

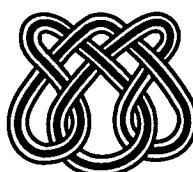
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Superfícies Singulares

Ton Maran

Nº 57

NOTAS DIDÁTICAS



Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2585

Superfícies Singulares

Ton Maran

Nº 57

**NOTAS
DIDÁTICAS**



**São Carlos
Out./2002**

Superfícies singulares

Ton Maran
USP-São Carlos

1 Introdução

Este texto é de fato um pretexto para apresentar a estudantes de graduação alguns objetos geométricos bidimensionais que considero interessantes. Tais objetos não aparecem na literatura acessível aos iniciantes. Um motivo talvez seja a dificuldade em desenhá-los, isto é representá-los no plano do papel. De fato, mesmo o espaço tridimensional não é o bastante para representá-los sem auto-interseção ou ainda pontos singulares. Por isso, denominaremos esses objetos *superfícies singulares (ou semi-regulares)*.

Frequentemente tais superfícies serão obtidas como *projeção genérica* sobre \mathbf{R}^3 de um mergulho de um plano no \mathbf{R}^4 .

Nos limitaremos às superfícies que podem ser apresentadas como zero de um polinômio de três variáveis $f(X, Y, Z) = 0$ e como imagem de uma aplicação $\varphi(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y))$, onde α, β e γ são polinômios.

A primeira forma é chamada *equação implícita* enquanto a segunda é chamada *parametrização* da superfície .

Os tópicos que apresentaremos são os seguintes:

- Superfícies singulares, exemplos
- Equações e parametrizações de superfícies singulares
- Pontos singulares de funções × pontos singulares de aplicações.

O leitor interessado poderá encontrar estudos mais gerais nos trabalhos de David Mond e outros [M].

Agradeço minha colega Maria Aparecida Soares Ruas pelos comentários críticos, porque não dizer singulares e ao meu colega Sérgio Zani pela conversão das figuras em .eps.

2 Superfícies singulares

2.1 projeções $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$

Seja \mathcal{C} a curva no espaço \mathbf{R}^3 imagem da aplicação $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $g(t) = (t, t^2, t^3)$ (*Figura 1*). De fato, um pedaço de arame torcido também serviria para o nosso experimento.

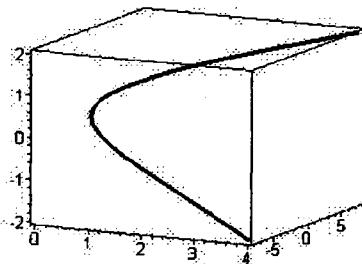


Figura 1:

Fixemos uma direção no \mathbf{R}^3 e consideremos um plano ortogonal a esta direção. Projeções de \mathcal{C} sobre planos fornecem diferentes traçados para a curva (*Figura 2*). *Em geral*, aparecerão auto-interseções transversais (pontos

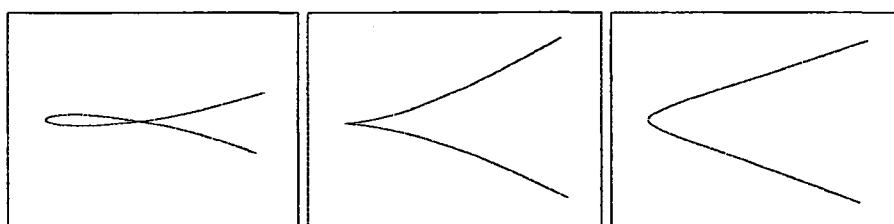


Figura 2:

duplos) e em particular, pontos cuspidais (singularidades). Esta particular projeção é aquela cuja direção no \mathbf{R}^3 é definida pelo vetor tangente à \mathcal{C} no ponto que se projetará no ponto cuspidal.

O termo, *em geral* ou *genericamente* usado no texto significa que, pequenas variações na direção de projeção mantém o cruzamento transversal. Neste caso diremos que a projeção é uma *projeção genérica*. Certas projeções também fornecem um traçado sem pontos duplos ou pontos singulares.

O motivo do aparecimento desses fenômenos no plano é que a curva \mathcal{C} é uma linha bem curvada e torcida, como pode ser visto¹ no \mathbf{R}^3 .

Enquanto no \mathbf{R}^3 uma vizinhança de cada ponto da curva é localmente homeomorfa a um segmento (neste caso diremos que a curva é regular), numa projeção genérica da curva no plano, podemos ter um ponto duplo, isto é, um ponto cuja vizinhança é homeomorfa ao cruzamento transversal de dois segmentos. Neste caso diremos que a curva plana é *semi-regular*.

Observe que variando-se continuamente a direção de projeção, podemos obter uma família de curvas planas como as curvas exibidas acima. Tal família de curvas planas dá origem a uma superfície (Figura 3) que nos interessará.

