

O ensino de provas/demonstrações matemáticas na Educação Básica: (re)abrindo espaço para o debate

The teaching of mathematical proof in Basic Education: (re)opening a space for debate

• Murilo Falciroli Amorim¹ • Ana Paula Jahn²

Resumo: A presente oficina tem como objetivo oferecer suporte teórico-metodológico a professores de matemática, explorando possibilidades e desafios no ensino de provas/demonstrações. Organizada em torno de duas tarefas – uma de natureza algébrica e outra geométrica –, a proposta visa tematizar o trabalho com provas/demonstrações matemáticas na Educação Básica. Para cada tarefa, propõe-se o seguinte percurso metodológico: trabalho individual, discussão em pequenos grupos, apresentação das produções dos grupos e discussão coletiva, mediada pelos ministrantes. Além da troca de conhecimentos técnicos e procedimentais relativos à produção de provas, espera-se que as discussões estimulem a reflexão e o engajamento dos participantes em relação ao tema, valorizando a autonomia do professor na regulação do rigor matemático da sala de aula, distinto do rigor acadêmico.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Produção de provas matemáticas. Argumentação. Estratégias didáticas. Matemática escolar.

Abstract: This workshop aims to provide theoretical and methodological support to mathematics teachers, exploring possibilities and challenges in teaching mathematical proofs. Organized around two tasks – one algebraic and the other geometric –, the proposal seeks to address working with mathematical proofs in Basic Education. For each task, the following methodological approach is proposed: individual work, discussion in small groups, presentation of the groups' work and collective discussion, mediated by the instructors. In addition to exchanging technical and procedural knowledge related to the proving process, the discussions are expected to stimulate participants' reflection and engagement with the topic, while emphasizing the teacher's autonomy in regulating the mathematical rigor of the classroom, distinct from academic rigor.

Keywords: Teaching Mathematics. Proof and proving. Argumentation. Teaching strategies. School mathematics.

1. Temática e motivação

O ensino de provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica constitui um desafio central para a área de Educação Matemática, dada a sua importância para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da argumentação. Há um consenso na área de que as habilidades de argumentar e provar são fundamentais tanto para o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de resolver problemas quanto para a formação de cidadãos capazes de analisar e avaliar informações de forma crítica e fundamentada. De acordo com Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), os documentos curriculares no Brasil e em diversos países recomendam que o ensino de matemática contemple experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento e a comunicação de argumentos matematicamente válidos. No entanto, pesquisas e avaliações nacionais e internacionais indicam que essas habilidades não

¹ Instituto de Matemática e Estatística da USP • São Paulo, SP — Brasil • muriloamorim@usp.br

² Instituto de Matemática e Estatística da USP • São Paulo, SP — Brasil • anajahn@ime.usp.br



são suficientemente desenvolvidas no ensino de matemática. Esse cenário pode ser explicado tanto por razões históricas, relacionadas às reformas curriculares posteriores ao Movimento Matemática Moderna (Pietropaolo, 2005), que podem ter negligenciado o ensino de provas, quanto pela formação de professores, que muitas vezes não aborda adequadamente esse tema (Garnica, 1995; Matheus, 2016).

Investigações, como as realizadas por Healy e Hoyles (2000), evidenciam que estudantes frequentemente confundem justificativas empíricas com raciocínios dedutivos. Além disso, a análise de argumentos por parte dos alunos tende a se concentrar em aspectos formais, em detrimento do conteúdo subjacente. No que concerne aos professores, observa-se uma concepção restrita dos processos de prova e argumentação. A ênfase recai, sobretudo, nas demonstrações formais apresentadas aos estudantes. Consequentemente, a prova é percebida como um procedimento pedagógico limitado, e não como um instrumento para o estudo da Matemática ou para a comunicação matemática (Knuth, 2002). No âmbito de seu estudo na formação de professores, Matheus (2016, p. 110) identificou dificuldades de diversas naturezas: relacionadas ao conhecimento matemático dos docentes, às concepções sobre a prova matemática na Educação Básica e às crenças relativas à autoridade docente.

Diante desse contexto, a presente oficina tem por objetivo oferecer amparo teórico-metodológico para professores de matemática, explorando oportunidades e desafios relativos ao trabalho com provas e demonstrações na sala de aula. Tivemos a oportunidade de aplicar tarefas nessa temática com estudantes universitários (incluindo licenciandos em Matemática), com professores em exercício e com alunos da Educação Básica (Amorim et al., 2023; Jahn et al., 2023), e temos aprimorado cada vez mais nossas propostas. Apesar das tarefas abordarem conteúdos de Matemática da Educação Básica, elas não são pensadas para a aplicação direta em sala de aula, mas sim como recurso formativo para professores acerca do trabalho didático-pedagógico com provas matemáticas.

