h \ge 0$.

Démonstration. a) $\Rightarrow$ b) : Soient $t \in]a,b]$ et $a \le s_1 < s_2 \le t$. On a $\chi_{]s_1,s_2[} \ge 0$ et il s'ensuit donc de a) que $(I+h)(\chi_{]s_1,s_2[}) \ge 0$. Alors

$$0 \le [(I+h)\chi_{]s_1,s_2[}](t) = h[\chi_{]s_1,s_2[}](t) =$$

$$= h[\chi_{]s_1,t[}](t) - h[\chi_{]s_2,t[}](t) = H(t,s_2) - H(t,s_1)$$

où nous avons appliqué le Théorème 2.9 (rappelons que $H(t,s) = 0$ pour $s \ge t$ et que hf ne dépend que de la classe d'équivalence de f - voir la Définition 1.5 ; donc $h(\chi_{[c,d[}) = h(\chi_{]c,d[}) = h(\chi_{[c,d]}) = h(\chi_{]c,d]})$. Il est immédiat que b) $\Rightarrow$ c) et que c) $\Rightarrow$ a).

COROLLAIRE 5.4. Si $K \in G_o.BV^u$ a une résolvante unique R alors on a l'inégalité de Gronwall-Bellman pour K si et seulement si R^t est décroissante pour tout $t \in [a,b]$.

Démonstration. La preuve s'ensuit des Lemmes 5.2 et 5.3 (en prenant $H = 1-R$).

LEMME 5.5. Soit $K \in G_o.BV^u$.

a) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}$ est convergente dans $G_0.BV^u$ alors en posant $1 - R = \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}$ on a $I - r = (I - k)^{-1}$, et R est donc une résolvante unique de K (voir la Définition 3.3).

b) Si K^t est croissante pour tout $t \in [a,b]$, alors de même pour $[K^{(n)}]^t$.

c) Si les hypothèses de a) et b) sont satisfaites alors R^t est décroissante pour tout $t \in [a,b]$, donc $1 - r \geq 0$.

Démonstration. Evidente.

THEOREME 5.6. Soit $K \in G_o.BV^u$ tel que

1) K^t est croissante pour tout $t \in [a,b]$;

2) Il existe $d \in D_{[a,b]}$ tel que $c(K^-,d) < 1$ (voir la Définition 3.5).

Alors K a une résolvante unique R donnée par $1 - R = \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}$ (et convergente dans $G_o.BV^u$) et R^t est décroissante pour tout $t \in [a,b]$. On a donc l'inégalité de Gronwall-Bellman pour K : pour $\rho, f \in G([a,b])$

$$\rho(t) \leq f(t) + \int_a^t d_s K(t,s).\rho(s) , \qquad a \leq t \leq b$$

implique

$$\rho(t) \leq f(t) - \int_a^t d_s R(t,s).f(s), \qquad a \leq t \leq b.$$

Démonstration. Il s'ensuit du Théorème 3.9 que K a une résolvante unique donnée par la série de Neumann. On conclut d'après les Lemmes 5.5, 5.3 et 5.2.

COROLLAIRE 5.7. Soit $K \in G_0.BV^u$ qui satisfait à une des hypothèses suivantes :

I. $K \in G_0.BV^{\leq}$ (c'est-à-dire, $k \in \Pi_1[G([a,b])]$ - voir le Théorème 3.12)

II. $K \in G([a,b], BV_b([a,b]))$ (c'est-à-dire, k est compact - voir le Théorème 2.3) ;

III. $K \in BV_0$ (c'est-à-dire, $k \in \Pi_1[G([a,b]), BV_a([a,b])]$ - voir le Théorème 3.17).

et tel que K^t soit croissante pour tout $t \in [a,b]$ avec $K(t+,t) > -1$ pour tout $t \in [a,b[$.

Alors K a une résolvante unique (donnée par la série de Neumann) et on a l'inégalité de Gronwall-Bellman pour K.

Démonstration. Le cas I [II] s'ensuit immédiatement du Corollaire 3.11 [3.14] et du Théorème 5.6. Le cas III s'ensuit du cas II par le Théorème 3.15.

COROLLAIRE 5.8. Soit $A : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante avec $A(t+) - A(t) < 1$

pour tout $t \in [a,b[$. Alors A a une résolvante unique (donnée par la série de Neumann) et on a l'inégalité de Gronwall-Bellman pour (L).

Démonstration. On fait $K_A(t,s) = A(s) - A(t)$ pour $a \leq s \leq t \leq b$. Alors K_A satisfait aux hypothèses du Corollaire 5.7.

LEMME 5.9. Soit $A \in BV([a,b],\mathbb{R})$. Les hypothèses suivantes sont équivalentes:

a) A est croissante et $A(t+) - A(t) < 1$ pour tout $t \in [a,b[$;

b) A a une résolvante R et R^t est décroissante pour tout $t \in [a,b]$.

