

Eng. HOMERO BARBOSA

Propriedades das linhas de transmissão

TESE

apresentada para o concurso para professor
catedrático de "Eletrotécnica (IV Parte) Tele-
comunicação", na Escola Politécnica da Uni-
versidade de São Paulo.

OFFERTA, 1940

Nº

São Paulo, Fevereiro de 1939

Nome completo do autor:

Homero Barbosa de Assis Martins

DEDALUS - Acervo - EPEL



31500017996

OK

PEL

Escola Politécnica da USP
Divisão de Biblioteca

FT-63

Propriedades das linhas de transmissão

pelo eng. HOMERO BARBOSA

SUMÁRIO

000 — Considerações preliminares.

- 010 — Justificação da escolha do tema.
- 020 — Esboço histórico.
- 030 — Métodos de análise das linhas
- 040 — Método seguido pelo autor
- 050 — Classificação decimal dos parágrafos

100 — Equações gerais

- 110 — *Relações fundamentais*
 - 111 — Definição da impedância característica.
 - 112 — Definição da constante de propagação
- 120 — *Relações hiperbólicas*
- 130 — *Impedâncias terminais*
 - 131 — Expressão da impedância característica
 - 132 — Expressão da constante de propagação
- 140 — *Fórmulas gerais da propagação ao longo das linhas*

200 — Fenômenos de reflexão

- 210 — *Coefficiente de reflexão*
- 220 — *Interpretação dos fenômenos de reflexão*
 - 221 — A linha de comprimento infinito
- 230 — *Localização do ponto de reflexão*

300 — Constantes secundárias da linha

- 310 — *Impedância característica*
- 320 — *Constante de propagação*

400 — Ondas estacionárias

500 — Alguns casos particulares

- 510 — *A linha em circuito aberto*
 - 511 — Caso de R e G desprezíveis
- 520 — *A linha em curto circuito*
 - 521 — Linhas equivalentes
 - 522 — Reatâncias aparentes
 - 523 — Circuito anti-resonante equivalente
 - 524 — Idem, caso particular
- 530 — *Cálculo das constantes lineares*
 - 531 — Exemplo numérico
- 540 — *Linhas de 1/4 de comprimento de onda*
 - 541 — Linha em circuito aberto
 - 542 — Linha em curto circuito

600 — A linha indeformante

700 — A linha como transformador

800 — A linha como filtro elétrico

- 810 — *Caso da linha em curto circuito*
- 820 — *Caso da linha em circuito aberto*
- 830 — *Circuitos mistos*

900 — Considerações sobre o cálculo dos condutores.

- 910 — *Aplicações práticas*
 - 911 — Cálculo do diâmetro dos condutores
 - 911.1 — Tabela dos diâmetros máximos
 - 912 — Disposição dos condutores
 - 912.1 — Cálculo dos condutores ócos
 - 912.2 — Exemplo numérico

000 — Considerações preliminares.

010 — As linhas de transmissão constituem, certamente, o circuito mais interessante encontrado em eletro-técnica. Efetivamente, nenhum outro poderá excedê-lo em simplicidade mecânica, reduzido, como o é em certos casos, a um simples condutor de pequeno comprimento geométrico; poucos poderão ultrapassá-lo na complexidade dos fenômenos de que é sede, na variedade das aplicações e na generalidade do seu emprêgo em eletro-comunicações. Não ha sistema elétrico de transmissão da inteligência à distancia — radio, audio ou video — que possa prescindir de uma linha de transmissão, pelo menos em uma das suas modalidades mais típicas: antenas, linhas alimentadoras das antenas, linhas telegráficas e telefônicas.

020 — Por muitos anos, praticamente desde que começaram a ser empregadas, por volta de 1840, as linhas de transmissão foram usadas de maneira inteiramente empírica, sem que se tivesse a menor idéia da forma pela qual ocorria o fenômeno da propagação. A princípio era utilizado um fio único, fazendo-se o retorno pela terra, tendo sido esta a primeira modalidade estudada analiticamente por Lord Kelvin, em 1885. Este estudo, entretanto, poder-se-á considerar apenas como um trabalho preparatório, representando a primeira tentativa para o solucionamento do problema, porquanto Kelvin não levou em conta um fator preponderante, a auto-in-

dução da linha que, somente dois anos mais tarde, foi considerada por Kirchoff.

Outros pesquisadores, como Weber e Kohrausch, prosseguiram na mesma senda, porém, todos êles, supondo os condutores isolados no espaço e completamente afastados de qualquer outro corpo, o que invalidava os resultados obtidos, para todos os fins práticos.

Foi somente a partir de 1880, com o advento da telefonia, que começaram a ser empregadas as linhas de dois condutores e isso porque a experiência demonstrou que, o retorno pela terra, elevava consideravelmente o nível dos ruídos parasitos.

Coube a Heaviside, a partir de 1886, retomar os estudos praticamente abandonados durante cêrca de trinta anos, introduzindo a noção de perditância e realizando uma revisão completa do assunto, da qual resultaram as normas ainda hoje seguidas na análise das linhas.

Outros experimentadores, nessa mesma época, concorreram grandemente para o progresso das comunicações elétricas, devendo-se salientar, especialmente, os trabalhos de J. J. Thomson, em 1886, e os de Sommerfeld em 1899, ambos sobre linhas de um condutor único.

O primeiro trabalho rigoroso, versando sobre linhas de comprimento infinito, é devido a G. Rie e foi publicado em 1900.

030 — De um modo geral, poderemos classificar os métodos de análise das linhas de transmissão em dois grandes grupos: os métodos rigorosos e os métodos semi-rigorosos. Os primeiros se apoiam diretamente na teoria da propagação das ondas eletromagnéticas e analisam, partindo das conhecidas equações fundamentais de Maswell, o modo pelo qual os campos eletrostático e magnético se redistribuem no espaço em consequência da presença do condutor. A complexidade do fenômeno, porém, é de tal natureza que, mesmo nas análises mais rigorosas, ha sempre a necessidade de serem abandonados certos termos, que se demonstram desprezíveis, ordinariamente resultando apenas três componentes eletromagnéticas a serem examinadas: a onda transmitida, a onda dissipativa, por conta da qual correm as perdas ao longo da linha, e a onda irradiada, representando perdas no espaço que circunda a linha de transmissão. Das três componentes, as que desempenham papel mais importante, na transmissão ao longo de linhas comuns, são a primeira e a segunda.

O que distingue essencialmente os métodos rigorosos dos semi-rigorosos é que naqueles nada é desprezado sem previamente ser demonstrada a legitimidade deste modo de proceder, em face das condições peculiares ao problema; ao passo que, nos métodos semi-rigorosos, ignora-se inicialmente a existência de todas as componentes, salvo as duas primeiras acima citadas.

Em resumo, nos métodos rigorosos, a presença do condutor reduz as componentes a duas principais: a onda transmitida, com sede no meio que circunda imediatamente o condutor, segundo cujo eixo se propaga, e a onda dissipativa, que se propaga em direção ao eixo. O campo elétrico da onda dissipativa, paralelo ao eixo do condutor, ocasiona a circulação da corrente utilizada na extremidade da linha e considerada, neste caso, como elemento ocasional,

representando perdas a serem supridas, como as demais, pela energia em propagação ao longo da linha. Em vez de onda transmitida prefere-se, às vezes, a expressão «onda guiada» e, sob esse aspecto, desejando frizar nitidamente a verdadeira natureza dos fenômenos à luz das teorias de Maswell, diz Heaviside que o condutor poderia ter sido denominado, com muito acêrto, um «obstrutor». No caso de uma antena, que aliás não passa de uma linha de transmissão, tomam-se providências especiais afim de que prepondere a terceira das componentes a que nos referimos, isto é, a onda irradiada.

040 — Iniciaremos o presente trabalho com uma dedução das fórmulas empregadas no estudo das linhas de transmissão, seguindo marcha diferente das usualmente adotadas para esse fim. Ambos os métodos a que nos referimos no parágrafo anterior — os rigorosos e os semi-rigorosos — são puramente filosóficos, no sentido de que se baseiam em condições lógicas, porém irrealizáveis experimentalmente.

A demonstração que ora oferecemos não pretende ser mais rigorosa do que o método clássico, semi-rigoroso, encontrado na maioria dos compêndios destinados aos engenheiros pois, também, considera o circuito a sede exclusiva do fenômeno, desconhecendo a verdade fundamental de que a transmissão ao longo de fios é um caso particular da propagação geral; baseada, porém, em factos experimentais, está muito de acôrdo com a mentalidade do engenheiro, obrigado sempre, por contingências do ofício, a não perder contacto com a realidade das coisas.

050 — A numeração dos capítulos obedeceu ao seguinte critério: o assunto foi dividido em dez secções ou classes principais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Cada uma dessas classes, por sua vez, foi subdividida de maneira idêntica, e assim sucessivamente. As primeiras divisões foram consideradas numeros inteiros, e as seguintes como decimais. As equações e as figuras foram numeradas como subdivisões dos respectivos capítulos. Depois de terminada a classificação, todos os números foram multiplicados por 100, afim de que os decimais resultantes não apresentassem mais de duas casas.

Nas exposições teóricas e para a representação das impedâncias, adotamos a notação mais geralmente empregada pelos autores modernos.

100 — Equações gerais

110 — Relações fundamentais.

Uma linha de transmissão comportando-se como uma rede de impedâncias lineares bilaterais, poderá ser representada numa determinada frequência, arbitrariamente escolhida, por um quadripolo apresentando em sua extremidade terminal a impedância de carga Z_T . Se Z_I designar a impedância inicial oferecida pela linha ao gerador, teremos (figura 110.1):

$$Z_I = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2 \left(\frac{Z_1}{2} + Z_T \right)}{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_T} =$$

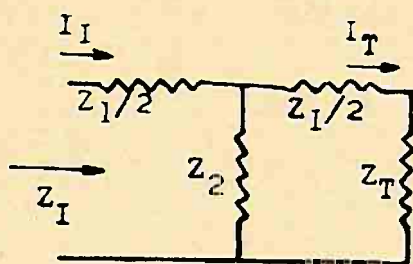


Figura 110.1

$$\frac{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2 + Z_T \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)}{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_T}$$

Ou ainda, sob outra forma

$$Z_I = \frac{\left[\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} + Z_T \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right) \right]}{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_T}$$

O termo destacado entre chaves, $\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}$

apresenta a particularidade de, quando substituído em lugar de \$Z_T\$, ocasionar \$Z_I = Z_T\$:

$$Z_I = \frac{Z_T + Z_T \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)}{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_T} =$$

$$\frac{Z_T \left(Z_T + \frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)}{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_T} = Z_T = Z_0$$

Nós, daqui por diante, o designaremos por \$Z_0\$ representando êle a impedância característica da linha, ou uma impedância tal que, ligada à extremidade terminal da linha, ocasione uma impedância inicial também igual a \$Z_0\$. Então:

$$Z_I = \frac{Z_0^2 + Z_T \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)}{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_T}$$

111 — Uma consequência imediata dessa definição é que a impedância característica independe do comprimento da linha. Com efeito, uma linha de comprimento \$l\$ poderá ser considerada como constituída pela justaposição de \$n\$ secções ou elementos de linha, \$n\$ podendo ser tão grande quanto desejemos. Consideremos isoladamente a última secção ou trecho da linha e apliquemos à sua extremidade uma impedância \$Z_0\$ tal que ocasione inicialmente idêntica impedância; um segundo segmento anexado

ao primeiro para composição da linha, será terminado pela sua impedância característica e oferecerá, inicialmente, uma impedância igual a \$Z_0\$ e assim sucessivamente, adicionando-se novos trechos, reconstituirmos a linha primitiva terminada pela impedância \$Z_0\$ e oferecendo ao gerador uma impedância também igual a \$Z_0\$.

112 — Neste caso particular, da linha terminada pela impedância característica, será fácil deduzirmos a relação entre as correntes inicial (ou introduzida na linha) e terminal. Efetivamente, pela figura 110.1, teremos:

$$\frac{I_I}{I_T} = 1 + \frac{Z_0 + \frac{Z_1}{2}}{Z_2} = \frac{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}}{Z_2}$$

Se, em vez de considerarmos os valores extremos, tomarmos os valores sucessivos, isto é, se considerarmos pontos da linha distantes entre si de um metro, por exemplo, e designarmos por \$I_1, I_2, I_3\$, etc., as correntes no início e no fim de cada trecho, obteremos:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{I_3}{I_4} = \dots = \frac{I_T - 1}{I_T} = e^\gamma,$$

sendo

$$\gamma = \log_e \frac{I_1}{I_2},$$

o que resulta naturalmente do carácter iterativo do circuito.

No caso da linha de comprimento \$l\$:

$$\frac{I_I}{I_T} = e^{\gamma l} \tag{112.1}$$

Ou

$$\gamma l = \log_e \frac{I_I}{I_T} \tag{112.2}$$

expressões nas quais \$l\$ representa o comprimento geométrico e \$\gamma l\$ o comprimento elétrico da linha; à \$\gamma\$, definido como acima indicamos, denomina-se constante de propagação.

120 — Relações hiperbólicas.

Ora, uma vez que

$$e^{-\gamma l} = \frac{I_T}{I_I},$$

concluiremos que

$$\cosh \gamma l = \frac{\frac{I_I}{I_T} + \frac{I_T}{I_I}}{2} =$$

$$\frac{2 Z_2 \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_0 \right) + Z_1 \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_0 \right)}{2 Z_2 \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_0 \right)} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \quad (120.1)$$

Analogamente

$$\operatorname{senh} \gamma l = \frac{I_I - I_T}{2} =$$

$$\frac{\left(Z_0 + \frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)^2 - Z_2^2}{2 Z_2 \left(Z_0 + \frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)} = \frac{Z_0}{Z_2} \quad (120.2)$$

$$\operatorname{tgh} \gamma l = \frac{Z_0}{\frac{Z_1}{2} + Z_2} \quad (120.3)$$

$$\operatorname{senh} \frac{\gamma l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad (120.4)$$

$$\operatorname{cosh} \frac{\gamma l}{2} = \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} \quad (120.5)$$

$$\operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_1}{Z_0} \quad (120.6)$$

Portanto, para a construção do quadripolo equivalente, os valores dos ramos serão deduzidos das relações (120.2) e (120.6):

$$Z_2 = \frac{Z_0}{\operatorname{senh} \gamma l} \quad \text{e} \quad \frac{Z_1}{2} = Z_0 \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2}$$

130 — Impedâncias terminais.