A oficina será estruturada em torno de duas tarefas, uma para cada encontro. De um modo geral, o objetivo de tais tarefas é o de tematizar o trabalho com provas/demonstrações matemáticas na Educação Básica, no sentido de tratá-lo como um objeto de reflexão, levantando e discutindo elementos teórico-metodológicos para seu ensino. Para cada tarefa proposta, adotamos o seguinte percurso metodológico: trabalho individual, discussão em pequenos grupos, apresentação da produção dos grupos e discussão coletiva, organizada e mediada pelos ministrantes. No que segue, apresentamos os objetivos de cada tarefa, sua descrição e comentários que embasam a implementação delas na oficina.



2. Tarefa 1: Números pares e ímpares

Os principais objetivos da primeira tarefa podem ser assim formulados:

- promover a discussão sobre as dificuldades enfrentadas por estudantes ao iniciarem o estudo de provas e demonstrações matemáticas, especialmente no que se refere ao uso de definições não familiares;
- contrastar a dificuldade inicial na resolução da tarefa com a aparente facilidade de compreensão posterior à resolução, a fim de discutir os efeitos negativos de se considerar "óbvia" uma atividade com elementos novos para os estudantes;
- evidenciar o caráter singular das provas produzidas pelos participantes, desconstruindo a ideia de que existe uma única demonstração correta para cada proposição.
- levar os participantes a reconhecer a necessidade de assumir afirmações não justificadas na construção de uma prova matemática, e estimular a discussão sobre os critérios para a escolha de tais afirmações;
- explorar técnicas indiretas de argumentação e discutir sua importância como estratégia pedagógica na condução de tarefas de prova, valorizando a autonomia dos estudantes.

Nesta tarefa, apresentaremos aos participantes duas definições (pouco usuais no contexto da matemática escolar) seguidas de quatro proposições a serem demonstradas (cf. Figura 1). A tarefa tem aparência simples, mas, em nossa experiência, vemos que seu processo de resolução costuma ser repleto de obstáculos, com potencial para suscitar diversas discussões acerca dos temas que pontuamos anteriormente nos objetivos.

Figura 1: Enunciado da Tarefa 1

Definição 1: Dizemos que número inteiro n é par se $n/2$ é inteiro.

Definição 2: Dizemos que número inteiro n é ímpar se $(n - 1)/2$ é inteiro.

Seja n um número inteiro.

- a) Mostre que, se n é par, então n^2 é par.
- b) Mostre que, se n é ímpar, então n^2 é ímpar.
- c) Mostre que, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.
- d) Mostre que, se n é par, então n não é ímpar.

Fonte: Elaborada pelos Autores.

3. Tarefa 2: Desigualdade triangular

Esta tarefa foi inspirada no trabalho de Oliveira (2023) e tem por objetivo:

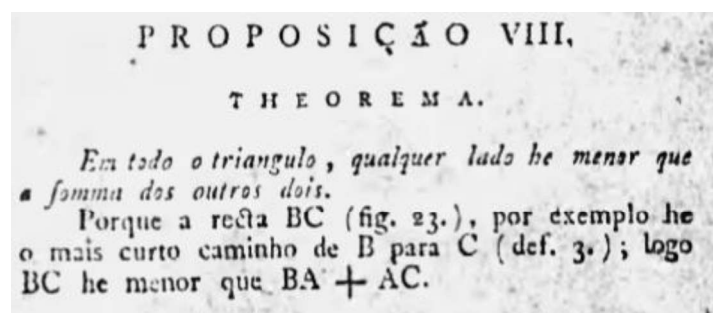
- discutir sobre a validade e importância de justificativas intuitivas;
- compreender o rigor como um conjunto de regras consensuais em processo constante de adaptação;

- problematizar a submissão da matemática da Educação Básica sob o rigor da matemática acadêmica.

Apresentaremos o teorema conhecido como "desigualdade triangular", que afirma que a soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro lado. Em seguida, apresentaremos três provas desse teorema, denominadas *Prova 1*, *Prova 2* e *Prova 3*, nesta ordem, sem revelar as respectivas autorias, e pediremos que os participantes leiam, esclareçam eventuais dúvidas e façam uma avaliação de cada prova – comentando se está correta, se é convincente, se contém erros ou lacunas, se é clara, se é rigorosa, qual se aproxima da prova que eles fariam, e o que mais desejarem comentar.

Conforme compiladas por Oliveira (2023), a Prova 1 foi proposta por Euclides de Alexandria (Euclides, 2009, p. 112), a Prova 2 por Heron de Alexandria (Marcén e Seguí, 2013, p. 4), e a Prova 3 por Adrien-Marie Legendre (Legendre, 1809, p. 11). As provas foram ligeiramente adaptadas para tornar a linguagem mais acessível. Podemos extrair tópicos para discussão nas três provas, mas o aspecto mais provocativo dessa tarefa é a simplicidade da Prova 3 em comparação com as outras duas. As Provas 1 e 2, por caminhos bem diferentes, utilizam a ideia de que, em um triângulo qualquer, aos maiores ângulos opõem-se os maiores lados. Por limitação de espaço, não apresentamos neste texto as duas primeiras provas, mas segue a Prova 3 na Figura 2.