Démonstration. Le corollaire 5.8 montre que a) $\Longrightarrow$ b).

b) $\Longrightarrow$ a) : posons $r(t) = R(t,a)$, $a \leq t \leq b$. Alors r satisfait

$$(*) \qquad r(t) = 1 + \int_a^t dA(s).r(s), \qquad a \leq t \leq b$$

et par le Théorème 6.3 on a $r \in BV([a,b])$. Puisque R^t est décroissante et $R(t,t) = 1$ il s'ensuit que $r(t) = R(t,a) \geq 1$ (donc $\frac{1}{r} \in BV([a,b])$). Par 2.9 et (*) on a $[1 - A(t+) + A(t)]r(t+) = r(t)$ donc $A(t+) - A(t) < 1$. Aussi A est croissante : en effet, par (*) on a

$$r(t) - r(s) - \int_s^t dA(\sigma).r(\sigma) = 0, \qquad s,t \in [a,b]$$

donc $r(t) = R(t,s).r(s)$ par la définition de la résolvante (voir (ρ) du théorème 3.4). r est donc croissante et puisque $\frac{1}{r} > 0$ il s'ensuit que pour $s < t$ on a $\int_s^t dr(\sigma).\frac{1}{r(\sigma)} \geq 0$. Par (*) et le Théorème 2.7, on a alors

$$0 \leq \int_s^t dr(\sigma).\frac{1}{r(\sigma)} = \int_s^t d_\sigma\left[1 + \int_s^\sigma dA(\tau).r(\tau)\right].\frac{1}{r(\sigma)} =$$

$$\int_s^t dA(\sigma).r(\sigma).\frac{1}{r(\sigma)} = A(t) - A(s).$$

Du Lemme 5.9, il s'ensuit le

THEOREME 5.10. Soit $A \in BV([a,b],\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) A est croissante et pour tout $t \in [a,b[$ on a $A(t+) - A(t) < 1$

b) A a une résolvante R et pour tout $\rho, f \in G([a,b])$

$$\rho(t) \leq f(t) + \int_a^t dA(s).\rho(s), \qquad a \leq t \leq b$$

implique que

$$\rho(t) \leq f(t) - \int_a^t d_s R(t,s).f(s), \qquad a \leq t \leq b.$$

REMARQUE; Il n'est pas difficile à démontrer que si $A \in BV([a,b],\mathbf{R})$ a une résolvante R alors on a

$$R(t,s) = \exp [A(t) - A(s)]$$

si et seulement si A est continue (voir [5], Theorem 7).

6. D'AUTRES APPLICATIONS ET DIRECTIONS DE RECHERCHE

6.1. L'équation adjointe

Nous allons considérer ici une équation de la forme

$$\text{(K)} \qquad x(t) - x(t_o) + \int_{t_o}^t d_s K(t,s).x(s) = f(t) - f(t_o), \qquad a \leq t \leq b$$

avec une contrainte linéaire

$$(F_\alpha) \qquad F_\alpha [x] \equiv \int_a^b d\alpha(t).x(t) = c$$

où $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$, $c \in Y$, $x, f \in G([a,b],X)$ et le point $t_o \in [a,b]$ est fixé. On peut évidemment prendre le noyau $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow L(X)$ tel que $K(t,s) = 0$ pour $t_o \leq t \leq s \leq b$ ou $a \leq s \leq t \leq t_o$ et $K(t,s) = K(t,t_o)$ pour $a \leq s \leq t_o \leq t \leq b$ ou $a \leq t \leq t_o \leq s \leq b$. Sous ces hypothèses l'intégrale dans (K) est une fonction réglée de t pour tout $x \in G([a,b],X)$ si et seulement si on a $K \in G_0^\sigma . SV^u([a,b] \times [a,b], L(X))$ (voir le Théorème 2.10). Nous supposons encore que (K) a toujours une et une seule solution (avec $x(t_o)$ fixé) donnée par une résolvante unique R :

$$x(t) = f(t) + R(t,t_o).[x(t_o) - f(t_o)] - \int_{t_o}^t d_s R(t,s).f(s), \qquad a \leq t \leq b.$$

Sous ces hypothèses nous avons démontré dans [26] que l'équation adjointe (ou transposée) du système (K), (F_α) est donnée par

$$(K_\alpha^*)\quad \begin{aligned} & y(s) + \int_s^b\!\!\cdot\ K(t,s)^*.dy(t) - \int_{t_o}^b\!\!\cdot\ K(t,t_o)^*.dy(t) - \\ & - Y(t_o-s)\int_c^b\!\!\cdot\ \left[K(t,s)-K(t,t_o)\right]^*.dy(t) + \left[\alpha(s)-\alpha(t_o)\right]^* d = h(s) \end{aligned}$$

où $Y = \chi_{[0,\infty[}$, $d \in Y'$, $y,h \in BV_{t_o}^{a,b}([a,b],X')$; on note $BV_{t_o}^{a,b}([a,b],X')$ l'ensemble des fonctions $g \in BV([a,b],X')$ qui satisfont $g(t_o) = 0$ et $g(b) = g(a)$. Cet espace apparaît naturellement comme un "dual" et la condition $g(b) = g(a)$ est donc de nature fonctionnelle-analytique et elle ne doit point être considérée comme une contrainte ou une condition de frontière.

