

0806234

MODELAMENTO DIGITAL DE SUPERFÍCIES ATRAVÉS DO AJUSTE LOCAL DE EQUAÇÕES MULTIQUÁDRICAS

Jorge Kazuo YAMAMOTO*

RESUMO: Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada para testar a aplicabilidade das equações multiquádricas como método local de interpolação para dados dispersos. As equações multiquádricas foram propostas originalmente como um método global para representação analítica de superfícies a partir de pontos de dados discretos. Esse método foi desenvolvido porque os mapas computados por polinômios ou harmônicos de Fourier não apresentavam precisão suficiente para fins de Engenharia. Entretanto, a principal restrição desse método era o número de pontos de dados, tanto pela impossibilidade de resolução de grandes sistemas lineares quanto pelo tempo de computação, tornando seu uso proibitivo. Devido a essa restrição foi desenvolvida uma pesquisa para avaliar a possibilidade de usar as equações multiquádricas como método local de interpolação, computando-se pequenas áreas do mapa e assim sucessivamente até a completa cobertura. Este estudo consistiu basicamente em simular interpolações sob várias condições de números de pontos vizinhos e valores de constante C para dados amostrados em cinco superfícies matematicamente definidas. Os resultados obtidos demonstraram a viabilidade de usar as equações multiquádricas como método local de interpolação para dados dispersos em área.

UNITERMOS: Interpolação; equações multiquádricas; modelamento de superfícies.

INTRODUÇÃO

As medidas diretas ou indiretas de propriedades da Terra, obtidas em uma dada região, resultam geralmente em pontos de dados distribuídos irregular ou semi-regularmente, devido a problemas de vias de acesso, de existência de afloramentos e de economia. O último problema citado é justamente o custo, pois a obtenção de uma malha regular de pontos é inviável economicamente em muitos casos, como, por exemplo, no caso de levantamentos aerotransportados.

Assim, para se proceder à representação gráfica de pontos que tenham resultado em distribuição irregular ou semi-regular, deve-se pesquisar o modelo digital que os

* Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo e Instituto de Geociências - USP - 01000 - São Paulo - SP.

represente. Tal modelo é obtido através do ajuste de uma função matemática aos pontos de dados amostrados. Essa função deve ser tal que o valor calculado sobre um ponto de dado deve ser exatamente igual ao valor observado (amostrado), ou seja, a superfície ajustada deve coincidir ao menos nos pontos de dados com a superfície original do terreno. Além disso, a função ajustada deve produzir uma superfície contínua e suave. Dentre as várias funções matemáticas existentes, que satisfazem os requisitos anteriores, será utilizado nesse trabalho o método das equações multiquádricas, pois, segundo FRANKE², foi o método mais impressionante em termos de capacidade de ajuste e suavidade visual entre os métodos por ele testados. Entretanto, o método das equações multiquádricas, como foi definido originalmente por HARDY⁴, é um método global e, portanto, apresenta como principal limitação à sua utilização o número de pontos de dados, pois os métodos globais dependem de todos esses pontos.

Os resultados da pesquisa realizada pelo autor, para testar a aplicabilidade das equações multiquádricas como método local para conjuntos de dados irregularmente distribuídos em área, são apresentados neste trabalho, porém, tem-se antes uma introdução teórica às equações multiquádricas, necessária ao entendimento da metodologia proposta.

METODOLOGIA CORRENTE

Neste item tem-se a apresentação das equações multiquádricas como método global de interpolação, como originalmente proposto por HARDY⁴.

HARDY⁴ sugere a aplicação de equações multiquádricas para representação analítica da superfície de um terreno, a partir de um conjunto discreto de pontos de observação.

As equações multiquádricas proporcionam uma interpolação exata e foi justamente pesquisada por aquele autor porque os mapas aproximados por polinômios ou harmônicos de Fourier não apresentavam precisão suficiente para fins de engenharia.

A hipótese básica da análise multiquádrica é que qualquer superfície matemática suave (indefinida matematicamente), pode ser aproximada, como o grau de precisão desejado, através da soma de uma grande variedade de superfícies regulares matematicamente definidas, particularmente de formas quádras (HARDY⁶).

Segundo FRANKE², o método das equações multiquádricas é o mais impressionante em termos de capacidade de ajuste e suavidade visual dentre os diversos métodos de interpolação por ele testados.

A forma geral de uma equação multiquádrica é como segue:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i ((X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + C)^{1/2} \quad (1)$$

onde: c_i é o coeficiente da equação multiquádrica;

X_i é a coordenada leste oeste do ponto i ;

Y_i é a coordenada norte sul do ponto i ;

X é a coordenada leste oeste do ponto a ser interpolado;

Y é a coordenada norte sul do ponto a ser interpolado;

F é o valor da variável dependente interpolada;

C é uma constante que irá definir os termos da superfície multiquádrica.

Geometricamente, cada termo da superfície multiquádrica, conforme a equação (1), representa um simples cone se o valor de C for igual a zero ou uma hiperbolóide se o valor de C for igual a uma constante positiva. Portanto, a superfície multiquádrica é representada por uma somatória de cones simples ou hiperbolóides, dependendo do valor dado a C . Segundo HARDY⁵, essa somatória tem sido bastante efetiva na representação de vários tipos de topografia.

O método das equações multiquádricas, de acordo com FRANKE², é completamente estável com relação à constante C , especificada pelo pesquisador, e dá resultados bastante consistentes.

HARDY⁷ recomenda utilizar ou C igual a zero ou igual a valores pequenos, porque se esta constante for grande ocorrerá o mau condicionamento do sistema de equações. Ainda conforme esse autor, um bom valor de trabalho para C é igual a 0,6 vezes o espaçamento entre os pontos de dados.

Os coeficientes da equação (1) são obtidos através da resolução de um sistema linear de equações:

$$F_i = \sum_{j=1}^n c_j ((X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + C)^{1/2} \text{ para } i = 1, n \quad (2)$$

ou em forma matricial, fazendo

$$a_{ij} = ((X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + C)^{1/2}$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

A matriz à esquerda apresenta a diagonal principal igual à raiz quadrada da constante C .

O sistema linear de equações (3) pode ser também resolvido pelo método de eliminação de Gauss (DORN & McCRAKEN¹). Se a constante C for igual a zero, deve-se proceder antes à permuta de linhas para que, após essa operação, nenhum elemento da diagonal principal seja nulo. Este procedimento não altera os valores dos coeficientes.

Uma solução mais eficiente para resolução do sistema de equações (3) com a diagonal principal nula foi proposta por HARDY⁷. Segundo sua proposição, ambos os lados do sistema de equações deve ser multiplicado pela matriz dos elementos a_{ij} . Esta multiplicação deixa os elementos da diagonal principal iguais à soma dos quadrados dos elementos da linha i , portanto, livres de zeros. Assim, após esta operação, o sistema pode ser resolvido normalmente pelo método de eliminação de Gauss.

A principal limitação do método ora descrito é a dimensão do sistema, pois será sempre igual ao número de pontos de dados, visto que o método é global.

Assim, procedeu-se a um estudo para verificar a aplicabilidade dessas equações como método local de interpolação, ou seja, definindo-se sucessivamente as

equações multiquádricas para pequenas porções do mapa até cobrir toda a área do mesmo. Os resultados desse estudo encontram-se apresentados a seguir.

METODOLOGIA PROPOSTA

Para se utilizar as equações multiquádricas definidas sobre suportes locais é necessário saber, inicialmente, a vizinhança próxima ao ponto a ser interpolado, que deve ser considerada para se interpolar corretamente ou com mínimo de erro. Esse número é facilmente determinado quando se utiliza de polinômios locais, pois será igual ao número de coeficientes do polinômio. No entanto, como não havia nenhuma indicação do número de pontos necessário à interpolação local através de equações multiquádricas, procedeu-se a um estudo simulando a interpolação usando desde 4 até 40 pontos em incrementos de 4. Esse estudo foi efetuado utilizando-se cinco superfícies matematicamente definidas, conforme o Quadro I.