Isto posto, voltando ao caso geral, poderemos expressar os resultados anteriores em função de γ e de Z_0 :

$$Z_I = \frac{Z_0^2 + Z_T \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2 \right)}{\frac{Z_1}{2} + Z_2 + Z_T} =$$

$$Z_0 \frac{Z_T + \frac{Z_0^2}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}}{Z_0 + \frac{Z_0 Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}}$$

Ou, finalmente, levando em consideração a relação (120.3) acima deduzida:

$$Z_I = Z_0 \frac{Z_T + Z_0 \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_0 + Z_T \operatorname{tg} \gamma l} \quad (130.1)$$

Analogamente:

$$Z_T = Z_0 \frac{Z_1 - \frac{Z_0^2}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}}{Z_0 - \frac{Z_0 Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}} = Z_0 \frac{Z_I - Z_0 \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_0 - Z_I \operatorname{tgh} \gamma l} \quad 130.2$$

As equações acima obtidas e referentes a uma determinada linha de transmissão fornecem-nos valores terminais, isto é, precisamente aqueles para os quais ha uma perfeita equivalência entre a linha real e o quadripolo que a substituiu. Entretanto, como tais resultados são referidos à impedância característica e a γ , para que possamos generalizá-los será preciso que estas grandezas sejam expressas em função das constantes da linha natural. Façamos isso, aproveitando-nos de algumas propriedades das linhas de transmissão.

131 — A impedância inicial do quadripolo em circuito aberto, isto é, na ausência de Z_T , será:

$$Z_a = \frac{Z_1}{2} + Z_2$$

A mesma impedância inicial com os terminais do quadripolo em curto circuito, ($Z_T = 0$) será expressa por:

$$Z_c = \frac{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_2} = \frac{Z_0}{Z_a}$$

Donde concluímos:

$$Z_0 = \sqrt{Z_a Z_c}$$

isto é, a impedância característica será igual à média geométrica das impedâncias iniciais, medidas com a extremidade terminal em curto circuito e em circuito aberto.

Ora, na linha real suficientemente curta, a impedância inicial, quando a extremidade terminal é posta em curto circuito, será:

$$Z_c = l(R + j\omega L) = lX,$$

sendo R e L os valores, por unidade de comprimento, da resistência ômica e da auto-indução. O fato de pormos em curto circuito a extremidade da linha curta, anula as «admitâncias», propriedade de que se tira partido para as partidas diretas de R e de L .

Por outro lado, quando deixamos a linha de comprimento suficientemente pequeno em circuito aberto, o consumo de energia correrá por conta das «admitâncias» e tal é o processo para as medidas diretas da capacidade e da condutância de perda unitárias.

Nestas condições, a impedância da linha com a extremidade em circuito aberto será:

$$Z_a = \frac{1}{\frac{1}{Z_0} + j\omega C} l = \frac{1}{lY}$$

A conclusão é que, na linha real,

$$Z_o = \sqrt{Z_a Z_c} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

resultado êsse que, de acordo com a observação do parágrafo 111, será aplicável a uma linha de qualquer comprimento.

132 — Poderemos também obter a expressão da constante de propagação, lançando mão da mesma propriedade experimental, acima referida, de uma linha de transmissão de pequeno comprimento. A determinação assim feita, para um caso particular, será evidentemente geral, uma vez que a constante de propagação, pela sua própria definição, não depende do comprimento da linha: é a relação entre as correntes em pontos equidistantes ao longo da linha terminada pela sua impedância característica.

Isto posto, consideremos uma das relações deduzidas anteriormente em que figure γ e os elementos do quadripolo. Por exemplo (120.3):

$$\operatorname{tgh}\gamma l = \frac{Z_o}{\frac{Z_1}{2} + Z_2}$$

Se considerarmos uma linha de comprimento bastante pequeno, para que

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}\gamma l &= \gamma l = \frac{Z_o}{\frac{Z_1}{2} + Z_2} = l \frac{\sqrt{Z_a}}{\sqrt{Z_c}} = \\ &= l \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \end{aligned}$$

concluiremos que

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (132.1)$$

Vê-se que a constante de propagação é da forma $\gamma = \alpha + j\beta$

Por conseguinte:

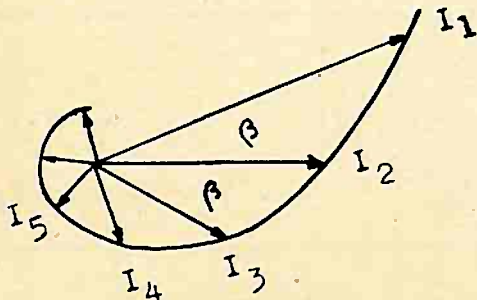
$$\frac{I_1}{I_2} = e^\gamma = e^{\alpha + j\beta} = e^\alpha (\cos\beta + j\operatorname{sen}\beta),$$

onde estamos considerando a unidade de comprimento da linha.

Então o vetor intensidade, a uma unidade de comprimento do que apresenta o valor I_2 , será

$$I_1 = I_2 e^\alpha (\cos\beta + j\operatorname{sen}\beta),$$

o que nos mostra que o lugar geométrico desses vetores será uma espiral logarítmica, β representando o ângulo de retardamento e α a atenuação ou o decréscimo por unidade de comprimento, conforme indicamos na figura 132.1. Estas considerações jus-



tificam as designações dadas a α e a β , respectivamente de constante ou coeficiente de atenuação e de constante ou coeficiente de onda. No conjunto, como os valores de α , β e γ resultam dos valores de R , L , C e G , estes receberam a denominação de constantes primárias, em contraposição aos primeiros, que são as constantes secundárias da linha.

140 — Retornemos, agora, à equação (130.1). Se designarmos por E_I e E_T , I_I e I_T as tensões e as intensidades da corrente nas extremidades inicial e terminal da linha, poderemos escrevê-la sob esta outra forma:

$$\begin{aligned} Z_I = \frac{E_I}{I_I} &= \frac{Z_T + Z_o \operatorname{tgh}\gamma l}{1 + \frac{Z_T}{Z_o} \operatorname{tgh}\gamma l} = \\ &= \frac{E_T \operatorname{cosh}\gamma l + I_T Z_o \operatorname{senh}\gamma l}{I_T \operatorname{cosh}\gamma l + \frac{E_T}{Z_o} \operatorname{senh}\gamma l} \end{aligned}$$

Ora, uma vez que, para $\gamma l = 0$, $\frac{E_I}{I_I} = \frac{E_T}{I_T}$

concluiremos que:

$$E_I = E_T \operatorname{cosh}\gamma l + I_T Z_o \operatorname{senh}\gamma l \quad (140.1)$$

$$I_I = I_T \operatorname{cosh}\gamma l + \frac{E_T}{Z_o} \operatorname{senh}\gamma l \quad (140.2)$$

Analogamente encontraremos, para a relação (130.2):

$$E_T = E_I \operatorname{cosh}\gamma l - I_I Z_o \operatorname{senh}\gamma l \quad (140.3)$$

$$I_T = I_I \operatorname{cosh}\gamma l - \frac{E_I}{Z_o} \operatorname{senh}\gamma l \quad (140.4)$$

Estas equações nos dão os valores de E e de I no início e no fim de uma linha de comprimento l . Nada nos impedirá, porém, de empregá-la para um trecho qualquer da linha, considerando o trecho anterior como incorporado à impedância do gerador, e o posterior, como incorporado à impedância da carga figura 140.1).

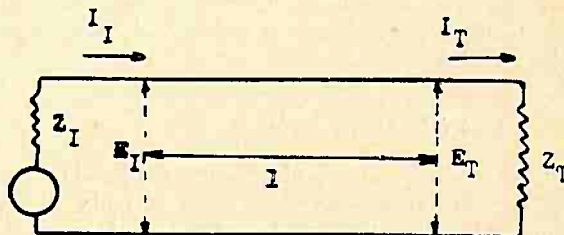


Figura 140.1

Poderemos também interpretar êsses resultados considerando o primeiro grupo de equações como referente aos valores de E e de I num ponto distante de l da extremidade terminada da linha; o segundo grupo se referirá aos mesmos valores a uma distância l , contada a partir da extremidade inicial da linha.

Essas equações, embora derivadas do quadripolo, estão expressas em função das constantes da linha

real e traduzem relações que perdurarão para quaisquer valores de l ou de ω , tornando-se, assim, completamente gerais.

200 — Fenômenos de reflexão

As equações precedentes foram apresentadas sob a forma mais cômoda para as aplicações; poderemos, entretanto, obtê-las facilmente sob a forma exponencial, bastando, para isso, que substituamos $\sinh \gamma l$ e $\cosh \gamma l$ pelos seus valores em função de e .

Por exemplo:

$$\begin{aligned} E_I &= E_T \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + I_T Z_o \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = \\ &= \frac{E_T + I_T Z_o}{2} e^{\gamma l} + \frac{E_T - I_T Z_o}{2} e^{-\gamma l} = \\ &= A e^{\gamma l} + B e^{-\gamma l} \end{aligned}$$

Se a origem coincidir com o início da linha e se E_o e I_o forem os valores de E_I e de I_I nestas condições, o valor de E , a uma distancia qualquer x da origem, será:

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_o + I_o Z_o}{2} e^{-\gamma x} + \frac{E_o - I_o Z_o}{2} e^{\gamma x} = \\ &= A e^{-\gamma x} + B e^{\gamma x} \end{aligned}$$

Identicamente, teríamos para a intensidade da corrente em um ponto qualquer da linha distando x da origem acima:

$$\begin{aligned} I &= \frac{E_o + I_o Z_o}{2 Z_o} e^{-\gamma x} - \frac{E_o - I_o Z_o}{2 Z_o} e^{\gamma x} = \\ &= \frac{A}{Z_o} e^{-\gamma x} - \frac{B}{Z_o} e^{\gamma x} \end{aligned}$$

Essas expressões são exactamente as que se deduzem das equações dos telegrafistas. Mostramos elas que as tensões e as intensidades se transmitem sob forma ondulatória, havendo duas ondas de tensão e duas ondas de intensidade que se propagam em sentidos opostos, de sorte que os valores definitivos em determinado ponto e num determinado momento dependerão da relação de fase entre as duas ondas.

210 — Coeficiente de reflexão.

Uma dessas ondas poderá ser considerada como o reflexo da outra, que será então a onda direta, denominando-se coeficiente de reflexão (r) à relação entre as correntes direta e refletida. Na extremidade da linha, portanto:

$$r = \frac{I_o Z_o - E_o}{I_o Z_o + E_o} \quad (210.1)$$

Ou, no caso da figura 140.1 e considerando como origem a extremidade terminal:

$$r = \frac{Z_o - Z_T}{Z_o + Z_T} \quad (210.2)$$

220 — Interpretação do fenômeno da reflexão.

A denominação de onda refletida provem, seguramente, da analogia do fenômeno com outros que ocorrem em física. É um fenômeno de tão grande importância no estudo das linhas, que vale a pena insistirmos um pouco mais sobre o assunto, procurando visualizá-lo na medida do possível.

O exame da expressão (210.2) mostra que se $Z_T = Z_o$ (ou se $E_o = I_o Z_o$) não haverá reflexão, porquanto o coeficiente de reflexão será nulo. Desaparecendo o coeficiente B as expressões da corrente e da tensão se simplificarão:

$$E = A e^{-\gamma x} \quad I = A' e^{-\gamma x}$$

A primeira conclusão a que chegamos é que a reflexão resulta do fato da linha não ser terminada pela impedância característica. Mas, uma linha não terminada pela impedância característica poderá ser

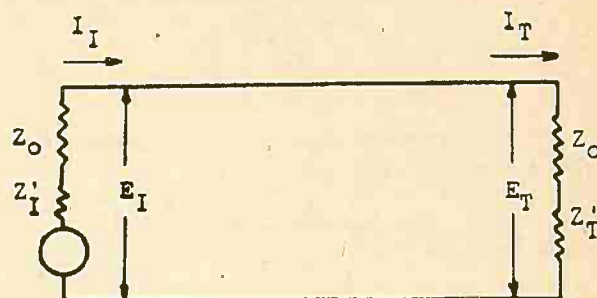


Figura 220.1

substituída por uma outra, indicada na figura 220.1, onde substituímos a impedância terminal Z_T por $Z_o + Z_T'$ e a impedância inicial Z_I por $Z_I' + Z_o$ o que sempre poderá ser feito, pelo menos para efeito de análises. Experimentalmente nem sempre, conseguiríamos esse resultado, porquanto a substituição poderia nos conduzir a valores de Z_I' e Z_T' irrealizáveis. Isto resulta de que esses vetores, teoricamente, poderão figurar em qualquer dos quadrantes e guardar entre si quaisquer relações de fase, o que não acontece na prática.

Isto posto, em virtude do chamado «princípio da compensação», poderemos substituir as impedâncias Z_I' e Z_T' por dois geradores de corrente alternativa de impedância interna nula, porém desenvolvendo entre os seus terminais tensões iguais à queda de tensão através dessas impedâncias substituídas, isto é, iguais a $E_I' = -I_I Z_I'$ e $E_T' = -I_T Z_T'$, conforme indicamos na figura 220.2. A queda de ten-

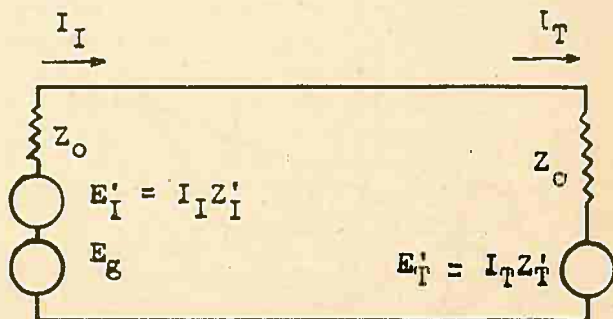


Figura 220.2

são através da impedância terminal agirá como se nessa extremidade fosse aplicada uma tensão
 $E'_T = -I_T Z'_T$.

Em resumo, a linha não terminada pela impedância característica, comporta-se como se fôra uma linha terminada pela impedância característica, na qual aplicassemos inicialmente uma tensão E_I , produzida pelos geradores E'_I e E_g , e terminalmente uma tensão E'_T de sinal contrário à primeira, as duas tensões sendo tais que, em um ponto qualquer da linha, resultem num vetor $E = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$.

Para a linha de comprimento infinito, $Z_I = Z_o$, isto é, a impedância inicial será igual à impedância característica, quaisquer que sejam as suas condições terminais.

Vê-se, então, que a linha terminada pela sua impedância característica se comporta, exactamente, como se fôra de comprimento infinito.

Se a linha for de comprimento muito curto o fenómeno não será igualmente observável, porquanto $Z_I = Z_T$, isto é, a impedância inicial será igual à impedância de carga, tudo se passando como se a carga fosse directamente ligada ao gerador.

Em uma palavra, o fenómeno é uma consequência das condições terminais da linha e se manifesta com tanto maior intensidade quanto mais a impedância terminal diferir da impedância característica, isto é, quanto mais a linha se distanciar da linha de comprimento infinito.

