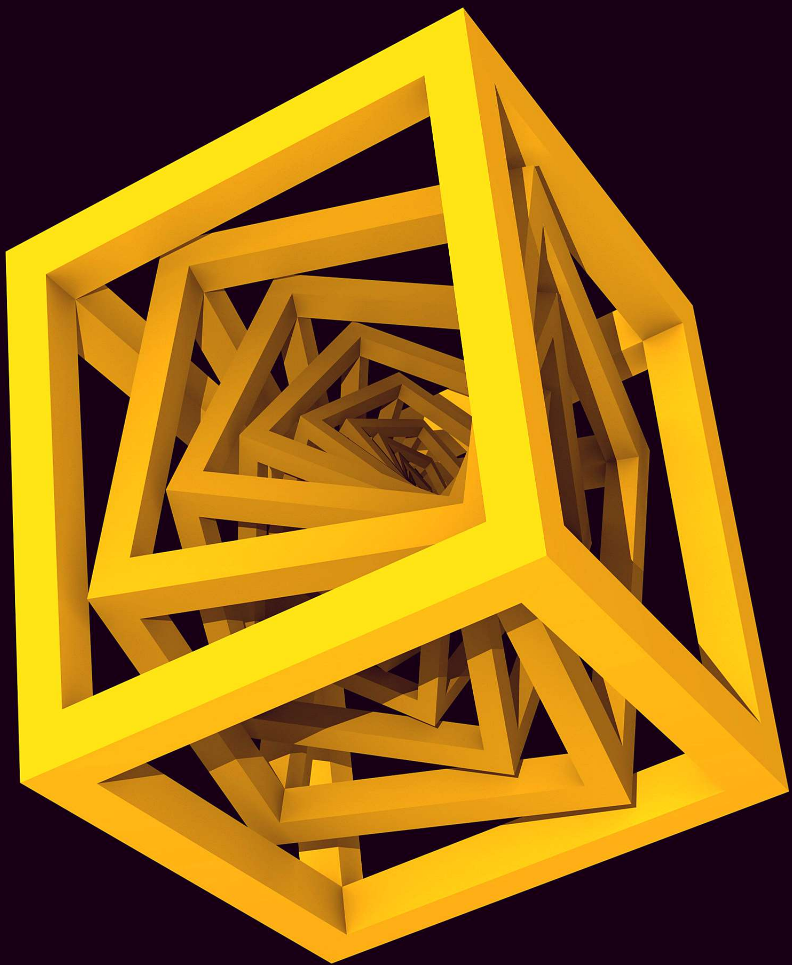
ANAIS

5º ENCONTRO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA - 2018

Organizadores: **DAVID PIRES DIAS**
RICARDO BIANCONI



O Encontro promove as atividades e produções do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Universidade de São Paulo - USP
Instituto de Matemática e Estatística - IME

David Pires Dias
Ricardo Bianconi
Organizadores

ANAIS

5º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

São Paulo, SP, Brasil, 18 e 20 de setembro de 2018

São Paulo
IME-USP
2019

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Reitor
Prof. Dr Vahan Agopyan

Vice-reitor
Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

Diretor do Instituto de Matemática e Estatística
Prof. Dr. Junior Barrera

Organizadores
Prof. Dr. David Pires Dias
Prof. Dr. Ricardo Bianconi

Diagramação, normalização e capa
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra

E56 Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (5. : 2018 : São Paulo, Brasil).
Anais [do] 5º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, São Paulo, SP, Brasil, 18 e 20 de setembro de 2018 [recurso eletrônico]. / organizadores David Pires Dias, Ricardo Bianconi. -- São Paulo : IME-USP, 2019.

ISBN: 978-85-88697-33-1 (e-book)
Modo de acesso: <https://www.ime.usp.br/posempmat/encontros>

1. Matemática – Estudo e Ensino (Congressos). I. Dias, David Pires, org. II. Bianconi, Ricardo, org. III. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

CDD: 510.7

Catalogação na Fonte pelo Serviço de Informação e Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra.
Elaborada pela bibliotecária Maria Lucia Ribeiro – CRB 8/2766.