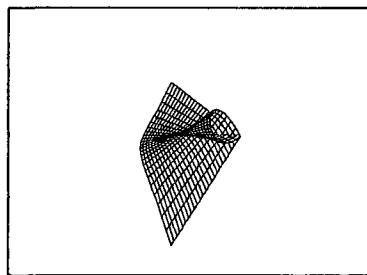


Figura 3:

2.2 projeções $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$

O mesmo procedimento que fizemos com curvas regulares no \mathbf{R}^3 pode ser repetido com superfícies regulares no \mathbf{R}^4 , basicamente adicionamos uma dimensão no caso tratado na seção anterior.

Planos curvados e torcidos são exemplos de superfícies regulares. Tais planos podem ser mergulhados no \mathbf{R}^4 .

¹De fato deve-se considerar aqui que a curva \mathcal{C} está localmente em posição geral, isto é, as seguintes condições se verificam (i) $g'(t) \neq 0, \forall t$; (ii) a função curvatura $\kappa(t)$ de \mathcal{C} nunca se anula e (iii) os zeros da função torsão $\tau(t)$ de \mathcal{C} são não degenerados, isto é, se $\tau(t) = 0$ então $\tau'(t) \neq 0$.

Quando tais superfícies são projetadas genericamente de \mathbf{R}^4 em \mathbf{R}^3 , os fenômenos locais que se apresentam são:

- pontos duplos (interseção transversal de dois planos),
- pontos triplos (interseção transversal de três planos) e
- ponto singular chamado *guarda-chuva de Whitney*.

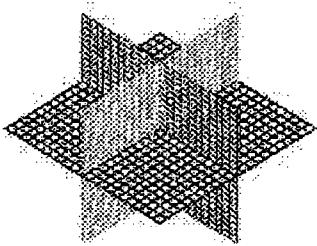


Figura 4: ponto triplo

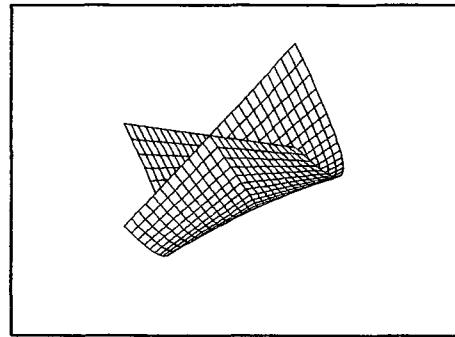


Figura 5: guarda-chuva de Whitney

A denominação guarda-chuva será justificada no exemplo 3.1.

Observe que seções transversais do guarda-chuva de Whitney fornecem curvas com a aparência daquelas da seção anterior (Figura 2).

Uma projeção genérica da superfície regular de \mathbf{R}^4 em \mathbf{R}^3 , fornece um objeto composto de linhas de pontos duplos e, quase sempre, de apenas um número finito de pontos triplos e pontos singulares, e será denominado *superfície singular (ou semi-regular)*.

Os pontos de auto-interseção da superfície em \mathbf{R}^3 possuem ao menos duas pré-imagens no plano em \mathbf{R}^4 . Tais pontos constituem a curva de *pontos duplos ordinários* da projeção. Os pontos singulares são pontos onde a direção da projeção tangencia a superfície. Esses pontos singulares estão na aderência da curva de pontos duplos ordinários.

Para ver como a superfície (o plano) está no \mathbf{R}^4 , numa vizinhança do ponto de tangência da direção de projeção, procedemos da seguinte forma:

O cubo representará uma vizinhança no \mathbf{R}^3 . A Figura 6 exibe uma vizinhança do ponto singular da superfície em \mathbf{R}^3 .

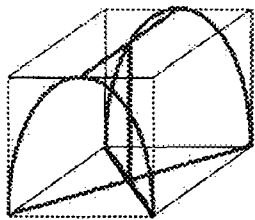


Figura 6: ponto singular

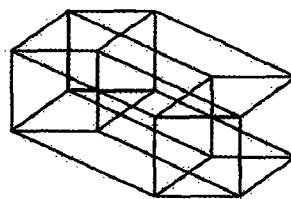


Figura 7: hipercubo

Agora consideremos o hipercubo, como uma vizinhança no \mathbf{R}^4 (Figura 7)

O plano torcido no \mathbf{R}^4 (Figura 8), quando projetado no \mathbf{R}^3 fornece o guarda-chuva de Whitney. A linha central desenhada neste plano contém a curva de pontos duplos ordinários e é projetada na linha de auto-interseção do guarda-chuva. Isto é, a projeção do plano torcido de \mathbf{R}^4 em \mathbf{R}^3 é um-a-um, exceto nos pontos desta curva.