Le résultat principal de [26] est le théorème suivant :

THEOREME 6.1. <u>Sous les hypothèses ci-dessus les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

A. <u>Etant donné</u> $(f,c) \in G([a,b],X)\times Y$, <u>le système</u> (K), (F_α) <u>a une solution</u> x <u>si et seulement si pour tout</u> $(y,d) \in BV_{t_o}^{a,b}([a,b],X')\times Y'$ <u>qui est une solution de</u> (K_α^*) <u>avec</u> $h = 0$ <u>on a</u>

$$\int_a^b\!\!\cdot\ \langle dy(s)\ ,\ f(s)\rangle + \langle c,d\rangle = 0\ .$$

B. $J(t_o)X$ <u>est un sous-espace vectoriel fermé de</u> Y <u>où</u> $J(t_o) = {}^{\sigma}\!\!\int_a^b\!\!\cdot\ d\alpha(t)\circ R(t,t_o)$.

C. $J(t_o)^* Y'$ <u>est un sous-espace vectoriel fermé de</u> X'.

D. <u>Etant donné</u> $h \in BV_{t_o}^{a,b}([a,b],X')$ <u>l'équation</u> (K_α^*) <u>a une solution</u> $(y,d) \in BV_{t_o}^{a,b}([a,b],X')\times Y'$ <u>si et seulement si pour tout</u> $z \in G([a,b],X)$ <u>qui est solution du système</u> (K), (F_α) <u>avec</u> $f = 0$ <u>et</u> $c = 0$ <u>on a</u>

$$\int_a^b\!\!\cdot\ \langle dh(s)\ ,\ z(s)\rangle = 0.$$

REMARQUE. A et D équivalent à dire que le système (K), (F_α) et l'équation (K_α^*) sont "normalement résolubles".

Un "système adjoint" a été étudié par beaucoup d'auteurs pour les systèmes (L),(F_α) où

$$(L) \qquad x(t) - x(a) + \int_a^t dA(s).x(s) = f(t) - f(a), \qquad a \le t \le b.$$

Voir [42] pour ces systèmes et pour des références à des articles où ces systèmes ont été considérés avec des contraintes particularisées. Dans [19] nous avons donné un cas particulier du Théorème 6.1 (avec $t_o = a$ et K continue comme fonction de la deuxième variable). Le théorème 6.1 généralise les résultats de [42] et [19].

6.2. La fonction de Green d'un système (K), (F_α).

Nous avons maintenant les hypothèses précédentes. Soient

$$Y_o = F_\alpha(\mathcal{N}) \quad \text{où} \quad \mathcal{N} = \left\{x \in G([a,b],X) \,\middle|\, x(t) - x(t_o) + \int_{t_o}^t d_s K(t,s).x(s) = 0, \ a \le t \le b\right\}$$

et $Y_\alpha = F_\alpha[G([a,b],X)]$. Nous supposons que $Y_o = Y_\alpha$ et que pour tout $(f,c) \in G([a,b],X) \times Y_\alpha$ le système (K), (F_α) a une et une seule solution. Dans ce cas $J(t_o) = {}^\sigma\!\int_a^b d\alpha(t) \circ R(t,t_o) : X \longrightarrow Y_o$ est bijective et nous supposons qu'elle est bicontinue (voir [17], Theorem 5). Dans un article en préparation nous allons démontrer que la solution est donnée par une fonction de Green $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow L(X)$

$$x(t) = \bar{J}(t)\, c - \int_a^b d_s G(t,s).f(s), \qquad a \le t \le b,$$

où $\bar{J}(t) = R(t,t_o) \circ J(t_o)^{-1}$. On a

$$G(t,s) = -\bar{J}(t) \circ \left[{}^\sigma\!\int_s^b d\alpha(\tau) \circ R(\tau,s) - {}^\sigma\!\int_{t_o}^b d\alpha(\tau) \circ R(\tau,t_o)\right] + Y(t_o - s)\bar{J}(t) \circ \left[{}^\sigma\!\int_a^b d\alpha(\tau) \circ \right.$$

$$\left.[R(\tau,s) - R(\tau,t_o))\right]\Big] + \begin{cases} Z(t-s)\,R(t,s) - Z(t-t_o)\,R(t,t_o) & \text{pour} \quad t_o \le s \le b \\ -Y(s-t)\,R(t,s) + Y(t_o - t) R(t,t_o) & \text{pour} \quad a \le s \le t_o \end{cases}$$

où $Y = \chi_{[0,\infty[}$ et $Z = \chi_{]0,\infty[}$.