Área e perímetro: um estudo sobre falsas concepções de alunos concluintes da educação básica

Fernando Siqueira Vieira Lima [1], Vera Helena Giusti de Souza [2]

[1] Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP
[2] Docente do Departamento de Matemática do IME-USP e orientador - vhgiusti@ime.usp.br

RESUMO: Pretende-se investigar falsas concepções, relacionadas às ideias de área e de perímetro de figuras planas, de um grupo de alunos brasileiros concluintes da Educação Básica. Pesquisas como a de Facco (2003), D'Amore e Fandiño (2007) e Ferreira (2010) mostram que alunos apresentam equívocos relacionados a essas ideias, como utilizar a fórmula do perímetro para calcular a área e vice-versa. Há também os que, ao serem questionados sobre relações entre área e perímetro, tendem a concordar que se aumentarmos (ou diminuirmos) a área de uma figura plana, seu perímetro necessariamente irá aumentar (ou diminuir) e vice-versa. Como suporte teórico, foram escolhidas as ideias de Parsysz (2006) e de Tall (1981), que irão orientar tanto a elaboração como a análise das questões utilizadas para a coleta de dados. Essas questões deverão ser tais que permitam analisar concepções que o grupo participante tem, individualmente, de área e de perímetro e da relação entre eles. Com isso, espera-se responder duas questões de pesquisa "O conjunto de imagens individuais é suficientemente rica para que não confundam área e perímetro de figuras planas?", "Os participantes articulam bem uma geometria de observação e uma geometria proto-axiomática?".

Palavras-chave: Área. Perímetro. Imagem de conceito. Geometria de observação. Geometria proto-axiomática.

ABSTRACT: It is intended to investigate false conceptions of a Brazilian students group, at the end of High School, related to area and perimeter of bi-dimensional figures ideas. Researchers such as Facco (2003), D'Amore and Fandiño (2007) and Ferreira (2010) show that students present misunderstandings related to these ideas, such as using the perimeter formula to calculate the area and vice versa. There are also those who make mistakes when asked about relationships between them and tend to agree that if we increase (or decrease) the area of a bi-dimensional figure, its perimeter will necessarily increase (or decrease) and vice versa. Parsysz's (2006) and Tall's (1981) ideas were chosen as theoretical support to guide elaboration and analysis of a set of questions used to collect data. Those questions must be proposed in such a way that allows individuals analysis of participants conceptions about area and perimeter and the relationship between them. With this, one is expected to answer two research questions: "Is the set of individual images rich enough allowing participants not to confuse area and perimeter of bi-dimensional figures?", "Do participants articulate well a observation geometry and a proto-axiomatic geometry?"

Keywords: Area. Perimeter. Concept image. Observation geometry. Proto-axiomatic geometry.

1 JUSTIFICATIVA

Desde 2.000 a.C os Babilônios sabiam calcular a área de figuras retangulares e de triângulos isósceles. Em 1.000 a.C, no Antigo Egito, os estiradores de corda demarcavam terrenos à margem do rio Nilo. Apesar do Homem conhecer, há tanto tempo, o cálculo de área e de perímetro, a aprendizagem desses conceitos, ao longo do Ensino Fundamental, tem apresentado dificuldades vivenciadas por professores e educadores de Matemática, assim como mostram pesquisas feitas por Facco (2003), D'Amore e Fandiño (2007) e Ferreira (2010), motivando a busca por abordagens e instrumentos inovadores, na tentativa de viabilizar e tornar mais eficiente o processo de ensino e, consequentemente, o da aprendizagem, ou seja, todo o processo de sala de aula.

Um tipo de dificuldade recorrente, relatado por Facco (2003), está ligado à troca de área por perímetro e vice-versa, feita por alunos da Escola Básica, isto é, ao pedir para um aluno calcular a área de uma figura plana, este acaba calculando o perímetro e o mesmo vale quando solicitado para que este calcule o perímetro. Há ainda aqueles que apresentam falsas convicções sobre a relação entre esses dois conceitos, afirmando, por exemplo, que ao modificarmos uma figura plana de maneira a aumentar (diminuir) sua área, seu perímetro necessariamente irá aumentar (diminuir) (D'AMORE; FANDINO, 2007).

Com essas dificuldades em mente, desenvolvemos, em 2015, um projeto relacionado ao ensino e à aprendizagem de área e de perímetro de figuras planas, como parte da disciplina MAT0451, do programa de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo e este foi submetido a uma banca examinadora.