221 — *Linha de comprimento infinito.*

Mas, neste caso, da linha de comprimento infinito (ou terminada pela impedância característica) as expressões da tensão e da corrente em um ponto qualquer distante x da origem inicial serão, conforme já vimos:

$$E = E_o e^{-\alpha x} (\cos \beta x - j \text{sen } \beta x)$$

$$I = I_o e^{-\alpha x} (\cos \beta x - j \text{sen } \beta x)$$

Estas expressões nos confirmam que a impedância (medida pela relação E/I), em um ponto qualquer da linha de comprimento infinito, é constante e igual a Z_o . Mostram-nos também que as curvas representativas de E e de I apresentam o mesmo aspecto para comprimentos iguais a $\frac{2\pi}{\beta}$ tudo se passando como se o comprimento de onda, ou o período de oscilação no espaço, fosse de $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

230 — *Localização das reflexões.*

Se a linha não for de comprimento infinito (ou terminada pela impedância característica) haverá reflexão, o que traduziremos dizendo que a impedância inicial não mais será igual à impedância característica. Também, a impedância variará ao longo da linha, conforme o ponto considerado. Para ajuizarmos qual seja a lei de variação, retomemos a expressão já tantas vezes repetida

$$Z_I = Z_o \frac{Z_T + Z_o \text{tgh } \gamma l}{Z_o + Z_T \text{tgh } \gamma l}$$

A determinação de Z_I é feita, sempre, por meio de medidas de tensão e de corrente, que nos fornecem valores efetivos. Vê-se então que, pela variação do comprimento da linha, Z_I adquirirá valores absolutos iguais para todos os valores absolutos iguais de $\text{tgh } \gamma l$. Ora, a trigonometria hiperbólica nos indica a seguinte condição para a periodicidade de tgh :

$$\text{tgh } \gamma l = \text{tgh } (\gamma l + j\pi)$$

A forma da onda independendo do coeficiente α , que diz respeito tão sómente à variação da amplitude, para efeito da obtenção dos máximos (efetivos) consecutivos poderemos considerar a atenuação como inexistente, o que aliás se faz correntemente na prática rádio-técnica.

Nestas condições os máximos sucessivos do valor absoluto de Z_I serão obtidos para

$$\text{tgh } (\gamma l + j\pi) = \text{tgh } \gamma (l + j \frac{\pi}{\gamma}) = \text{tgh } \gamma (l + \frac{\lambda}{2})$$

A periodicidade dos valores absolutos será relativa à metade do comprimento de onda, isto é, dois máximos sucessivos corresponderão a um aumento do comprimento da linha igual a $\frac{\lambda}{2}$. Obser-

vemos, porém, que os valores de Z_I resultam, em última análise, da variação do comprimento elétrico da linha, isto é, tanto poderemos considerá-los como provenientes da variação do comprimento geométrico l , como da freqüência, que modifica os valores de γ . Por conseguinte, dada uma linha na qual ocorra reflexão, será possível localizá-la, mediante medidas da impedância inicial, fazendo variar a freqüência e anotando os seus valores sucessivos f_1, f_2, f_3, \dots correspondentes aos máximos da impedância inicial.

Chamemos, então, de d a distancia (contada da origem e em unidades correntes) do ponto em que ocorreu a reflexão, e seja a a mesma distância medida em comprimentos de onda da linha. Se representarmos por u_1 e u_2 as velocidades de propagação correspondentes às duas freqüências f_1 e f_2 que ocasionaram dois máximos sucessivos de Z_I , teremos:

$$d = a \lambda_1 = a \frac{u_1}{f_1}, \text{ para a freqüência } f_1.$$

Para a freqüência f_2 :

$$d = (a + \frac{1}{2}) \lambda_2 = (\frac{d f_1}{u_1} + \frac{1}{2}) \frac{u_2}{f_2}$$

Ou ainda

$$d = \frac{u_1 u_2}{2 (u_1 f_2 + u_2 f_1)}$$

Ordinariamente, dentro da faixa de freqüências em que operamos, isto é, entre f_1 e f_2 , a velocidade de propagação mantém-se praticamente constante, de sorte que poder-se-á usar a formula mais simples

$$d = \frac{u}{2 (f_2 - f_1)} \tag{230.1}$$

A localização do ponto de reflexão será feita variando-se a frequência impressa à linha e anotando-se os valores que ocasionarem máximos sucessivos da impedância inicial.

Como se vê, o processo é análogo a outros usados em física para a determinação de distâncias em que se verificam reflexões, onde também se faz uso da velocidade de propagação. Aproxima-se, particularmente, do processo usado por Langevin para a determinação da profundidade do oceano, processo que tira partido do fenômeno da reflexão, pelo fundo do mar, de ondas super-sônicas emitidas de uma embarcação.

Os fenômenos de reflexão são os responsáveis pelo eco verificado nas linhas telefônicas de grande comprimento, especialmente quando usados os repetidores. Nas linhas pupinizadas, principalmente, em que o valor da auto-indução é elevado, a velocidade de propagação torna-se muito baixa, costumando ser da ordem de 16.000 Km, o fenômeno é particularmente observável.

300 — Constantes secundárias da linha

Para melhor compreensão dos capítulos seguintes, façamos preliminarmente um estudo geral sobre as constantes secundárias da linha de transmissão. Começemos pela impedância característica.

310 — Impedância característica.

A expressão mais geral da impedância característica já foi obtida anteriormente (131.1):

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = |Z_o| \angle \varphi$$

Sendo

$$|Z_o| = \left(\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2} \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\text{onde } a = \frac{R}{L} \text{ e } b = \frac{G}{C}.$$

Vê-se então que, $Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_o$ numa das seguintes circunstâncias:

- a) — Se R e se G forem nulos, isto é, se a linha for sem dissipação;
- b) — Se $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$, caso comum quando a linha é percorrida por corrente de alta frequência, em que é sempre possível desprezar a resistência ômica e a perditância nas somas em que figurem ao lado das reatâncias;
- c) — Se $a = b$, condição em que a linha é denominada indeformante (dos sons) e que será estudada mais tarde.

Em qualquer destes três casos o ângulo φ será nulo, em resumo. A expressão de Z_o , neste caso poderá ser apresentada sob outras formas:

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{\sqrt{CL}} = \frac{\sqrt{CL}}{C}$$

Ou também

$$Z_o = \omega L = \frac{1}{\omega C} = X_L = X_C$$

Como $\frac{1}{\sqrt{CL}}$ representa a frequência de re-

sonância de um circuito de componentes C e L , frequência essa, aliás, que corresponde também à de ressonância da linha, concluiremos que a impedância característica de uma linha nas condições acima será a resistência que ela oferecerá inicialmente quando percorrida por uma corrente correspondente à sua frequência própria, isto é, quando a indutância e a capacitância unitárias forem iguais entre si.

Resta-nos examinar a parte relativa ao ângulo de fase da impedância característica. Teremos:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \left\{ \angle (R + j\omega L) + \angle (G - j\omega C) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \angle (R + j\omega L) (G - j\omega C) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \angle \left\{ RG + \omega^2 CL + j\omega (LG - CR) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{(CR - LG)}{RG + \omega^2 CL} = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega (a - b)}{ab + \omega^2} \end{aligned}$$

A expressão completa da impedância característica será, então:

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2} \right)^{\frac{1}{4}} \angle \left[-\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega (a - b)}{ab + \omega^2} \right]$$

Recuiremos nos valores particulares anteriormente encontrados se tomarmos $a = b$.

Em todos os casos em que $Z_o = R_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$ poderemos calcular R_o com bastante precisão, uma vez que essa resistência se torna, assim, independente da frequência. Efetivamente, nessas mesmas circunstâncias, os valores de L e de C serão aproximadamente os seguintes:

$$L = 4 \cdot 10^{-9} \log_e \frac{2D}{d} \text{ henrios}$$

$$C = \frac{1}{4 \cdot 10^{-9} u^2 \log_e \frac{2D}{d}} \text{ faradios}$$

expressões nas quais D e d representam, em unidades quaisquer, o espaçamento e o diâmetro dos condutores. Então, para $u = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s:

$$R_o = 120 \log_e \frac{2D}{d} = 276 \log \frac{2D}{d}$$

Esta formula, contudo, somente dará resultados satisfatórios no caso dos espaçamentos não serem muito pequenos. Em geral, porém, quando ha necessidade de menor impedância característica, empregam-se cabos ou condutores concêntricos em vez de dois fios e, para estes,

$$L = 2 \log_e \frac{d_1}{d_2}$$

$$C = \left(2 \log_e \frac{d_1}{d_2} \right)^{-1}$$

Por conseguinte,

$$Z_0 = 138 \log \frac{d_1}{d_2}.$$

Nestas últimas expressões d_1 representa o diâmetro interno do condutor externo e d_2 o diâmetro externo do condutor interno.

Estes condutores concentricos são usados geralmente com o condutor externo ligado à terra. No caso da linha constituída de dois fios, é também quasi sempre conveniente a ligação de um deles à terra; disto resultará, porém, que a impedância característica passará a ter um valor diferente do indicado pela fórmula (310.1), porquanto os valores de C e de L a serem empregados na expressão da de Z_0 serão outros. A fórmula para o cálculo da impedância característica de uma linha de dois fios e de altura a , quando um deles é ligado à terra, é a seguinte:

$$Z_0' = 276 \frac{\left(\log \frac{8a^2}{dD} \right) \left(\log \frac{2D}{d} \right)}{\log \frac{8a^2}{dD} + \log \frac{2D}{d}} \text{ (omios)}$$

Haverá, portanto, um decrescimo da impedância característica, em relação à da mesma linha sem ligação à terra.

Resumindo tudo quanto dissemos a este respeito, poderemos definir a impedância característica pelas suas propriedades seguintes:

a) — é a impedância inicial de uma linha de comprimento infinito; ou é uma impedância tal que, ligada à extremidade terminal da linha, occasiona igual impedância inicial;

b) — em se tratando de altas frequências, é o valor comum das reatâncias, quando a corrente aplicada à linha for igual à sua frequência de ressonância;

c) — é a média geometria entre os valores da impedância inicial medidos com a linha em circuito aberto e em curto circuito.

320 — Constante de propagação.

Já vimos a sua expressão geral (132.2):

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} =$$

$$(R + j\omega L)^{\frac{1}{2}} (G + j\omega C)^{\frac{1}{2}}$$

a qual poderá também ser escrita sob outra forma:

$$\gamma = j\omega \sqrt{CL} \left(1 + \frac{G}{j\omega C} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{R}{j\omega L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (320.1)$$

Como soluções gerais, obteremos para α e β os valores seguintes:

$$\alpha^2 = \frac{GR - \omega^2 CL + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}{2} \quad (320.2)$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 CL - GR + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}{2} \quad (320.3)$$

No caso, mais comum na pratica, de G/C e R/L apresentarem valores pequenos, poderemos levar em conta somente os dois primeiros termos do desenvolvimento de (320.1) o que nos permitirá obter os seguintes resultados aproximados, porém suficientemente exátos para a maior parte das aplicações:

$$\gamma = 1/2 \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + \sqrt{\frac{L}{C}} \right) + j\omega \sqrt{CL}$$

Portanto,

$$\alpha = 1/2 \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \quad (320.21)$$

$$\beta = \omega \sqrt{CL} \quad (320.31)$$

No caso da perditância ser igual a zero, como acontece muitas vezes, ou como poderá ser construída a linha, as fórmulas acima nos oferecem recursos para o cálculo das constantes primárias. Com efeito, se chamarmos R_0 a impedância característica resistiva da linha, teremos:

$$\alpha = R/2 \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2R_0} \quad (320.21)$$

Donde

$$R = 2\alpha R_0, \text{ sendo } \alpha = \frac{\log \frac{I_1}{I_2}}{0,4343}$$

Igualmente, a velocidade de propagação sendo igual a $\frac{1}{\sqrt{CL}}$ teremos:

$$L = R_0/u \quad \text{e} \quad C = 1/uR_0$$

Afim de que possamos mais facilmente discutir os valores de α e β escrevamô-los sobre uma outra forma mais cômoda, tomando, como anteriormente já fizemos, $a = R/L$, $b = G/C$ e fazendo

$$x = \frac{\omega}{\sqrt{ab}}$$

Obteremos, então:

$$\alpha^2 = \frac{RG}{2} \left[(1 - x^2) + \sqrt{\left(\frac{a}{b} + x^2\right) \left(\frac{b}{a} + x^2\right)} \right]$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 CL}{2} \left[(1 - x^{-2}) + \sqrt{\left(\frac{a}{b} + x^{-2}\right) \left(\frac{a}{b} + x^{-2}\right)} \right]$$

Estas fórmulas nos mostram que o máximo da atenuação numa linha em que R , G , C e L possam ser variados sem que contudo se tornem nulos ou infinitos, será:

$$\alpha_{max} = R/2 \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} + G/2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Nessas mesmas circunstâncias o mínimo de α ocorrerá quando $CR = LG$ e terá para valor

$$\alpha_{min} = \sqrt{RG}$$

Os valores correspondentes de β serão:

$$\beta = \omega \sqrt{CL}$$

Poderemos, assim, organizar o seguinte quadro dos valores particulares das constantes secundárias das linhas:

	Const. atenuação	Const. onda
$a = b$	$\alpha = \sqrt{GR}$	$\beta = \omega \sqrt{CL}$
$x = 0$ ($\omega = 0$)	$\alpha = \sqrt{GR}$	$\beta = 0$
$a = b = 0$	$\alpha = 0$	$\beta = \omega \sqrt{CL}$

400 — Ondas estacionárias

Um fenômeno muito interessante ocorre no caso da linha sem dissipação, que seria aquela que não apresentasse resistência ômica nem perditância. Na prática poderemos considerar como tais as linhas percorridas pelas correntes de alta frequência e as antenas onde, quasi sempre, R e G são desprezíveis em presença das reatâncias. Ora, em assim sendo, já vimos que a impedância característica será puramente resistiva e os valores da tensão e da corrente em um ponto distante de x do início de uma linha de comprimento l terminada em circuito aberto serão, em termos reais:

$$v = \frac{V_0}{\cos \beta l} \cos \beta x \cos \omega t$$

$$i = \frac{I_0}{\sin \beta l} \sin \beta x \sin \omega t$$

Por conseguinte, não se poderá evidenciar nenhum fenômeno de propagação e, por meio de um aparelho de medida que nos indique valores efetivos, constataremos a presença de ventres e de nós ao longo da linha, tudo se passando como se a onda fosse estacionária. Isto resulta de que, uma vez que a linha é sem dissipação, atingido o regime permanente, não deverá haver consumo de energia ao longo do seu comprimento e nem tão pouco em sua extremidade. Como o coeficiente de reflexão será igual à unidade, o fenômeno da reflexão ocorrerá em circunstâncias tais que as duas ondas, embora

sempre de fases opostas, propagam-se com a mesma velocidade e sem atenuação, conforme procuramos indicar na figura 400.1. A linha sem dissipação é

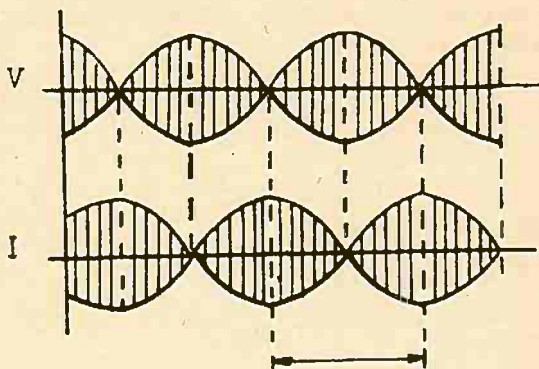


Figura 400.1

praticamente indeformante, como verificaremos mais adiante.

