ELIPSES INSCRITAS NUM TRIÂNGULO

Sergio Alves
IME – USP

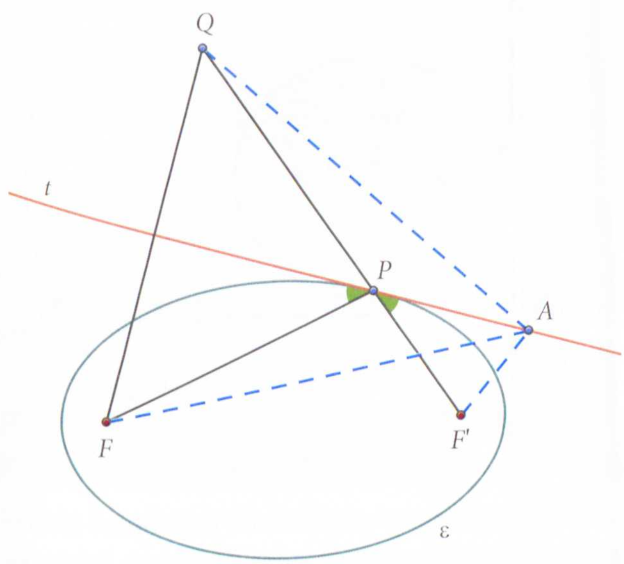
Um dos mais belos resultados da geometria euclidiana plana estabelece que as bissetrizes dos ângulos internos de qualquer triângulo ABC são concorrentes num ponto I localizado no seu interior e que é equidistante das retas que contêm os lados do triângulo. Tal ponto I é o centro de uma circunferência tangente aos três lados do triângulo, chamada circunferência inscrita no triângulo ABC, e o ponto notável I é denominado incentro do triângulo ABC.

Como circunferências são particulares elipses, é natural perguntarmos se existem outras elipses inscritas no triângulo ABC. O argumento aqui desenvolvido confirmará a existência de uma infinidade dessas elipses. Mais precisamente, para cada ponto F pertencente ao interior do triângulo, mostraremos que existe uma elipse inscrita nesse triângulo, tendo F como um de seus focos. Iniciamos com alguns fatos básicos a respeito dessa cônica.

Num fixado plano euclidiano E, consideremos dois pontos F e F' e seja a um número real positivo de modo que $2a > FF'$. A elipse de focos F e F' e semieixo maior a é o conjunto ε formado pelos pontos $P \in E$ tais que $PF + PF' = 2a$.

Dados, no plano euclidiano E, uma elipse ε e uma reta t, diremos que t é uma reta tangente a ε se $t \cap \varepsilon$ contém exatamente um ponto, chamado ponto de tangência. Quando $t \cap \varepsilon = \{P\}$, dizemos também que t é uma reta tangente a ε em P.

A figura abaixo ilustra como traçar essa tangente. Dado $P \in \varepsilon$, considere o ponto Q pertencente à semirreta $F'P$ tal que $F'Q = 2a$. A mediatriz do segmento FQ é a reta tangente a ε em P.

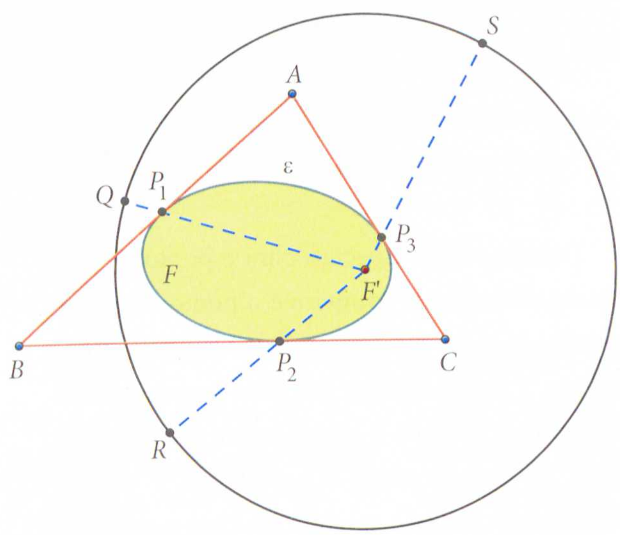


Com efeito, como P está entre F' e Q, segue que $PQ = F'Q - PF' = 2a - PF' = PF$ de modo que $P \in t$, onde t é a mediatriz do segmento FQ. Além disso, dado $A \in t$, A distinto de P, temos $AF + AF' = AQ + AF' > F'Q = 2a$. Portanto, $A \notin \varepsilon$ e concluímos que $t \cap \varepsilon = \{P\}$.