A fim de se evitar números muito pequenos, somou-se uma constante (igual a 1) aos valores obtidos nas superfícies S2, S3, S4 e S5. Isto equivale a deslocar toda a superfície para uma altura igual a esta constante do plano original.

Além da definição da vizinhança é preciso saber também o valor da constante C da equação (1), que poderia dar o melhor ajuste, tanto global como local. Assim, a fim de se conhecer o efeito dessa constante, todos os ajustes foram feitos para diversos valores de C. Os valores escolhidos nesse estudo foram 0, 1, 2, 4, 8 e 16 vezes a distância média entre os pontos de dados.

QUADRO I: Superfícies matemáticas utilizadas para simular o ajuste local através de equações multiquádricas

superfície	[referência]	[descrição]
$S1 = (64 - (X-5,5)^2 + (Y-5,5)^2)^{1/2}$	McLain ⁸	parte de uma esfera
$S2 = \text{EXP}(-(X-5)^2 + (Y-5)^2)$	McLain ⁸	colina abrupta elevando-se de um plano
$S3 = \text{EXP}(-0,25((X-5)^2 + (Y-5)^2))$	McLain ⁸	colina menos abrupta que S2
$S4 = \text{EXP}(-(X+Y-11)^2 + (X-Y)^2/10)$	McLain ⁸	colina longa e estreita
$S5 = 0,75 \text{ EXP}(-(9X-2)^2 + (9Y-2)^2/4) + 0,75 \text{ EXP}(-(9X+1)^2/49 - (9Y+1)/10) - 0,20 \text{ EXP}(-(9X-4)^2 - (9Y-7)^2) + 0,50 \text{ EXP}(-(9X-7)^2 + (9Y-3)^2/4)$	Franke & Nielson ³	sem descrição

Para cada superfície, calcularam-se os valores da mesma em 100 pontos escolhidos aleatoriamente em cada um dos 100 quadrados de lado 1 do intervalo (0,10) x (0,10). Dessa forma, para cada conjunto de dados, procedeu-se ao ajuste global de equações multiquádricas. Para se avaliar o ajuste mediu-se um erro que se comete ao se estimar uma determinada superfície a partir de um conjunto de dados aleatoriamente distribuídos no domínio da mesma. Tal erro, aqui denominado erro de estimação, foi medido entre os dados interpolados sobre uma malha regular de 10 x 10 nós, com origem em (0,0) e abertura igual a 1 nos dois eixos, com aqueles calculados pela função. Esse índice é chamado erro RMS (Root Mean Square) e é calculado pela fórmula a seguir:

$$\text{erro RMS (\%)} = 1/n \sum_{i=1}^n ((\text{Fobs}_i - \text{Fcomp}_i/\text{Fobs}_i)^2)^{1/2} \cdot 100 \quad (4)$$

onde: Fobs_i é o valor da função do ponto i;

Fcomp_i é o valor interpolado no ponto i;

A Tabela 1 apresenta os erros RMS de estimativa obtidos para os ajustes globais com os dados das superfícies S1 a S5.

TABELA 1 – Erros RMS de estimativa (%) entre os ajustes globais e as funções matemáticas originais

Superfície	Erros RMS de estimativa (%)					
	C = 0	C = 1	C = 2	C = 4	C = 8	C = 16
S1	3,31	1,96	1,70	1,39	1,10	0,86
S2	1,33	1,13	1,29	1,43	1,62	2,90
S3	0,85	0,22	0,13	0,07	0,03	0,007
S4	3,55	2,27	2,66	3,17	4,22	9,71
S5	4,71	3,99	3,71	3,43	3,18	3,00

Nesta tabela, podem-se notar dois comportamentos distintos com relação à variação da constante C: para as superfícies S1, S3 e S5 o erro RMS diminui com o aumento da constante C, enquanto para as superfícies S2 e S4 ocorre exatamente o contrário. Observa-se, também, que, para essas superfícies o erro mínimo está entre 0 e 1. Isto confirma em parte o que foi afirmado por HARDY⁷, que um bom valor de trabalho para C seria igual a 0,6 vezes a distância média entre os pontos de dados. Deve-se evitar o uso de constantes iguais a zero em ajustes globais, pois para as superfícies aqui testadas o erro de estimativa sempre foi maior para ajustes com C iguais a zero do que para ajustes com C iguais a valores pequenos (no caso 1 vez a distância média).

A partir da descrição das superfícies S1 a S4, de acordo com McLAIN⁸ e da observação da projeção em perspectiva da superfície S5 apresentada em FRANKE & NIELSON³, tem-se que as superfícies S1, S3 e S5 são topograficamente mais suaves, enquanto as superfícies S2 e S4 são mais acidentadas. Assim, pode-se inferir que para superfícies mais suaves o uso de constantes maiores melhora o ajuste, enquanto para superfícies topograficamente mais acidentadas o aumento de C tende a piorar o ajuste.

É preciso ressaltar que o erro de interpolação, que seria medido entre os dados interpolados com aqueles observados nos pontos de dados originais, seria igual a zero porque a superfície multiquádrica passa exatamente pelos pontos originais de dados.

Conhecidos os valores interpolados pelas equações multiquádricas globais sobre os nós da malha regular, procedeu-se aos ajustes locais para cada nó dessa malha, iniciando-se com uma vizinhança definida por 4 pontos, aumentando-se sucessivamente até 40 pontos em incrementos de 4 pontos. Para cada passo, bem como para cada constante utilizada, mediram-se os erros de estimativa e de aproximação, este definido como sendo o desvio do ajuste local em relação ao global. O erro de interpolação, medido entre os valores interpolados com os valores dos pontos de dados originais, mesmo para o ajuste local, é zero, porque a superfície multiquádrica passa exatamente sobre todos os pontos de dados utilizados no ajuste da mesma. Os resultados encontram-se nas Tabelas 2 a 6 e Figuras 1 a 10.

TABELA 2 – Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S1

Número de Pontos	C = 0		C = 1		C = 2		C = 4		C = 8		C = 16	
	Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)	
	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	19,74	17,95	9,16	8,55	6,85	6,33	4,82	4,37	3,32	2,90	2,38	1,98
8	9,50	7,31	3,66	2,46	2,72	1,63	1,97	1,04	1,44	0,66	1,11	0,46
12	6,97	4,49	2,95	1,49	2,34	1,08	1,75	0,71	1,29	0,43	0,97	0,27
16	5,59	2,68	2,91	0,95	2,09	0,65	1,61	0,39	1,21	0,22	0,94	0,15
20	5,07	2,12	2,46	0,75	2,00	0,51	1,55	0,31	1,18	0,17	0,93	0,11
24	4,76	1,66	2,38	0,61	1,96	0,42	1,54	0,25	1,17	0,13	0,91	0,08
28	4,52	1,40	2,31	0,51	1,91	0,34	1,51	0,20	1,15	0,10	0,89	0,06
32	4,37	1,20	2,28	0,45	1,89	0,31	1,50	0,18	1,15	0,09	0,89	0,05
36	4,25	1,04	2,24	0,39	1,88	0,26	1,49	0,15	1,15	0,08	0,88	0,04
40	4,12	0,90	2,21	0,33	1,85	0,22	1,48	0,13	1,15	0,07	0,88	0,04