Durante a elaboração desse projeto, fomos apresentados a um conjunto de questionamentos, propostos por D'Amore e Fandiño (2007) que, além de desafiadores, atraíram pela forma e pelas estratégias com as quais alunos da Escola Básica poderiam respondê-las, como na questão: Encontre duas figuras planas de maneira que, de uma para outra:

1. o perímetro aumenta e a área diminui;
2. o perímetro diminui e a área aumenta;

3. a área e o perímetro permanecem iguais.

Facco (2003) revela que, ao aplicar uma atividade referente ao cálculo da área e do perímetro de um retângulo, em uma turma de 5ª série (atual 6º ano) do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual, 55% dos participantes utilizou a fórmula do perímetro para calcular a área do retângulo dado. Concordamos com a seguinte reflexão de Ferreira (2010): se um aluno associar a área de uma figura plana à medida de uma superfície, ao mudar a forma dessa superfície, terá em mente que a área também poderá sofrer mudanças, se trabalhadas a composição e a decomposição de figuras, mas quando o aluno associa área apenas a um número positivo, este só mobiliza concepções numéricas (FERREIRA, 2010, p. 16).

Na pesquisa de D'Amore e Fandiño (2007), 107 alunos italianos de diversos níveis escolares e 57 professores (entre escola primária e universidade) de Matemática foram questionados quanto a algumas possíveis relações entre área e perímetro, como por exemplo "Seja dado um polígono F, com determinado perímetro p e área A. Modificamos F: se p tende a aumentar, necessariamente A também aumentar (vice-versa)". Do total de 83 entrevistados, mais de 90% concordou com essa afirmação. Segundo os autores, essas concepções errôneas estão ligadas ao fato de que quase sempre, nos livros didáticos de Matemática, ou em sala de aula, são trabalhados exemplos de área e de perímetro com polígonos convexos regulares, não dando espaço para figuras não convexas. Ainda segundo os autores, quando se fala em aumentar o perímetro de uma figura geométrica plana, espontaneamente pensa-se numa homotetia, que aumenta o contorno e, portanto, o perímetro. (D'AMORE et al., 2015, p. 123).

Quando um estudante não consegue distinguir a área de uma figura plana de seu perímetro, podemos dizer que possui uma ideia pobre sobre esses dois objetos geométricos, uma vez que a área está ligada à medida de uma superfície e o perímetro à do contorno dessa superfície, o que evidencia que se tratam de objetos geométricos de dimensões diferentes e com estratégias distintas para obtenção de sua medida. Parece-nos razoável imaginar que se essas ideias ficarem claras aos alunos, estes aceitem que a área e o perímetro de uma figura plana não variem necessariamente no mesmo sentido.

Entendemos a importância do ensino e da aprendizagem de área e de perímetro na Escola Básica e colocamos como objetivo de nossa Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, investigar quais os conceitos que um grupo de estudantes tem de área e de perímetro de figuras planas, bem como da relação entre eles. Pretendemos também analisar se as imagens que esses participantes tem, individualmente, é suficientemente rica, isto é, se cada um deles consegue associar a área à medida de uma superfície plana, o perímetro à medida do contorno dessa superfície e se entende que a área e o perímetro estão associados a objetos geométricos com dimensões diferentes e, portanto, podem variar em sentidos diferentes. E ainda se conseguem articular uma geometria de observação e uma geometria proto-axiomática, entendidas de acordo com as ideias de Bernard Parsysz (2006), que pretendemos utilizar como fundamentação teórica e que discorremos no que segue.

a) Ideias de Bernard Parsysz sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria na Educação Básica

Segundo Parsysz (2006), a Geometria ensinada na França, da Escola Primária à Universidade, deveria partir de uma "geometria de observação" para uma "geometria de demonstração". A geometria de observação é caracterizada pelo uso de materiais concretos para justificar alguma propriedade da geometria euclideana ou resolver algum tipo de problema geométrico que, em nosso caso, esteja relacionado com área e perímetro. Na geometria proto-axiomática, os objetos são abstratos e as validações são baseadas em postulados, definições, axiomas, proposições e teoremas da geometria euclideana. Ainda segundo o autor, o desenvolvimento do pensamento geométrico deve transitar entre o pensamento não-axiomático (concreto e espaço-gráfico) e o pensamento axiomático (proto-axiomático e axiomático). Para Parsysz (2006), a resolução de um problema de geometria elementar consiste, ainda que implicitamente, em idas e vindas entre esses dois tipos de geometria e o desenho é um elemento importante nesse "passeio".