Pour tout $s \in [a,b]$, G_s est la solution du système (G_o), (G_1) où

$$(G_o) \qquad F_\alpha[G_s] = 0$$

$$(G_1) \qquad G_s(t) - G_s(t_o) + {}^\sigma\!\int_{t_o}^t d_\sigma K(t,\sigma) \circ G_s(\sigma) = -[Y(s-t) - Y(s-t_o)] I_X - Z(t-t_o)\, I_X.$$

L'équation (G_1) dit qu'au sens de la Théorie des Distributions, on a

$$\frac{d}{ds}\left\{G_s(t) - G_s(t_o) + {}^{\sigma}\!\!\int_{t_o}^{t} d_\sigma K(t,\sigma)\circ G_s(\sigma)\right\} = -\delta_{(s)} + \delta_{(t_o)}.$$

Pour tout $t \in [a,b]$, G^t satisfait l'équation "adjointe" (G_2) où

$$(G_2) \quad G^t(s) + {}^{\sigma}\!\!\int_{s}^{b} dG^t(\tau)\circ K(\tau,s) - {}^{\sigma}\!\!\int_{t_o}^{b} dG^t(\tau)\circ K(\tau,t_o) -$$

$$- Y(t_o-s)\left[\int_a^b dG^t(\tau)\quad [K(\tau,s) - K(\tau,t_o)]\right] + J(t)\circ[\alpha(s) - \alpha(t_o)] =$$

$$= \begin{cases} -Z(t-s)\,[I_X + K(t,s) - K(t-,s)] + Z(t-t_o)\,[I_X + K(t,t_o) - K(t-,t_o)] & \text{pour } t_o\leq s\leq b \\ -Y(s-t)\,[I_X+K(t,s)-K(t-,s)] + Y(t_o-t)\,[I_X+K(t,t_o) - K(t-,t_o)] & \text{pour } a\leq s\leq t_o. \end{cases}$$

On a $G \in G^{\sigma}.SV^u([a,b]\times[a,b],L(X))$ avec

$$G^t(t_o) = 0 \quad , \quad G^t(b) = G^t(a) \text{ si } a < t \leq b \quad \text{et} \quad G^a(b) - G^a(a) = I_X - R(a,t_o).$$

Pour le cas particulier du système (L), (F_α) voir [42] aussi bien que ses références. Dans [17] et [18] nous donnons la fonction de Green du système (K), (F_α) sous une autre forme.

6.3. La régularité des solutions de (L).

Même dans le cas numérique $X = \mathbb{R}$ il existe $K \in G_o.BV^u$ et $f \in G([a,b])$ tels que l'équation

$$(*) \qquad y(t) - y(a) + \int_a^t d_s K(t,s).y(s) = f(t) - f(a), \qquad a\leq t\leq b$$

a des solutions non réglées.

EXEMPLE. Soit $K(t,s) = \chi_{[a,t[}(s)$ et $f = 0$. Toute fonction $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $x(t-) = x(t)$ pour $a < t \leq b$ et $x(a) = 0$ est une solution de (*) (avec $y(a) = 0$). Voir aussi le problème ouvert 2.

Dans [25] nous avons démontré que pour l'équation (L) une telle situation ne peut pas arriver.

Nous disons que $A : [a,b] \longrightarrow L(X)$ est simplement continue et nous écrivons $A \in \mathcal{C}^{\sigma}([a,b],L(X))$ si pour tout $x \in X$ la fonction $t \in [a,b] \longmapsto A(t)\,x \in X$ est continue. Nous posons $SV\mathcal{C}^{\sigma}([a,b],L(X)) = SV([a,b],L(X)) \cap \mathcal{C}^{\sigma}([a,b],L(X))$ et de façon analogue pour $SVG^\sigma([a,b],L(X))$.

Rappelons que pour $A : [a,b] \longrightarrow L(X)$ et $g : [a,b] \longrightarrow X$ on définit

$$(k_A g)(t) = \int_a^t dA(s).g(s) , \qquad a \leq t \leq b$$

quand cette intégrale existe.

LEMME 6.2. <u>Soit</u> $A : [a,b] \longrightarrow L(X)$; <u>on a</u>

I. $k_A [\mathcal{C}([a,b],X)] \subset \mathcal{C}([a,b],X) \Longleftrightarrow A \in SV\mathcal{C}^\sigma([a,b],L(X))$;

II. $k_A [\mathcal{C}([a,b],X)] \subset G([a,b],X) \Longleftrightarrow A \in SVG^\sigma([a,b],L(X))$;

III. $k_A [\mathcal{C}([a,b],X)] \subset BV([a,b],X) \Longleftrightarrow A \in BV([a,b],L(X))$.

Démonstration. I [II] s'ensuit du Theorem I.1.11 de [15] (voir aussi le Théorème 1.14) et de 2.9. On obtient III de II par contradiction.

Le théorème suivant est le résultat principal de [25].