Observe que o ponto Q nada mais é do que o ponto em que a semirreta $F'P$ intersecta uma das circunferências diretrizes da elipse ε, aquela de centro F' e raio $2a$. Além disso, a construção efetuada revela imediatamente a validade de uma conhecida propriedade refletora da elipse: os ângulos que os raios focais PF e PF' formam com a reta tangente a ε em P são congruentes. Na RPM 36, páginas 24 a 28, são apresentadas diversas aplicações dessa propriedade.

Retornando ao nosso problema, seja ABC um triângulo arbitrário e F um ponto qualquer no seu interior. Vamos determinar uma elipse ε tendo F como um de seus focos de modo que as retas AB, BC e CA sejam tangentes a ε.

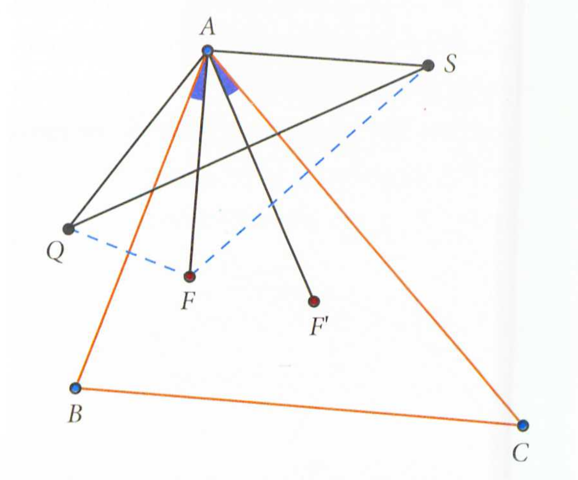
Motivados pelo traçado acima exposto, considere os simétricos Q, R e S do ponto F em relação às retas AB, BC e CA, respectivamente. Sendo F' o circuncentro do triângulo QRS, ou seja, o centro da circunferência que contém Q, R e S, os raios $F'Q$, $F'R$ e $F'S$ intersectam as retas AB, BC e CA nos pontos P_1, P_2 e P_3, respectivamente.



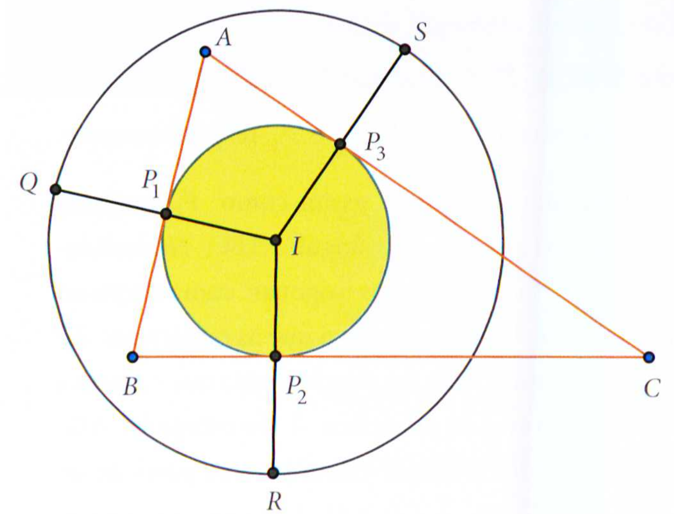
A elipse ε de focos F e F' e que passa por P_1 (ou, equivalentemente, de focos F e F' e semieixo maior $a = \frac{1}{2}F'Q$) é tal que as retas AB, BC e CA são tangentes a ε em P_1, P_2 e P_3, respectivamente.