De acordo com o autor, essa evolução pode ser caracterizada e explicada por quatro paradigmas, denominados G0, G1, G2 e G3. Tais paradigmas são propostos por Parsysz (2006) com base nos trabalhos e teorias de Henry (1999), Van Hiele (2002), Houdement, Kuzniak e DIDIREM (2003). Esse quadro teórico pode ser resumido na **Tabela 1**.

Tabela 1 – Quadro teórico proposto por Parzysz

Geometrias não axiomáticas			Geometrias axiomáticas	
Tipo de geometria	Concreta* (G0)	Espaço gráfico (G1)	Proto-axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Abstratos	
Validações	Perceptivo-dedutivas		Hipotético-dedutivas	

Fonte: PARSYSZ, 2006, p. 130.

Para o pensamento não axiomático, temos dois paradigmas, G0 e G1. No paradigma G0, a ideia de geometria é primitiva e confundida com o espaço físico. Os objetos de estudo são concretos e as validações feitas são perceptivo-dedutivas, isto é, feitas pelo olhar, pelo toque, pela manipulação, pela comparação.

No paradigma G1, os objetos são representados numa folha de papel ou na tela de um computador. É a chamada geometria espaço-gráfica. As validações são perceptivo-dedutivas também, porém se utilizam instrumentos de medida como régua graduada, compasso, esquadro. Tanto em G0 como em G1, uma caixa de sapatos é um prisma, uma bola é uma esfera, uma folha de papel sulfite é um retângulo. As comprovações feitas em G1 partem de situações concretas e são apoiadas em uma figura particular.

No pensamento axiomático (proto-axiomático e axiomático), Parsysz (2006) define os paradigmas, G2 e G3. Em G2, as validações são baseadas em resultados formais de geometria euclideana, como postulados, definições, axiomas, proposições e teoremas e, portanto, são hipotético-dedutivas. Nesse paradigma, os objetos são teóricos, as validações são hipotético-dedutivas e podem ser auxiliadas por algum tipo de figura não particular. No paradigma G3, denominado geometria axiomática, os objetos geométricos são abstratos, os resultados são obtidos a partir de postulados, definições, axiomas, proposições e teoremas da Geometria estudada, por um raciocínio hipotético-dedutivo, sem nenhum auxílio de representações gráficas. Esse paradigma é trabalhado em cursos Universitários.

Segundo Parsysz (2006), na Escola Básica, os paradigmas G1 e G2 são importantes para a construção do conhecimento geométrico. Em G1, utilizam-se instrumentos de medida (percepção instrumental) para resolver alguma tarefa e as validações são feitas por meio de observações visuais ou superposições. Em G2, a mesma tarefa é resolvida utilizando-se a noção de reta, ponto, segmento, círculo, cuja existência é garantida por definições, axiomas, propriedades e essa resolução é feita de forma dedutiva, com base nos axiomas e teoremas que fazem parte do conhecimento geométrico. Ainda segundo o autor, o desenho é um objeto comum tanto em G1 quanto em G2, é ele que fará com que o pensamento geométrico do estudante evolua de uma geometria de observação para uma de demonstração.

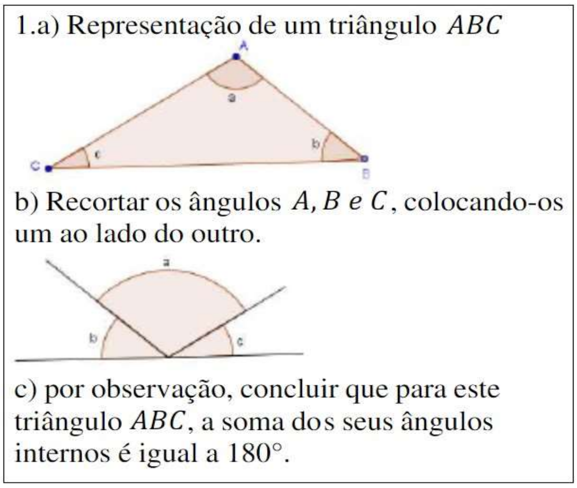
Em Kawamoto (2016, p. 51), encontramos uma atividade que consiste em mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Para mostrar esse resultado no paradigma G1, os alunos poderiam apresentar a seguinte solução (**Figura 1**):

Desenhar um triângulo qualquer ABC e marcar os três ângulos.