THEOREME 6.3. <u>Soit</u> $A \in SVG^\sigma([a,b],L(X))$ $[A \in SV\mathcal{C}^\sigma([a,b],L(X))$, $A \in BV([a,b],L(X))]$. <u>Alors pour toute fonction</u> $f : [a,b] \longrightarrow X$ <u>qui est réglée</u> [<u>continue, à variation bornée</u>] <u>toute solution</u> $y : [a,b] \longrightarrow X$ <u>de</u>

$$y(t) - y(a) + \int_a^t dA(s).y(s) = f(t) - f(a), \qquad a \leq t \leq b$$

<u>est aussi une fonction réglée</u> [<u>continue, à variation bornée</u>].

La démonstration fait usage du

LEMME 6.4. <u>Soient</u> $A : [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ <u>et</u> $f : [a,b] \longrightarrow X$ <u>tel qu'il existe</u> $\int_a^b dA(s).f(s)\,ds$. <u>Alors pour tout</u> $t \in [a,b]$ <u>il existe</u> $\int_a^t dA(s).f(s)$ <u>et pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>il existe une fonction en escalier</u> $f_\varepsilon : [a,b] \longrightarrow X$ <u>telle que pour tout</u> $t \in [a,b]$, <u>avec l'exception seulement d'un nombre fini de points, on a</u>

$$\left\| \int_a^t dA(s).f(s) - \int_a^t dA(s).f_\varepsilon(s) \right\| \leq \varepsilon.$$

6.4. Les équations linéaires de Fredholm-Stieltjes.

Dans [22], nous étudions l'équation

$$(*) \qquad \lambda x(t) - \int_a^b d_s K(t,s).x(s) = f(t), \qquad a \le t \le b$$

où $x, f \in G([a,b], X)$ et $K \in G^{\sigma}.SV_a^u([a,b] \times [a,b], L(X))$; $\lambda \in \mathbf{R}$ (ou $\lambda \in \mathbf{C}$ si on considère des espaces de Banach complexes), $\lambda \neq 0$.

Nous démontrons que l'équation transposée est donnée par

$$(*') \qquad \lambda y(s) - \int_a^b K(t,s)^* . dy(t) = g(s), \qquad a \le s \le b$$

où $y, g \in BV_a([a,b], X')$ et que si $K^{\square} \in G([a,b], SV_a([a,b], \underline{\underline{K}}(X)))$ alors (*) et (*') n'ont qu'un ensemble dénombrable de valeurs singulières λ qui sont des valeurs propres de multiplicité finie avec 0 comme seul point d'accumulation possible, voir [22], Theorem 14. En plus, on a toujours l'alternative de Fredholm pour (*) et (*') ([22], Theorem 15).

De cette façon, nous généralisons des résultats démontrés par Schwabik dans [38] et [41] où il suppose que $\dim X < \infty$, que K est à variation bornée selon Vitale (voir Définition 3.7 et Théorème 3.15) et que f et x sont à variation bornée.

Dans le cas général, c'est-à-dire $K \in G^{\sigma}.SV_a^u([a,b] \times [a,b], L(X))$, soit λ fixé ; si (*) a pour toute $f \in G([a,b], X)$ une et une seule solution réglée, nous démontrons l'existence d'une résolvante pour (*) et (*') ([22], Theorem 16). Dans des conditions plus générales nous démontrons l'existence d'une pseudo-résolvante ([22], Theorem 17). On démontre aussi des résultats analogues dans le cadre des fonctions continues.

6.5. Rapports entre K, $K^{\square}$, $K_{\square}$ et F_K.

Dans les Théorèmes 1.12, 3.12, 3.15 et 3.17 on a vu quelques rapports entre les propriétés de K, $K^{\square}$, $K_{\square}$ et F_K. Voir aussi le Problème 1 et les Théorèmes 1.10 c, 2.2 b, 2.3, 3.20 et 3.23. Dans un article en préparation nous allons approfondir cette étude.

6.6. Fonctions à variation bornée de plusieurs variables.

Dans une série d'articles (voir [31] et les références données dans [32]). Morse et Transue étudient les fonctions à variation bornée selon Vitali (voir Définition 3.7) et les fonctions à variation bornée selon Fréchet. Ces dernières sont utilisées pour obtenir des représentations intégrales des applications bilinéaires définies sur un espace de fonctions continues.

Dans [36] Prandini systématise les résultats de Morse et Transue et les étend à des espaces de fonctions réglées en obtenant des simplifications remarquables de beaucoup de leurs résultats.

Dans [46] Queiroz Barros généralise à plusieurs variables des résultats exposés ici par un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Ses résultats sont liés aux mesures vectorielles et il a réussi à formuler dans ce cadre une grande partie des résultats de [22]. Il s'ensuit aussi des applications à l'inégalité de Gronwall-Bellman de plusieurs variables, aux équations différentielles hyperboliques, etc...