Note que o ponto F', assim como F, também pertence ao interior do triângulo ABC. Na realidade, F e F' são conjugados isogonais com relação ao triângulo ABC. Isso significa que as semirretas AF e AF' são simétricas em relação à reta que contém a bissetriz do ângulo de vértice A do triângulo ABC e propriedades análogas valem para os pares de semirretas BF, BF' e CF, CF'. Vejamos uma prova.

Sendo $x = m(\angle BAF) = m(\angle BAQ)$ e $y = m(\angle CAF) = m(\angle CAS)$, temos $m(\angle QAS) = 2(x + y)$. Por outro lado, AQS é um triângulo isósceles, pois $AQ = AF = AS$ e, como F' pertence à mediatriz do segmento QS, segue que $m(\angle SAF') = x + y$. Mas $m(\angle SAC) = y$, donde $m(\angle CAF') = x = m(\angle BAF)$. Logo, AF e AF' são semirretas simétricas em relação à reta que contém a bissetriz do ângulo de vértice A do triângulo ABC.

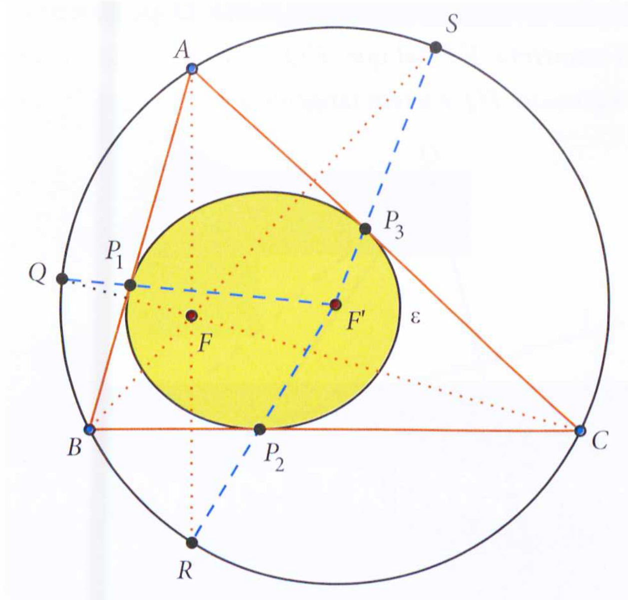


Duas escolhas especiais para o ponto F merecem destaque. A primeira é o ponto F sendo escolhido como o incentro I do triângulo ABC. Como I é equidistante das retas que contêm os lados do triângulo, o circuncentro do triângulo QRS é o próprio ponto I e, portanto, $F' = I = F$. Nesse caso, a elipse ε coincide com a circunferência inscrita no triângulo ABC.



A segunda escolha relevante é quando tomamos F como sendo o ortocentro H de um triângulo acutângulo ABC. Como os simétricos de H em relação às retas AB, BC e CA pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo ABC (uma prova dessa bela propriedade do ortocentro pode ser vista, por exemplo, na página 26 da RPM 55), o circuncentro do triângulo QRS coincide com o circuncentro do triângulo ABC.

Neste caso, a elipse inscrita ε tem como focos dois pontos notáveis do triângulo: o ortocentro e o circuncentro do triângulo ABC.



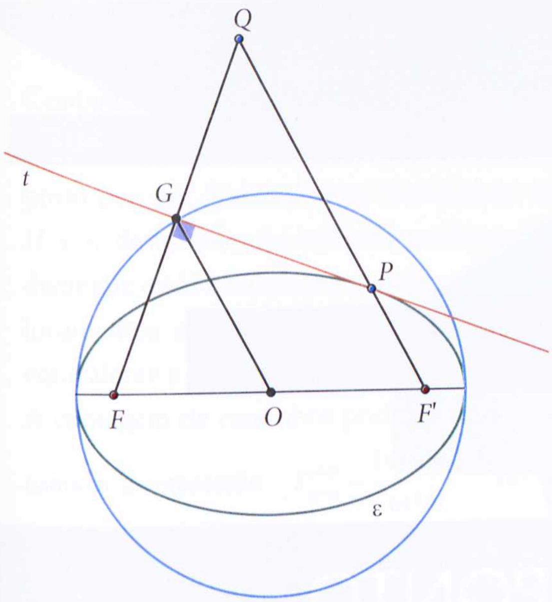
Uma importante propriedade das elipses inscritas num dado triângulo pode ser provada a partir de outro fato básico.