Poderemos evidenciar o fenômeno de maneira mais clara e geral considerando uma linha sem dissipação terminada por uma reatância pura ou por uma resistência infinita. Nestas condições, em regime permanente, a corrente e a tensão iniciais estarão em quadratura, de sorte que se $V_0 = [V_0] = v$ $I_0 = j [I_0] = j i_0$. As fórmulas gerais tornar-se-ão:

$$V = v_0 \cos \beta x + R_0 i_0 \sin \beta x$$

$$I = v_0 \sin \beta x - R_0 i_0 \cos \beta x$$

Ou ainda, se fizermos $\tan \varphi = \frac{R_0 i_0}{v_0}$ e consi-

derarmos os valores reais:

$$v = \frac{v_0}{\cos \varphi} \cos (\beta x - \varphi) \cos \omega t$$

$$i = \frac{v_0}{R_0 \cos \varphi} \sin (\beta x - \varphi) \sin \omega t$$

resultado êsse que nos esclarece relativamente à formação da onda estacionária. O ângulo φ dependerá da linha e os ventres de tensão corresponderão a $\beta x = \varphi$.

Tira-se partido destes fenômenos para a determinação ou medida de frequências elevadas. Com efeito

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{CL}} = \frac{u}{f} \quad \text{ou} \quad f = \frac{u}{\lambda}$$

A determinação dos nós de tensão poderá ser feita por meio de um tubo de Geissler ou então por meio de um circuito ressonante na frequência que se deseja determinar, este último tendo sido o meio que adoptamos em nossos estudos experimentais.

Um sistema de dois fios alimentados via capacitiva por meio de um oscilador costuma ser denominado fio de Lecher; quando o acoplamento é feito magneticamente costuma-se dar ao conjunto a designação de fio de Blondot. Um e outro sistema

constituem excelentes recursos para o estudo das propriedades das linhas de transmissão. Poder-se-á introduzir perditância em linhas assim constituídas es-ticando-as sobre uma longa tábua. O maior ou menor grau de humidade da tábua permitirá a obtenção de perditâncias menores ou maiores.

Um outro excelente processo para o estudo das linhas de transmissão consiste em substituí-las por duas longas bobinas, como por exemplo as «antenas internas» encontradas no comércio. Neste caso, além de ser possível a variação da auto-indução, pelo afastamento das espiras, será fácil também a variação da perditância, pelo processo acima referido.

500 — Alguns casos particulares

510 — A linha em circuito aberto.

Neste caso a intensidade da corrente será nula na extremidade terminal, de sorte que, a uma distância qualquer x contada a partir dessa extremidade, teremos:

$$E = E_T \cosh \gamma x \quad (510.1)$$

$$I = \frac{E_T}{Z_0} \operatorname{senh} \gamma x \quad (510.2)$$

$$Z_a = Z_0 \operatorname{coth} \gamma x \quad (510.3)$$

Nessas expressões, como sempre, E_T representa o valor da tensão na extremidade terminal da linha. No caso da linha considerada apresentar um certo comprimento l e de conhecermos os valores iniciais da intensidade, deduziríamos:

$$\frac{E_T}{Z_0} = \frac{I_l}{\operatorname{senh} \gamma l} \text{ e } E_T = \frac{E_l}{\operatorname{cosh} \gamma l}$$

Donde a expressão de E e de I a uma distância x da extremidade terminal de uma linha em circuito aberto de comprimento total l , em função dos valores iniciais:

$$I = I_l \frac{\operatorname{senh} \gamma x}{\operatorname{senh} \gamma l}$$

$$E = E_l \frac{\operatorname{cosh} \gamma x}{\operatorname{cosh} \gamma l}$$

A impedância em um ponto qualquer distante de x da extremidade de uma linha de comprimento l seria, analogamente:

$$Z_a = E/I = Z_l \frac{\operatorname{coth} \gamma x}{\operatorname{coth} \gamma l}$$

511 — Quando a resistência ômica e a perditância forem desprezíveis nas somas em que figurem ao lado das reatâncias, como geralmente é o caso encontrado nas linhas destinadas às altas frequências ou nas antenas, a expressão da impedância inicial da linha terminada em circuito aberto apresenta-se sob a forma:

$$Z_a = Z_0 \frac{\cos h j \beta l}{\operatorname{sen} h j \beta l} = -j Z_0 \cot \beta l$$

Porém, como também neste caso $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ e $\beta = \omega \sqrt{CL}$, chega-se finalmente à conclusão de que

$$Z_a = -j \sqrt{\frac{L}{C}} \cot \omega l \sqrt{CL}$$

Então, verifica-se que, quando a atenuação é desprezível, a linha em circuito aberto se comporta como se fôra uma reatância pura ou melhor, como um circuito ressonante serie apresentando componentes reativas, podendo-se substituí-la por elementos concentrados tais que a auto-indução seja $1/3$ da auto-indução linear total e a capacidade seja a mesma capacidade linear total. Isto ressaltará imediatamente se desenvolvermos em série $\cot \omega l \sqrt{CL}$:

$$Z_a = -j \sqrt{\frac{L}{C}} \left\{ \frac{1}{\omega l \sqrt{LC}} - \frac{\omega l \sqrt{CL}}{3} - \frac{\omega^3 l^3 (CL)^3}{45} \dots \right\}$$

Ou ainda:

$$Z_a = -j \frac{1}{\omega l C} + j \frac{\omega l L}{3} + j \frac{l^3 \omega^3 L^2 C}{45} \dots$$

Efetivamente, poderemos desprezar todos os termos a partir do terceiro, desde que estejamos lidando com frequências abaixo da fundamental.

520 — A linha em curto circuito.

Se a extremidade da linha for efetivamente posta em curto circuito, $E_T = 0$ e, das relações (140.1) e (140.2) concluiremos:

$$V = I_T Z_0 \operatorname{sen} h \gamma x \quad (520.1)$$

$$I = I_T \operatorname{cos} h \gamma x \quad (520.2)$$

$$Z = Z_0 \operatorname{tg} h \gamma x \quad (520.3)$$

Esses valores se referem a um ponto distante de um comprimento x da origem, neste caso, da extremidade terminal. Se l for o comprimento da linha e se conhecermos os valores iniciais da tensão e da intensidade, teremos:

$$I_T Z_0 = V_l / \operatorname{senh} \gamma l \text{ e } I_T = I_l / \operatorname{cosh} \gamma l$$

donde a expressão de E e de I a uma distância x da extremidade terminal de uma linha de comprimento total l , em função dos valores iniciais:

$$E = E_l \frac{\operatorname{senh} \gamma x}{\operatorname{senh} \gamma l}$$

$$I = I_l \frac{\operatorname{cosh} \gamma x}{\operatorname{cosh} \gamma l}$$

$$Z = Z_l \frac{\operatorname{tg} h \gamma x}{\operatorname{tg} h \gamma l}$$

Quando se tem em mente as linhas usadas para as frequências ditas comerciais ou industriais, de 60 ciclos ou menores, esses resultados, à primeira vista, poderão parecer estranhos. Entretanto, o exame da relação (130.1)

$$Z_I = Z_o \frac{Z_T + Z_o \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_o + Z_T \operatorname{tgh} \gamma l}$$

nos esclarece definitivamente a esse respeito, porquanto, para essas frequências, a constante de propagação é praticamente nula e as linhas são sempre eletricamente muito curtas, isto é, $Z_I = Z_T$. Por conseguinte, se puzermos a extremidade terminal da linha em curto circuito, fazendo $Z_T = 0$, $Z_I = 0$ e o gerador será também posto em curto circuito.

Já no caso de frequências elevadas, como as empregadas em radio-comunicação, a constante de propagação é apreciável e poderá acontecer que o curto circuito da extremidade terminal da linha dê lugar a uma elevação da impedância inicial, aliviando, portanto, a carga do gerador. É o que veremos noutro capítulo.

521 — Consideremos uma linha de comprimento finito e terminada por uma certa impedância Z_T tal que $Z_T < Z_o$. Esta impedância Z_T poderá ser substituída por uma linha de comprimento l_1 terminada em curto circuito e apresentando uma impedância inicial igual a

$$Z_T = Z_o \operatorname{tgh} \gamma l_1,$$

sem que desta forma modifiquemos a impedância inicial da linha considerada. Concluiremos, portanto, que o fato de ligarmos uma impedância Z_T (menor do que a impedância característica) ao terminal de uma linha, equivale a encompridá-la de um comprimento elétrico

$$\gamma l_1 = \operatorname{tgh}^{-1} \frac{Z_T}{Z_o}$$

ou de um comprimento geométrico $l_1 =$

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{Z_T}{Z_o} e, \text{ em seguida, pô-la em curto circuito.}$$

Esta propriedade poderá ser demonstrada diretamente. Com efeito, a impedância inicial da linha de comprimento $l_1 + l$ terminada em curto circuito será:

$$\begin{aligned} Z_I &= Z_o \operatorname{tgh} \gamma (l + l_1) = Z_o \operatorname{tgh} (\gamma l + \gamma l_1) \\ &\equiv Z_o \frac{\operatorname{tgh} \gamma l + \operatorname{tgh} \gamma l_1}{1 + \operatorname{tgh} \gamma l_1 \operatorname{tgh} \gamma l} = Z_o \frac{\frac{Z_T}{Z_o} + \operatorname{tgh} \gamma l}{1 + \frac{Z_T}{Z_o} \operatorname{tgh} \gamma l} \end{aligned}$$

Ou ainda

$$Z_I = Z_o \frac{Z_T + Z_o \operatorname{tgh} \gamma l}{Z_o + Z_T \operatorname{tgh} \gamma l}$$

que, representa a impedância inicial de uma linha terminada pela impedância Z_T .

Esse mesmo resultado poderia ter sido obtido partindo-se de uma propriedade das funções trigonométricas hiperbólicas, que é a seguinte:

$$\text{Se } A \text{ e } B \text{ forem tais que } \operatorname{tgh} \sigma = \frac{B}{A},$$

ter-se-á:

$$A \operatorname{senh} x + B \operatorname{cosh} x = \sqrt{A^2 - B^2} \operatorname{senh} (x + \sigma)$$

e

$$B \operatorname{senh} x + A \operatorname{cosh} x = \sqrt{A^2 - B^2} \operatorname{cosh} (x + \sigma)$$

$$\text{Passando ao nosso caso, } \frac{B}{A} = \operatorname{tgh} \sigma = \frac{Z_T}{Z_o}$$

e

$$Z_I = Z_o \frac{Z_T \operatorname{cosh} \gamma l + Z_o \operatorname{senh} \gamma l}{Z_o \operatorname{cosh} \gamma l + Z_T \operatorname{senh} \gamma l}$$

Ou, ainda

$$Z_I = Z_o \operatorname{tgh} (\gamma l + \gamma l_1)$$

Esta propriedade apresenta importância na prática, porque traduz uma condição encontrada quando ha necessidade da instalação de aparelhos de medida na extremidade da linha, aparelhos que, se apresentarem baixa impedância, trarão como resultado uma modificação sensível nas condições da transmissão.

522 — Consideremos, novamente, uma linha terminada em curto circuito e de comprimento igual a l . A tensão média ao longo da linha será:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{l} E_{ief} \int_0^l \frac{\operatorname{senh} \gamma x}{\operatorname{senh} \gamma l} dx = \\ &= \frac{\operatorname{cosh} \gamma l - 1}{\gamma l \operatorname{senh} \gamma l} E_{ief} \end{aligned}$$

Por outro lado, a capacidade estática será

$$Cl = \frac{\text{Carga}}{E_m}$$

A capacidade aparente ou efetiva será também igual à carga dividida E_{ief} , donde

$$Cl E_m = C_{ef} E_{ief}$$

Portanto

$$C_{ef} = Cl \frac{\operatorname{cosh} \gamma l - 1}{\gamma l \operatorname{senh} \gamma l} = Cl k_c,$$

k_c representando um coeficiente pelo qual será preciso multiplicar a capacidade estática para que se obtenha a capacidade efetiva ou aparente.

Poderemos, de maneira análoga, calcular o coeficiente aparente de auto-indução. Com efeito, a corrente média será:

$$I_m = I_{ef} \times \frac{1}{l} \int_0^l \cosh \gamma x dx = \frac{\sinh \gamma l}{\gamma l} I_{ef}$$

A auto-indução correspondente ao comprimento da linha será:

$$Ll = \frac{\text{Fluxo magnetico}}{I_m}$$

A auto-indução total aparente é igual a

$$L_{ef} = \frac{\text{Fluxo magnetico}}{I_{ef}}$$

Por conseguinte

$$L_{ef} = I_m Ll = Ll \frac{\sinh \gamma l}{\gamma l} = lkL$$

Como exemplificação, determinemos a capacidade e a auto-indução aparentes de uma antena de comprimento igual a 1/4 de onda. Desprezaremos, como de costume, a atenuação. Então, o comprimento elétrico ficará sendo

$$\gamma l = j \frac{2\pi l}{\lambda} = j \frac{\pi}{2}$$

Analogamente, para o caso da auto-indução, de-
por

$$k_c = \frac{\cosh \gamma l - 1}{\gamma l \sinh \gamma l} = \frac{2}{\pi} = 0,63662$$

afim de que se obtenha a capacidade aparente.

Anaogamente, para o caso da auto-indução, deveríamos multiplicar a auto-indução linear por $\frac{2j}{\pi}$, isto é, também por 0,63662, para obtermos a auto-indução total aparente.

523 — E' muito conhecida a propriedade das bobinas de camada única, quando submetidas a uma tensão alternativa, de apresentarem um potencial nulo em seu centro elétrico, propriedade de que se tira partido correntemente na prática radio-técnica. Por outro lado, a auto-indução e a capacidade dessas bobinas poderão ser consideradas como uniformemente distribuídas.

