

RT-MAP-8104

MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Cap. IV - Medida e Integração Vetoriais

Ivan de Queiroz Barros

ABRIL 1981

PREÂMBULO

No parágrafo 6 deste capítulo introduzimos uma integral de uma função vetorial relativamente a uma medida vetorial e a uma aplicação bi-linear contínua.

A construção da teoria dessa integral repousa sobre três pilares: o teorema de Vitali-Hahn-Saks (§3), o teorema de existência de medida de controle para uma medida vetorial qualquer (§4) e o teorema de Egoroff (§5).

O Exercício 4.7.30 mostra que a integral introduzida neste capítulo não coincide com a integral de Bartle (definição 4.7.28) quando a semi-variacao da medida vetorial utilizada é não controlavel.

De fato nenhuma das duas integrais inclui a outra.

ÍNDICE DO CAPÍTULO IV

- §1 - Preliminares
- §2 - Medida Vetorial
- §3 - Teorema de Vitali - Hahn - Saks
- §4 - Medida de Controle
- §5 - Funções mensuráveis
- §6 - Integral Vetorial
- §7 - Exercícios.

ÍNDICE DOS TEOREMAS

TEOREMA	16	(Vitali - Hahn - Saks)	4.3.11
TEOREMA	17	(exist. de medida de controle)	4.4.9
TEOREMA	18	(implicações entre tipos de mensurabilidade de funções)	4.5.8
COROLARIO	18a	(Teorema de Pettis)	4.5.9
TEOREMA	19	(Egoroff)	4.5.11
TEOREMA	20	(de convergência, de Vitali)	4.6.23
TEOREMA	21	(da convergência dominada)	4.6.24
TEOREMA	22	(da convergência limitada)	4.6.25

ÍNDICE DAS DEFINIÇÕES

Conjunto m -nulo	4.6.8
Diferença simétrica de conjuntos	4.3.1
Espaço de Baire	4.1.2
Função fortem. m -mensurável	4.5.6
μ -mensurável	4.5.5
fracam. m -mensurável	4.5.6
μ -mensurável	4.5.4
(m, B) -integrável	4.6.13
m -mensurável	4.5.6
μ -mensurável	4.5.3
μ -contínua	4.3.9
simples	4.5.1
Integral de funções (m, B) -integráveis	4.6.16
simples	4.6.10
Medida de controle	4.4.8
de semi-variación limitada	4.6.3
de variación limitada	4.2.9
vetorial	4.2.1
Norma de uma medida $\ m\ $	4.2.4
Semi-variación controlável	4.6.4
de medida vetorial	4.6.1
Sequência admissível de funções (m, B) -íntegr.	4.6.16
simples	4.6.14
Variación de medida vetorial	4.2.6

Capítulo IV

MEDIDA E INTEGRAÇÃO VETORIAIS

§4.1 - Preliminares

4.1.1. Alguns resultados que serão utilizados neste capítulo, referentes a espaços métricos e espaços normados reais ou complexos são relacionados a seguir.

4.1.2 Definição

Dizemos que um espaço topológico X é um espaço de Baire se toda reunião de uma sequência de conjuntos fechados de interior vazio, tem interior vazio.

4.1.3 Teorema • (de Baire).

Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.

Prova

Vide [CSH] - Capítulo II - Teorema 10.1.

4.1.4 Proposição

Seja E espaço normado e $B \subset E$

Se $\sup_{x \in B} |x'(x)| < \infty, \forall x' \in E'$ então $\sup_{x \in B} \|x\| < \infty$.

Prova

Vide [CSH] - Capítulo II - corolário 4 do Teorema 11.1
(princípio da limitação uniforme).

4.1.5 Proposição

Seja E espaço normado e $x_0 \in E$.
Então existe $x' \in E'$ tal que $\|x'\| = 1$
e $x'(x_0) = \|x_0\|$.

Prova

Vide [CSH] - Capítulo II - proposição 8.8.
(consequência do Teorema de Hahn-Banach).

4.1.6 Proposição

Seja E espaço normado, $E_0 \subset E$
sub-espaço fechado e $x_0 \in E \setminus E_0$.
Então existe $x' \in E'$ tal que $x'(x) = 0$
para $\forall x \in E_0$ e $x'(x_0) = 1$.

Prova

Vide [CSH] - Capítulo II - proposição 8.7
(consequência do Teorema de Hahn-Banach).

4.1.7 Proposição

Seja E espaço normado separável. Então existe sequência (x'_k) , onde $x'_k \in \text{ball } E'$ ⁽¹⁾ tal que dado $x'_0 \in \text{ball } E'$ existe sub-sequência (x'_{k_m}) satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x'_{k_m}(x) = x'_0(x), \quad \forall x \in E$$

Prova

Vide [K I] - Capítulo V - §4 (pag. 132).

(1) $\text{ball } E' = \{x' \in E' : \|x'\| \leq 1\}$.

§4.2. Medida Vetorial

4.2.1 Definição

Seja X um conjunto, $\beta \subset 2^X$ uma σ -álgebra e Z um espaço de Banach (real ou complexo).

Dizemos que $m: \beta \rightarrow Z$ é uma medida vetorial se para toda sequência (A_k) de subconjuntos disjuntos de X pertencentes a β temos:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

onde a série do segundo membro é incondicionalmente convergente.

Observação

Se $Z = \mathbb{R}$ diremos medida real e se $Z = \mathbb{C}$ medida complexa.

Neste capítulo uma medida $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como definida no capítulo I, será chamada medida positiva.

4.2.2 Propriedades

Seja $m: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$ uma medida vetorial e $A_n \in \beta$, $n \in \mathbb{N}$.

$$(1) \quad m(\emptyset) = 0$$

(2) m é aditiva.

(3) As medidas vetoriais definidas em β com valores em $\mathbb{Z}$ formam um espaço vetorial.

(4) Se a sequência (A_n) é monotônica e $A_n \rightarrow A$ então $m(A_n) \rightarrow m(A)$.

(5) Seja $q: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$ aditiva e tal que $A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow q(A_n) \rightarrow 0$.
Então q é σ -aditiva, isto é, é medida vetorial.

Prova

(1) De $\emptyset = \emptyset + \emptyset + \emptyset + \dots$ resulta

$$m(\emptyset) = \lim_{k \rightarrow \infty} k m(\emptyset)$$

$$\text{donde } \|m(\emptyset)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} k \|m(\emptyset)\|$$

Logo $\|m(\emptyset)\| = 0$ isto é $m(\emptyset) = 0$.