Figura 2: Prova 3 do Teorema da Tarefa 2



Fonte: (Legendre, 1809, p. 11)

A Prova 3 será utilizada para provocar reflexões sobre o rigor e a validade de justificativas intuitivas. Algumas perguntas cruciais que esperamos que sejam levantadas a respeito dessa demonstração são: posso demonstrar dessa maneira em sala de aula? Se um(a) aluno(a) fizer isso, devo considerar que está correto? A premissa de que "o caminho mais curto entre dois pontos é um segmento de reta" pode ser tratada como um axioma?

Tanto a Tarefa 1 quanto a Tarefa 2 abordam o aspecto estruturante da prova matemática. Para conduzir as discussões em torno desse tema, embasamo-nos na abordagem teórica de Hans



Freudenthal (1973), que, para contextos mais iniciais de aprendizagem, prioriza as *organizações locais* acima das *organizações globais*. O autor critica a imposição rígida de sistemas axiomáticos e estruturas teóricas, tratando-os como uma matemática “pré-fabricada” ou “pronta para uso”. Em oposição a isso, Freudenthal (1973) defende um processo mais flexível e autêntico de estruturação matemática, que é aplicável até mesmo no contexto da matemática profissional, e que prescinde de uma axiomatização propriamente dita. Nessa abordagem, focada em deduções mais curtas e pontuais (organizações locais), podem ser suspensas as preocupações estruturais da teorização matemática (fundamentos, cadeia de dependência dos teoremas, circularidade). Assim, (re)aproximando-se do caráter empírico da matemática e da busca por explicações intuitivas, fica autorizado, sob um novo regime de rigor, o uso – consciente e crítico – de resultados (conjecturados ou autoevidentes) não justificados, como ponto de partida e fundamentação para justificações e argumentações.

4. Considerações finais

Para além do intercâmbio de conhecimentos técnicos e procedimentais inerentes à produção de provas, almejamos, principalmente, defender a autonomia da matemática da Educação Básica em relação à matemática acadêmica. Tal defesa se materializa na valorização da liberdade do professor como mediador e regulador das situações de prova em sala de aula, possibilitando a construção de caminhos mais realistas para o trabalho com provas/demonstrações, superando as limitações do rigor formal. Essa liberdade, contudo, não implica a ausência de regramentos e limites, elementos essenciais à prática matemática, mas sim a autonomia do professor de escolher, de forma crítica e colaborativa com os estudantes, as regras que melhor se adequam ao contexto educacional. Busca-se, assim, a superação de dogmas que, porventura, sejam empecilhos à prática docente.

Nutrimos a expectativa de que o cultivo dessa autonomia, aliado ao aprimoramento da proficiência técnica dos participantes na produção de provas matemáticas e ao compartilhamento de experiências educacionais, possa estimular, revitalizar ou intensificar o interesse e o engajamento no trabalho com provas/demonstrações na Educação Básica, apesar dos desafios implicados nessa escolha.

Referências

AMORIM, Murilo Falcirolli; TANIGAVA, Christian K. K.; JAHN, Ana Paula. Oficinas de Demonstração: Uma Experiência de Práticas de Provas Matemáticas no Ensino Superior. In: Anais do XV EPEM - Encontro Paulista de Educação Matemática. Guaratinguetá, 2023. 10p.



EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FREUDENTHAL, Hans. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. 1995. 258f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

HEALY, Lulu; HOYLES Celia. A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), p. 396-428, 2000.

JAHN, Ana Paula; HEALY, Lulu; PITTA COELHO, Sonia. *Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa*. In: *Anais da 30ª Reunião Anual da ANPed*, v. 30. Caxambu, 2007, 24p.

JAHN, Ana Paula; JESUS, Mateus; OLIVEIRA, Pedro Alves; AMORIM, Murilo Falcirolli. Desafios e Possibilidades na Introdução de Práticas de Prova e Demonstração na Matemática Escolar: Uma Experiência com Alunos de 9º Ano do Ensino Fundamental. In: *Anais do XV EPDM - Encontro Paulista de Educação Matemática*. Guaratinguetá, 2023, 10p.

KNUTH, Eric J. Teachers' conceptions of proof in the context of Secondary School of Mathematics. *Journal of Mathematics Teachers Education*, n. 5(1), p. 61-88, 2002.

LEGENDRE, Adrien-Marie. *Elementos de Geometria*. Tradução: Manoel Ferreira De Araujo Guimarães. Rio de Janeiro: Imprensa Regia, 1809.

MARCÉN, Antonio M. Oller; SEGUÍ, Vicente Meavilla. Demostraciones Del Pons Asinorum. Aportes de la Historia a la Enseñanza de la Matemática. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 13, n. 27, p. 01-16, 2013.

MATHEUS, Aline dos Reis. *Argumentação e prova na matemática escolar*. 2016. 145f. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. São Paulo.

OLIVEIRA, Pedro Alves. *Provas e Demonstrações na Sala de Aula de Matemática: Possibilidades de Abordagem Histórica na Educação Básica*. 2023. 90f. Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar. *(Re)Significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*. 2005. 388f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-graduação em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.