

# SESSÕES DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS

## RESUMOS DAS COMUNICAÇÕES

### FAMÍLIA DE FORMAS QUADRÁTICAS UNIFORMEMENTE DEFINIDA POSITIVA.

SÔNIA REGINA LEITE GARCIA

credenciado por CHAIM S. HÖNIG

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, SP.

No que segue adotaremos, para duas matrizes simétricas  $A$  e  $B$  de ordem  $k$  tais que  $B - A$  é definida positiva, a notação usual  $A \leq B$ .

**Proposição.** Para  $s \in S \subset \mathbb{R}^l$ , sejam

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{nn}(s) & C(s) \\ C(s)^T & D(s) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(s)$$

matrizes simétricas de ordem  $(n+m)$  e  $m$  respectivamente (onde  $A_{nn}(s)$  é matriz  $n \times n$ ). Suponha que

(i)  $A(s) \geq 0, \forall s \in S$ .

(ii) Existem  $0 < \alpha < \beta$  tais que

$$\alpha I_n \leq A_{nn}(s) \leq \beta I_n,$$

e

$$\alpha I_m \leq B(s) \leq \beta I_m,$$

$\forall s \in S$ ,

$$d_{jj} = a_{n+j, n+j}(s) \leq \beta,$$

$\forall s \in S, \quad j = 1, 2, \dots, m$ .

Então existem  $0 < \alpha_0 < \beta_0$  e  $r > 0$  tais que

$$\alpha_0 I_{n+m} \leq A(s) + r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(s) \end{pmatrix} \leq \beta_0 I_{n+m},$$

$\forall s \in S$ .

Valemo-nos, para provar este resultado, basicamente do Critério de Sylvester. A proposição decorre das seguintes afirmações:

**Afirmção 1.** Todos os coeficientes  $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n+m$ , e  $b_{ij}, 1 \leq i, j \leq m$ , são uniformemente limitados.

Denotemos, para  $1 \leq i \leq n+m$ ,

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

**Afirmção 2.** Temos

$$\det \left\{ A_{ii}(s) - \frac{\alpha}{2} I_i \right\} \geq \frac{\alpha^i}{2^i} > 0,$$

$\forall s \in S, \quad 1 \leq i \leq n$

**Afirmção 3.** Podemos escolher  $\delta_1, \dots, \delta_m$  tais que, para  $1 \leq j \leq m$ ,

$$\begin{aligned} & \det \left\{ A_{n+j, n+j}(s) - \frac{\alpha}{2} I_{n+j} + \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_j) \end{pmatrix} \right\} \geq \\ & \geq \frac{\alpha^n}{2^{n+j}} \left( \delta_1 - \frac{\alpha}{2} \right) \dots \left( \delta_j - \frac{\alpha}{2} \right) > 0, \end{aligned}$$

$\forall s \in S$ .

**Afirmção 4.** Podemos escolher conveniente  $\delta_1, \dots, \delta_m$  de forma que

$$\begin{aligned} & \det \left\{ A(s) + \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_m) \end{pmatrix} \right\} \geq \\ & \geq \frac{\alpha}{2} I_{n+m}, \quad \forall s \in S. \end{aligned}$$

**Afirmção 5.** Se  $r$  for suficientemente grande então

$$rB(s) \geq \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_m), \quad \forall s \in S.$$

e conseqüentemente, tomando  $\alpha_0 = \frac{\alpha}{2}$  teremos uma das desigualdades da tese.

**Afirmção 6.** Tomando-se

$$F(X, v) = |\langle Xv/v \rangle|$$

onde  $X$  é matriz  $(n+m) \times (n+m)$  e  $v \in \mathbb{R}^{n+m}$ , temos

$$\sup \{ F(X, v) : \|X\|_\infty \leq M, \|v\|_2 \leq 1 \} < \infty$$

e portanto temos a existência de  $\beta_0$  satisfazendo a tese.

**Observação.** As afirmações 2 e 3 podem ser provadas por indução sobre  $i$  e  $j$  respectivamente. As outras são imediatas.