6.7. Théorie du contrôle.

L. Barbanti a appliqué les théorèmes de représentation à la théorie du contrôle pour l'équation (K) ; voir [2].

7. PROBLEMES DE GEOMETRIE DES ESPACES DE BANACH ISSUS DES QUESTIONS PRECEDENTES.

DEFINITION 7.1. Soit X un espace de Banach. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow X$ est intégrable Riemann et on écrit $f \in R([a,b],X)$ s'il existe

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\Delta d \to 0} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{où} \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

PROBLEME OUVERT 10. Existe-t-il un espace de Banach X et une suite bornée $f_n \in R([a,b],X)$ (c'est-à-dire, $\sup_{n\in N} \|f_n\| < \infty$ où $\|f\| = \sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\|$) telle que pour tout $t \in [a,b]$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ mais telle que la suite $\int_a^b f_n(t)\,dt$ ne tende pas vers 0 ?

THEOREME 7.1 (Voir [20], Theorem 4.5). Soit $f : [a,b] \longrightarrow X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier $f_\varepsilon : [a,b] \longrightarrow X$ telle que $\overline{\int_a^b} \|f(t) - f_\varepsilon(t)\|\,dt \leq \varepsilon$, où $\overline{\int}$ note l'intégrale de Riemann supérieure numérique.

b) $\lim_{\Delta d\to 0} \sum_{i=1}^{|d|} \omega_i(f)(t_i - t_{i-1}) = 0$ où $\omega_i(f) = \sup\{\|f(t) - f(s)\| \mid t,s \in [t_{i-1},t_i]\}$.

c) f est bornée et $m\,D^f = 0$ où m est la mesure de Lebesgue et D^f note l'ensemble des point de discontinuité de f.

DEFINITION 7.2. On dit que $f : [a,b] \longrightarrow X$ satisfait la propriété de Darboux et on écrit $f \in D([a,b],X)$ si f satisfait b) du Théorème 7.1.

On a évidemment $D([a,b],X) \subset R([a,b],X)$. Voir [15] pour d'autres propriétés de ces espaces. Les fonctions de $D([a,b],X)$ sont intégrables selon Bochner-Lebesgue mais les fonctions de $R([a,b],X)$ peuvent être non mesurables (si X est non séparable).

EXEMPLES 1. $X = \ell_2([a,b])$, $\varphi : [a,b] \to R$ est une fonction bornée et $f(t) = \varphi(t).e_t$ (où $e_t = \chi_{\{t\}}$). Il est immédiat que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ mais f est non mesurable (à moins que $\varphi = 0$ presque partout). Voir [15].

2. Soit $X = G([a,b])$ ou $L_\infty([a,b])$ et $f(t) = \chi_{[a,t]}$. On a $(\int_a^b f(t)\,dt)(s) = s - a$, $a \leq s \leq b$ mais la fonction f est non mesurable.

PROBLEME OUVERT 11. Comment doit être l'espace de Banach X pour qu'on ait $D([a,b],X) = R([a,b],X)$?

Dans [37] Rocha Filho démontre que si X est uniformément convexe, si $X = L_1([a,b])$ ou si $X = \mathcal{C}(K)$ (où K est un espace compact infini), alors $D([a,b], X) \subsetneq R([a,b],X)$. Il démontre que si $X = \ell_1(A)$ ou, plus généralement, si X est un espace de Schur alors $D([a,b],X) = R([a,b],X)$. Il démontre aussi l'existence d'espaces réflexifs X de dimension infinie tels que $D([a,b],X) = R([a,b],X)$.

Dans [34] Pelczynski et Rocha Filho démontrent le

THEOREME 7.2. <u>Soit</u> $T \in \Pi_p(X,Y)$ <u>alors</u> $T[R([a,b],X)] \subset D([a,b],Y)$.

On note $\mathcal{M}([a,b],X)$ $[L_1([a,b],X)]$ l'espace des fonctions $f : [a,b] \to X$ qui sont mesurables [intégrables selon Bochner-Lebesgue]. On note par $Q([a,b],X)$ l'espace des fonctions $f : [a,b] \longrightarrow X$ faiblement mesurables pour lesquelles il existe un ensemble de mesure nulle $Z \subset [a,b]$ tel que $f([a, b] \setminus Z)$ soit séparable.

THEOREME 7.3 (Voir [9]). <u>Soit</u> X <u>un espace de Banach ; les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) $R([a,b],X) \subset \mathcal{M}([a,b],X)$
2) $R([a,b],X) \subset L_1([a,b],X)$
3) $R([a,b],X) \subset Q([a,b],X)$.

PROBLEME OUVERT 12. Comment doit être l'espace de Banach X pour qu'on ait $R([a,b],X) \subset \mathcal{M}([a,b],X)$?

Il est immédiat que si X est séparable, on a l'inclusion. Les exemples 1 et 2 ci-dessus montrent que pour $X = \ell_1([a,b]$, $G([a,b]), L_\infty([a,b])$ on n'a pas $R([a,b],X) \subset \mathcal{M}([a,b],X)$.