(2) Resulta de $A + B = A + B + \emptyset + \emptyset + \dots$

(3) Imediato

(4) Seja $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots$

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + (A_2 \sim A_1) + (A_3 \sim A_2) + \dots$$

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n m(A_k \sim A_{k-1}) = \\ &= m(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} (m(A_n) - m(A_1)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) \end{aligned}$$

Se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ aplicamos o resultado anterior a $B_k = A_1 \sim A_k$, $k=1, 2, \dots$

(5) Sejam $B_k \in \beta$ disjuntos e $A_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k$

$$\begin{aligned} q\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= q(B_1 + B_2 + \dots + B_n + A_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n q(B_k) + q(A_n) \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, como $A_n \downarrow \emptyset$, vem

$$q\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} q(B_k) \quad (\text{c.q.d.})$$

4.2.3 Proposição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial
em (X, β) . Então:

$$\sup_{A \in \beta} \|m(A)\| < \infty$$

Prova

1º Caso: $Z = \mathbb{R}$.

$m = \mu$ e' medida real.

Utilizaremos nesta demonstração a seguinte definição.

Diremos que $A \in \beta$ e' "limitado" se

$$\sup_{B \subset A} \mu(B) < \infty, \quad B \in \beta.$$

Provemos que todo $A \in \beta$ e' "limitado".
Suponhamos (por contradição) que exista conjunto de β não "limitado" e consideremos duas alternativas mutuamente exclusivas e que esgotam as possibilidades.

1º alternativa: Todo conjunto de β não "limitado" contém conjunto de β não limitado de medida arbitrariamente grande.

Por indução determinamos uma sequência não crescente de conjuntos $E_n \in \beta$ não "limitados" tais que $\mu(E_n) \geq n$.

Então:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \infty$$

o que contradiz $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \in \mathbb{R}$.

Logo a 1ª alternativa está excluída.

2ª alternativa: Existe um conjunto $F \in \beta$ não "limitado" e um inteiro N tais que F não contém conjuntos de β não "limitados" de medida maior que N .

Seja $F_1 \subset F$, $F_1 \in \beta$, tal que $\mu(F) > N$.
Então F_1 é "limitado".

Como F é não "limitado" resulta que $F \setminus F_1$ é não "limitado".

Seja $A_1 \subset F \setminus F_1$, $A_1 \in \beta$, tal que $\mu(A_1) \geq 1$
e seja $F_2 = A_1 \cup F_1$.

Como $\mu(F_2) > N + 1$, F_2 é "limitado".

Logo $F \setminus F_2$ é não "limitado".

Prosseguindo indutivamente construímos uma sequência de conjuntos de β .

$A_1, A_2, \dots$ disjuntos, tais que:

$$\mu(A_k) \geq 1, \quad \forall k.$$

Temos uma contradição pois que então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \infty \quad \text{e} \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathbb{R}.$$

Logo a 2ª alternativa também está excluída.

Eliminadas as duas alternativas podemos concluir que todo conjunto de β é "limitado", em particular X , isto é

$$\sup_{B \in \beta} \mu(B) < \infty.$$

Aplicando o resultado para $-\mu$ obtemos

$$-\infty < \inf_{B \in \beta} \mu(B)$$

donde

$$\sup_{B \in \beta} |\mu(B)| < \infty.$$

2º Caso : $Z = \mathbb{C}$

$m = \mu$ é medida complexa.

Como $\mu(A) = \operatorname{Re} \mu(A) + i \operatorname{Im} \mu(A)$ temos

$$\sup_{A \in \beta} |\mu(A)| \leq \sup_{A \in \beta} |\operatorname{Re} \mu(A)| + \sup_{A \in \beta} |\operatorname{Im} \mu(A)| < \infty.$$

3º Caso : Z é espaço de Banach qualquer

Seja $z' \in Z'$. Então $z'm$ é uma medida escalar (real ou complexa conforme o corpo dos escalares de Z).

Resulta do 1º ou 2º casos que

$$\sup_{A \in \beta} |z'm(A)| < \infty, \quad \forall z' \in Z'$$

Pela proposição 4.1.4 vem

$$\sup_{A \in \beta} \|m(A)\| < \infty \quad (\text{c.q.d.})$$

4.2.4 Definição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β)
 Definimos $\|m\|: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|m\|(A) = \sup_{B \subset A} \|m(B)\|, \quad B \in \beta.$$

Usaremos ainda a notação $\|m\| = \|m\|(X)$.

4.2.5 Propriedades

(Sejam $A, B, A_k \in \beta$, $k=1, 2, \dots$)

$$(1) \quad \|m\|(\emptyset) = 0$$

$$(2) \quad A \subset B \Rightarrow \|m\|(A) \leq \|m\|(B).$$

$$(3) \quad \|m(A)\| \leq \|m\|(A) \leq \| \|m\| \| < \infty$$

(4) $\| \|$ é uma norma no espaço vetorial das medidas vetoriais em (X, β) com valores em Z .

$$(5) \quad \|m\| \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|m\|(A_k).$$

Prova

(1) a (4) não oferecem dificuldade.

(5) Seja $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2 \sim A_1$, ..., $C_k = A_k \sim \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$, ...

$$\|m\| \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \|m\| \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \sup_{B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} \|m(B)\| =$$

$$= \sup_{B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} \|m \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap C_i \right)\| = \sup_{B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i) \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} \sum_{i=1}^{\infty} \|m(B \cap C_i)\| \leq \sup_{B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} \sum_{i=1}^{\infty} \|m\|(B \cap C_i) \leq$$

$$\leq \sup_{B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} \sum_{i=1}^{\infty} \|m\|(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \|m\|(A_i). \quad (\text{c.q.d.})$$

4.2.6 Definição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .
 Definimos $|m|: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por:

$$|m|(A) = \sup_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset A} \sum_{i=1}^n \|m(B_i)\|, \quad B_i \in \beta.$$

onde o $\sup$ é estendido às uniões finitas disjuntas de subconjuntos de A que pertencem a β .

Chamamos $|m|$ variação de m .

4.2.7 Observação

Na definição 4.2.6 podemos substituir $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset A$ por $\bigcup_{i=1}^n B_i = A$ ou por $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A$, com os B_i disjuntos.

4.2.8 Propriedades

Sejam m, m_1, m_2 medidas vetoriais em (X, β) com valores em Z e $A, B \in \beta$:

$$(1) \quad \|m(A)\| \leq \|m\|(A) \leq |m|(A)$$

$$(2) \quad |\lambda m| = |\lambda| |m|, \quad |m_1 + m_2| \leq |m_1| + |m_2|$$

$$(3) \quad |m|: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ é uma medida positiva.}$$

$$(4) \quad |m| \text{ é a menor dentre as medidas positivas } \nu \text{ tais que } \|m(B)\| \leq \nu(B), \forall B \in \beta.$$

Prova

(1) e (2) são imediatos.

(3) É claro que $|m| \geq 0$ e que $|m|(\emptyset) = 0$.

Mostremos a aditividade de $|m|$.

Sejam $E, F \in \beta$ disjuntos.