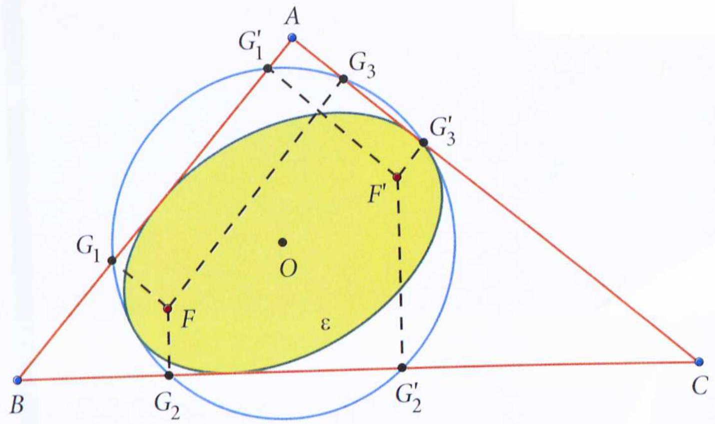
Seja ε uma elipse de focos F e F' e semieixo maior a. Sendo O o centro da elipse, isto é, o ponto médio do segmento FF', considere a circunferência Γ de centro O e raio a (Γ é chamada circunferência principal da elipse ε). O resultado a seguir caracteriza essa curva por meio de uma elegante propriedade geométrica.

Lema. Um ponto G pertence à circunferência principal de uma elipse ε se, e somente se, G é a projeção ortogonal de um dos focos de ε sobre uma reta tangente a ε.

A prova segue do traçado apresentado anteriormente para a reta tangente. Se G é a projeção ortogonal do foco F sobre a reta tangente a ε em $P \in \varepsilon$, então OG é uma linha média do triângulo $F'FQ$. Logo, $OG = \frac{1}{2}F'Q = a$ e $G \in \Gamma$.

Reciprocamente, se $G \in \Gamma$, considere o ponto Q tal que G é o ponto médio do segmento FQ.





Então, OG é uma linha média do triângulo $F'FQ$ de modo que $F'Q = 2OG = 2a$. Logo, o lado $F'Q$ intersecta a mediatriz do segmento FQ num ponto P pertencente à elipse ε e G é a projeção ortogonal do foco F sobre a reta tangente a ε em P.

Aplicando-se esse Lema a uma elipse ε inscrita no triângulo ABC, obtém-se a validade do seguinte resultado não trivial.

Sejam G_1, G_2, G_3 as projeções ortogonais do foco F sobre as retas AB, BC, CA, respectivamente, e G_1', G_2', G_3' as projeções ortogonais do foco F' sobre as retas AB, BC, CA, respectivamente. Então, os seis pontos G_1, G_2, G_3, G_1', G_2' e G_3' pertencem a uma mesma circunferência – a circunferência principal da elipse ε inscrita no triângulo ABC.

Finalizamos este trabalho com outra aplicação surpreendente da caracterização geométrica da circunferência principal descrita no Lema acima. Se um ângulo reto do plano euclidiano E varia de modo que seu vértice descreve uma fixada circunferência Γ e um de seus lados passa por um ponto fixo F pertencente ao interior de Γ, então o outro lado desenvolve uma elipse tendo F como um de seus focos e Γ como sua circunferência principal (Observe, na figura acima, à esquerda, o ângulo reto FGP.). É comum dizer, neste caso, que a elipse está definida como a envoltória da família de suas tangentes.