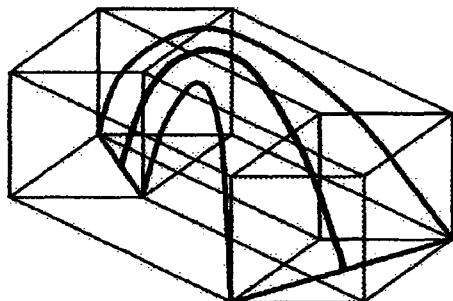


Figura 8:

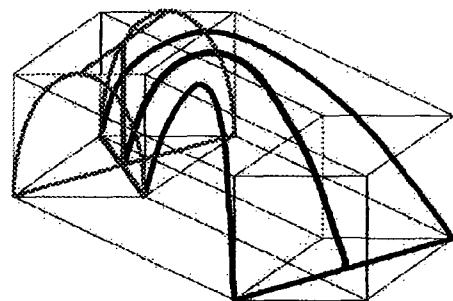


Figura 9:

O resultado da projeção de \mathbf{R}^4 em \mathbf{R}^3 é representado na Figura 9.

Outro exemplo: O plano projetivo real \mathbf{P}^2

O plano projetivo é apresentado de várias formas equivalentes:

- como o plano euclidiano adicionado dos pontos no infinito - se representarmos o plano euclidiano por um disco sem bordo, então adicionar os pontos no infinito é o mesmo que identificar os pontos antipodais do bordo, isto é, os pontos diametralmente opostos do bordo do disco.

- como a superfície obtida identificando-se os pontos antipodais da esfera S^2 .
- como a faixa de Moebius com um disco colado ao londo de seu bordo

Uma representação de P^2 no \mathbf{R}^3 possui necessariamente auto-interseção, em outras palavras, não é possível *mergulhar* P^2 no \mathbf{R}^3 .

Um teorema de Whitney² garante que qualquer superfície M^2 mergulha no \mathbf{R}^4 . De uma conjectura de Whitney, demonstrada por Massey³, sabe-se que qualquer projeção genérica no \mathbf{R}^3 de um mergulho de P^2 no \mathbf{R}^4 terá no mínimo dois pontos singulares, sempre do tipo guarda-chuva.

No desenho do hipercubo acima (Figura 8), podemos imaginar uma faixa de Moebius no lugar do plano torcido. Assim a projeção no \mathbf{R}^3 teria a seguinte aparência:



Figura 10: duas vistas do conóide de Plücker

Esta superfície, obtida da *colagem* de dois guarda-chuvas, é conhecida como *conóide de Plücker* (Figura 10). Observe que o bordo do conóide, diferentemente do bordo da faixa de Moebius, está *preparado* para receber a colagem de um disco mergulhado no \mathbf{R}^3 . Colando-se um disco ao longo do bordo do conóide obtemos a tradicional representação de P^2 no \mathbf{R}^3 , denominada *chapéu cruzado* (ou cross-cap).

²Hassler Whitney, *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space*. Ann. of Math. (2) 45, 220 – 246 (1944).

³W. S. Massey, *Proof of a conjecture of Whitney*. Pacific J. Math. 31, 143 – 156, (1969)

Observação: Existem exemplos de superfícies semi-regulares no \mathbf{R}^3 que não são obtidas como projeções genéricas de superfície regular do \mathbf{R}^4 (eg. superfície de Boy)[DH]. A superfície de Boy (Figura 11) é uma representação do plano projetivo \mathbf{P}^2 no \mathbf{R}^3 , sem pontos singulares, apenas com linhas de auto-interseção e um ponto triplo. Como dissemos acima, um teorema de Whitney, demonstrado 50 anos depois da publicação do trabalho de Boy sob a orientação de Hilbert, estabelece que qualquer projeção de \mathbf{R}^4 em \mathbf{R}^3 de uma superfície não orientável deve possuir ao menos dois pontos singulares do tipo guarda-chuva de Whitney. Portanto este não é o caso da superfície de Boy.

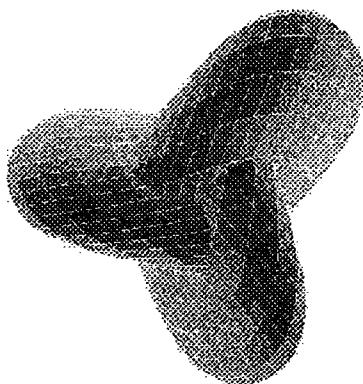


Figura 11: superfície de Boy

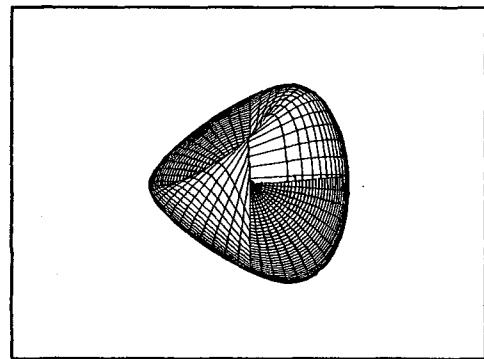


Figura 12: superfície romana de Steiner

Outra conhecida representação do plano projetivo \mathbf{P}^2 no \mathbf{R}^3 é denominada *superfície romana de Steiner* (Figura 12). Neste caso temos um ponto triplo e seis guarda-chuvas. Tal superfície singular é obtida como projeção de uma superfície regular do \mathbf{R}^4 no \mathbf{R}^3 , isto é, de um mergulho de \mathbf{P}^2 no \mathbf{R}^4 (denominado superfície de Veronese). A classificação das superfícies com um ponto triplo e seis guarda-chuvas pode ser encontrada em [CM].