Meditando sobre essas particularidades verificaremos que ha uma certa analogia entre a linha terminada em curto circuito e uma bobina. De fato, também poderemos considerar a linha como constituída de duas espirais, em lugar de dois condutores, espirais essas que, ligadas em uma das extremidades constituiria, na verdade, uma bobina contínua. Será possível, então, a substituição de uma linha por uma bobina que lhe seja eletricamente equivalente?

Consideremos o esquema de uma bobina ou, mais precisamente, do circuito anti-resoante equivalente a uma bobina (figura 523.1). Se A designar um coeficiente que, multiplicado pela «admitancia» Y reproduza a impedância do ramo capacitivo-perditivo e sendo B um coeficiente análogo a ser multiplicado por X afim de que obtenhamos a impedância equivalente, correspondente ao ramo indutivo-resistivo, obteremos para a expressão da impedância inicial:

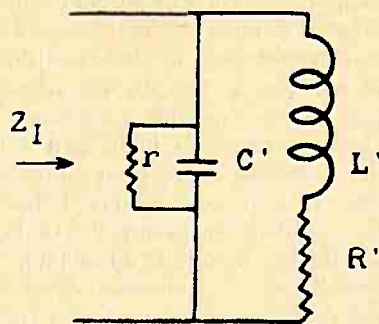


Figura 523.1

$$Z = Z_0 \frac{B\gamma}{1 + AB\gamma^2} = Z_0 \operatorname{tgh} \gamma l \quad (523.1)$$

Ou ainda

$$Z = Z_0 \frac{2 \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2}}{1 + \operatorname{tgh}^2 \frac{\gamma l}{2}}$$

Donde o concluímos imediatamente os valores a serem atribuídos a A e a B :

$$A = \frac{1}{2\gamma} \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2}$$

$$B = \frac{2}{\gamma} \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2}$$

Vê-se que as reatâncias equivalentes guardarão entre si a relação

$$\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \cdot \frac{B}{A} = \frac{X'}{Y'}$$

Ou então

$$4 Z_0^2 = \frac{X'}{Y'}$$

porquanto

$$X' = (R + j\omega L) \frac{2}{\gamma} \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2} = 2 Z_0 \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2}$$

$$\frac{1}{Y'} = \frac{1}{(G + j\omega C) \frac{1}{2\gamma} \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2}} = 2 Z_0 \operatorname{coth} \frac{\gamma l}{2}$$

Estas ultimas relações evidenciam também que as impedâncias de um circuito ressonante de componentes em paralelo, equivalente a uma linha de transmissão, correspondem aos duplos das impedâncias iniciais de uma linha de constituição idêntica e de metade do comprimento, medidas essas impedâncias com a extremidade terminal aberta e em curto circuito.

Chega-se outrossim à conclusão de que o coeficiente relativo ao ramo capacitivo-perditivo é quatro vezes superior ao do resistivo-indutivo; além disso,

somente poderá haver correspondência entre os dois circuitos numa determinada frequência e para um determinado comprimento da linha, visto como o comprimento elétrico é função, ao mesmo tempo, da frequência e do comprimento geométrico.

Aliás, a comparação da linha com a bobina de camada única é apenas ideal porquanto, na prática, ordinariamente as capacidades das linhas superam de muito as capacidades próprias das bobinas. A associação de idéias permitiu, entretanto, a comparação do circuito de componentes distribuídas com o circuito anti-resonante de componentes concentradas.

No caso de uma bobina de duas camadas, entretanto, a analogia é notável.

524 — Verifiquemos em que condições poderemos substituir uma linha terminada em curto circuito por um circuito anti-resonante de componentes concentradas iguais a $(R + j\omega L)$ e $\frac{1}{(G + j\omega C)}$

Retomando a relação (523.1) e fazendo $A = B = l$ virá:

$$\frac{\gamma l}{1 + \gamma^2 l^2} = \gamma l (1 - \gamma^2 l^2 + \gamma^4 l^4 - \gamma^6 l^6 + \dots)$$

A equivalência a que nos referimos exigirá que esse desenvolvimento seja igual ao de $\text{tgh} \gamma l$:

$$\text{tgh} \gamma l = \gamma l \left(1 - \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + \frac{2}{15} \gamma^4 l^4 - \frac{17}{315} \gamma^6 l^6 + \frac{62}{2835} \gamma^8 l^8 - \dots \right)$$

Então, os dois circuitos se equivalerão quando o comprimento elétrico da linha permitir que desprezemos todos os termos do desenvolvimento a partir do segundo grau; ou quando a impedância do ramo capacitivo-perditivo do circuito equivalente sendo igual a 3 vezes a correspondente da linha, natural, possamos desprezar todos os termos a partir da quarta potência ou mesmo da sexta potência, o que geralmente é possível, porquanto a série é muito rapidamente convergente. Com efeito, neste caso,

$$\begin{aligned} Z_l &= \frac{\gamma l}{1 + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2} = \\ &= \gamma l \left(1 - \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + \frac{1}{9} \gamma^4 l^4 - \frac{1}{27} \gamma^6 l^6 + \frac{1}{81} \gamma^8 l^8 - \dots \right) \end{aligned}$$

530 — Cálculo das constantes lineares.

Os estudos precedentes nos mostram que as frequências ou os comprimentos de linha que ocasionarem o máximo da impedância inicial de uma linha terminada em curto circuito, corresponderão ao mínimo dessa impedância no caso da mesma linha terminar em circuito aberto, e vice-versa. Esta propriedade resulta do fato das funções trigonométricas hiperbólicas que figuram nas expressões das impedâncias iniciais serem inversa uma da outra, de sorte que, se multiplicarmos a relação (510.3) pela relação (520.3) obteremos:

$$Z_a Z_c = Z_o^2$$

Donde

$$Z_o = \sqrt{Z_a Z_c},$$

expressão já nossa conhecida e que nos sugere um modo simples para a determinação da impedância característica da linha.

A constante de propagação poderá ser determinada de maneira análoga, porquanto

$$\text{tgh} \gamma l = \frac{Z_c}{Z_o} = \sqrt{\frac{Z_c}{Z_a}}$$

Ou

$$\gamma l = \text{tgh}^{-1} \sqrt{\frac{Z_c}{Z_a}}$$

Uma vez conhecidos Z e γ poderemos calcular também

$$X = \gamma Z_o = R + j\omega L$$

$$Y = \frac{\gamma}{Z_o} = G + j\omega C$$

Afinal, mediante medidas das impedâncias iniciais para a linha em curto circuito e em circuito aberto, conseguiremos determinar todas as constantes, primárias e secundárias da linha.

Vejamus como será fácil encontrarmos os valores de α e de β . Observando que $\text{tgh} \gamma$ é da forma $a + jb$, poderemos escrever:

$$a + jb = \text{tgh} (\alpha + j\beta) = \frac{\text{senh} (\alpha + j\beta)}{\text{cosh} (\alpha + j\beta)}$$

Ou então:

$$a + jb = \frac{\text{senh} \alpha \cos \beta + j \text{cosh} \alpha \text{sen} \beta}{\text{cosh} \alpha \cos \beta + j \text{senh} \alpha \text{sen} \beta}$$

Racionalizando o denominador afim de podermos separar os valores de a e b :

$$a + jb = \frac{\text{senh} \alpha \text{cosh} \alpha + j \text{sen} \beta \cos \beta}{\text{senh}^2 \alpha + \text{cosh}^2 \beta}$$

Donde

$$a = \frac{\text{senh} \alpha \text{cosh} \alpha}{\text{senh}^2 \alpha + \text{cosh}^2 \beta} = \frac{\text{senh} 2\alpha}{2(\text{senh}^2 \alpha + \text{cosh}^2 \beta)}$$

$$b = \frac{\text{sen} \beta \cos \beta}{\text{senh}^2 \alpha + \text{cosh}^2 \beta} = \frac{\text{senh} 2\beta}{2(\text{senh}^2 \alpha + \text{cosh}^2 \beta)}$$

Dessas equações, mediante transformações simples, concluiremos:

$$\text{tgh} 2\alpha = \frac{2a}{1 + (a^2 + b^2)}$$

$$\text{tg} 2\beta = \frac{2b}{1 - (a^2 + b^2)}$$

531 — Para que se tenha uma idéia do modo fácil pelo qual o cálculo poderá ser conduzido, con-

sideremos um exemplo numérico, representativo de um caso típico.

Calculemos as constantes primárias e secundárias de uma linha de 50 Km de extensão cujas impedâncias iniciais, medidas na frequência de 1.000 c. p. s. foram as seguintes:

$$Z_a = 273,7 - j129,95 \text{ e } Z_c = 1198,4 + j181,19$$

A velocidade de propagação, avaliada sumariamente pela formula (230.1), é da ordem de 227.000 Km/s.

Para maior comodidade, escrevamos os valores das impedâncias sob a forma polar:

$$Z_a = 303 \angle 25,4 \text{ e } Z_c = 1212 \angle 8,6$$

Portanto

$$Z_o = \sqrt{Z_a Z_b} = \sqrt{303 \times 1212} \angle \frac{25,4 - 8,6}{2}$$

$$Z_o = 606 \angle 8,4 = 599,51 - j88,54$$

Proseguindo:

$$\operatorname{tgh} \gamma l = \sqrt{\frac{Z_c}{Z_a}} \angle \frac{25,4 + 8,6}{2} = 2 \angle 17^\circ$$

$$\operatorname{tgh} \gamma l = 1,912 + j0,585$$

Portanto:

$$\begin{aligned} a &= 1,912 \\ b &= 0,585 \end{aligned}$$

Então

$$\operatorname{tgh} 2 \alpha l = \frac{2 \times 1,912}{4} = 0,956$$

$$2 \alpha l = 1,90$$

$$\alpha = \frac{1,90}{2 \times 50} = 0,019 \text{ por km.}$$

Também

$$\operatorname{tg} 2 \beta l = \frac{2 \times 0,585}{1 - 4} = -0,39$$

$$2 \beta l = 158^\circ, 40'$$

$$\beta l = 79^\circ, 20' = 1,384 \text{ radians}$$

$$\beta = \frac{1,384}{50} = 0,02768 \text{ radians por Km}$$

A localização de $2 \beta l$ no segundo quadrante está correta porquanto conduz a uma velocidade de propagação de $\frac{6283}{0,0277} = 226.823$.

Continuando:

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,019 + j0,0277$$

$$\gamma = \frac{0,019}{0,565} \angle 55,6 = 0,0336 \angle 55,6$$

Poderemos calcular X:

$$X = Z_o \gamma = 606 \sqrt{8,4} \times 0,0336 \angle 55,6$$

$$X = 606 \times 0,0336 \angle 55,6 - 8,4$$

$$X = 20,36j \angle 47,2$$

Ou então,

$$X = 13,83 + j14,94$$

Portanto

$$R = 13,83 \text{ omios por Km}$$

$$L = \frac{14,94}{\omega} = \frac{14,94}{6283} = 0,00237 \text{ H por Km}$$

Analogamente:

$$Y = \frac{\gamma}{Z_o} = 55,445 \times 10^{-6} \angle 64^\circ$$

$$Y = (24,307 + j49,83) \cdot 10^{-6}$$

Então

$$G = 24,307 \cdot 10^{-6} \text{ nhos por Km}$$

$$C = \frac{49,83}{6283} = 0,00793 \text{ Mfd por Km.}$$

Assim pois, apenas com duas determinações simples, conseguimos conhecer todas as constantes primárias e secundárias da linha em questão.

540 — Linhas de um quarto de comprimento de onda.

541 — As linhas de comprimento correspondente a números ímpares de quartos de comprimento de onda apresentam propriedades singulares, das quais o engenheiro pode tirar excelentes partidos, constituindo circuitos de aspecto simples, porem de funcionamento muitas vezes complexo.

Salientemos, por exemplo, o caracter de circuito serie (resonante) de uma linha nestas condições, terminada em circuito aberto. Admitamos que α seja suficientemente pequeno para que possamos considerar $\operatorname{senh} \alpha l = \alpha l$ e $\operatorname{cosh} \alpha l = 1$. Nestas condições:

$$Z_I = Z_o \frac{\operatorname{cosh} (\alpha l + j\beta l)}{\operatorname{sen} h (\alpha l + j\beta l)} =$$

$$Z_o \frac{\operatorname{cosh} j\beta l + \alpha l \operatorname{senh} j\beta l}{\alpha l \operatorname{cosh} j\beta l + \operatorname{senh} j\beta l}$$

Ou também

$$Z_I = Z_o \frac{\operatorname{cosh} \beta l + j\alpha l \operatorname{sen} \beta l}{\alpha l \cos \beta l + j \operatorname{sen} \beta l} =$$

$$Z_o \frac{1 + j\alpha l \operatorname{tg} \beta l}{\alpha l + j \operatorname{tg} \beta l}$$

Finalmente

$$Z_I = Z_o \frac{\alpha l + \frac{1}{j \operatorname{tg} \beta l}}{1 + \frac{\alpha l}{j \operatorname{tg} \beta l}}$$

Ora, para comprimentos iguais a números ímpares de quartos de onda

$$\gamma l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

e, portanto,

$$Z_I = \alpha l Z_o = \alpha l \sqrt{\frac{L}{C}}$$

o que nos mostra, conforme era de esperar, que na frequência de ressonância a impedância inicial será puramente resistiva.

Para o valor de $\alpha = \frac{R}{2R_o}$ (relação 320.2), acharemos ainda:

$$Z_I = \frac{l}{2} R,$$

resultado que nos sugere um novo modo de determinação da resistência unitária da linha e que consistirá em acharmos o valor de Z_I na frequência correspondente a um comprimento de onda igual a 4 vezes o comprimento geométrico da linha.

Vê-se também que, no caso de um fio único, isto é, de uma antena, esse valor de Z_I será o valor da resistência efetiva da antena, pois que constitui a resistência de carga do gerador. Observemos que, se $\alpha = 0$ recairemos no caso do parágrafo (511).

542 — Se a linha de um quarto de comprimento de onda for terminada em curto circuito, os fenômenos observáveis não serão menos interessantes. Examinemos aqui uma das propriedades mais singulares exibidas pelo circuito.

Consideremos uma linha de comprimento
 $l = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$ terminada em curto circuito e

um ponto qualquer M situado entre os seus extremos, distante de um comprimento l_1 da extremidade terminal e de um comprimento l_2 da extremidade inicial, figura 542.1.