TABELA 3 – Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S2

Número de Pontos	C = 0		C = 1		C = 2		C = 4		C = 8		C = 16	
	Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)	
	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15,10	14,74	7,26	7,24	5,19	5,25	3,45	3,70	2,47	2,99	2,13	3,88
8	6,16	5,97	2,64	2,11	2,71	1,97	3,02	2,11	3,32	2,40	3,53	3,63
12	3,59	3,23	1,85	1,33	1,87	1,28	1,95	1,31	2,07	1,56	2,20	3,09
16	2,37	1,82	1,47	0,77	1,68	0,84	2,01	1,08	2,32	1,53	2,52	3,13
20	2,01	1,37	1,28	0,54	1,42	0,55	1,62	0,70	1,76	1,15	1,82	2,95
24	1,78	0,96	1,24	0,49	1,40	0,56	1,62	0,77	1,81	1,27	1,92	2,99
28	1,73	0,78	1,27	0,30	1,44	0,35	1,63	0,65	1,80	1,26	1,95	3,05
32	1,65	0,62	1,24	0,25	1,42	0,28	1,61	0,54	1,77	1,11	1,95	2,89
36	1,60	0,52	1,22	0,17	1,44	0,19	1,64	0,38	1,90	0,90	2,22	3,10
40	1,54	0,43	1,19	0,14	1,35	0,14	1,54	0,31	1,82	0,80	2,44	2,88

TABELA 4 – Erros RMS de estimativa e aproximação observados para a superfície S3

Número de Pontos	C = 0		C = 1		C = 2		C = 4		C = 8		C = 16	
	Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)	
	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15,38	15,26	7,49	7,43	5,38	5,34	3,54	3,52	2,25	2,25	1,57	1,57
8	6,48	6,36	2,01	1,89	1,29	1,21	0,85	0,81	0,67	0,66	0,66	0,66
12	3,75	3,55	1,19	1,06	0,92	0,85	0,68	0,65	0,56	0,55	0,52	0,52
16	2,24	1,98	0,79	0,63	0,57	0,48	0,43	0,39	0,39	0,38	0,38	0,38
20	1,80	1,49	0,63	0,46	0,47	0,37	0,38	0,33	0,34	0,32	0,30	0,30
24	1,47	1,07	0,53	0,37	0,38	0,28	0,27	0,21	0,20	0,18	0,17	0,17
28	1,34	0,88	0,44	0,28	0,29	0,20	0,19	0,15	0,15	0,15	0,18	0,18
32	1,12	0,67	0,39	0,22	0,25	0,15	0,16	0,12	0,13	0,13	0,16	0,16
36	1,12	0,56	0,35	0,17	0,12	0,10	0,11	0,07	0,09	0,09	0,13	0,13
40	1,06	0,47	0,32	0,13	0,19	0,08	0,10	0,05	0,06	0,05	0,05	0,05

TABELA 5 – Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S4

Número de Pontos	C = 0		C = 1		C = 2		C = 4		C = 8		C = 16	
	Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)	
	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15,64	14,88	8,27	8,18	6,45	7,05	5,03	6,64	4,22	7,06	3,88	11,63
8	7,16	6,22	3,24	2,29	2,63	2,41	2,32	3,04	2,28	4,25	2,39	10,18
12	4,83	3,37	2,31	1,71	2,19	2,29	2,19	2,99	2,26	4,24	2,40	10,21
16	4,10	1,82	2,32	0,89	2,56	1,14	2,84	1,71	3,00	3,20	3,08	9,86
20	3,91	1,35	2,23	0,67	2,38	0,98	2,45	1,71	2,40	3,43	2,40	9,96
24	3,74	0,97	2,25	0,59	2,39	0,93	2,43	1,65	2,37	3,27	2,39	9,54
28	3,70	0,79	2,29	0,40	2,53	0,62	2,71	1,17	2,78	2,63	2,97	8,65
32	3,66	0,61	2,28	0,29	2,53	0,49	2,74	1,04	2,85	2,51	3,25	7,99
36	3,65	0,53	2,30	0,21	2,63	0,27	2,96	0,70	3,16	2,15	3,67	7,60
40	3,62	0,44	2,27	0,17	2,58	0,26	2,96	0,64	3,42	1,96	4,59	7,12

TABELA 6 – Erros RMS (%) de estimativa e aproximação observados para a superfície S5

Número de Pontos	C = 0		C = 1		C = 2		C = 4		C = 8		C = 16	
	Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)		Erros RMS (%)	
	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.	EST.	APR.
4	15,75	13,70	8,55	7,36	6,70	5,35	5,20	3,60	4,28	2,42	3,84	1,87
8	7,85	5,62	4,29	1,51	3,76	0,91	3,40	0,66	3,22	0,70	3,20	0,93
12	6,13	2,89	4,00	0,71	3,66	0,64	3,35	0,54	3,14	0,47	3,03	0,45
16	5,30	1,28	4,01	0,43	3,71	0,36	3,44	0,33	3,25	0,36	3,16	0,45
20	5,10	0,95	3,98	0,35	3,70	0,30	3,43	0,27	3,22	0,28	3,10	0,33
24	4,98	0,69	3,98	0,35	3,69	0,31	3,41	0,27	3,20	0,26	3,07	0,29
28	4,94	0,55	3,99	0,28	3,70	0,24	3,42	0,21	3,20	0,19	3,05	0,27
32	4,87	0,45	3,98	0,27	3,70	0,23	3,43	0,19	3,20	0,17	3,04	0,20
36	4,82	0,41	3,97	0,28	3,70	0,24	3,42	0,19	3,18	0,16	3,02	0,16
40	4,83	0,32	3,98	0,21	3,70	0,17	3,43	0,14	3,19	0,12	3,01	0,16

SUPERFÍCIE S1

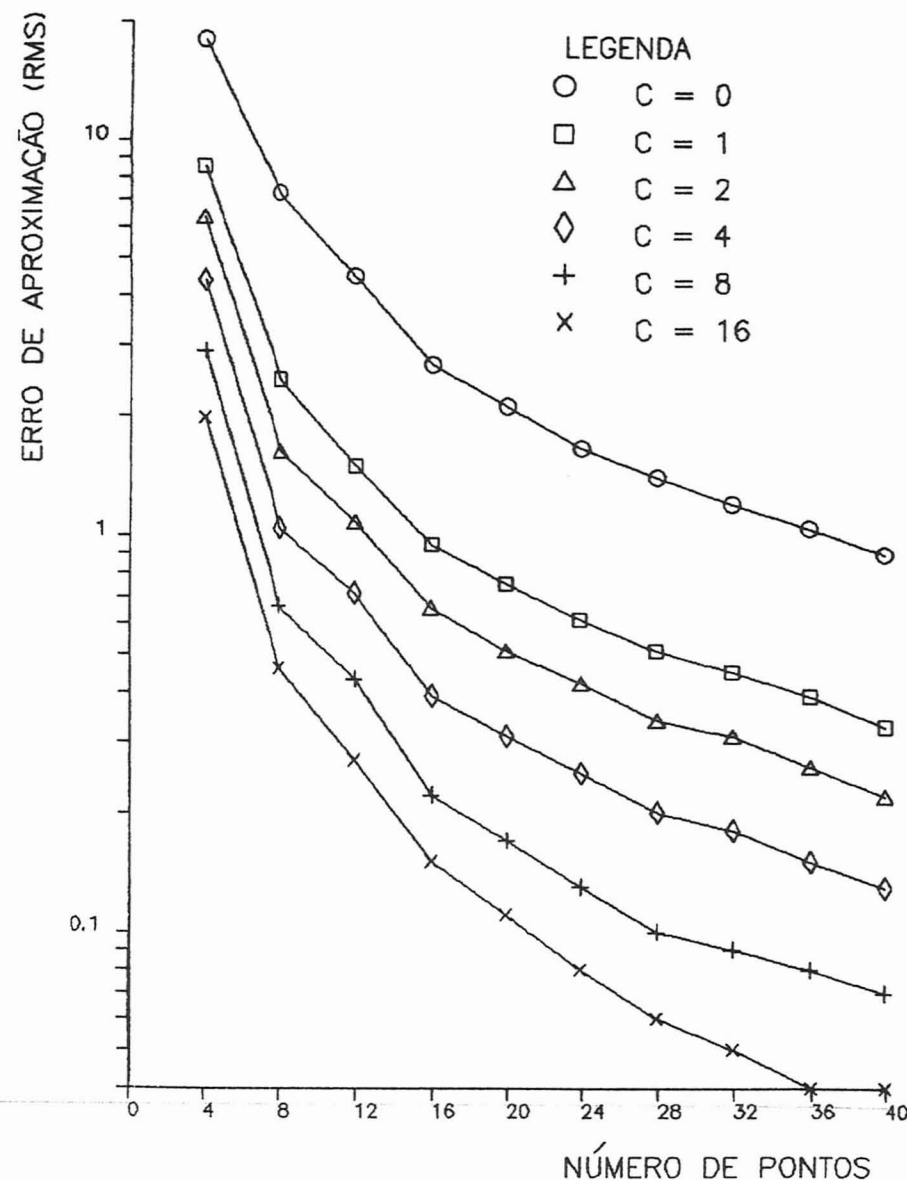


FIG. 1 – Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S1.