Recortar os ângulos A, B, C, colocando-os um ao lado do outro sem sobreposição.

Por observação, pode-se concluir que, para este triângulo ABC, a soma dos seus ângulos internos é igual a 180º.

Figura 1 – Resolução no paradigma G1



Fonte: KAWAMOTO, 2016, p. 51.

Uma possível solução, no paradigma G2-G1, poderia obedecer a seguinte ideia:

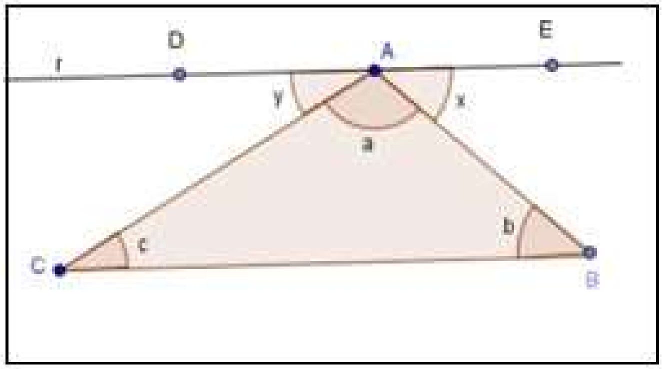
Considere um triângulo ABC qualquer.

Pelo vértice A, oposto ao lado $\acute{BC}$, traçar uma reta r paralela à reta $\acute{BC}$, reta suporte ao lado $\acute{BC}$,cuja existência e unicidade lhe são garantidas por axioma.

Para um melhor entendimento, necessitamos de uma representação gráfica e assim recorremos ao paradigma G1 para continuar a demonstração (**Figura 2**).

Com o auxílio do desenho, podemos seguir da seguinte forma: o ângulo externo com vértice em A e lado AC e o ângulo c são congruentes. Da mesma forma, o ângulo externo com vértice em A e lado AB e o ângulo b são congruentes.

Figura 2 - Recurso a uma representação gráfica para a resolução



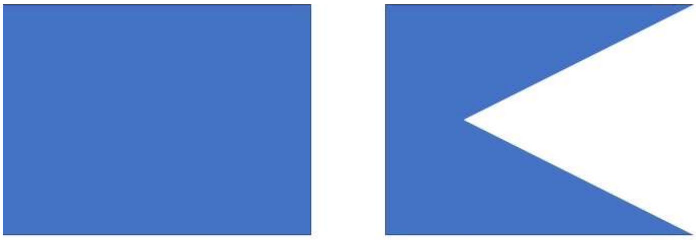
Fonte: KAWAMOTO, 2016, p. 51

Apresentamos a seguir um exemplo em que é possível explorar as relações entre área e perímetro. Sejam A e B duas figuras geométricas planas quaisquer. Decida se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e dê um argumento que justifique sua resposta: *"Se o perímetro de A é menor do que o perímetro de B, então a área de A é menor do que a área de B"*.

Uma possível solução, em G1, seria apresentar duas figuras planas A e B, de modo que o perímetro de A seja menor do que o perímetro de B e a área de A seja maior do que a área de B, mostrando que se trata de uma afirmação falsa.

Inicialmente, podemos construir dois retângulos congruentes, um deles denominamos A e no outro fazemos um recorte com formato de triângulo, chamando-o de figura B (a **Figura 3** apresenta as duas figuras, A e B).

Figura 3 – Retângulo (A) e Pentágono irregular (B)

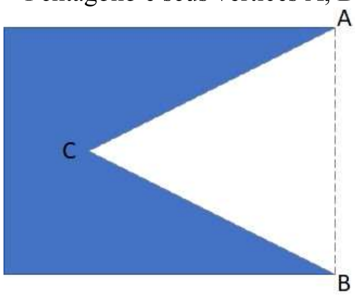


Fonte: elaborado pelo autor (LIMA, 2018).

Utilizando uma régua para medir ambos os perímetros, pode-se afirmar que o perímetro de A e menor do que o perímetro de B mas, claramente, a área de A e maior do que a área de B. Sendo assim, a afirmação feita é falsa.

Em G2, podemos apresentar as mesmas figuras, e assim, os alunos trabalham em G2 e em G1, porém mostrando que três dos vértices do pentágono formam um triângulo e portanto, a medida de AB, é menor que a soma das medidas de AC e CB, como representado na **Figura 4**.