Sejam $B_i \in \beta$, $i = 1, 2, \dots, n$, disjuntos tais que $B_i \subset E \cup F$, isto é $B_i \subset E$ ou $B_i \subset F$.
De

$$\|m(B_i)\| \leq \|m(B_i \cap E)\| + \|m(B_i \cap F)\|$$

$$\begin{aligned} \text{vem} \quad \sum_{i=1}^n \|m(B_i)\| &\leq \sum_{i=1}^n \|m(B_i \cap E)\| + \sum_{i=1}^n \|m(B_i \cap F)\| \leq \\ &\leq |m|(E) + |m|(F). \end{aligned}$$

$$\text{Logo} \quad |m|(E \cup F) \leq |m|(E) + |m|(F).$$

Por outro lado.

Se $|m|(E \cup F) = \infty$ temos $|m|(E \cup F) \geq |m|(E) + |m|(F)$

Seja $|m|(E \cup F) < \infty$

Então dado $\varepsilon > 0$ existem $B_i \in \beta$, $E_i \subset E$, $i = 1, 2, \dots, n$ disjuntos e $F_j \in \beta$, $F_j \subset F$, $j = 1, 2, \dots, n$ disjuntos tais que

$$|m|(E) \leq \sum_{i=1}^n \|m(E_i)\| + \varepsilon$$

$$|m|(F) \leq \sum_{j=1}^n \|m(F_j)\| + \varepsilon$$

Somando temos

$$\begin{aligned} |m|(E) + |m|(F) &\leq \sum_{i=1}^n \|m(E_i)\| + \sum_{j=1}^{n'} \|m(F_j)\| + 2\varepsilon \leq \\ &\leq |m|(E \cup F) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε temos

$$|m|(E \cup F) \geq |m|(E) + |m|(F).$$

Logo $|m|$ é aditiva.

Provemos que $|m|$ é σ -aditiva.

Seja $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \beta$, disjuntos:

Como $|m|$ é positiva e aditiva, $|m|$ é monotônica. Então:

$$|m|(E) \geq |m|\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n |m|(E_i)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ vem $|m|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |m|(E_i)$

Por outro lado:

Sejam $B_i \subset E$, $B_i \in \beta$, $i=1, 2, \dots, n$ disjuntos.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|m(B_i)\| &= \sum_{i=1}^n \|m(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_i \cap E_j))\| = \\
&= \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^{\infty} m(B_i \cap E_j) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \|m(B_i \cap E_j)\| = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \|m(B_i \cap E_j)\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |m|(E_j)
\end{aligned}$$

Logo $|m|(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |m|(E_j)$

e $|m|$ é σ -aditiva

(4) Já vimos que $\|m(B)\| \leq |m|(B)$, $\forall B \in \beta$.

Seja agora ν uma medida positiva tal que $\|m(B)\| \leq \nu(B)$, $\forall B \in \beta$.

Sejam $A \in \beta$ e $B_i \subset A$, $B_i \in \beta$, $i=1, 2, \dots, n$,
disjuntos. Então:

$$\sum_{i=1}^n \|m(B_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \nu(B_i) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \nu(A)$$

donde $|m|(A) \leq \nu(A)$

Logo $|m|$ é a menor dentre as medidas positivas ν que satisfazem $\|m(B)\| \leq \nu(B)$, $\forall B \in \beta$

(c.q.d)

4.2.9 Definição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) . Dizemos que m é de variação limitada se $|m|(X) < \infty$.

4.2.10 Exemplo. (medida vetorial de variação não limitada).

Seja $X = \mathbb{N}$, $\beta = 2^{\mathbb{N}}$, $Z = l_0$ onde l_0 é o espaço das sequências reais convergentes para zero com a norma $\|z\| = \sup_j |z_j|$.

Seja $m: \beta \rightarrow l_0$ definida por

$$m(\{k\}) = \frac{1}{k} X_{\{k\}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Isto define uma medida vetorial pois que $\{\frac{1}{k} X_{\{k\}}\}$ é uma família somável em l_0 .

Calculemos $|m|(\mathbb{N})$

$$\begin{aligned} |m|(\mathbb{N}) &= \sup_{\cup B_i \subset \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \|m(B_i)\| \geq \sum_{k=1}^n \|m(\{k\})\| = \\ &= \sum_{k=1}^n \left\| \frac{1}{k} X_{\{k\}} \right\| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos $|m|(\mathbb{N}) = \infty$.

4.2.11 · Proposição

Toda medida real ou complexa é de variação limitada e

$$\|\mu\|(A) \leq |\mu|(A) \leq 4 \|\mu\|(A), \quad \forall A \in \beta.$$

Prova

i) A desigualdade $\|\mu\| \leq |\mu|$ vale em geral como já vimos (propriedade 4.2.8 (1)).

ii) Seja $Z = \mathbb{R}$.

Sejam $A_i \in \beta$, $i=1,2,\dots,n$, disjuntos, tais que $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset A$.

Seja $I' = \{i \in \{1,2,\dots,n\} : \mu(A_i) > 0\}$ e

$$I'' = \{i \in \{1,2,\dots,n\} : \mu(A_i) \leq 0\}$$

$$\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| = \sum_{I'} \mu(A_i) - \sum_{I''} \mu(A_i) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{I'} A_i\right) - \mu\left(\bigcup_{I''} A_i\right) = |\mu\left(\bigcup_{I'} A_i\right)| + |\mu\left(\bigcup_{I''} A_i\right)| \leq$$

$$\leq 2 \sup_{\substack{B \subset A \\ B \in \beta}} |\mu(B)| = 2 \|\mu\|(A)$$

$$\text{Logo } |\mu|(A) \leq 2 \|\mu\|(A).$$

iii) Seja $Z = \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |\mu|(A) &= |\operatorname{Re} \mu + i \operatorname{Im} \mu|(A) \leq \\ &\leq |\operatorname{Re} \mu|(A) + |\operatorname{Im} \mu|(A) \leq 2 \|\operatorname{Re} \mu\|(A) + 2 \|\operatorname{Im} \mu\|(A) \leq \\ &\leq 2 \|\mu\|(A) + 2 \|\mu\|(A) = 4 \|\mu\|(A). \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

4.2.12 Proposição

Seja μ medida real em $(X, \mathcal{F})$

Então:

$$\mu^+ = \frac{1}{2} (|\mu| + \mu)$$

$$\mu^- = \frac{1}{2} (|\mu| - \mu)$$

$$\mu^+ + \mu^- = |\mu|$$

Prova

Sejam $\lambda_1 = \frac{1}{2} (|\mu| + \mu)$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2} (|\mu| - \mu)$

Como $\lambda_1 - \lambda_2 = \mu$, pelo teorema da decomposição de Jordan basta mostrar que $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Seja $X = A + (X \setminus A)$ decomposição de Hahn onde A é μ -positivo e $X \setminus A$ é μ -negativo.