SUPERFÍCIE S2

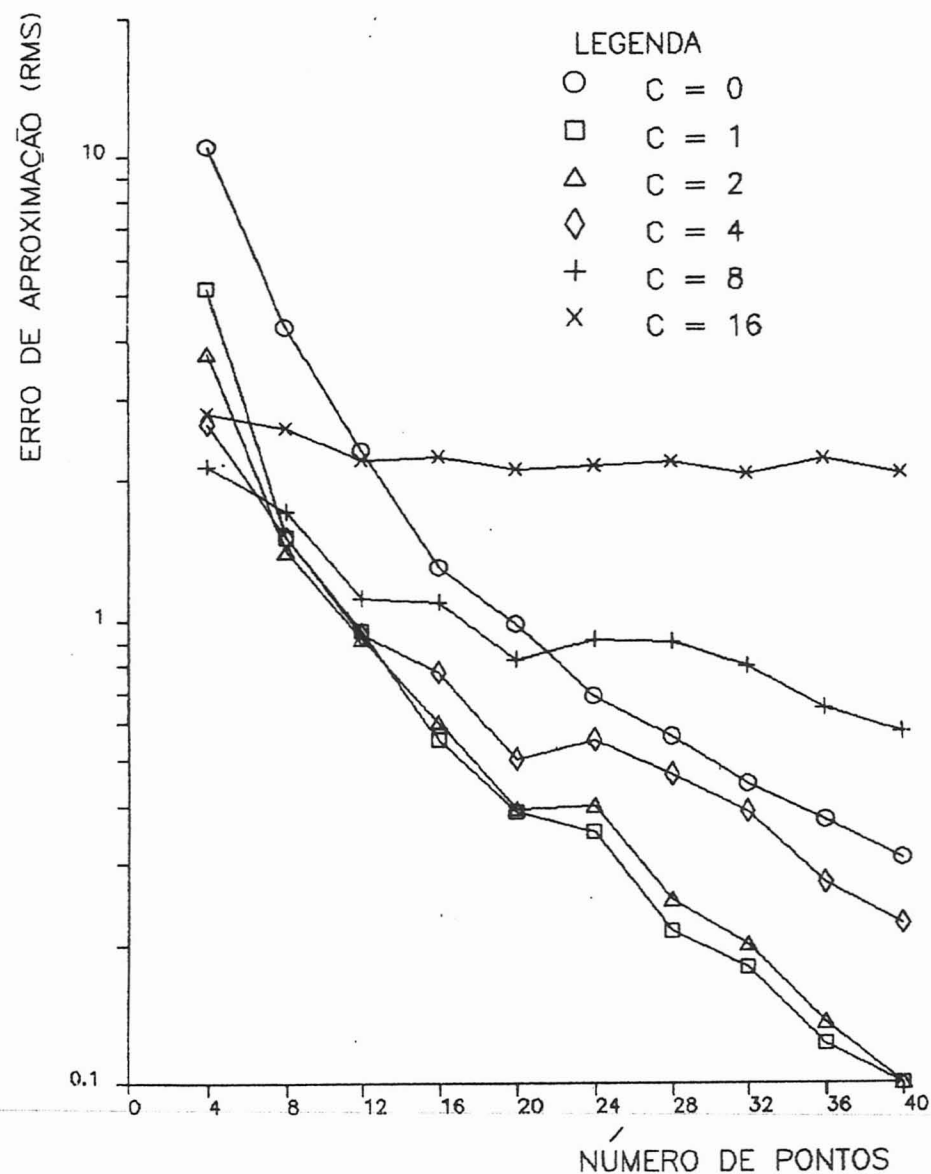


FIG. 2 – Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S2.

SUPERFÍCIE S3

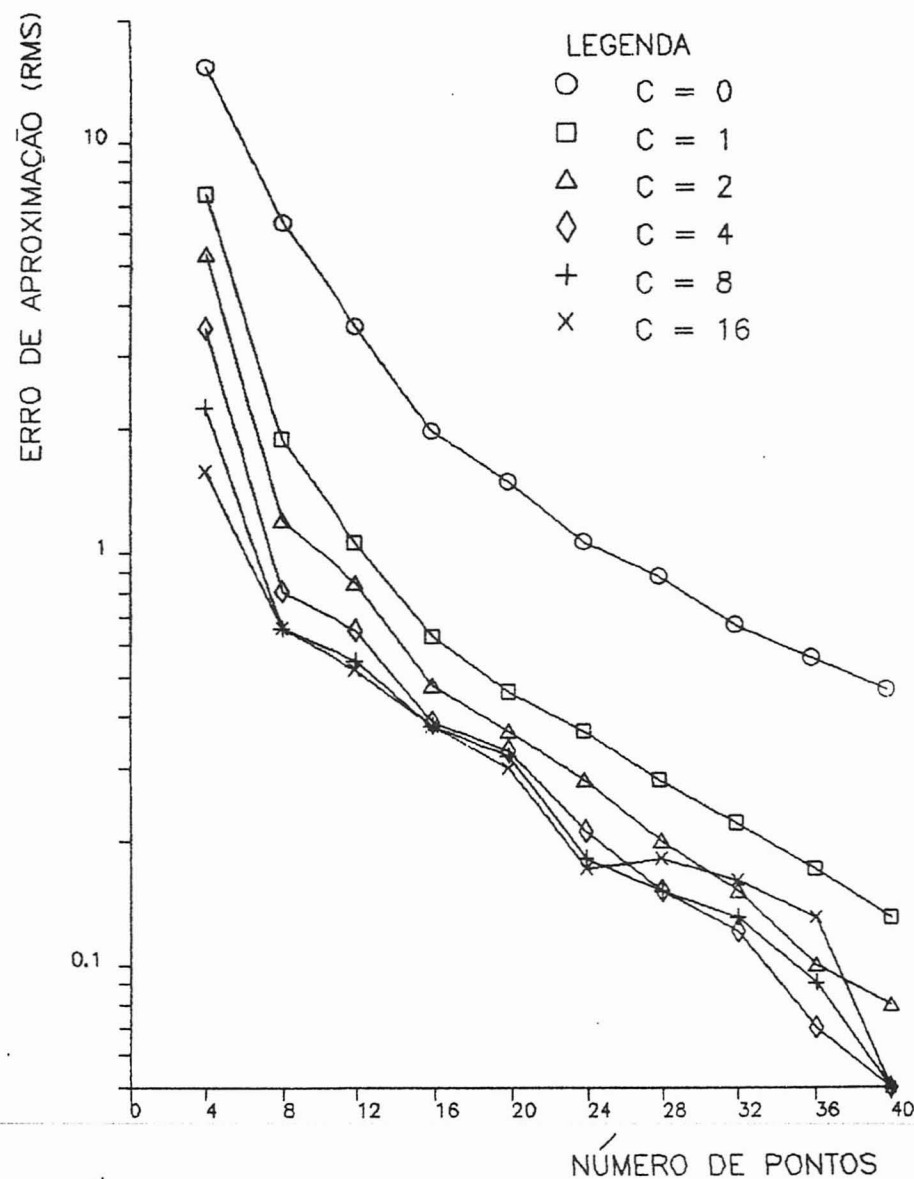


FIG. 3 – Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S3.