Rappelons que l'on dit qu'un espace compact K est <u>dyadique</u> s'il est l'image continue de $\{0,1\}^m$, où m est un nombre cardinal.

Exemple : $\{0,1\}^m$, M^m où M est un espace métrique compact et les groupes topologiques compacts sont des espaces compacts dyadiques. L'espace $[a,b]_G$ de [22], p. 128 (c'est-à-dire, le compactifié de Gelfand de l'algèbre de Banach $G([a,b])$) est un espace compact qui n'est pas dyadique comme il s'ensuit de l'exemple

2 ci-dessus et du Théorème suivant démontré dans [9].

THEOREME 7.4. <u>Soit</u> $X = \mathcal{C}(K)$ <u>où</u> K <u>est un compact dyadique. Alors on a</u>

$$R([a,b],X) \subset \mathcal{M}([a,b],X).$$

De ce théorème et des exemples ci-dessus il s'ensuit que

a) $\mathcal{C}(\{0,1\}^m)$ ne contient pas un espace de Hilbert non séparable (mais il contient $\ell_2(N)$) ;

b) $\mathcal{C}(\{0,1\}^m)$ ne contient pas $L_\infty([a,b])$ ni $G([a,b])$.

De façon analogue on démontre que $\mathcal{C}(\{0,1\}^m)$ ne contient pas $\ell_\infty(N)$, que $\mathcal{C}(\{0,1\}^m)$ n'est pas un dual ni un P_λ etc. Voir [9].

PROBLEME OUVERT 13. Pour quels espaces de Banach X et Y, a-t-on

$$SV([a,b],L(X,Y)) \subset \mathcal{M}([a,b],L(X,Y)) \ ?$$

Dans [37] Rocha Filho a démontré le théorème suivant.

THEOREME 7.5. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) $SV([a,b],L(X,Y)) = SV^{\pm}([a,b],L(X,Y))$ (voir Définition 3.8)

2) $SV([a,b],L(X,Y)) \subset G([a,b],L(X,Y))$

3) $SV([a,b],L(X,Y)) \subset D([a,b],L(X,Y))$

4) $Y \not\supset c_0(N)$.

Bibliographie

[1] ARBEX, S. E. Equações integrais de Volterra-Stieltjes com núcleos descontínuos. Doctor Thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1976. Voir aussi : O resolvente de equações integrais de Volterra-Stieltjes com descontinuidades, 3º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1976, 9-12.

[2] BARBANTI, L. en préparation. Voir aussi : Introdução à teoria do controle para equações integrais de Fredholm-Stieltjes lineares. 14º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1981, 241-246.

[3] BITZER, C. W. Stieltjes-Volterra integral equations. Illinois J. Math. 14 (1970), 434-451.

[4] BRAY, H. E. Elementary properties of Stieltjes integral. Ann. Math. 20 (1918-19), 177-186.

[5] CARDASSI, C. S., GOMES NETO, J. B. F., HÖNIG, C. S. A generalization of the Gronwall inequality. 10º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1979, 147-161.

[6] DAVIS, E. B. One-parameter semi groups. London Math. Soc. Monographs nº 15, Academic Press 1980.

[7] DIESTEL, J., UHL, J. J. Vector measures. Math. Surveys nº 15. Amer. Math. Soc. (1977).

[8] DE SOUZA, M. I. Equações diferencio-integrais do tipo Riemann-Stieltjes em espaços de Banach com soluções descontínuas. Master Thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1974.

[9] DE SOUZA V. DINIZ, M. I. en préparation. Voir aussi : Riemann integrabilidade e mensurabilidade em espaços diadícos. 15º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1982, 199-204.

[10] FERREIRA GOMES NETO, J. B. O índice de equações integrais lineares de Volterra-Stieltjes. Doctor Thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1980. Voir aussi : The index of linear Volterra-Stieltjes integral equations. 12º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1980, 111-124.

[11] GOWURIN, M. Über die Stieltjes Integration abstrakter Funktionen. Fund. Math. 27 (1936), 254-268.

[12] HILDEBRANDT, T. H. On systems of linear differentio-Stieltjes integral equations . Illinois J. Math. 3 (1959), 352-373.

[13] HILDEBRANDT, T. H. Introduction to the theory of integration. Academic Press, 1963.

[14] HINTON, D. B. A Stieltjes-Volterra integral equation theory. Canad. J. Math. 18 (1966), 314-331.

[15] HÖNIG, C. S. The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to linear differential equations with generalized boundary conditions. Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Série Matematica n^{o} 1, 1973.

[16] ____________ The Green function of a linear differential equation with a lateral condition. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 587-593.

[17] ____________ Volterra-Stieltjes integral equations with linear constraints and discontinuous solutions . Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 593-598.

[18] ____________ Volterra-Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16 North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1975.

[19] ____________ The adjoint system of a Volterra-Stieltjes integral equation with a linear constraint. 4^{o} Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1976, 152-162.