3 Equações e parametrizações de superfícies singulares

Exemplo 3.1: (guarda-chuva de Whitney)

$$\text{Equação: } f(X, Y, Z) = Z^2 - YX^2 = 0$$

Parametrização: $\varphi(x, y) = (x, y^2, xy)$.

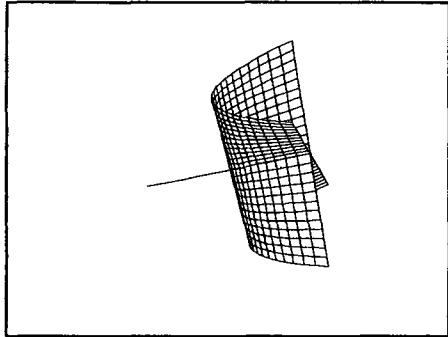


Figura 13: zeros da f

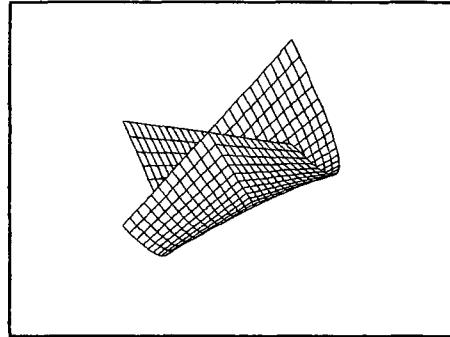


Figura 14: imagem da φ

A superfície pode ser melhor apreciada quando se consideram as interseções com planos:

$$\begin{cases} Z^2 - YX^2 = 0 \\ X = k \end{cases}$$

onde k é uma constante não nula.

As curvas assim obtidas são as parábolas $Y = \frac{1}{k^2}Z^2$.

Por outro lado, as interseções

$$\begin{cases} Z^2 - YX^2 = 0 \\ Y = k \end{cases}$$

onde k é uma constante positiva fornecem pares de retas concorrentes.

Note que os pontos de auto-interseção desta superfície (ie, pontos com mais que uma pré-imagem) constituem a imagem, pela parametrização φ , da curva ($x = 0$). Denominaremos esta curva, curva de pontos duplos de φ e denotaremos por $D^2(\varphi)$. Observe também que a parametrização φ leva pontos da forma $(0, y)$ e $(0, -y)$ na mesma imagem $(0, y^2, 0)$. Ou seja, neste caso, a restrição $\varphi|D^2(\varphi)$ é uma *involução* com a origem $(0, 0)$ como *ponto fixo*.

A justificativa para o nome guarda-chuva vem do fato que todo o eixo Y , isto é, $(X = 0) \cap (Z = 0)$ pertence à superfície algébrica $Z^2 - YX^2 = 0$. O semi-eixo negativo é o *cabo* do guarda-chuva!

Note que existem pontos do conjunto de zeros f que não se apresentam na imagem da parametrização. De fato, a semi-reta ($Y < 0$) não é coberta pela parametrização cuja segunda coordenada é y^2 e portanto ≥ 0 .

Este é um fenômeno freqüente entre as superfícies algébricas reais, a imagem da parametrização é um subconjunto dos zeros da equação.

Exemplo 3.2: (duplo guarda-chuva)

Equação: $f(X, Y, Z) = Z^2 - Y(X^2 + Y - 1)$

Parametrização: $\varphi(x, y) = (x, y^2, x^2y + y^3 - y)$

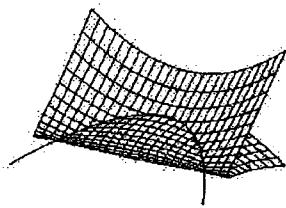


Figura 15: zeros da f

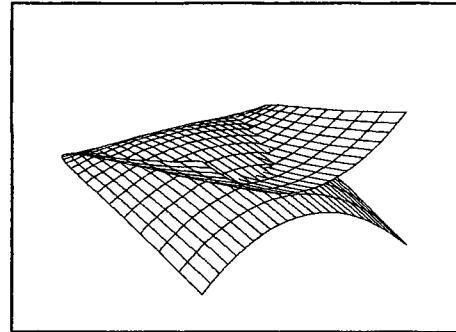


Figura 16: imagem da φ

Note que os pontos de auto-interseção desta superfície são imagem pela parametrização da curva $D^2(\varphi)$. Aqui, esta curva é a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