SUPERFÍCIE S4

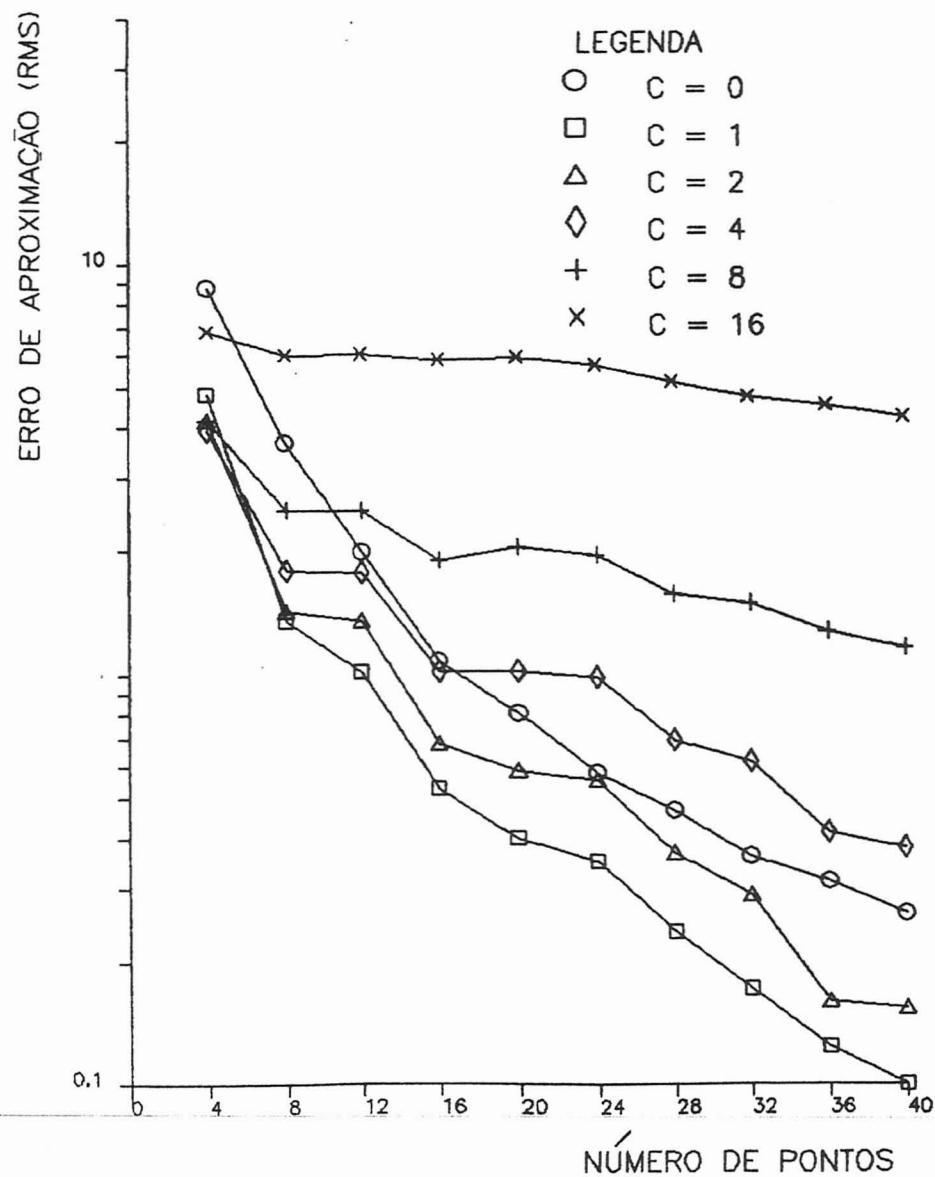


FIG. 4 – Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S4.

SUPERFÍCIE S5

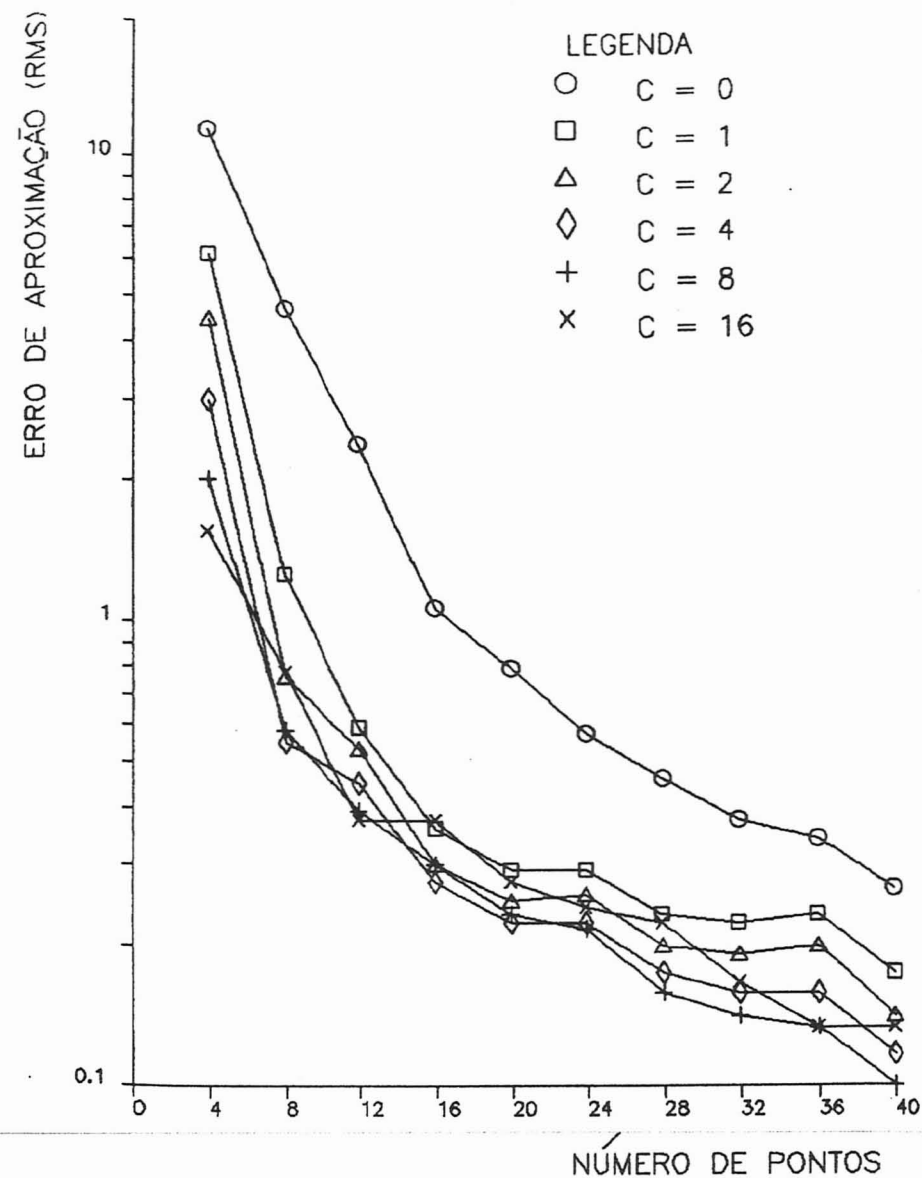


FIG. 5 – Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S5.