Calculamos $|\mu|(A) = \sup_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset A} \sum_{i=1}^n |\mu(B_i)|$

$B_i \in \beta$, $i=1, 2, \dots, n$, disjuntos.

$$|\mu|(A) = \sup_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset A} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \sup_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset A} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \mu(A)$$

Analogamente:

$$|\mu|(X \setminus A) = \sup_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset X \setminus A} \sum_{i=1}^n |\mu(B_i)| =$$

$$= \sup_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset X \setminus A} \left(- \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \right) = \sup_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset X \setminus A} \left(- \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \right) =$$

$$= - \inf_{\bigcup_{i=1}^n B_i \subset X \setminus A} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = - \inf_{B \subset X \setminus A} \mu(B) = -\mu(X \setminus A).$$

Então:

$$\lambda_2(A) = \frac{1}{2} (|\mu|(A) - \mu(A)) = 0$$

$$\lambda_1(X \setminus A) = \frac{1}{2} (|\mu|(X \setminus A) + \mu(X \setminus A)) = 0$$

isto é $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Pela unicidade da decomposição de Jordan

$$\lambda_1 = \mu^+ \text{ e } \lambda_2 = \mu^-$$

(c.q.d.).

§4.3. O Teorema de Vitali-Hahn-Saks

4.3.1 Definição

Seja X um conjunto e $A, B \subset X$.
Definimos diferença simétrica de A e B por

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

4.3.2 Propriedades

$$(1) \chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B| = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$$

(2) A operação Δ é associativa e comutativa.

$$(3) \tilde{A} \Delta \tilde{B} = A \Delta B$$

4.3.3 Propriedades

Seja μ medida positiva em (X, β) e $A, A_1, B, B_1 \in \beta$.

$$(1) \mu(A \Delta B) = \int_X |\chi_A - \chi_B| d\mu$$

$$(2) \mu(A \Delta B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

$$(3) \mu[(A \cap B) \Delta (A_1 \cap B_1)] \leq \mu(A \Delta A_1) + \mu(B \Delta B_1)$$

4.3.4 Definição

Seja μ medida positiva finita em (X, β) .
 Seja (R) a relação de equivalência em β
 definida por

$$A (R) B \stackrel{\text{def.}}{\iff} \mu(A \Delta B) = 0$$

Em $S = \frac{\beta}{(R)}$ introduzimos a distância
 definida por $\text{dist}(\dot{A}, \dot{B}) = \mu(A \Delta B)$.

4.3.5 Observações

(1) A propriedade 4.3.3 (1) mostra que
 (R) é relação de equivalência e que
 $\mu(A \Delta B)$ define distância em S .

(2) As propriedades 4.3.2 (3) e 4.3.3 (3)
 mostram que as operações de com-
 plementação e de interseção são com-
 patíveis com (R) .

Consequentemente também as opera-
 ções de união, diferença e diferença
 simétrica são compatíveis com (R) .

4.3.6 Proposição

O espaço métrico S é completo.

Prova

A aplicação $\theta: S \rightarrow L_1(X, \beta, \mu)$ definida por:

$$\theta(\dot{E}) = \dot{X}_E$$

é uma isometria. De fato:

$$\begin{aligned} \|\dot{X}_E - \dot{X}_F\| &= \int_X |X_E - X_F| d\mu = \\ &= \mu(E \Delta F) = \text{dist}(\dot{E}, \dot{F}), \quad E, F \in \beta. \end{aligned}$$

Mostremos que $\theta(S) \subset L_1(X, \beta, \mu)$ é fechado.

Seja $\dot{X}_{E_m} \rightarrow f$ em L_1 .
Então existe sub-sequência (E_{m_k}) tal que $X_{E_{m_k}}$ converge μ -q.s. para f .

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{E_{m_k}} = 0$ ou 1 , μ -q.s.,

existe $E \in \beta$ tal que

$$X_{E_{m_k}} \rightarrow X_E \quad \mu\text{-q.s.}$$

Logo $f = \chi_E \in \theta(S)$ e portanto $\theta(S)$ é fechado.

Como L_1 é completo, $\theta(S)$ é completo e portanto também S é completo.

(c.q.d.).

4.3.7 Observação

Passaremos a indicar os elementos de S por meio de representantes em β .

4.3.8 Proposição

As aplicações de S em S e de $S \times S$ em S definidas por

$$E \rightarrow \sim E, \quad (E, F) \rightarrow E \cap F$$

$$(E, F) \rightarrow E \cup F, \quad (E, F) \rightarrow E \Delta F$$

são contínuas.

Prova

De 4.3.2 (3) e 4.3.3 (3) temos $\text{dist}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{dist}(A, B)$ e $\text{dist}(A \cap B, A_1 \cap B_1) \leq \text{dist}(A, A_1) + \text{dist}(B, B_1)$.

Portanto as duas primeiras aplicações são contínuas.

Como $E \cup F = \sim(\tilde{E} \cap \tilde{F})$ e $E \Delta F = (\tilde{E} \cap \tilde{F}) \cup (\tilde{F} \cap \tilde{E})$ também as duas últimas são contínuas.

(c.q.d.).

4.3.9 Definição

Seja μ medida positiva em (X, β) e $h: \beta \rightarrow Z$ uma aplicação com valores num espaço de Banach Z .

Dizemos que h é μ -contínua e indicamos por

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} h(E) = 0$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \|h(E)\| < \varepsilon.$$

4.3.10 Proposição

Seja μ medida positiva em (X, β) , Z espaço de Banach e $h: \beta \rightarrow Z$ função aditiva μ -contínua.

Então h é compatível com $(\mathbb{Q})$ e a aplicação quociente $\tilde{h}: S \rightarrow Z$ é contínua.

Prova

Das identidades

$$\mu(E \Delta F) = \mu(E \sim E \cap F) + \mu(F \sim E \cap F)$$

$$h(E) - h(F) = h(E \sim E \cap F) - h(F \sim E \cap F)$$

resulta $E \cap F \Rightarrow h(E) = h(F)$, isto é, h é compatível com $(\mathcal{R})$.
As mesmas identidades mostram que h é contínua.

(c.q.d.)

4.3.11 TEOREMA 16. (Vitali - Hahn - Saks)

Seja μ medida positiva finita em (X, β) e Z espaço de Banach.

Sejam $m_k: \beta \rightarrow Z$ medidas vetoriais μ -contínuas e tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E)$ existe para $\forall E \in \beta$, $k = 1, 2, \dots$.

Então:

(1) $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} m_k(E) = 0$ uniformemente para $k \in \mathbb{N}$.

(2) $m: \beta \rightarrow Z$ definida por

$m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E)$ é uma medida vetorial.

Prova

(1) Seja $\epsilon > 0$.

Como as $m_k: S \rightarrow Z$, $(S = \frac{\beta}{(\mathcal{R})})$, são contínuas, os conjuntos:

$$\mathcal{F}_{r,s} = \left\{ E \in S : \|m_r(E) - m_s(E)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}, \quad r, s \in \mathbb{N}$$

e $\mathcal{F}_p = \bigcap_{r,s \geq p} \mathcal{F}_{r,s}$ são fechados em S .