De fato, os pontos duplos são caracterizados pela propriedade : $\varphi(x, y) = \varphi(x_1, y_1)$, com $(x, y) \neq (x_1, y_1)$, o que é o mesmo que

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y^2 = y_1^2 \\ x^2y + y^3 - y = x_1^2y_1 + y_1^3 - y_1 \end{cases}, y \neq y_1 .$$

Que por sua vez pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{y^2 - y_1^2}{y - y_1} = 0 \\ \frac{x^2y - x_1^2y_1}{y - y_1} + \frac{y^3 - y_1^3}{y - y_1} - \frac{y - y_1}{y - y_1} = 0 \end{cases} .$$

Ou seja,

$$\begin{cases} y + y_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + yy_1 + y_1^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

A projeção no domínio de coordenadas (x, y) da parametrização φ fornece a curva $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Neste caso a parametrização φ envia os pontos da forma (x, y) e $(x, -y)$ de $D^2(\varphi)$ na mesma imagem $(x, y^2, 0)$. Além disso, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ são pontos fixos desta involução.

Exemplo 3.3: (superfície H_2 de David Mond)

Esta superfície é a imagem da parametrização $\varphi(x, y) = (x, y^3 - y, xy + y^5 - y^3)$ (Figura 17). Como pode ser visto no traçado abaixo feito com o software *Maple^R*, a superfície possui auto-interseção na qual se destacam um ponto triplo (ie, ponto com três pré-imagens) e dois guarda-chuvas de Whitney.

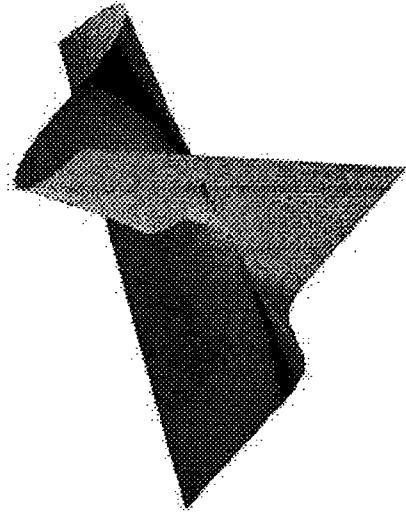


Figura 17:

Esta superfície possui uma propriedade surpreendente, de fato ela é a única superfície singular com um ponto triplo que verifica tal propriedade (v. [MM]). Tal notoriedade fez desta superfície a capa da revista Notices da AMS, March 97. A beleza desta superfície foi revelada por Thomas Banchoff (que

na época era um dos poucos que possuia computador capaz de tal revelação). Hoje são acessíveis os computadores capazes de desenhar a imagem desta parametrização. Contudo, mesmo sem o computador podemos ter uma boa idéia da imagem de parametrizações deste tipo, seguindo o roteiro abaixo.

Considere a curva de pontos duplos no domínio $D^2(\varphi)$, ie, o fecho do conjunto $\{(x, y) : \exists (x_1, y_1) \neq (x, y) \text{ tais que } \varphi(x_1, y_1) = \varphi(x, y)\}$. Observe que neste caso teremos $x = x_1$. A curva plana $D^2(\varphi)$ é dada pela projeção da curva no espaço de coordenadas x, y, y_1

$$\begin{cases} \frac{y^3 - y_1^3}{y - y_1} - \frac{y - y_1}{y - y_1} = 0 \\ x \frac{y - y_1}{y - y_1} + \frac{y^5 - y_1^5}{y - y_1} - \frac{y^3 - y_1^3}{y - y_1} = 0 \end{cases}$$

sobre o espaço de coordenadas x, y , domínio da parametrização φ . O que é o mesmo que projetar a curva

$$\begin{cases} y^2 + yy_1 + y_1^2 - 1 = 0 \\ x + y^4 + y^3y_1 + y^2y_1^2 + yy_1^3 + y_1^4 - (y^2 + yy_1 + y_1^2) = 0 \end{cases}$$

Usando a parametrização

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \\ y = \cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \end{cases}$$

de $y^2 + yy_1 + y_1^2 - 1 = 0$, podemos obter x, y em função de θ , isto é, uma parametrização da curva plana $D^2(\varphi)$.

Com exceção de dois pontos, que serão enviados nos pontos singulares, cada ponto desta curva (Figura 18) possui ao menos um outro com o qual se identifica na imagem da parametrização φ .

Depois da identificação definida pelos pontos singulares, obtemos a curva de auto-interseção da superfície H_2 . Os dois pontos singulares são pontos fixos desta identificação e serão enviados, pela parametrização, nos guarda-chuvas.