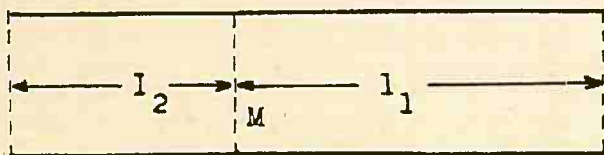


Figura 542.1

Para valores desprezíveis de α :

$$\begin{aligned} \cosh(\gamma l_1 + \gamma l_2) &= \cos \beta (2n - 1) \frac{\lambda}{4} = \\ &= \cos (2n - 1) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ou ainda

$$\operatorname{sen} \beta l_1 \operatorname{sen} \beta l_2 = - \cos \beta l_1 \cos \beta l_2$$

Donde

$$\frac{\operatorname{sen} \beta l_1}{\cos \beta l_1} = \operatorname{tg} \beta l_1 = - \frac{\cos \beta l_2}{\operatorname{sen} \beta l_2} = - \cot \beta l_2$$

relação que nos mostra que as impedâncias das duas seções, uma à direita e outra à esquerda do ponto considerado, serão iguais e de sinais contrários, isto é, no ponto ou na seção M da linha as duas reatâncias se cancelarão, dando em resultado uma impedância puramente resistiva, cujo valor dependerá dos valores de l_1 e de l_2 . Particularmente, se $n = 1$, a impedância resistiva variará de zero, na extremidade em curto circuito, até infinito na extremidade inicial. No caso de n ser maior do que 1, isto é, no caso do comprimento da linha ser de um número ímpar de quartos de comprimento de onda, de metade em metade do comprimento de onda a resistência passará por zero, ocorrendo os máximos de quarto do comprimento de onda.

Na figura 542.2 mostramos como poderemos tirar partido desta propriedade para combinar a im-

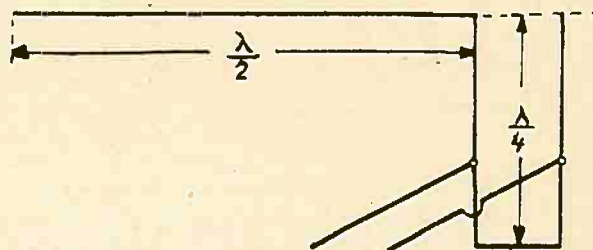


Figura 542.2

pedância de uma linha de transmissão aperiódica com a impedância de uma antena.

O valor da resistência, conforme dissemos, dependerá da posição do ponto M ou das distâncias l_1 e l_2 . O valor inicial poderá ser calculado da mesma maneira pela qual procedemos no caso da linha em circuito aberto. Com efeito:

$$Z_I = Z_o \frac{\alpha l + j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j \alpha l \operatorname{tg} \beta l} = Z_o \frac{\frac{\alpha l}{j \operatorname{tg} \beta l} + 1}{\frac{1}{j \operatorname{tg} \beta l} + \alpha l}$$

Para $l = \frac{\lambda}{2}$, $\operatorname{tg} \beta l = \infty$

$$Z_I = R_I = \frac{1}{\alpha l} = \frac{2R_o}{lR}$$

Para o meio da linha $\operatorname{tg} \beta l_1 = 1$ e obteremos, para uma das metades,

$$Z_m = Z_o \frac{\alpha l_1 + j}{1 + j \alpha l_1}$$

Ou, separando as componentes,

$$Z_m = Z_o \left[\frac{2 \alpha l_1}{1 + \alpha^2 l_1^2} + j \frac{1 - \alpha^2 l_1^2}{1 + \alpha^2 l_1^2} \right] \quad (542.1)$$

Para o trecho l_2 obteríamos, semelhantemente:

$$Z'_m = Z_o \frac{1 + j \alpha l_2}{\alpha l_2 + j}$$

Ou, separando as componentes,

$$Z'_m = Z_o \frac{2\alpha l_2}{1 + \alpha^2 l_2^2} + j Z_o \frac{\alpha^2 l_2^2 - 1}{\alpha^2 l_2^2 + 1} \quad (542.2)$$

Confirma-se, assim, o que demonstramos precedentemente, isto é, que a impedância resultante será puramente omica. Realmente, adicionando membro a membro (542.1) e (542.2) obteremos, finalmente:

$$2r_m = Z_o \frac{2\alpha l_1}{1 + \alpha^2 l_1^2} + Z_o \frac{2\alpha l_2}{1 + \alpha^2 l_2^2}$$

Ou

$$r_m = Z_o \frac{2\alpha l_1}{1 + \alpha^2 l_1^2} = Z_o \frac{2\alpha l_2}{1 + \alpha^2 l_2^2}$$

600 — A linha indeformante

Afim de que todas as frequências sejam transmitidas sem deformação ao longo de uma linha, isto é, que as correntes obtidas na extremidade terminal sejam uma reprodução exata, quanto à forma e relações de fase, das correntes impressas à extremidade inicial, torna-se necessário:

a) — que a impedância oferecida ao gerador pela extremidade inicial da linha seja puramente resistiva, de maneira a não haver, inicialmente, discriminação de frequência;

b) — que a reflexão seja nula, porquanto, no caso contrário, a impedância inicial variaria diversamente para cada frequência;

c) — que a atenuação e a velocidade de propagação sejam constantes para todas as frequências impressas à linha.

As duas primeiras condições exigem que a linha seja terminada pela sua impedância característica, cuja parte reativa deverá ser nula. Escrevamos isso:

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \varphi}{\sqrt{G^2 + \omega^2 C^2} \varphi'}}$$

Ou

$$Z_o = \sqrt[4]{\frac{R_2 + \omega^2 L^2}{G_2 + \omega^2 C^2}} \left| \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi - \varphi'} \right|$$

Portanto, para que Z_o seja puramente resistivo e igual a R_o , $\varphi = \varphi'$ ou, o que vem a dar na mesma coisa,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega C}{G}$$

Donde, finalmente, a procurada condição:

$$CR = LG$$

Esta importantíssima relação, que traduz a condição de indeformabilidade dos sons transmitidos eletricamente ao longo da linha, acarreta uma serie de conseqüências interessantes:

I) — O valor puramente omico da impedância característica é igual a $\sqrt{\frac{L}{C}}$ isto é, precisamente o que apresentaria uma linha desprovida de perdas ou uma linha de comprimento infinito, porquanto

$$Z_o = R_o = \sqrt{\frac{R^2 (1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2})}{G^2 (1 + \frac{\omega^2 C^2}{G^2})}} = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

II) — A atenuação será independente da frequência, isto é, todas as frequências serão igualmente atenuadas. Com efeito:

$$(\alpha + j\beta)^2 = GR - \omega^2 CL + j\omega (CR + GL)$$

Esta relação poderá ser escrita sob outra forma, uma vez que $CR = GL$:

$$(\alpha + j\beta)^2 = GR - \omega^2 CL + j2\omega CR$$

Ou

$$(\alpha + j\beta)^2 = (\sqrt{GR})^2 + (j\omega \sqrt{CL})^2 + j2\omega \sqrt{GRCL}$$

Ou ainda

$$(\alpha + j\beta)^2 = (\sqrt{GR} + j\omega \sqrt{CL})^2$$

Donde

$$\alpha = \sqrt{GR} \quad e \quad \beta = \omega \sqrt{CL}$$

III) — A velocidade de propagação será a mesma para todas as frequências, condição também indispensável para a fiel reprodução dos sons:

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Então, a velocidade de propagação, para todas as frequências, será igual à velocidade de propagação da luz;

IV) — Na onda que se propaga, a energia se distribue igualmente entre o campo magnético e o campo elétrico existentes ao longo da linha. Evidenciaremos esta afirmação se atendermos que, em virtude de

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{E_o}{I_o} \quad ,$$

$$1/2 LI_o^2 = 1/2 CE_o^2$$

Esta igualdade ultima nos mostra também que são iguais as potencias maximas correspondentes à energia sob forma de campo magnético e à energia sob forma de campo eletrostatico. Esta propriedade é verificada para todas as linhas em que $R \ll \omega L$;

V) — A energia dissipada sob forma de calor num determinado trecho da linha é igual à energia perdida no mesmo trecho.

Certamente, porquanto para os valores máximos, teremos, como anteriormente:

$$Z_o = \frac{E_o}{I_o} = \sqrt{\frac{R}{G}}$$

Portanto, por unidade de comprimento,
 $RI^2 = GE^2$;

VI) — A atenuação apresenta um valor mínimo. Da igualdade

$$\frac{G^2}{R^2} = \frac{C^2}{L^2} = \frac{\omega^2 C^2}{\omega^2 L^2}$$

concluiremos

$$L \sqrt{\frac{G^2 + \omega^2 C^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} - C = 0$$

Ou ainda,

$$1/2 \omega^2 \left(L \sqrt{\frac{G^2 + \omega^2 C^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} - C \right) = 0 \quad (600.1)$$

Ora, se nos lembrarmos de que (320.2)

$$\alpha^2 = \frac{CR - \omega^2 CL + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}{2}$$

verificaremos facilmente que a expressão (600.1) nada mais é do que a derivada $\frac{d\alpha^2}{dL}$ igualada a

zero e, assim, corresponde ao mínimo de α^2 , isto é, da atenuação. Concluiremos portanto que, admitindo-se a possibilidade de variarmos a auto-indução unitária, o valor mínimo da atenuação ocorrerá quando as constantes primarias da linha estiverem ligadas entre si pela relação $CR = GL$.

610 — Recapitulando as propriedades acima examinadas, concluiremos que a linha indeformante realiza também as condições de máxima eficiência na transmissão da energia elétrica para fins de comunicações telefônicas. Cumpre-nos observar, porém, que, neste e nos cálculos precedentes, sempre consideramos R , L , C e G como independentes da frequência e da posição, o que não é rigorosamente verdade, principalmente devido ao efeito pelicular. Por este motivo e também pela dificuldade em se conseguir na prática a realização da condição $CR = GL$, as linhas sempre introduzirão uma certa deformação nos sons transmitidos sob a forma de correntes elétricas. Em se tratando de linhas aéreas, principalmente, G é muito pequeno, e assim convem ser para não aumentarmos a atenuação, de sorte que a condição de máximo rendimento obrigaria a grandes valores para L , valores de difícil realização pois os processos de heavificação empregados para esse fim introduzem, por sua vez, deformações de diversas naturezas, devidas à variação da resistência efetiva das «bobinas de carga», às perdas por histerésis nos núcleos dessas bobinas, correntes de Foucault, etc.

Por outro lado, a menos que lidemos com frequências muito baixas, quase sempre poderemos des-

prezar a resistência e a perditância em presença das reatâncias, isto é, poderemos atribuir a X e a Y argumentos muito próximos de $\frac{\pi}{2}$ escrevendo:

$$X = \omega L \left[\frac{\pi}{2} - \frac{R}{\omega L} \right]$$

$$Y = \omega C \left[\frac{\pi}{2} - \frac{G}{\omega C} \right]$$

Assim sendo, conforme já verificamos anteriormente,

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \right]$$

$$\alpha = 1/2 \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$$

$$\beta = \omega \sqrt{CL}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Em conclusão, dentro dos limites em que nos seja lícito admitir que as constantes primárias não variem com a frequência, a linha sem dissipação poderá ser considerada também como indeformante, porquanto Z_o é praticamente resistiva e a atenuação e a velocidade não variam com a frequência.

700 — A linha como transformador

Retomemos a relação (140.1), que nos indica a tensão inicial em uma linha de comprimento l em função dos valores terminais, isto é:

$$E_I = E_T \cosh \gamma l + I_T Z_o \sinh \gamma l$$

Formemos a relação entre as tensões inicial e terminal

$$\frac{E_T}{E_I} = \frac{p}{p \cosh \gamma l + \sinh \gamma l},$$

onde p representa a relação $\frac{Z_T}{Z_o}$.

Em se tratando de frequências elevadas poderemos considerar $\gamma l = j\beta l$ e a nossa relação se apresentará sob outra forma mais simplificada:

$$\frac{E_T}{E_I} = \frac{p}{p \cos \beta l + j \sin \beta l}$$

Ou também, para valores reais:

$$r = \frac{p}{\sqrt{p^2 \cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l}}$$

Substituindo β pelo seu valor,

$$r = \frac{p}{\sqrt{p^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} l + \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} l}}$$

O exame deste resultado nos mostra que, para valores de l iguais a números ímpares de quartos de comprimento de onda, isto é, para $l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ $r = p$; para valores de l iguais a números pares de quartos de comprimentos de onda, $r = 1$; isto é, a relação de transformação varia de 1 a p quando o comprimento de onda varia de um quarto. Então o máximo da relação de transformação (r) corresponderá ao valor máximo de $p = \frac{Z_T}{Z_0}$.

Assim pois, fixado um valor para Z_T , de acordo com as condições terminais da linha, a variação de r dependerá da variação que conseguirmos dar a Z_0 . Ora, no caso da linha constituída por dois fios, já vimos que $Z_0 = 276 \log \frac{2D}{d}$ omios. A relação $\frac{D}{d}$ na pratica poderá ser variada de 1,05 a 74,5 ou mais, correspondendo a valores de Z_0 compreendidos entre 6-600 omios. Quer isto dizer que poderemos obter, em certos casos, uma variação da relação de transformação até de 1 : 100 ou mais.

Essa propriedade das linhas de transmissão nos sugere o seu emprego como elemento combinador de impedâncias.

Singular circuito que é a linha de transmissão, inexcédível em simplicidade mecânica e na complexidade dos fenômenos de que é sede!

A relação de transformação em relação à corrente será obtida de maneira análoga à que fizemos precedentemente:

$$\left| \frac{I_T}{I_I} \right| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{2\pi l}{\lambda} + p^2 \sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}}}$$

Se considerarmos as impedâncias, poderemos confirmar estas e outras propriedades já salientadas anteriormente. Da relação (130.1) concluiremos:

$$Z_I = Z_0 \frac{Z_0 + \frac{Z_T}{j \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}}}{Z_T + \frac{Z_0}{j \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}}}$$

Para $l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ $Z_I = \frac{Z_0^2}{Z_T}$

Então, fazendo variar convenientemente Z_0 poderemos combinar a impedancia Z_I de um gerador com a impedância Z_T de uma carga. Mais ainda, se $Z_T = 0$, $Z_I = \infty$.

No caso da linha apresentar comprimento igual a um certo número par de quartos de comprimento de onda, ou de metades de comprimento de onda, $Z_I = Z_T$, isto é, a linha se comportará como um transformador de relação 1 : 1. Poderemos frizar melhor este carácter da linha, como combinadora de impedâncias, admitindo todas as impedâncias em

jôgo como puramente resistivas. Em assim sendo, poderemos escrever:

$$I_I^2 R_I = I_I^2 \frac{R_0^2}{R_T} = I_T^2 R_T = I_T^2 \frac{R_0^2}{R_I}$$

Donde $R_T = \frac{I_I}{I_T} R_0$ e $R_I = \frac{I_T}{I_I} R_0$

Portanto $R_0^2 = R_I R_T$

Se desejassemos, por exemplo, combinar uma impedância de 150 omios com uma outra de 600 omios, poderíamos liga-las entre si por intermedio de uma linha de impedância característica igual a

$$R_0 = \sqrt{150 \times 600} = 300 \text{ omios}$$

800 — A linha como filtro.