Seja $E \in S$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E)$ existe, a sequência

$(m_k(E))$ é de Cauchy.

Então dado $\varepsilon > 0$ existe p_0 tal que
para $r, s \geq p_0$ temos $\|m_r(E) - m_s(E)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$
donde $E \in \mathcal{F}_{p_0}$.

Portanto $S = \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathcal{F}_p$.

Como S é métrico completo, é espaço de Baire (Teorema 4.1.3) e portanto existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}_q$ tem interior não vazio.

Seja $A \in \mathcal{F}_q$ um ponto interior e

$$K = \{ E : \text{dist}(E, A) < \eta \} \text{ contido em } \mathcal{F}_q.$$

Então para $\forall E \in K$ temos

$$\|m_r(E) - m_s(E)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall r, s \geq q.$$

Seja δ tal que $0 < \delta < \nu$ e tal que

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \|m_k(B)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Se $\mu(B) < \delta$ temos ainda $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{K}$.
De fato:

$$\text{dist}(A \cup B, A) \leq \mu(B) < \nu \quad e$$

$$\text{dist}(A \cap B, A) \leq \mu(B) < \nu.$$

Seja $k \geq q$

$$\begin{aligned} \text{De } m_k(B) &= m_q(B) + (m_k(B) - m_q(B)) = \\ &= m_q(B) + [m_k(A \cup B) - m_q(A \cup B)] - [m_k(A \cap B) - m_q(A \cap B)] \end{aligned}$$

resulta:

$$\begin{aligned} \|m_k(B)\| &\leq \|m_q(B)\| + \|m_k(A \cup B) - m_q(A \cup B)\| + \\ &\quad + \|m_k(A \cap B) - m_q(A \cap B)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto $\|m_k(B)\| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\lim_{\mu(B) \rightarrow 0} m_k(B) = 0 \quad \text{uniformemente em } k.$$

(2) Mostremos inicialmente que m é aditiva.
Sejam $E, F \in \beta$ disjuntos.

$$\begin{aligned} m(E \cup F) &= \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E \cup F) = \lim_{k \rightarrow \infty} (m_k(E) + m_k(F)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E) + \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(F) = m(E) + m(F). \end{aligned}$$

Provemos agora que m é σ -aditiva.
Seja $E_k \downarrow \emptyset$, $E_k \in \beta$.

Como μ é finita, $\mu(E_k) \downarrow 0$.

Pela parte (1) dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que para $k \geq k_0$

$$\|m_r(E_k)\| < \varepsilon, \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$ obtemos

$$\|m(E_k)\| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Isto significa que $m(E_k) \rightarrow 0$ qdo $k \rightarrow \infty$.
Então pela propriedade 4.2.2(5), m é σ -aditiva. Logo $m: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$ é medida vetorial.

(c.q.d.)

§4.4- Medida de Controle

Neste parágrafo Z indicará um espaço de Banach.

4.4.1 Proposição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) e $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medida positiva finita⁽¹⁾. Então são equivalentes.

$$i) \mu(E) = 0 \Rightarrow m(E) = 0, \quad E \in \beta.$$

$$ii) m \text{ é } \mu\text{-contínua.}$$

Prova

$$ii) \Rightarrow i)$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \|m(E)\| < \varepsilon$$

Então se $\mu(E) = 0$ temos $\|m(E)\| < \varepsilon$ para $\forall \varepsilon > 0$ donde $\|m(E)\| = 0$ isto é, $m(E) = 0$.

(1) Vide observação 4.4.2.

i) $\Rightarrow$ ii).

1º Caso : $Z = \mathbb{R}$ e $m = \nu$ onde ν é medida real positiva.

Suponhamos que ν não é μ -contínua e mostremos que então existe E_0 tal que $\mu(E_0) = 0$ e $\nu(E_0) > 0$.

Se ν não é μ -contínua existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência (E_n) , $E_n \in \beta$, tais que

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \nu(E_n) \geq \varepsilon$$

Seja $E_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{m=j}^{\infty} E_m$.

Por um lado:

$$\mu\left(\bigcup_{m=j}^{\infty} E_m\right) \leq \sum_{m=j}^{\infty} \mu(E_m) < \sum_{m=j}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{j-1}}$$

donde

$$\mu(E_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{m=j}^{\infty} E_m\right) = 0.$$

Por outro lado:

$$\nu\left(\bigcup_{m=j}^{\infty} E_m\right) \geq \nu(E_n), \quad \forall n \geq j$$

$$\nu\left(\bigcup_{m=j}^{\infty} E_m\right) \geq \sup_{m \geq j} \nu(E_m)$$

Como ν é finita

$$\nu(E_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{m=j}^{\infty} E_m\right) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{m \geq j} \nu(E_m) \geq \varepsilon > 0$$

É o que queríamos provar

2º Caso : $Z = \mathbb{R}$ e $m = \nu$ onde ν é medida real qualquer.

Pela decomposição $\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E)$, $E \in \beta$, este caso é reduzido ao anterior.

3º Caso : $Z = \mathbb{C}$ e $m = \nu$ onde ν é medida complexa.

Pela decomposição $\nu(E) = \operatorname{Re} \nu(E) + i \operatorname{Im} \nu(E)$, $E \in \beta$, este caso é reduzido ao anterior.

4º Caso : Z é separável.

Suponhamos que $\mu(E) = 0 \Rightarrow m(E) = 0$, $E \in \beta$, e (por contradição) que m não é μ -contínua.

Existem então $\varepsilon > 0$ e uma sequência (E_k) , $E_k \in \beta$, tais que:

$$\mu(E_k) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|m(E_k)\| \geq \varepsilon.$$

Pela proposição 4.1.5 existe uma sequência (z'_k) , $z'_k \in Z'$, tal que

$$\|z'_k\| = 1 \quad \text{e} \quad z'_k m(E_k) = \|m(E_k)\|, \quad \forall k.$$

Como Z é separável existe subconjunto enumerável $\{z_1, z_2, \dots\}$ denso em Z .

Pelo procedimento diagonal de Cantor obtemos uma sub-sequência (z'_{k_n}) tal que $z'_{k_n}(z_j)$ é convergente para $\forall j$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como $\|z'_{k_n}\| = 1$, $\forall n$, e $\{z_1, z_2, \dots\} \subset Z$ é denso, $z'_{k_n}(z)$ converge quando $n \rightarrow \infty$ para $\forall z \in Z$ o que é fácil verificar mostrando que a sequência $(z'_{k_n}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. ⁽¹⁾

(1) Para essa verificação utilize a desigualdade

$$\begin{aligned} |z'_{k_n}(z) - z'_{k_m}(z)| &\leq |z'_{k_n}(z) - z'_{k_n}(z_j)| + |z'_{k_n}(z_j) - z'_{k_m}(z_j)| + \\ &+ |z'_{k_m}(z_j) - z'_{k_m}(z)| \leq \|z - z_j\| + |z'_{k_n}(z_j) - z'_{k_m}(z_j)| + \|z - z_j\|. \end{aligned}$$

Como $\mu(E)=0 \Rightarrow m(E)=0 \Rightarrow \sum_{k_n} m(E)=0$,
pelos casos anteriores, as medidas
escalares $\sum_{k_n} m$ são μ -contínuas.