SUPERFÍCIE S1

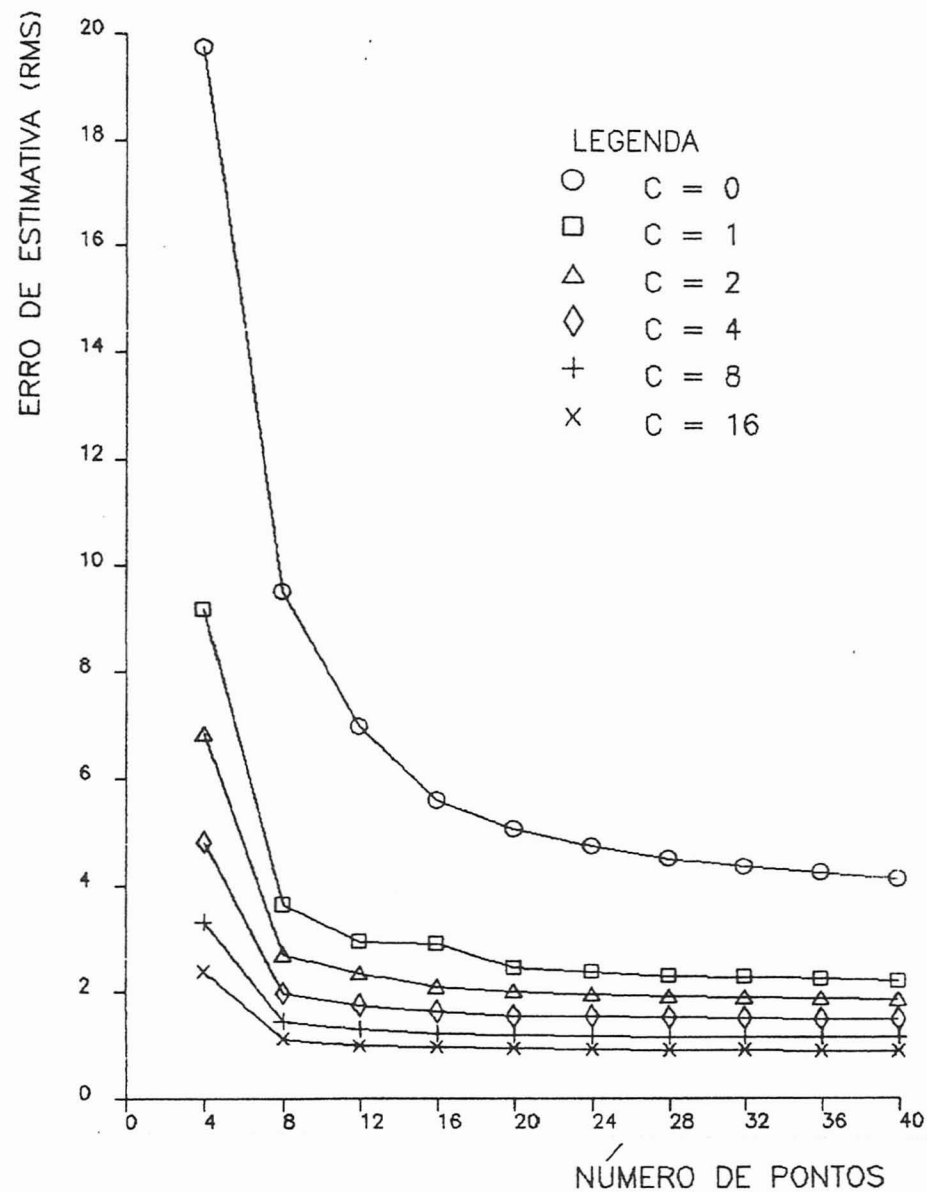


FIG. 6 – Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S1.

SUPERFÍCIE S2

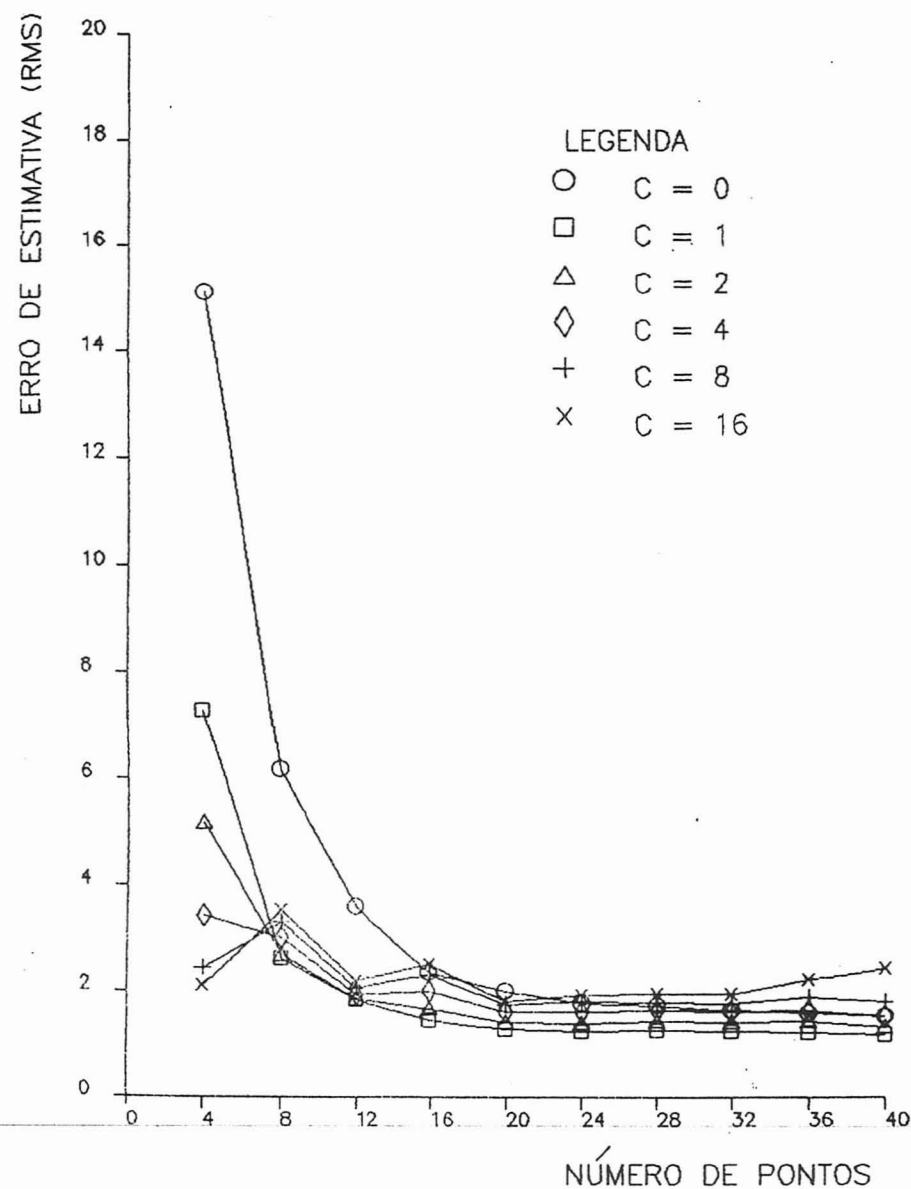


FIG. 7 – Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S2.

