Otimalidade em um Sistema de Eventos Discretos

Leônidas de Oliveira Brandão
Dep. Ciência da Computação Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo
E-mail : leo@ime.usp.br
WWW : http://www.ime.usp.br/~leo

Resumo

Neste trabalho estudamos um *Sistema de Manufaturas Flexíveis* (SMF), modelado com um sistema dinamico de eventos discretos que é composto por uma máquina, vários produtos (sem realimentação), com tempos de "set-ups" e com custos de armazenamento. Este sistema será controlado por políticas induzidas por "Cones Round-Robin". Mostraremos que, dentre esta classe de políticas, "Clearing Round-Robin" é a política que minimiza o custo médio ponderado em um horizonte finito.

O modelo que estudaremos é composto por uma máquina e n produtos, numerados de 1 a n. As peças do produto i chegam ao sistema à uma taxa constante d_i ($\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n_{++}$). A máquina pode processar (continuamente) um único produto a cada instante, tendo n reservatórios ("buffers"), um para cada produto. O vetor $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n_+$ descreve o número de peças acumuladas até o instante t, isto é, $x_i(t)$ é o número de peças do produto i aguardando processamento no instante t. O vetor de estado do sistema será $\boldsymbol{x}(t)$.

Uma peça do produto i demanda exatamente τ_i unidades de tempo para ser produzida, portanto $\tau_i x_i(t)$ seria o intervalo de tempo necessário para que o sistema pudesse "limpar" o "buffer" i, considerando apenas a quantidade acumulada até t (descontando-se as entradas de peças neste intervalo). Uma condição necessária para que um SMF seja *estável* é que sua carga de trabalho seja menor que um, isto é, que $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i = \sum_{i=1}^n d_i \tau_i < 1$. Denotaremos por ρ o vetor cuja componente i é ρ_i.

Existe um tempo de preparação para que a máquina deixe de produzir um produto e passe a processar outro, denominado na literatura por tempo de "set-up". Como estamos interessados em políticas *"round-robin"*[1] e a máquina contém n produtos, o vetor $\boldsymbol{\delta}$ de "set-ups" pode ser tomado no $\mathbb{R}^n_+$.

Estamos interessados em políticas de controle induzidas por *cones* do tipo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. Nesta política a trajetória evolui "dentro" do cone e os controles a serem aplicados são selecionados a partir de uma relação biunívoca com as faces: sempre que a trajetória alcança uma "nova" face disparamos o controle associado a esta face.

Devido aos tempos de "set-ups", teremos $n+1$ diferentes controles, $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{v}^i = \boldsymbol{d} - 1/\tau_i \boldsymbol{e}^i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ ($\boldsymbol{e}^i$ o i-ésimo vetor-coluna da base canônica), assim, $\boldsymbol{x}(t)$ deve satisfazer $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}^i$ (para algum $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$). Portanto $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^n\}$ (ou simplesmente $\{1, \ldots, n\}$) são os controles que devemos associar com as facetas (faces de dimenção $n-1$) dos cones. Construiremos os cones de modo que a sequência "round-robin" de controle seja $\{1, 2, \ldots, n\}$ e a face i ($\mathbf{A}_i \boldsymbol{x} = 0$) dispare a produção de $(i \bmod n) + 1$. Para isto basta impormos que: $\mathbf{A}d \geq \mathbf{0}$ (evita que a trajetória saia do cone durante "set-ups"); $\mathbf{AV} \in \mathcal{S}$ ($\mathbf{M} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \{m_{ij} < 0 \Leftrightarrow i = j\}$),

[1] A sequencia $\{s_i\}_{i \in \mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$, é "round-robin" se, e somente se $(s_{ki+1}, s_{ki+2}, \ldots, s_{ki+n}) = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, para todo $k \geq 0$.

onde $\mathbf{V}$ é a matriz cuja coluna i é o vetor-coluna $\boldsymbol{v}^i$; e $\mathbf{A}^{-1} \leq \bigcirc$ (pode-se provar que $\{x : \mathbf{A}x \geq \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n_+ \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \leq \bigcirc$), [PHK-94, HBG-95.a].

Devido à política de cone, podemos estudar o comportamento do sistema nos eventos *mudança de controle*. Assim, x_i^k será o vetor de estado do sistema no instante em que este inicia preparação para produzir pela k-ésima vez o produto i e Δ_i^k o tempo utilizado nesta rodada de produção. Convencionaremos $\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}_n^k$ e Δ^k como sendo o vetor-coluna dos tempos de produção da rodada k.