Na Figura 19 temos vistas *inéditas* da superfície

Uma equação para esta superfície pode ser obtida pondo

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y^3 - y \\ Z = xy + y^5 - y^3 \end{cases} .$$

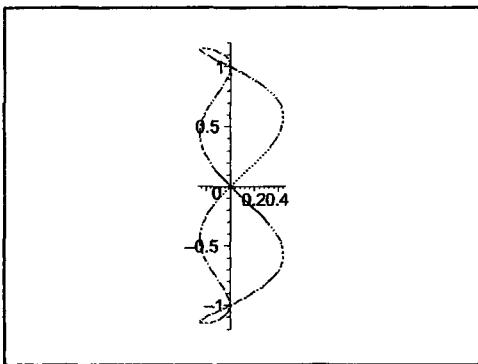


Figura 18:

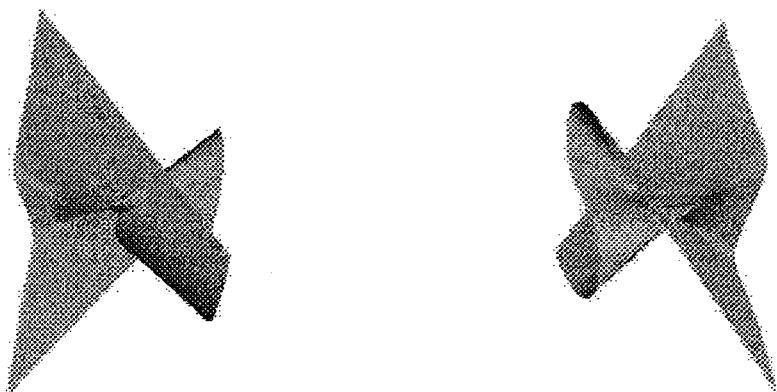


Figura 19:

Eliminado-se y obtemos:

$$f(X, Y, Z) = Z^3 - 2Z^2Y + ZY^2 - ZX^2 - 3ZXY^2 - X^3Y + Y^3X - Y^5$$

Observação:

- 1) Mesmo que o leitor tenha um bom software para o traçado de imagem

de parametrizações, muitas vezes o resultado não é muito claro. A projeção no monitor do computador ou na impressora pode ser sofrível e essa não é uma limitação tecnológica, mas sim dimensional. Daí a utilidade do procedimento acima.

2) No traçado da superfície singular, a curva de auto-interseção fornece um esqueleto no qual devemos adicionar apenas 2–células para completar o desenho.

De fato, com a curva de pontos duplos $D^2(\varphi)$ da parametrização, e os possíveis pontos singulares (guarda-chuvas), fazemos as identificações adequadas determinadas pelos pontos singulares e assim obtemos a curva de auto-interseção da superfície imagem. A curva $D^2(\varphi)$ divide o domínio da parametrização φ em um número finito de 2–células (v. Figura 18). Nos pontos do complementar do conjunto $D^2(\varphi)$, a parametrização φ é um-a-um. Portanto a imagem da parametrização se completa colando-se adequadamente as 2–células ao longo da curva de auto-interseção.

A confecção de modelos feitos com papel cartão também se constitui num exercício instrutivo. O leitor encontrará uma detalhada descrição dessas construções na *segunda edição* do livro de J. Scott Carter [JSC], sob a denominação *Marar's models*.

Na próxima seção veremos como obter equações para $D^2(\varphi)$ a partir da expressão da parametrização φ e da equação $f = 0$ da superfície singular.

4 Pontos singulares

Pontos singulares de funções $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ são os pontos $x_0 \in \mathbf{R}$ onde a função derivada $f'(x)$ se anula. Analogamente, para funções de várias variáveis, $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, os pontos singulares $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ são os pontos onde *todas* as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ se anulam. Em outras palavras, o vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \vec{0}$.

Para aplicações $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, diremos que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ é um ponto singular se a matriz jacobiana $J\varphi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, não possui o posto máximo possível em $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$. Em outras palavras, posto $J\varphi(\mathbf{x}_0) < \min\{n, p\}$. Note que as linhas da matriz $J\varphi$ são as derivadas parciais das funções coordenadas de φ . Portanto, quando $p = 1$, isto é, no caso das funções, o posto da jacobiana não será o máximo possível quando todas as derivadas parciais da função se anularem.

Casos particulares

Curvas planas ($\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$)

Consideramos a curva plana \mathcal{C} parametrizada por $\varphi(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ e definida implicitamente por $f(x, y) = 0$.

Aqui, $J\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}$. Esta matriz não terá posto máximo nos pontos onde a derivada de ambas funções coordenadas α e β se anularem. Como $\tau(t) = (\alpha'(t), \beta'(t))$ é o vetor tangente à curva \mathcal{C} , podemos dizer que os pontos singulares da curva são caracterizados pelo anulamento do vetor tangente.