Figura 4 – Pentágono e seus vértices A, B e C



Fonte: elaborado pelo autor (LIMA, 2018).

Embora o contraexemplo para a afirmação inicial pareça simples, requer a quebra de alguns paradigmas, nos quais alunos da Educação Básica possam estar presos. Segundo D'Amore e Fandiño (2007), alunos da Escola Básica Italiana, bem como professores, tendem a dizer que se trata de uma afirmação verdadeira e uma das possíveis causas dessa misconcepção está ligada a dois fatores. A pobreza de um repertório figural que não contempla polígonos não convexos e o costume de trabalhar com transformações homotéticas. Por exemplo, os que pensam em polígonos convexos e pensam em modificá-los por meio de uma homotetia tendem a achar a afirmação verdadeira pois, nesse caso particular, ao aumentar a área de uma figura plana, como o quadrado por exemplo, o perímetro também aumentará. O mesmo vale para diminuir.

Dessa forma, como produto final de nossa Dissertação de Mestrado Profissional, teremos uma pesquisa com análise qualitativa de dados, na qual procuraremos investigar quais as concepções que um grupo de estudantes tem de área e de perímetro de figuras planas, assim como da relação entre eles. Analisando, ainda, se o repertório de imagens individuais dos participantes é suficientemente rica, isto é, se cada estudante pesquisado consegue associar a área à medida de uma superfície plana, o perímetro à medida do contorno dessa superfície e se entende que a área e o perímetro estão associados a objetos geométricos que possuem dimensões diferentes e, portanto, podem variar em sentidos diferentes. Parece-nos razoável esperar que os participantes consigam articular bem uma geometria de observação e uma geometria proto-axiomática, entendidas de acordo com as ideias de Bernard Parsysz (2006).

b) Imagem de Conceito e definição de Conceito

Segundo Tall e Vinner (1981), a **imagem de conceito** é a estrutura cognitiva mental individual total de um indivíduo, associada a um conceito. É constituída de todas as imagens mentais, representações visuais, verbalizações e impressões associadas ao conceito, é construída ao longo da vida com as experiências vivenciadas e pode mudar conforme o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. A **definição de conceito** é o texto escrito em palavras pelo qual um indivíduo "define" um conceito. Esta definição pode ou não ser coerente com a definição formal, aceita pela comunidade matemática.

Ainda segundo os autores, a compreensão de um conceito está ligada a formação de uma imagem de conceito associada ao objeto de conhecimento. Quando se apresenta um conceito matemático por meio de uma definição formal, é esperado que o aprendiz construa imagens conceituais associadas a essa definição e assim verificar se houve ou não assimilação do conhecimento.

Assim como descrito anteriormente, um dos objetivos de nosso trabalho é analisar as imagens de conceito e as definições de conceito de um grupo de alunos finalistas da Educação Básica, no que se refere à área e ao perímetro de figuras bidimensionais.

REFERÊNCIAS

BARBOSA C. P. **Desenvolvendo o pensamento geométrico nos anos iniciais do ensino fundamental:** uma proposta de ensino para professores e formadores de professores. 2011. 186 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

D'AMORE, B. *et al.* **Primeiros elementos de semiótica:** sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

D'AMORE, B.; FANDIÑO, M. I. Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. **Relime,** México, v. 10, n. 1, p. 39-68, mar. 2007.

FACCO, S. R. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental:** estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

FERREIRA, L. F. D. **Conceito de área:** uma proposta sob a ótica de ensino-aprendizagem. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

HENRY, M. L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. **Repères-IREM**, n. 36, p. 15-34, 1999.

HOUDEMENT, C.; KUZNIAK, A.; DIDIREM Paris. Quand deux droites sont «à peu près» parallèles ou le versant géométrique du «presque» égal. **Petit x**, n. 61, p. 61-74, 2003.

KAWAMOTO, M. **Habilidades de visualização em geometria espacial:** um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista - SBEM**, Florianópolis, vol. 4, p. 3-13, jan./jun.,1995.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs deS écoles: de quoi s'agit-it? **Quaderni di Ricerca in Didattica**, Palermo, Italia, n. 17, p. 128-151, 2006.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 151-169, maio, 1981.

VAN HIELE, P. M. Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. **Intelligence, Learning and Understanding – A Tribute to Richard Skemp**, p. 27-47, 2002.