SUPERFÍCIE S3

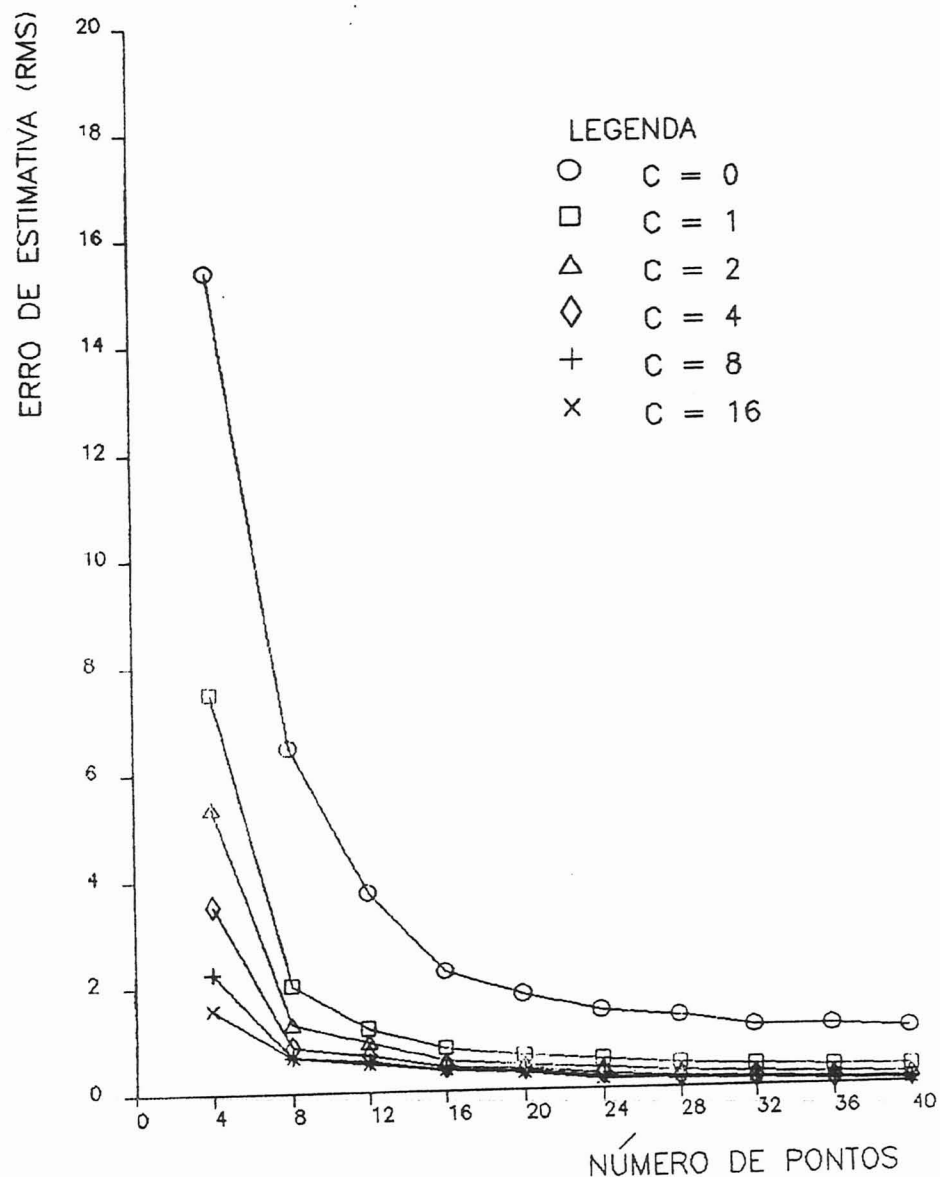


FIG. 8 – Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S3.

SUPERFÍCIE S4

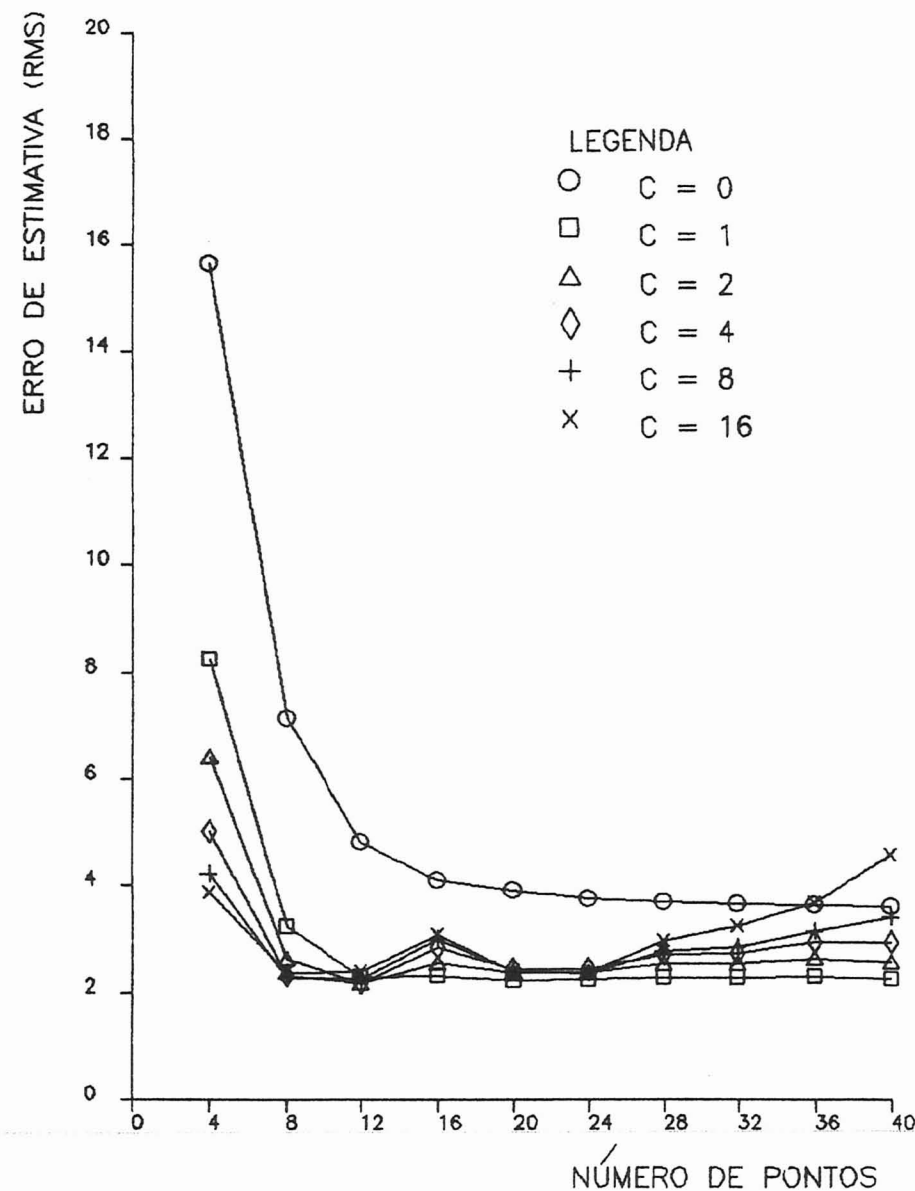


FIG. 9 – Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S4.