**Comentário final.** Este resultado mostrou-se útil no estudo da estabilidade da origem (segundo Liapunov) de certas famílias de Equações Diferenciais Ordinárias "do tipo Hill", permitindo em tais casos a construção de Funções de Liapunov para a Estabilidade. — (9 de abril de 1991).

## CENTER-MASS DISPLACEMENT AND CONTROL

L. BARBANTI

credenciado por CHAIM S. HÖNIG

Instituto de Matemática, Universidade de São Paulo, SP

The aim of this note is to study situations in which it is possible to move optimally a mass-charged point by replacing the effect due to an explicit "external" force  $u$  according to the process

$$\ddot{z}(t) = f_1(\dot{z}, z) + u(t)$$

with

$$(z(t_0), \dot{z}(t_0), \ddot{z}(t_0)) = z_0;$$

$$(z(t_1), \dot{z}(t_1), \ddot{z}(t_1)) = z_1$$

by the force effect due to the displacement of the center-mass.

Setting the equations of the two-coupled motion

$$(1) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= f(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}) \\ m_2 \ddot{y} &= g(x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}), \end{aligned}$$

with

$$(x(t_0), \dot{x}(t_0), \ddot{x}(t_0), \ddot{y}(t_0)) = z_0$$

and

$$(x(t_1), \dot{x}(t_1), \ddot{x}(t_1)) = z_1,$$

let  $r(t)$  be the origin point of a frame, and  $s(t)$  the internal coordinates:

$$s_1 = x - r = aQ + bP;$$

$$s_2 = y - r = aQ - bP$$

(where  $a, b \in \mathbb{R}$ ), chosen in such a way that the system (1) can be written as:

$$\begin{aligned} \ddot{Q} &= F(Q, \dot{Q}); \\ \ddot{P} &= G(Q, \dot{Q}). \end{aligned}$$

The existence of the above entities is assured by the implicit function theorem – if  $f$  and  $g$  are of class  $C^q$ , for large enough  $q$  – and by the possibility of integrating the system.

Observing that  $s_1 = -s_2 + 2aQ$ , then we have defined the dynamics  $m_2 \ddot{s}_2 = g_1(s_2, \dot{s}_2) + h(Q(t))$ . We conclude, by using theorems like the Pontryagin  $MP$ , with the class of the admissible controls  $h_0 Q$ .

### Examples

1). Coupling two harmonic oscillators: the entities

$$Q = \frac{1}{2}(x + y),$$

$$P = \frac{1}{2}(x - y),$$

$$h(Q(t)) = v \cdot \sin \omega t$$

( $v, \omega$ , variables), and  $r(t)$ , are defined as in "New Foundations for Classical Mechanics" by D. Hestenes (D. Riedel Pubs., 1987), p. 361.

2). Looking for the small oscillations of a double pendulum, with  $P_1$  and  $P_2$  the mass-charged points: let be  $m_i, l_i, p_i$  respectively the mass, the distance from the point of attachment, and the angle with the vertical line of  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) and  $g$  the gravitational force constant. If we choose  $(r, \ddot{r})$ , colinear with  $(p_1, \ddot{p}_1)$  and  $(p_2, \ddot{p}_2)$ , then we have:

(a) the equation (1) is:

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{p}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{p}_2 + (m_1 + m_2)l_1 g p_1 = 0$$

and

$$m_2 l_2 \ddot{p}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{p}_1 + m_2 l_2 g p_2 = 0.$$

(b)  $Q = am_1 s_1 + bm_2 s_2$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

(c)  $m_1 \ddot{s}_1 = (k_1 - k_2 \frac{a}{b})s_1 + h(Q(t))$ , where

$$h(Q(t)) = \frac{Q(t)}{b} = \frac{m + ne}{b}.$$

Now, to finish the example, we need to choose the "good" control  $h_0 Q$ , and to rewrite the equation in (c) above in terms of the original frame.

Finally: from the point of view of controllability it is easy to see – supposing in (1), the point moving in accordance with the first equation as having a "natural" motion – that the choice of an appropriate law for the displacing of the second mass-charged point will allow us to induce one "good" control for the whole system. — (9 de abril de 1991).