Como ainda $\sum_{k_n} m(E)$ convergem quando
 $n \rightarrow \infty$ para $\forall E \in \beta$, temos pelo Teorema
de Vitali-Hahn-Saks que as medidas $\sum_{k_n} m$
são μ -contínuas uniformemente em n .

Portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow |\sum_{k_n} m(E)| < \varepsilon, \quad \forall n.$$

Para n suficientemente grande temos
 $\mu(E_{k_n}) < \delta$ e portanto $|\sum_{k_n} m(E_{k_n})| < \varepsilon$.

Mas $|\sum_{k_n} m(E_{k_n})| = \|m(E_{k_n})\| \geq \varepsilon$ e temos
uma contradição.

Portanto $i) \Rightarrow ii)$ qdo Z é separável.

5° Caso :: Caso geral.

Por hipótese $\mu(E)=0 \Rightarrow m(E)=0, \forall E \in \beta$
Suponhamos (por contradição) que m
não é μ -contínua.

Existem então $\varepsilon > 0$ e uma sequência (E_k) , $E_k \in \beta$, tais que

$$\mu(E_k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \|m(E_k)\| \geq \varepsilon \quad [1]$$

Seja β_0 a álgebra gerada por $\{E_1, E_2, \dots\}$ e $\beta_1 = \sigma\text{-álgebra}(\beta_0)$.

A álgebra β_0 é enumerável⁽¹⁾.

Seja $Z_1 = \overline{\text{span}} \{m(E) : E \in \beta_0\} \subset Z$

Como β_0 é enumerável, Z_1 é espaço de Banach separável.

Mostremos que

$$F \in \beta_1 \Rightarrow m(F) \in Z_1 \quad [2]$$

De fato, se fosse $m(F) \notin Z_1$, existiria, pela proposição 4.1.6, $z' \in Z'$ tal que

(1) A álgebra β_0 é formada pelas reuniões finitas de interseções finitas de elementos de $\{\emptyset, E_1, E_2, \dots\} \cup \{X, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots\}$.

$$z'_m(E) = 0, \quad \forall E \in \beta_0 \quad \text{e} \quad z'_m(F) = 1.$$

Teríamos então uma contradição pois uma medida escalar, no caso z'_m , possui uma única extensão de β_0 a β_1 o que acarreta $z'_m(F) = 0$. Portanto [2] é verdadeira.

Do que precede vemos que podemos restringir nossas considerações a

$$m: \beta_1 \rightarrow Z_1 \quad \text{e} \quad \mu: \beta_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

Como Z_1 é separável temos pelo caso anterior que $m|_{\beta_1}$ é $\mu|_{\beta_1}$ -contínua.

Mas isso contradiz [1].

Logo m é μ -contínua (c.q.d.)

4.4.2 Observação

A hipótese de ser μ finita só foi utilizada na demonstração do 3º caso (e do 4º caso por consequência) quando recorremos ao Teorema de Vitali-Haár-Saks. Como a tese (1) desse teorema vale mesmo que μ não seja finita, esta hipótese poderia ser retirada da proposição 4.4.1.

4.4.3 Definição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β)
 e $\lambda: \beta \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ medida positiva.
 Dizemos que λ é medida de controle de m
 se:

$$(1) \quad \lambda(E) \leq \|m\|(E) \quad , \quad \forall E \in \beta.$$

$$(2) \quad m \text{ é } \lambda\text{-contínua}.$$

4.4.4. Proposição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β)
 e λ medida de controle de m . Então:

$$(1) \quad \lambda(E) = 0 \Leftrightarrow \|m\|(E) = 0 \Leftrightarrow |m|(E) = 0.$$

$$(2) \quad \|m\| \text{ é } \lambda\text{-contínua}.$$

Prova

(1) É imediata a verificação das implicações:

$$\lambda(E) = 0 \Rightarrow |m|(E) = 0 \Rightarrow \|m\|(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

(2) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \|m(E)\| < \varepsilon/2$$

Então para $B \subseteq E$, $B \in \beta$,

temos

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \lambda(B) < \delta \Rightarrow \|m(B)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{donde } \|m\|(E) = \sup_{B \subseteq E} \|m(B)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo $\|m\|$ é λ -contínua (c.q.d.)

4.4.5 Proposição

Sejam $m_k : \beta \rightarrow Z$, $k = 1, 2, 3, \dots$, medidas vetoriais em (X, β) uniformemente σ -aditivas, e $\mathcal{A} \subset \beta$ uma álgebra.

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E)$ existe para $\forall E \in \mathcal{A}$

então $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E)$ existe para $\forall E \in \sigma\text{-álgebra}(\mathcal{A})$

Prova

i) Sejam

$$\mathcal{C}_1 = \{E \in \beta : \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E \cap C) \text{ existe, } \forall C \in \mathcal{A}\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{E \in \beta : E \cap F \in \mathcal{C}_1, \forall F \in \mathcal{C}_1\}$$

Como é fácil verificar

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \subset \beta$$

ii) Provemos que $\mathcal{C}_2$ é uma álgebra.

Que $\emptyset \in \mathcal{C}_2$ é trivial

Sejam $A, B \in \mathcal{C}_2$. Mostremos que $A \cap B \in \mathcal{C}_2$.

Seja $F \in \mathcal{C}_1$.

Como $B \in \mathcal{C}_2$ temos $B \cap F \in \mathcal{C}_1$.

Como $A \in \mathcal{C}_2$ temos $A \cap (B \cap F) \in \mathcal{C}_1$.

Então $(A \cap B) \cap F \in \mathcal{C}_1$ donde $A \cap B \in \mathcal{C}_2$.

Seja $A \in \mathcal{C}_2$. Mostremos que $\tilde{A} \in \mathcal{C}_2$.

Seja $F \in \mathcal{C}_1$. Devemos provar que $\tilde{A} \cap F \in \mathcal{C}_1$.

Seja $C \in \mathcal{C}$

Como $m_k(\tilde{A} \cap F \cap C) = m_k(F \cap C) - m_k(A \cap F \cap C)$
e existem os limites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(F \cap C) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(A \cap F \cap C)$$

resulta existente $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(\tilde{A} \cap F \cap C)$.

o que mostra que $\tilde{A} \cap F \in \mathcal{C}_1$.