Consideremos uma linha de transmissão de comprimento l e seja M um ponto distante de l_1 e l_2 das extremidades terminal e inicial. Nesse ponto M pretendemos instalar um receptor, isto é, um dispositivo não gerador de força-eletromotriz, apresentando uma impedância igual a Z_r . Pelo princípio da superposição dos efeitos, a tensão inicial E_I poderá ser considerada como resultante da impressão de uma corrente I_T na extremidade da linha e de uma corrente I_r no ponto M . A corrente I_T ocasionará uma tensão inicial

$$E' = E_T \cosh \gamma l + I_T Z_0 \sinh \gamma l$$

A componente inicial devida à corrente I_r será

$$E'' = I_r Z_0 \sinh \gamma l_2$$

Por conseguinte a tensão inicial será:

$$E_I = E' + E'' = E_T \cosh \gamma l + I_T Z_0 \sinh \gamma l + I_r Z_0 \sinh \gamma l_2$$

Analogamente, encontrariamos para a corrente inicial:

$$I_I = I_T \cosh \gamma l + \frac{E_T}{Z_0} \sinh \gamma l + I_r \cosh \gamma l_2 \quad (800.2)$$

A impedância inicial terá como expressão

$$Z_I = \frac{E_T \cosh \gamma l + I_T Z_0 \sinh \gamma l + I_r Z_0 \sinh \gamma l_2}{I_T \cosh \gamma l + \frac{E_T}{Z_0} \sinh \gamma l + I_r \cosh \gamma l_2} \quad (800.3)$$

Para o funcionamento da linha como filtro, a posição do ponto M deverá ser fixada de acordo com as condições terminais da linha, conforme verificaremos a seguir.

Para maior comodidade e simplificação das fórmulas, adotemos como unidade de comprimento o comprimento de onda correspondente à frequência

impressa (f) e chamemos de m à relação f/f_r entre a frequência impressa ao sistema e de ressonância da linha. Então, se na frequência de ressonância o comprimento da linha for igual a L comprimentos de onda λ , na frequência mf_r o comprimento de onda será $\frac{\lambda}{m}$ e o número de comprimentos de onda da linha será m vezes maior, ou mL .

Deveremos estudar separadamente os casos da linha em curto circuito e em circuito aberto.

810 — Caso da linha em curto circuito.

Para o caso da linha em curto circuito e adotando as convenções anteriores,

$$E_r = I_T Z_0 \operatorname{senh} \gamma mL_1$$

$$E_I = I_T Z_0 \operatorname{senh} \gamma mL + I_r Z_0 \operatorname{senh} \gamma mL_2,$$

sendo

$$I_r = I_T \operatorname{cosh} \gamma mL_1$$

Portanto

$$\frac{E_r}{E_I} = \frac{\operatorname{senh} \gamma mL_1}{\operatorname{senh} \gamma mL + \operatorname{cosh} \gamma mL_1 \operatorname{senh} \gamma mL_2}$$

Fazendo

$$p = \frac{Z_r}{Z_0} = \operatorname{tgh} \gamma mL_1,$$

virá, finalmente:

$$\frac{E_r}{E_I} = \frac{p \operatorname{senh} \gamma mL_1}{p \operatorname{senh} \gamma mL + \operatorname{senh} \gamma mL_1 \operatorname{senh} \gamma mL_2}$$

Para a expressão da impedância inicial encontraremos:

$$Z_I = Z_0 \frac{p \operatorname{senh} \gamma mL + \operatorname{senh} \gamma mL_1 \operatorname{senh} \gamma mL_2}{p \operatorname{cosh} \gamma mL + \operatorname{senh} \gamma mL_1 \operatorname{cosh} \gamma mL_2}$$

Os resultados acima seriam os que obteríamos se aplicássemos a uma linha de comprimento natural de onda igual a L metros uma frequência m vezes maior do que a sua frequência de ressonância. Suponhamos, porém, que o comprimento da linha seja igual a um número ímpar de quartos de comprimentos de onda e localizemos M tomando $L_2 = 1/4$. Para $m = 1$, isto é, para uma frequência igual a f_r , $E = 0$, ao mesmo tempo que $Z_I = \infty$.

Então, a linha oferecerá grande atenuação para essa frequência, que não alcançará o receptor. Poderemos, portanto, empregá-la como filtro, ligando-a a uma antena que seja excitada por um transmissor emitindo a frequência f_r e utilizando essa mesma antena para a recepção de sinais de outras estações, funcionando em frequências tais que $f = mf_r$.

Esta propriedade encontra principal aplicação nos sistemas de ultra-alta-frequência, nos quais é

praticamente impossível o estabelecimento de filtros com as componentes concentradas. Nestes casos a linha costuma ser constituída por dois condutores concêntricos.

O emprego da linha terminada em curto circuito exige que o seu comprimento seja igual ou superior a $3/4$ de comprimento de onda e que a tomada para o receptor seja localizada a uma distância (da extremidade terminal) igual a um número par de quartos de comprimento de onda.

820 — Caso da linha em circuito aberto.

Fazendo na equação (800.2)

$$I_r = \frac{E_T}{Z_0} \operatorname{senh} \gamma mL_1 \text{ e } I_T = 0$$

e conservando sempre a mesma notação, encontraremos, para o caso da linha terminada em circuito aberto:

$$\frac{E_r}{E_I} = \frac{p \operatorname{cosh} \gamma mL_1}{p \operatorname{cosh} \gamma mL + \operatorname{cosh} \gamma mL_1 \operatorname{senh} \gamma mL_2}$$

e

$$Z_I = Z_0 \frac{p \operatorname{cosh} \gamma mL + \operatorname{cosh} \gamma mL_1 \operatorname{senh} \gamma mL_2}{p \operatorname{senh} \gamma mL + \operatorname{cosh} \gamma mL_1 \operatorname{senh} \gamma mL_2}$$

É evidente que, neste caso, a tomada para o receptor deverá ficar situada em pontos distantes de números ímpares de quartos de comprimento de onda da extremidade terminal e que, para que a impedância inicial se torne infinita na frequência do transmissor, a linha deverá apresentar comprimentos iguais a números pares de quartos de comprimento de onda.

830 — Circuitos mistos.

Poder-se-á conseguir efeito análogo ao dos filtros complexos, também denominados «derivados-m», empregando-se uma linha terminada em curto circuito de menor comprimento do que o necessário para o seu funcionamento como filtro e ligando-se uma capacidade em paralelo com a sua impedância inicial, de sorte a tornar possível a sintonização do sistema na frequência a eliminar, como se fôra um circuito anti-ressonante. No caso da terminação em circuito aberto o condensador teria de ser instalada em série com a linha.

Compreende-se que tais efeitos se verificarão para uma gama limitada, em relação à qual a frequência de ressonância corresponderia à de atenuação infinita.

A experiência demonstra que, para emprêgos semelhantes, o comprimento ótimo da linha em curto circuito deverá corresponder a $0,185\lambda$; no caso da linha em circuito aberto, o comprimento ótimo deverá ser igual a $0,472$ vezes o comprimento de onda, todas estas indicações se referindo aos condutores concêntricos. No primeiro caso o aumento da impedância inicial (em relação à linha sem o elemento de sintonização) seria de 14% , ao passo que, no segundo caso, o aumento seria apenas de 3% .

900 — Considerações sobre o cálculo dos condutores

Em se tratando de condutores metálicos, como é o caso presente, onde as correntes de deslocamento são desprezíveis, as equações de Maswell se simplificam e podem ser empregadas sob forma mais adequada ao estudo das secções circulares:

$$\int H dl = 4\pi I \int dS \quad (900.1)$$

$$\int \epsilon dl = - \frac{d\psi}{dt} = - \frac{dH}{dt} \quad (900.2)$$

Consideremos no interior do condutor um anel de espessura dx , constituído pelos circulos de raios x e $x + dx$, figura 900.1. Para uma densidade

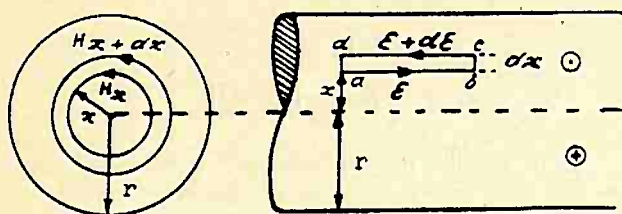


Figura 900.1

de corrente igual a I poderemos escrever, observando que 2π figurará em todos os termos:

$$4\pi I x dx = H_{x+dx} (x + dx) - H_x$$

Por conseguinte,

$$\frac{dH_x}{dx} + \frac{H_x}{x} = 4\pi I \quad (900.3)$$

De acordo com (900.2)

$$\epsilon - (\epsilon + \frac{d\epsilon}{dx} dx) = - \frac{d}{dt} \mu H dx$$

Isto é,

$$\frac{d\epsilon}{dx} = \mu \frac{dH}{dt}$$

Então, para uma resistividade igual a ρ

$$\epsilon = \rho I e$$

$$\frac{d\epsilon}{dx} = \rho \frac{dI}{dx} = \mu \frac{dH}{dt}$$

Ou ainda, sob outra forma

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\mu}{\rho} \frac{dH}{dt} \quad (900.4)$$

Ora, em se tratando de correntes alternativas sinusoidais, haverá comodidade em adotarmos a notação simbólica, considerando I e H como fun-

ções de x . Assim pois, escrevamos (900.3) e (900.4) sob as fórmulas

$$4\pi I_x = \frac{dH_x}{dx} + \frac{H_x}{x} \quad (900.31)$$

$$\frac{dI_x}{dx} = j \frac{\omega\mu}{\rho} H_x \quad (900.41)$$

Derivando (900.41) em relação a x , adotando as unidades MKS e eliminando H_x entre as equações, obteremos:

$$\frac{d^2 I_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI_x}{dx} - j \frac{\omega\mu}{\rho} I_x = 0 \quad (900.5)$$

Para maior facilidade tipográfica abolimos, na equação (900.5), a notação adequada, o que não nos causará transtorno uma vez que não nos esqueçamos da natureza vetorial de I .

Ainda, para maior comodidade dos cálculos, substituíamos $\frac{\omega\mu}{\rho}$ por m^2 .

A equação (900.5) se apresentará então sob a forma:

$$\frac{d^2 I_x}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI_x}{dx} - jm^2 I_x = 0 \quad (900.51)$$

A semelhança desta equação com as encontradas no estudo das funções de Bessel é manifesta. Com efeito, as funções de Bessel da primeira categoria satisfazem à equação diferencial

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n(x)}{dx} + (1 - \frac{n^2}{x^2}) J_n(x) = 0$$

A identificação das duas equações será facilmente obtida se usarmos um artifício simples. Façamos

$$y = j \sqrt{j} mx$$

Então

$$dx = \frac{dy}{jm \sqrt{j}} \quad e \quad dx^2 = - \frac{dy^2}{jm^2}$$

Substituindo esses valores na equação (900.51) obteremos:

$$\frac{d^2 I_x}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dI_x}{dy} + I_x = 0$$

fórmula sob a qual a equação poderá ser identificada como a de uma função de Bessel da primeira categoria e de ordem zero. A integração será imediata e nos fornecerá como resultado

$$I_x = k J_0(y) = k J_0(j \sqrt{j} mx)$$

A determinação da constante de integração será feita facilmente, observando-se o desenvolvimento de $J_0(j \sqrt{j} mx)$:

$$I_x = k \left(1 + j \frac{m^2 x^2}{2^2} - \frac{m^4 x^4}{(2.4)^2} - j \frac{m^6 x^6}{(2.4.6)^2} + \frac{m^8 x^8}{(2.4.6.8)^2} - \dots \right)$$

Ou então, adotando a notação unversalmente aceita, de Lord Kelvin:

$$I_x = k (bermx + j beimx)$$

Sob essas formas observaremos que, se I_o representar a densidade da corrente no centro do condutor, para $x = 0$, $k = I_o$.

Poderemos, portanto, adotar definitivamente para a expressão geral da densidade da corrente:

$$I_x = I_o (ber mx + j beimx)$$

Para $x = r$, isto é, na periferia do condutor,

$$I_r = I_o (bermr + j beimr)$$

Em valores absolutos, teríamos

$$|I_r| = |I_o| \sqrt{ber^2mr + bei^2mr}$$

Por conseguinte, a relação entre as duas correntes será:

$$\left| \frac{I_o}{I_r} \right| = (ber^2mr + bei^2mr)^{-\frac{1}{2}}$$

O exame dessas expressões mostra-nos que o efeito pelicular depende do raio do condutor, da permeabilidade da material, da conductibilidade e da frequência, porquanto $m = \sqrt{\frac{\omega\mu}{e}}$; varia, porém, mais rapidamente com o diâmetro (ou com o raio) do condutor.

Nestas condições, para condutores do mesmo material e percorridos por correntes de frequências diferentes, o efeito pelicular será o mesmo quando for satisfeita a relação

$$r_1^2 f_1 = r_2^2 f_2$$

Isto quer dizer que a frequência de 50 ciclos ocasionará o mesmo efeito pelicular que uma corrente de 20.000 ciclos, quando o diâmetro do condutor em que circular a primeira corrente for 20 vezes superior àquele em que circular a segunda. Assim, por exemplo, haverá equivalência desses efeitos para um condutor de 0,001 de raio percorrido pela corrente de 20.000 ciclos e um condutor de 0,02 de raio percorrido pela corrente de 50 ciclos. Para ambos a relação entre as correntes no interior e no exterior do condutor será igual, no caso do cobre, a 1,318.

Este aumento da resistência aparente poderá, em certos casos, ser atenuado pela remoção da parte interna dos condutores, que se transformam, assim, em verdadeiros tubos. É o que se depreende do exame das relações anteriores, pelas quais vemos

que entre a densidade da corrente na parte interna e a densidade nas proximidades da superfície ha uma diferença de fase que atinge o maximo para a parte central do condutor, correspondendo a um angulo definido pela relação

$$tg \varphi = \frac{beimr}{bermr}$$

No exempllo que acima consideramos e para o qual $mr = 1,5$,

$$\begin{aligned} bei mr &= 1,9376 \\ ber mr &= 0,2214 \\ tg \varphi &= - 8,708 \\ \varphi &= 96^{\circ},518 \end{aligned}$$

O valor de I_r será:

$$\begin{aligned} I_r &= - 0,2214 + j 1,9376 \text{ ou} \\ I_r &= 1,9502 \angle 96,518 \end{aligned}$$

Este cálculo nos mostra que a densidade da corrente na periferia seria cerca de 94 % maior do que no centro.