Para efeito de generalização do conceito de pontos singulares para dimensões mais altas, vamos dizer que os pontos singulares da curva são caracterizados pelo anulamento do vetor normal à curva \mathcal{C} ; neste caso, o anulamento do vetor $(-\beta'(t), \alpha'(t))$.

Por outro lado, pontos singulares da função f , que define \mathcal{C} implicitamente, são os pontos onde as derivadas parciais de f se anulam.

É interessante notar que, nos pontos da imagem $\varphi(t)$ da parametrização, o vetor gradiente $\nabla f(\varphi(t))$ é paralelo ao vetor normal $(-\beta'(t), \alpha'(t))$.

De fato, como $f(\varphi(t)) = 0$, da regra da cadeia obtemos: $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))\alpha'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))\beta'(t) = 0$, isto é, o produto escalar $\nabla f(\varphi(t)) \cdot \tau(t) = 0$.

A relação entre o vetor gradiente de f e o vetor normal de φ fornece informações sobre auto-interseções da curva \mathcal{C} , como demonstraremos nos exemplos abaixo.

Exemplos:

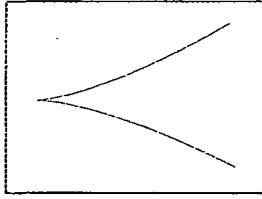
1) Seja \mathcal{C} o gráfico de uma função de uma variável $g(x)$, isto é, \mathcal{C} é a curva parametrizada por $\varphi(t) = (t, g(t))$ e definida como zero de $f(x, y) = y - g(x)$. Neste caso não temos pontos singulares para a parametrização φ pois a matriz jacobiana é da forma

$$J\varphi(t) = \begin{pmatrix} -g'(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Temos também que o vetor cujas componentes são as entradas da transposta da matriz jacobiana $(J\varphi(t))^t$ é igual a $\nabla f(\varphi(t))$. Note que, possíveis

pontos singulares da função $g(x)$ não são pontos singulares da curva \mathcal{C} , gráfico da função g .

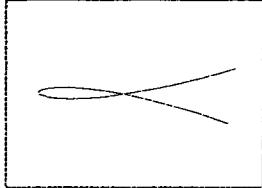
2) Seja \mathcal{C} a curva parametrizada por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ e definida por $f(x, y) = y^2 - x^3$. Neste caso, o ponto $(0, 0)$ é um ponto singular para a aplicação φ . Temos também que $\nabla f(\varphi(t))$ só se anula neste ponto.



3) Seja \mathcal{C} a curva parametrizada por $\varphi(t) = (t^2, t^3 - t)$ e definida por $f(x, y) = y^2 - x^3 + 2x^2 - x$. Neste caso não temos pontos singulares para a parametrização φ pois a matriz jacobiana é da forma

$$J\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Isto é, não existe $t \in \mathbf{R}$ para o qual $(J\varphi(t))^t = (0, 0)$. Por outro lado, $\nabla f(\varphi(t)) = (2(t^3 - t), -3t^4 + 4t^2 - 1)$. Logo, $\nabla f(\varphi(t)) = (0, 0)$, quando $t = 1$ e $t = -1$.



Em outras palavras, o gradiente de f se anula no ponto de auto-interseção da curva, mas a parametrização não é singular em nenhum ponto. Este exemplo mostra a diferença entre o anulamento do gradiente $\nabla f(\varphi(t))$ e ponto singular para a parametrização. A parametrização diz respeito ao objeto imagem, que neste caso possui auto-interseção, mas não é singular no sentido que a matriz jacobiana tem posto máximo.

Superfícies parametrizadas ($\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$)

Consideremos a superfície definida implicitamente por $f(X, Y, Z) = 0$ e parametrizada por $\varphi(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y))$.

Neste caso, a matriz jacobiana é dada por

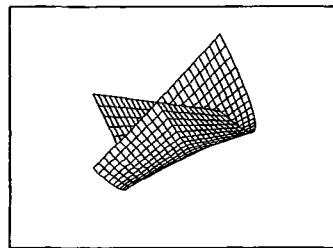
$$J\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz não terá posto 2 nos pontos onde todos os menores 2×2 se anularem. Isto é o mesmo que dizer que os pontos singulares de φ são caracterizados pelo anulamento do vetor normal $\vec{\eta} = \varphi_x \wedge \varphi_y$.

Aqui também, o vetor gradiente $\nabla f(\varphi(x, y))$ é paralelo ao vetor normal à superfície. De fato, como $f(\varphi(x, y)) = 0$, pela regra da cadeia, obtemos que o vetor $\nabla f(\varphi(x, y))$ está no núcleo da transposta $(J\varphi)^t$ da matriz jacobiana $J\varphi$. Mas, nos pontos não singulares, o núcleo da transposta $(J\varphi)^t$ da matriz jacobiana tem dimensão 1 e é gerado pelo vetor normal $\vec{\eta}$. (*exercício*).