Logo $\mathcal{C}_2$ é uma álgebra.

iii) Provemos que $\mathcal{C}_2$ é uma σ -álgebra.

Sejam $E_j \in \mathcal{C}_2$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Devemos provar que $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{C}_2$:

Como $\mathcal{C}_2$ é álgebra, podemos admitir sem perda de generalidade que os E_j são disjuntos.

Seja $F \in \mathcal{C}_1$.

Devemos provar que $(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \cap F \in \mathcal{C}_1$.

Então dado $C \in \mathcal{I}$ devemos provar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k \left[\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \cap F \cap C \right] \text{ existe.}$$

Como $E_j \in \mathcal{C}_2$, temos que $E_j \cap F \in \mathcal{C}_1$ e portanto existem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k (E_j \cap F \cap C), \quad \forall j. \quad [1]$$

$$\text{Seja } z_k = m_k \left[\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \cap F \cap C \right]$$

Devemos provar que (z_k) é sequência de Cauchy.

$$\begin{aligned} \|z_{k+r} - z_k\| &\leq \sum_{j=1}^{N-1} \|m_{k+r}(E_j \cap F \cap C) - m_k(E_j \cap F \cap C)\| + \\ &+ \|m_{k+r} \left[\bigcup_{j=N}^{\infty} (E_j \cap F \cap C) \right]\| + \|m_k \left[\bigcup_{j=N}^{\infty} (E_j \cap F \cap C) \right]\|. \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Pela σ -aditividade uniforme dos m_k , temos que para N suficientemente grande

$$\| m_i \left[\bigcup_{j=N}^{\infty} (E_j \cap F \cap C) \right] \| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Pela existência dos limites [1], temos que para k suficientemente grande

$$\sum_{j=1}^{N-1} \| m_{k+r}(E_j \cap F \cap C) - m_k(E_j \cap F \cap C) \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Então $\| z_{k+r} - z_k \| < \varepsilon$ para k suficientemente grande, isto é (z_k) é de Cauchy, e está provado que $\mathcal{C}_2$ é σ -álgebra.

iv) Temos agora

$$\sigma\text{-álgebra}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1.$$

Se $E \in \sigma\text{-álgebra}(\mathcal{A})$ então $E \in \mathcal{C}_1$, donde resulta que $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k(E)$ existe. (c.q.d.).

4.4.6 Lema

Seja $m: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$ medida vetorial em (X, β) ,
e $z'_k \in \text{ball } Z'$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Então $\lambda = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z'_i m|}{2^i}$ é uma medida
positiva tal que $\lambda(E) \leq \|m\|(E)$, $\forall E \in \beta$.

Prova

$$\lambda(E) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z'_i m|(E)}{2^i} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \|z'_i m\|(E)}{2^i}$$

Como $\|z'_i m\|(E) = \sup_{B \in \beta} |z'_i m(B)| \leq \sup_{B \in \beta} \|m(B)\| = \|m\|(E)$
vem:

$$\lambda(E) \leq \|m\|(E) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \|m\|(E)$$

Então λ é positiva e finita.

$$\text{Sejam } \lambda_n = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{|z'_i m|}{2^i}$$

Como as λ_n são medidas λ -contínuas e
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(E) = \lambda(E)$, $\forall E \in \beta$, resulta do

teorema de Vitali-Hahn-Saks que λ é
uma medida. (c.q.d.)

4.4.7 Lema

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .
 Para todo $\varepsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e um
 conjunto finito $\{z'_1, z'_2, \dots, z'_n\} \subset \text{ball } Z'$ tais
 que

$$|z'_k m|(E) < \delta, \quad k=1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \|m(E)\| \leq \varepsilon.$$

Prova

Observemos inicialmente que $\|m(E)\| \leq \varepsilon$
 é equivalente a $|z' m(E)| \leq \varepsilon, \forall z' \in \text{ball } Z'$.

Suponhamos (por contradição) que o lema
 seja falso.

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$
 e todo conjunto finito $\{z'_1, z'_2, \dots, z'_n\} \subset \text{ball } Z'$
 existe $E \in \beta$ tal que

$$|z'_k m|(E) < \delta, \quad k=1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad \|m(E)\| > \varepsilon_0$$

Para $\delta = \frac{1}{2}$ e $z'_1 \in \text{ball } Z'$ existem então
 $E_1 \in \beta$ e $z'_2 \in \text{ball } Z'$ tais que:

$$|z'_1 m|(E_1) < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |z'_2 m|(E_1) > \varepsilon_0$$

Para $\delta = \frac{1}{2^2}$ e $\{z'_1, z'_2\} \subset \text{ball } Z'$ existem
 $E_2 \in \beta$ e $z'_3 \in \text{ball } Z'$ tais que:

$$|z'_1 m|(E_2) < \frac{1}{2^2}, |z'_2 m|(E_2) < \frac{1}{2^2} \quad \text{e} \quad |z'_3 m|(E_2) > \epsilon_0.$$

Desta maneira construímos duas seqüências (z'_k) e (E_k) de elementos respectivamente em $\text{ball } Z'$ e em β tais que:

$$|z'_j m|(E_k) < \frac{1}{2^k}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$|z'_{k+1} m|(E_k) > \epsilon_0.$$

Como para $z' \in \text{ball } Z'$, $|z' m(E)| \leq \|m(E)\|$ vemos que as medidas escalares $z' m$ são limitadas e uniformemente σ -aditivas pois que para $B_k \downarrow \emptyset$, $B_k \in \beta$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z' m(B_k) \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente}$$

para $z' \in \text{ball } Z'$.

Pelo procedimento diagonal de Cantor obtemos subseqüência (z'_{i_k}) tal que existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z'_{i_k} m(A)$$

para $\forall A \in \mathcal{A} = \text{algebra}(\{E_1, E_2, E_3, \dots\})$ a qual é enumerável.

Pela proposição 4.4.5 o $\lim_{k \rightarrow \infty} z'_{i_k} m(A)$ existe para $\forall A \in \beta_0 = \sigma\text{-algebra}(A)$.

Pelo lema 4.4.6

$$\lambda = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z'_i m|}{2^i}$$

é uma medida positiva finita

Como $z'_{i_k} m$ são medidas λ -contínuas e $\lim_{k \rightarrow \infty} z'_{i_k} m(E)$ existe para $\forall E \in \beta_0$,

resulta pelo Teorema de Vitali-Hahn-Saks que os $z'_{i_k} m$ em (X, β_0) são λ -contínuas uniformemente em relação a k .

Quer dizer que para $\varepsilon_0 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow |z'_{i_k} m(E)| < \varepsilon_0, \quad \forall k, \quad E \in \beta_0.$$

Verifiquemos que $\lambda(E_k) \rightarrow 0$.