Haverá franca oposição de fase entre as correntes da periferia e da parte axial do condutor quando $mr = 5,025$ e a quadratura corresponderá a $ber mx = 0$, isto é, ocorrerá para $mr = 2,85$.

O que mais nos interessa, porém, é a relação entre as resistências do condutor quando percorrido pela corrente alternativa e quando percorrido pela corrente continua, relação essa que nos servirá de base para o estabelecimento do método de cálculo dos condutores de que nos ocuparemos dentro em pouco.

Por enquanto, temos tratado apenas das densidades das correntes. Será fácil, porém, obtermos a corrente total através do condutor. Com efeito:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^r 2 \pi I_x dx = 2 \pi I_o \int_0^r x J_0 (j \sqrt{j} mx) dx = \\ &= \frac{2 \pi I_o r j_1 (j \sqrt{j} mr)}{i \sqrt{j} m} \end{aligned}$$

Supondo-se o condutor constituído de numerosos filetes elementares isolados uns dos outros em toda sua extensão, porém efetivamente ligados entre si nas duas extremidades, será lógico admitirmos que a queda de tensão devida à resistência ômica e à indutância seja a mesma em cada um deles e igual à queda de tensão verificada nas extremidades do condutor. Portanto, a queda por metro poderá ser tomada igual a

$$E = I_r \rho = I_o \rho J_0 (i \sqrt{j} mr)$$

Donde o valor da impedância apresentada pelo condutor:

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{j \sqrt{j} m \rho J_0 (j \sqrt{j} mr)}{2 \pi r j_1 (j \sqrt{j} mr)} \text{ por metro.}$$

A relação entre a impedância e a resistência

unitária do condutor em relação à corrente contínua ($\frac{\rho}{\pi r^2}$ por metro) será:

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{j\sqrt{jmr}}{2} \cdot \frac{J_0(j\sqrt{jmr})}{J_1(j\sqrt{jmr})}$$

A parte real ou resistiva de Z sendo denominada R , a procurada relação será

$$\frac{R}{R_0} = \frac{mr}{2} \cdot \frac{ber'mr bermr - ber'mr bei'mr}{bei'^2mr + ber'^2mr}$$

expressão obtida constituindo as funções de Bessel J_0 e J_1 pelos seus valores correspondentes em função de ber , bei , ber' e bei' , estes últimos representando as partes reais e imaginárias do desenvolvimento da função de Bessel de primeira categoria e primeira ordem, $J_1(j\sqrt{jmr})$.

Tomando por base estas fórmulas têm sido organizadas tabelas que indicam, para os diversos valores de mr , os correspondentes valores de $\frac{R}{R_0}$

A tabela 900.1, cujos elementos em parte foram compilados de diversos autores e em parte por nós calculados, reúne uma série de informações de utilidade, facilitando o solucionamento de muitos problemas relativos à condução de correntes de alta frequência ou de grande intensidade.

910 — Aplicações práticas.

Nas aplicações os dados do problema costumam ser a frequência e a intensidade da corrente. Conhecida a frequência, poderemos determinar imediatamente o valor de m . Assim, adotando-se para o caso do cobre

$$\begin{aligned} \mu &= 4\pi \cdot 10^{-7} \\ \rho &= 1,724 \cdot 10^{-8} \text{ ohms por metro,} \end{aligned}$$

encontraremos

$$m = 2\pi \sqrt{\frac{20f}{1,724}} = 21,4 \sqrt{f(\text{cps})}$$

Se desejarmos o resultado expresso em quilociclos por segundo, como é mais cômodo quando lidamos com frequências muito elevadas,

$$m = 676,7 \sqrt{f(\text{cps})}$$

Portanto,

para 50 cps	$m = 151,2$
» 60 »	$m = 165,76$
» 1.000 »	$m = 676,73$
» 100 Kcs	$m = 6767,3$
» 1.000 »	$m = 21.400,6$
» 10 Mc	$m = 676.728$

Não extranharemos os valores elevados encontrados para m se nos recordarmos de que r deverá ser expresso em metros.

Determinado o valor de m , para o prosseguimento do cálculo, isto é, para o conhecimento de r precisaríamos, agora, adotar um determinado valor para $\rho = \frac{R}{R_0}$ e, pelas tabelas, obtermos mr .

Toda a dificuldade residirá, então, na escolha da relação ρ porquanto, em princípio, conviria tomá-la o menor possível; isto ordinariamente nos conduziria a valores de r muito baixos, valores êsses vantajosos, sem dúvida, sob o aspecto do efeito pelicular, mas desfavoráveis relativamente à condutância. O problema envolverá, portanto, uma série de tentativas, até que consigamos uma conciliação razoável entre os diversos fatores em jôgo.

Muitas vezes poderemos contornar tais dificuldades pelo emprego de condutores ôcos, para o cálculo dos quais imaginamos e temos empregado, com resultados satisfatórios, o processo que a seguir indicaremos.

911 — Estabeleçamos, previamente, um valor conveniente para a relação ρ . A prática tem demonstrado que, para os valores ordinariamente baixos de R_0 , é perfeitamente admissível um aumento da resistência de 1% (devida ao efeito pelicular). Adotaremos, portanto, como ponto de partida, $\rho = \frac{R}{R_0} = 1,01$. Isto equivale a fixarmos o pro-

ducto mr em 1,2, de sorte que, para diversos valores das frequências, poderemos calcular o diâmetro dos condutores pela fórmula.

$$\delta = 2r = 2 \frac{1,2}{m} = \frac{0,112}{\sqrt{f(\text{cps})}} \quad (911.1)$$

A fórmula acima (911.1) nos fornecerá os diâmetros máximos que os condutores de cobre poderão apresentar afim de que o acrescimento de resistência, devido ao efeito pelicular, não ultrapasse a 1% da sua resistência em corrente contínua. Por exemplo, na frequência de 1.000 Kcs o diâmetro máximo do condutor de cobre, nas condições acima, deverá ser de $\frac{0,112}{1.000} = 0,000112$ ou sejam 0,0112 cms.

No caso de ser usada a prata, o que acontece muitas vezes, principalmente para o revestimento de outros condutores, com o duplo objetivo do aumento da condutibilidade e da proteção da superfície contra os agentes atmosféricos, obteríamos, para $\rho = 1,629 \cdot 10^{-8}$ a seguinte fórmula

$$\delta = \frac{0,109}{\sqrt{f(\text{cps})}} \quad (\text{metros})$$

Por meio dessas fórmulas poderemos organizar uma tabela (911.1) de muita utilidade nas aplicações, fornecendo-nos, em função das frequências, os diâmetros dos condutores de cobre e de prata para os quais $\rho = 1,01$.

Consultando essa tabela, verificaremos imediatamente que, na frequência de 50 ciclos, poderemos considerar como isentos do efeito pelicular os condutores cujos diâmetros não atinjam 1,6 centímetros.

Tabela 911.1

Frequência (Kc)	λ (metros)	Valores de δ (Centímetros)	
		Cobre	Prata
0,050	$6 \cdot 10^9$	1,584	1,541
100	3.000	0,0354	0,0345
500	600	0,0158	0,0154
1.000	300	0,0112	0,0109
1.500	200	0,00914	0,0089
2.000	150	0,0079	0,0077
3.000	100	0,0065	0,0063
6 Mc	50	0,00457	0,00445
10 Mc	30	0,00354	0,00345
20 Mc	10	0,00251	0,00243
60 Mc	5	0,00145	0,00141
300 Mc	1	0,00065	0,00063

912 — Determinado, pela forma que acabamos de indicar, o máximo diâmetro para o qual o efeito pelicular não se manifeste de maneira exagerada, não nos restará outra alternativa a não ser a de utilizarmos vários dos condutores assim calculados afim de conseguirmos dar vazão à toda a corrente desejada, dentro dos limites de elevação de temperatura compatível com o emprêgo que se tem em vista. Por outras palavras, o número destes condutores será fixado uma vez estabelecida a densidade de corrente aconselhável em cada caso concreto, restando-nos decidir quanto ao modo de grupá-los.

O conhecimento da teoria do efeito pelicular nos condutores de diâmetros reduzidos, feita anteriormente, sugere-nos o modo de conseguirmos êsse agrupamento sem que o efeito pelicular intervenha novamente.

Poderemos proceder de duas maneiras: ou constituiremos com os diversos condutores um cabo «Litz», isolando-os perfeitamente e transpondo-os, isto é, traçando-os de tal maneira que cada um deles venha à periferia o mesmo número de vezes por unidade de comprimento, ou então, os gruparemos segundo um círculo de diâmetro fixado pelo diâmetro de um dos filetes.

A primeira alternativa é usada no caso das pequenas intensidades de corrente, e a segunda sugere-nos o emprego de um condutor ôco, em forma de tubo, apresentando uma espessura de parede igual ao diâmetro de um dos filetes.

No presente estudo nos ocuparemos unicamente deste segundo caso, mostrando como poderemos calcular os diâmetros interno e externo do condutor ôco destinado ao transporte de correntes de alta frequência e de intensidades elevadas, condutor este que deverá substituir o anel a que nos referimos acima (constituído pela justaposição dos filetes).

912.1 — Conhecida a intensidade da corrente e a área do condutor ou filete para o qual o efeito

pelicular é praticamente desprezível, determinaremos logo o número de filetes a ser empregado. Dispostos em círculo e tangenciando-se entre si, dois filetes consecutivos corresponderão a um ângulo central de $\frac{360^\circ}{n}$, conforme indicamos na figura 912.1.

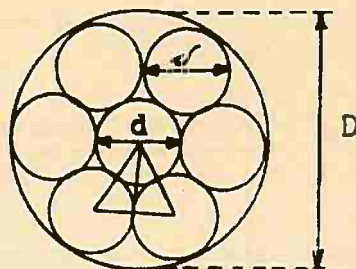


Figura 912.1

Se representarmos por d o diâmetro interno do tubo, ou mais precisamente, do círculo que tangencia internamente os filetes, e por D o diâmetro externo, concluiremos que

$$D = d + 2 \delta$$

$$\delta = (d + \delta) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

Donde

$$D = \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \delta$$

Por exemplo, se o número de condutores for de 6, caso representado na figura 912.11, teríamos

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 0,5$$

$$D = 3 \delta, d = D - 2 \delta$$

Nesta hipótese de $n = 6$, possivelmente não haveria necessidade de adotarmos a construção tubular, porquanto provavelmente conseguiríamos solucionar o problema com um fio sólido ou então recorrendo a um cabo «Litz».

912.2 — Uma exemplificação esclarecerá ainda melhor o que acabamos de explicar. Calculemos um condutor destinado a transportar uma corrente de 4,5 ampéris e cuja frequência seja de 20 Mc.

Pela tabela 911.1 verificaremos que o diâmetro a ser usado é de 0,0251 milímetros, correspondendo a uma secção total de 0,45 mm², e o número de condutores será de $\frac{0,45}{0,000495}$ ou sejam, 900.

Para o ângulo central encontraríamos $\frac{360^\circ}{900} = 0,4^\circ$.

Portanto

$$D = \frac{1 + 0,0035}{0,0035} \delta = 286,5 \delta$$

Ou, finalmente,

$$D = 7,19 \text{ mm.}$$

Empregariamos, então, um condutor ôco de diâmetro externo igual aproximadamente a 7,19 mm e apresentando uma espessura de parede de 0,025.

E' claro que a substituição de uma corôa circular cheia por uma corôa de círculos de diâmetro δ , como fizemos, nos beneficiará quanto à condutância e sómente seremos conduzidos a diâmetros exagerados se tentarmos aplicar o método ao caso de pequeno número de filetes, caso em que, conforme já salientamos, a solução do problema poderá ser feita de outra maneira.

Como curiosidade, poderemos aplicar ao nosso exemplo uma das fórmulas muito empregadas em cálculos desta natureza, que é a conhecida fórmula de Rayleigh. Como é sabido, essa fórmula se baseia na penetração da corrente, calculada pela fórmula geral da propagação e os seus resultados sómente poderão oferecer precisão satisfatória em se tratando de condutores de grandes secções como, por exemplo, no caso de trilhos, vigas, etc.

Ora, pela fórmula de Rayleigh, a espessura da parede do tubo deveria ser, em nosso caso particular, de

$$e = \frac{6,62}{\sqrt{f \text{ (cps)}}} = 0,00148 \text{ cms.}$$

Considerando a corôa circular de espessura e , acharíamos, conservando a mesma notação anteriormente usada:

$$A = (d + e) e$$

$$d = \frac{A - e^2}{e} = 3,04 \text{ cm.}$$

Esse condutor de 3 centímetros de diâmetro é, vizivelmente, exagerado; isto era de esperar, em vista do valor relativamente elevado, atribuído à penetração.

Releva notar, entretanto, que baseiamos todos os nossos estudos num determinado valor da relação

$\frac{R}{R_0}$. Se admitirmos uma variação de resistência

apenas de 0,1 % poderemos ainda utilizar os mesmos valores encontrados na tabela 911.1 multiplicando-os, entretanto, por 0,55; chegaríamos, assim, a diâmetros maiores para os condutores ôcos. Se fossemos menos rigorosos e julgássemos que um acréscimo de 10 % da resistência poderia ser tolerado, o que muitas vezes é o caso da prática, poderíamos obter os diâmetros dos filetes multiplicando os valores encontrados na tabela por 1,78, do que resultariam valores menores para os condutores ôcos calculados pelo método que ora acabamos de indicar.

Tabela 900.1

mr	ber	bei	Módulo	Argumento	R/R ₀	L/L ₀
0,5	0,9990	0,0625	1,0010	3°,617	1,0003	0,9998
1,0	0,9844	0,2496	1,0155	14°,217	1,005	0,9974
1,5	0,9211	0,5576	1,0768	31°,183	1,026	0,987
2,0	0,7517	0,9723	1,2286	52°,283	1,078	0,961
2,5	0,3999	1,4570	1,5111	74°,650	1,175	0,913
3,0	— 0,2214	1,938	1,9502	96°,518	1,318	0,845
3,5	— 1,1940	2,283	2,5759	117°,605	1,493	0,765
4,0	— 2,563	2,293	3,4391	138°,191	1,678	0,686
4,5	— 4,299	1,686	4,6179	158°,586	1,862	0,615
5,0	— 6,230	0,116	6,2312	178°,933	2,043	0,556
5,5	— 7,974	— 2,790	8,4473	199°,279	2,219	0,506
6,0	— 8,858	— 7,335	11,5008	219°,625	2,394	0,465
8,0	20,970	— 35,020	40,818	300°,909	3,094	0,351
10,0	138,800	56,370	149,810	432°,144	3,799	0,282