Em outras palavras, nos pontos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ onde φ é não singular, existe uma função $\lambda(x, y)$ tal que $\nabla f(\varphi(x, y)) = \lambda(x, y) \vec{\eta}(x, y)$.

O anulamento de $\lambda(x, y)$ define a curva de pontos duplos de φ em \mathbf{R}^2 , isto é, o conjunto de pontos que é enviado pela φ na curva de auto-interseção da superfície imagem de φ .



Como no caso anterior, todos os pontos da auto-interseção da superfície são pontos singulares para a função $f(X, Y, Z)$, mas são pontos não singulares para a parametrização, pois também nas auto-interseções o posto da jacobiana de φ é máximo.

Observação:

A superfície singular parametrizada por φ pode ser pensada como a projeção em \mathbf{R}^3 de uma superfície mergulhada no \mathbf{R}^4 . Os pontos de auto-interseção da superfície \mathbf{R}^3 correspondem a dois pontos da superfície em \mathbf{R}^4 e os pontos singulares da superfície são pontos onde a direção da projeção é tangente à superfície. Desta forma é facil ver que os pontos singulares são pontos limites de pontos duplos.

Vejamos isso no caso de uma parametrização da forma

$$\varphi(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y)).$$

Aqui a matriz jacobiana tem a forma

$$J\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Um ponto singular da parametrização é caracterizado pelo anulamento dos menores 2×2 , que neste caso coincide com o anulamento das derivadas parciais $\frac{\partial p}{\partial y}$ e $\frac{\partial q}{\partial y}$. Por outro lado, um ponto duplo ordinário é caracterizado pela igualdade $\varphi(x, y) = \varphi(x_1, y_1)$ com $(x, y) \neq (x_1, y_1)$. Mas $\varphi(x, y) = \varphi(x_1, y_1)$ implica que $x = x_1$. Logo, (x, y) e (x_1, y_1) é um ponto duplo se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{p(x,y)-p(x,y_1)}{y-y_1} = 0 \\ \frac{q(x,y)-q(x,y_1)}{y-y_1} = 0 \end{cases}, y \neq y_1.$$

Quando $y_1 \rightarrow y$, obtemos o anulamento das derivadas parciais $\frac{\partial p}{\partial y}$ e $\frac{\partial q}{\partial y}$ que, de fato, caracterizam os pontos singulares da parametrização φ .

Esta relação entre parametrização e equação da superfície fornece uma equação para a curva de pontos duplos (v. [JM]).

Exemplos:

1) $\varphi(x, y) = (x, y^2, yp(x, y^2))$ e $f(X, Y, Z) = Z^2 - Yp(X, Y)^2$. A função $\lambda(x, y) = p(x, y^2)$ verifica a relação $\nabla f(\varphi(x, y)) = \lambda(x, y) \vec{\eta}(x, y)$.

2) $\varphi(x, y) = (x, y^3, yp_1(x, y^3) + y^2 p_2(x, y^3))$ e $f(X, Y, Z) = Z^3 - Yp_1(X, Y)^3 - Yp_2(X, Y)^3 - 3YZp_1(X, Y)p_2(X, Y)$.

A função $\lambda(x, y) = p_1(x, y^3)^2 + yp_1(x, y^3)p_2(x, y^3) + y^2 p_2(x, y^3)^2$ verifica a relação $\nabla f(\varphi(x, y)) = \lambda(x, y) \vec{\eta}(x, y)$.

Hipersuperfícies

O mesmo ocorre para aplicações $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. Considere o vetor $\vec{\eta}$ cujas entradas, a menos de sinal, são os menores $n \times n$ da matriz jacobiana $J\varphi$. Este vetor é normal à hipersuperfície imagem de φ . É o anulamento de $\vec{\eta}$ que caracteriza os pontos singulares de φ . Novamente temos $\nabla f(\varphi(\mathbf{x})) = \lambda(\mathbf{x}) \vec{\eta}(\mathbf{x})$, onde o anulamento de $\lambda(\mathbf{x})$ define a curva de pontos duplos de φ .

Referências:

- [JM] Bruce, J. W. & Marar, W. L., *Images and varieties*. J. Math. Sci. 82 (1996), no. 5, 3633–3641.
- [JSC] Carter, J. Scott; *How surfaces intersect in space. An introduction to topology*. Second edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.
- [CM] Cromwell, Peter R. & Marar, W. L., *Semiregular surfaces with a single triple-point*. Geom. Dedicata 52 (1994), no. 2, 143–153.
- [DH] Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S.; *Geometry and the imagination*. Translated by P. Neményi. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952.
- [MM] Marar, W. L. & Mond, David; *Real map-germs with good perturbations*. Topology 35 (1996), no. 1, 157–165.
- [M] Mond, David; Singularities of mappings from surfaces to 3-space. Singularity theory (Trieste, 1991), 509–526, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

Ton Marar
Vila Pureza, abril 2002