[20] ____________ The Dirichlet and substitution formulas for Riemann-Stieltjes integrals in Banach spaces. Functional Analysis, edited by Djairo Guedes de Figueiredo, Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 18, pp. 135-189, Marcel Dekker, 1976.

[21] ____________ Volterra-Stieltjes integral equations. Functional Differential Equations and Bifurcation. Proceedings of the São Carlos Conference, 1979, Springer Lecture Notes in Mathematics, 799, pp. 173-216.

[22] ____________ Fredholm-Stieltjes integral equations I. Analisis y sus Aplicaciones, IV Escuela Latinoamericana de Matemática, Lima, 1979, p. 126-160.

[23] ____________ Linear Stieltjes integro-differential equations. Recent Advances in Differential Equations, Academic Press, 1981, pp. 199-207.

[24] ____________ The resolvent of linear Volterra-Stieltjes integral equations, en préparation; voir aussi : 11^{o} Semin. Bras. de Análisis, Soc. Bras. de Matemática, 1980, 361-381.

[25] ____________ On the regularity of the solutions of linear Stieltjes integral equations. Collected papers dedicated to Professor Edison Farah on the occasion of his retirement. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1982, 37-49.

[26] ____________ The adjoint of a linear Volterra Stieltjes integral equation with a linear constraint. Proceedings of the ELAED I, Springer-Lecture Notes in Math., en publication.

[27] ____________ The resolvent of linear Stieltjes integral equations. En préparation. Voir aussi : 12^{o} Semin. Bras. de Analisis, Soc. Bras. de Matemática, 1980, 301-344.

[28] ____________ Semigroups and semi-variation. 14^{o} Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1981, 185-193.

[29] KALTENBORN, H. S. Linear functional operations on functions having discontinuities of the first kind. Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), 702-708.

[30] MAC NERNEY, J. S. Stieltjes integrals in linear spaces . Ann. Math. 61 (1955), 354-367.

[31] MORSE, M., TRANSUE, W. Functionals of bounded Frechet variation. Canadian J. Math. 1 (1949), 153-165.

[32] MORSE, M., TRANSUE, W. Vector subspaces A of C^E with dual of integral type. J. Math. Pures Appl. 37 (1958), 343-363.

[33] PAZY, A. Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations. University of Maryland, Lecture Note 10, 1974.

[34] PELCZYNSKI, A., DA ROCHA FILHO, G. C. en préparation. Voir aussi : Operadores de Darboux. 12º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1980, 293-296.

[35] POLLARD, S. The Stieltjes integral and its generalizations. Quat. J. Math. 49 (1920), 73-138.

[36] PRANDINI, J. C. Funções de semi-variação limitada de mais de uma variável. Master Thesis, Instituto de Matemático e Estatística da Universidade de São Paulo, 1978. Voir aussi : 7º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1978, pp. 258-269.

[37] ROCHA FILHO, G. C. Integral de Riemann vetorial e geometria de espaços de Banach. Doctor Thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1979. Voir aussi : Observações sobre funções mensuráveis. 10º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matemática, 1979, 201-204.

[38] SCHWABIK, Š. On an integral operator in the space of functions with bounded variation. Čas. pro pěst. mat. 97 (1972), 297-330.

[39] SCHWABIK, Š. On Volterra-Stieltjes integral equations. Čas. Pěst. Mat. 99 (1974), 225-278.

[40] SCHWABIK, Š. Note on Volterra-Stieltjes integral equations. Čas. Pěst. Mat. 102 (1977), 275-279.

[41] SCHWABIK, Š. On an integral operator in the space of functions with bounded variation, II. Čas. pro pěst. mat. 102 (1977), 189-202.

[42] SCHWABIK, Š., TVRDÝ, M. Boundary value problems for generalized linear differential equations. Czech. Math. J. 29 (104), 1979, 451-477.

[43] SCHWABIK, TVRDÝ, VEJVODA Differential and integral equations. Praha, Academia Praha, 1979.

[44] TRAVIS, C. C. Differentiability of weak solutions to an abstract inhomogeneous differential equation. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 425-430.

[45] WALL, H. S. Concerning harmonic matrices . Arch. Math. 5 (1954), 160-167.

[46] QUEIROZ BARROS, I. Equações integrais de Fredholm no espaço das funções A-uniformemente contínuas. RT-MAP-8109, Relatório Técnico, Dep. Mat. Aplicada, Instituto de Matemática e Estatistica de Universidade de São Paulo, 1981. Voir aussi : Dois teoremas sobre equações integrais de Fredholm. 15º Semin. Bras. de Análise, Soc. Bras. de Matematica, 1982, 115-132.

Instituto de Matematica e Estatistica
Universidade de Sao Paulo
C.P. 20 570
SAO PAULO (Brasil)

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX

Ce travail a été en partie subventionné par la FAPESP (S. Paulo) et en partie par l'Université de Paris-Sud au titre de la Coopération internationale avec le Brésil.