Dado um sistema $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^{n \times n}_{++}$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n_{++}$ um vetor de custos (c_i é o custo unitário para armazenar peças i por uma unidade de tempo), estamos interessados em determinar qual a matriz geradora do cone que minimiza o custo médio da primeira rodada de produção, isto é

$$\mathbf{A}^* = \arg\min_{\mathcal{R}} \frac{1}{||\Delta^1||_1 + ||\boldsymbol{\delta}||_1} \int_0^{||\Delta^1||_1 + ||\boldsymbol{\delta}||_1} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) \mathrm{d}t \qquad \textbf{(P)}$$

onde $\mathcal{R} = \{\mathbf{AV} \in \mathcal{S};\ \mathbf{A}^{-1} \leq \bigcirc;\ \boldsymbol{y}^0$ deve estar na face n e só nesta; e $||\boldsymbol{y}^0||_1 = 1\}$ ($||\boldsymbol{y}^0||_1 = 1$ é usado para evitar solução trivial). [HBG-95.b] resolve um problema análogo a este considerando um horizonte infinito.

Pode-se mostrar que $\mathbf{V}^{-1} \leq \bigcirc$ e assim podemos estudar o sistema através da *dinâmica transformada* $\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ (esta idéia foi introduzida em HBG-95.a). Neste caso o cone $\{\boldsymbol{y} : \mathbf{AVV}^{-1}\boldsymbol{x} = \mathbf{M}\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}\}$ passa a estar no $\mathbb{R}^n_-$ e os controles ficam mais simples ($\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{v}^i = \boldsymbol{e}^i$). Com alguns cálculos, descobrimos que $\mathbf{AVV}^{-1}\boldsymbol{d} = -1/(1-\rho)\rho$.

Usando a dinâmica transformada, podemos observar que $\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{y}^k + \Delta^{k+1} - ||\boldsymbol{\delta}||_1/(1-\rho)\rho$ e que $\boldsymbol{y}_i^{k+1} = \boldsymbol{y}^{k+1} + \Delta_1^{k+1}\boldsymbol{e}^1 + \cdots + \Delta_i^{k+1}\boldsymbol{e}^i - (\delta_1 + \cdots + \delta_i)/(1-\rho)\rho$. A partir destas expressões podemos mostrar que $\boldsymbol{y}^{k+1} = \mathbf{J}\boldsymbol{y}k + 1/(1-\rho)\mathbf{L}^{-1}\mathbf{SM}\rho - ||\boldsymbol{\delta}||_1/(1-\rho)\rho$ e $\Delta^{k+1} = \mathbf{L}^{-1}(-\mathbf{M}\boldsymbol{y}^k + 1/(1-\rho)\mathbf{SM}\rho)$, onde $\mathbf{L}$ é a triangular inferior de $\mathbf{M}$, $\mathbf{U}$ sua triangular estritamente superior ($\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$), $\mathbf{J} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}$ e $\mathbf{S} = \mathrm{diag}\{\delta_1, \delta_1 + \delta_2, \ldots, ||\boldsymbol{\delta}||_1\}$.

Pode-se mostrar que $\mathbf{L}^{-1} \leq \bigcirc$ (lembre-se que $\mathbf{M} \in \mathcal{S}$) e que $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{SL}$ é triangular inferior, com diagonal igual a de $\mathbf{S}$ e demais componentes não positivos. Assim, pode-se escrever $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{SL}$ como $\mathbf{S} + \mathbf{G}$, sendo $\mathbf{G} \leq \bigcirc$ triangular estritamente inferior.

Agora estamos prontos para enunciar o principal resultado deste trabalho,

Teorema 1 *Se $c_i/\tau_i = c_j/\tau_j$ e $c_i < \tau_i(c_1 d_1 + \cdots + c_n d_n)$, para todo i e j em $\{1, 2, \ldots, n\}$, então a matriz que resolve* **(P)** *é $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (portanto, satisfazendo as restrições $\mathcal{R}$).*

[PHK-94] J. R. Perkins, C. Humes Jr. & P. R. Kumar, 1994. *Distributed Control of Flexible Manufacturing Systems: Stability and Performance*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 37(1), pp. 132-141, abr.

[HBG-95.a] C.Humes Jr., L.O.Brandão e M.P.Garcia, 1995. *A Mixed Dynamics Approach for Linear Corridor Policies (A Revisitation of Dynamic Setup Scheduling and Flow Control in Manufacturing Systems)*, "Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications", Vol. 5, pp. 59-82, jan.

[HBG-95.b] C.Humes Jr., L.O.Brandão e M.P.Garcia, 1995. *On the Optimal Design of Linear Corridor Policies* ("invited paper"), Proceedings da 33rd Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Monticello, Illinois, pp. 510-518, out.