SUPERFÍCIE S5

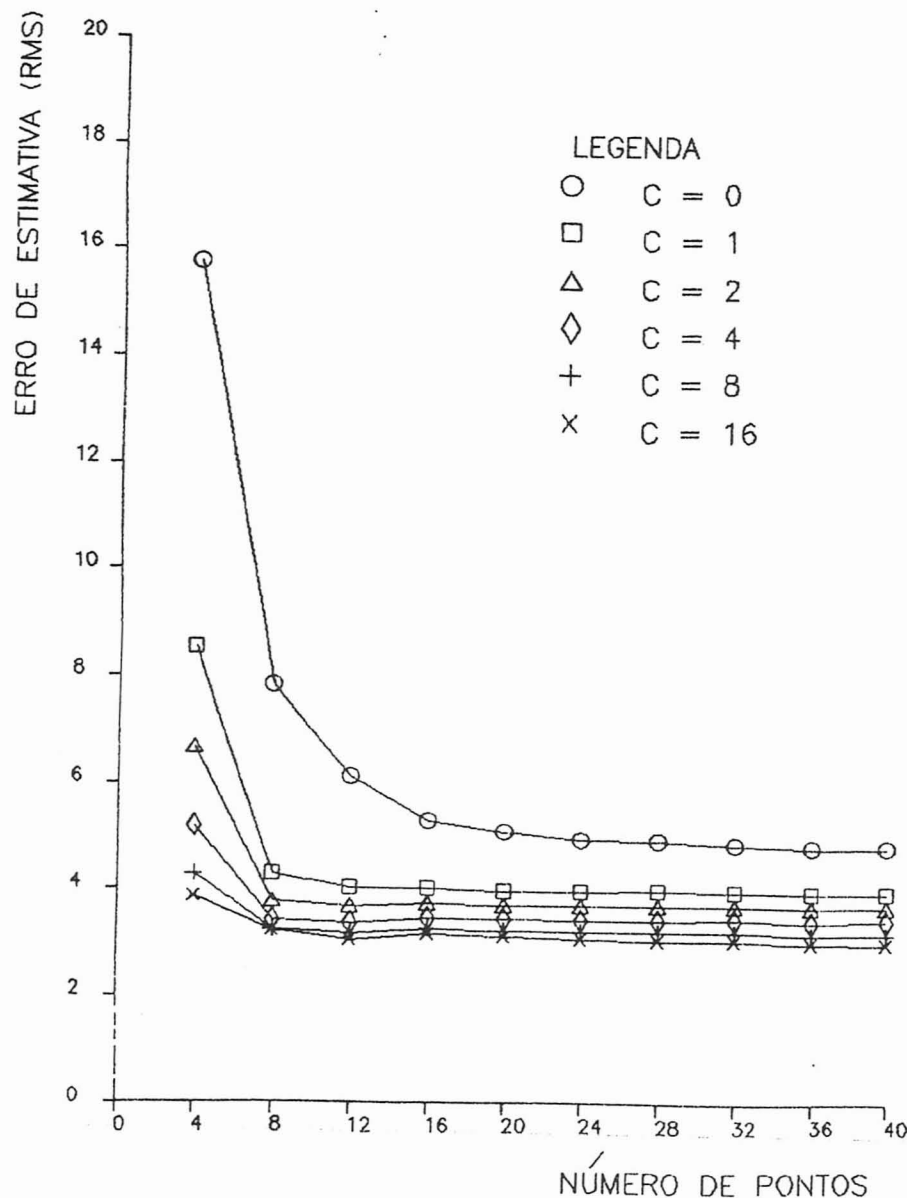


FIG. 10 – Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S5.

Nas Figuras 1 a 5 foram lançados os erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos, para cada valor da constante C. Nelas pode-se observar que:

- em geral, o ajuste local aproxima-se mais do global com o aumento do número de pontos, como seria de se esperar, porque, se o método é global, o ajuste local tende ao global quando o número de pontos do primeiro tende ao número de pontos usado no último;
- existe uma melhora significativa (diminuição do erro de aproximação) do ajuste local quando se passa de C igual a zero para C igual a 1;
- o ajuste das superfícies S1, S3 e S5, ditas topograficamente suaves, melhora com o aumento da constante C até um valor igual a 4 vezes a distância média. Essa tendência já não se verifica para as superfícies S3 e S5 quando se usa C maiores ou iguais a 8, devido, provavelmente, à forma dessas superfícies;
- o ajuste das superfícies S2 e S4, topograficamente acidentadas, piora com o aumento de C, a partir de C=1 quando há uma reversão na tendência, ou seja, os erros RMS de aproximação passam a aumentar com o valor de C.

Desse modo, pode-se afirmar que as equações multiquádricas definidas sobre suportes locais aproximam aquelas definidas sobre um suporte global, quando se utiliza no mínimo 16 pontos de dados vizinhos e C iguais a valores pequenos, por exemplo 0,6 vezes a distância média entre os pontos de dados, conforme sugestão de HARDY⁷. A utilização de C pequeno garante um ajuste bom, mesmo se a superfície for bastante irregular ou topograficamente acidentada. O ideal seria conhecer, *a priori*, o tipo de superfície que seria interpolada para se escolher corretamente o valor da constante.

As Figuras 6 a 10 apresentam os gráficos dos erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos, onde cada curva representa um valor da constante C utilizado nesse estudo. Nessas figuras confirma-se o que já havia sido observado na Tabela 1, ou seja, que para as superfícies S1, S3 e S5, consideradas topograficamente suaves, o erro de estimativa diminui com o aumento da constante C, enquanto para as superfícies S2 e S4, ou topograficamente acidentadas, o erro aumenta com essa constante. Além disso, pode-se observar que para as superfícies suaves o erro diminui com o aumento do número de pontos, ao passo que para as superfícies irregulares ou acidentadas não se verifica essa tendência. Observa-se, nesses casos, que com o uso de maior número de pontos vizinhos o erro tende a aumentar, pois se já existe uma grande variabilidade dos dados iniciais, quanto maior o número de pontos, maior a variabilidade dos dados e, conseqüentemente, maior o erro de estimativa. Para essas superfícies irregulares ou topograficamente acidentadas, segundo estudo realizado pelo autor envolvendo equações multiquádricas para dados em três variáveis independentes (YAMAMOTO⁹), deve-se proceder, antes do ajuste, a uma transformação logarítmica dos dados. Esta transformação reduz o intervalo de variação original grande para um intervalo pequeno, tornando mais linear o problema e, conseqüentemente, melhorando o ajuste de modelos digitais de superfícies.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentados demonstraram que é viável a utilização de equações multiquádricas, como método local, para interpolação de dados dispersos em duas variáveis independentes.

Quanto ao número de pontos a ser utilizado nesses ajustes, verificou-se que a utilização de algo entre 12 e 24 pontos é um bom compromisso entre a precisão e o tempo de computação requerido.

Quanto à escolha da constante C, verificou-se que, tanto para ajustes globais quanto para ajustes locais, deve-se evitar o uso de constante nula e que o seu valor deve ser escolhido em função da ordem de grandeza da distância média entre os pontos de dados. Em outras palavras, o ajuste de equações multiquádricas é bastante dependente do sistema de coordenadas escolhido na localização dos pontos de dados (coordenadas numericamente grandes, como, por exemplo, aquelas do sistema UTM, devem ser evitadas e substituídas por valores transformados).

AGRADECIMENTOS

O autor expressa os seus agradecimentos a todas as pessoas que o auxiliaram, em especial ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, que possibilitou a realização da sua Dissertação de Mestrado, da qual foi derivado este trabalho.

YAMAMOTO, J.K. – The multiquadratic equations as local method in the surface Digital Modelling. *Geociências*, São Paulo, (nº esp.): 1-22, 1990.

ABSTRACT: This paper presents the results of a study carried out to test the applicability of multiquadratic equations as local method for interpolation of scattered data sets. The multiquadratic equations were proposed originally by Hardy (1971) as a global method for analytical representation of surfaces from discrete data points. This method was developed because the maps computed from polynomials or Fourier harmonics were not so accurate for Engineering purposes. The major restriction to use the multiquadratic equations as global method is the number of data points due to either the impossibility of resolution of large linear systems or the increase of computation time making their use prohibitive. Due to this restriction, a research was performed to evaluate the possibility of using multiquadratic equations as local method of interpolation, by computing successively small areas of the map until its complete coverage. In this study were made a series of interpolations under several condition of number of neighbor points and values of C constant for scattered data sampled on five mathematically defined surfaces. The results showed the viability of using the multiquadratic equations as local method of interpolation for scattered data points.

KEY-WORDS: Interpolation; multiquadratic equations; surface modeling.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. DORN, W.S. & McCRAKEN, D.D. – *Cálculo numérico com estudos de casos em FORTRAN IV*. Trad. de J.A.R. dos Santos e A.L.S. de Almeida. Rio de Janeiro, CAMPUS e EDUSP, 1978. 568 p.
2. FRANKE, R. – Scattered data interpolation: Test of some methods. *Math. Comput.*, 38(157): 181-200, 1983
3. FRANKE, R. & NIELSON, G. – Smooth interpolation of large sets of scattered data. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15: 1691-1704, 1980.

4. HARDY, R.L. – Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geoph. Res.*, 76(8): 1905-1915, 1971.
5. HARDY, R.L. – Analytical topographic surfaces by spatial intersections. *Phot. Eng.*, 38(5): 452-458, 1972.
6. HARDY, R.L. – Least square prediction. *Phot. Eng. & Rem. Sens.*, 43(4): 475-492, 1977.
7. HARDY, R.L. – Comunicação pessoal recebida pelo autor, 1985.
8. McLAIN, D.H. – Drawing contours from arbitrary data points. *The Comput. J.*, 19(2): 178-181, 1974.
9. YAMAMOTO, J.K. – *Representações gráficas espaciais em geologia-Aplicações no Complexo Alcalino de Anitápolis*. São Paulo, IG-USP, 1986. 167p. (Dissertação-Mestrado)