De fato:

$$\lambda(E_k) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z'_i m|(E_k)}{2^i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \frac{|z'_i m|(E_k)}{2^i} + \frac{1}{4} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|z'_i m|(E_k)}{2^i} \leq \\
&\leq \frac{1}{4} \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} + \frac{1}{4} \cdot 4 \|m\| \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^k} + \frac{\|m\|}{2^k} = \left(\frac{1}{4} + \|m\| \right) \frac{1}{2^k} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Portanto para k suficientemente grande

$$|z'_{i_k} m(E_{i_k-1})| < \varepsilon_0$$

Mas por construção das sequências (z'_k) e (E_k) temos $|z'_{i_k} m(E_{i_k-1})| > \varepsilon_0$ e temos uma contradição. Logo o lema é verdadeiro. (c.q.d.).

4.4.8 Lema

Seja $m: \mathcal{P} \rightarrow Z$ medida vetorial em $(X, \mathcal{P})$.
Existem $z'_k \in \text{ball } Z'$, $k=1, 2, 3, \dots$, tais que:

$$|z'_k m|(E) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow m(E) = 0$$

Prova

Pelo lema 4.4.7 para $\forall p \in \mathbb{N}$ existe $\delta_p > 0$ e $\{z'_{1,p}, z'_{2,p}, \dots, z'_{m_p,p}\} \subset \text{ball } Z'$ tais que:

$$|z'_{j,p} m|(E) < \delta_p, j=1,2,\dots,n_p \Rightarrow \|m(E)\| \leq \frac{1}{p}.$$

O conjunto $\bigcup_{p=1}^{\infty} \{z'_{1,p}, z'_{2,p}, \dots, z'_{n_p,p}\}$ é

enumerável.

Seja $z'_1, z'_2, z'_3, \dots$ uma enumeração de seus elementos.

Seja $p \in \mathbb{N}$ qualquer. Temos:

$$|z'_k m|(E) = 0, \forall k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z'_{j,p} m|(E) < \delta_p, j=1,2,\dots,n_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|m(E)\| \leq \frac{1}{p}.$$

Pela arbitrariedade de p resulta $\|m(E)\| = 0$.
isto é, $m(E) = 0$. (c.q.d.)

4.4.9 TEOREMA 17

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .
Então m admite medida de controle.

Prova

Pelo lema 4.4.8 existem $z'_k \in \text{ball } Z'$, $k=1,2,3,\dots$,
tais que:

$$|z'_k m|(E) = 0, \forall k \Rightarrow m(E) = 0$$

$$\text{Seja } \lambda = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z'_k m|}{2^k}.$$

Pelo lema 4.4.6. λ é medida positiva finita tal que $\lambda(E) \leq \|m\|(E)$, $\forall E \in \mathcal{B}$.

Obtem disso m é λ -contínua pois que

$$\lambda(E) = 0 \Rightarrow |z'_k m|(E) = 0, \forall k \Rightarrow m(E) = 0$$

Logo λ é medida de controle de m .

(c.q.d.)

§4.5 - Funções mensuráveis

Neste parágrafo Y indicará um espaço de Banach.

4.5.1 Definição

Seja $\beta \subset 2^X$ uma σ -álgebra em X . Dizemos que $\varphi: X \rightarrow Y$ é uma função simples se φ pode ser representada como

$$\varphi = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{E_j}$$

onde $b_j \in Y$, $j=1,2,\dots,n$, $E_j \in \beta$; $j=1,2,\dots,n$ disjuntos.

4.5.2 Observação

As funções simples formam um espaço vetorial.

4.5.3 Definição

Seja $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida positiva em (X, β) e $f: X \rightarrow Y$.

Dizemos que f é μ -mensurável se f é definida μ -q.s. e as imagens inversas de abertos de Y pertencem a β .

4.5.4 Definição

Seja $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida positiva em (X, β) e $f: X \rightarrow Y$.

Dizemos que f é fracamente μ -mensurável se $y' \circ f$ é μ -mensurável para $\forall y' \in Y'$.

4.5.5 Definição

Seja $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida positiva em (X, β) e $f: X \rightarrow Y$.

Dizemos que f é fortemente μ -mensurável se f é definida μ -q.s. e existe sequência (φ_n) de funções simples tais que $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$, μ -q.

4.5.6 Observação

Seja Z espaço de Banach e $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .

Diremos que $f: X \rightarrow Y$ é m -mensurável, fracamente m -mensurável ou fortemente m -mensurável se for respectivamente $|m|$ -mensurável, fracamente $|m|$ -mensurável ou fortemente $|m|$ -mensurável.

4.5.7 Propriedades (funções μ -mensuráveis).

(1) Se $f: X \rightarrow Y$ é μ -mensurável e $B \subset Y$ é boreliano então $f^{-1}(B) \in \beta$.

(2) Se $f_n: X \rightarrow Y$, $n=1,2,\dots$, são μ -mens., $f: X \rightarrow Y$ é definida μ -q.s. e temos $f_n(x) \rightarrow f(x)$, μ -q.s., então f é μ -mens.

Prova

(1). De fato, $\mathcal{M} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \beta\}$ é uma σ -álgebra à qual os abertos pertencem.

(2) Seja $O \subset Y$ aberto e

$$O_k = \{y \in Y : \text{dist}(y, \tilde{O}) > \frac{1}{k}\}$$

Os O_k são abertos e $\overline{O_k} \subset O$.

Temos agora

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} f_m^{-1}(O_{k,m}) \in \beta \quad (\text{c.q.d.})$$

4.5.8 TEOREMA 1B

Seja $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medida positiva em (X, β) e $f: X \rightarrow Y$ definida μ -q.s.

Entre as afirmações:

- (1) f é fortemente μ -mensurável
- (2) f é μ -mensurável
- (3) f é fracamente μ -mensurável
- (4) $\{x : \|f(x) - y\| \leq \alpha\} \in \beta, \forall \alpha \geq 0, \forall y \in Y$.

valem as implicações:

$$(1) \implies (2) \implies (3) \xrightarrow{Y \text{ separável}} (4) \xrightarrow{Y \text{ separável}} (1)$$

Prova

Sem perda de generalidade suporemos $f: X \rightarrow Y$ definida para $\forall x \in X$.

(1) $\Rightarrow$ (2) :

Sejam φ_n funções simples tais que $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -q.s. Como as φ_n são μ -mensuráveis resulta por 4.5.4 (2) que f é μ -mensurável.

(2) $\Rightarrow$ (3) :

Seja f μ -mensurável e $y' \in Y'$. Como y' é contínua, $y' \circ f$ é μ -mensurável. Logo f é fracamente μ -mensurável.

(3) $\Rightarrow$ (4), (Y separável) :

Seja f fracamente μ -mensurável. Pela proposição 4.1.7 existem $y'_k \in \text{ball } Y'$, $k=1, 2, 3, \dots$, tais que dado $y' \in \text{ball } Y'$ existe sub-sequência (y'_{k_m}) tal que

$$y'_{k_m}(y) \rightarrow y'(y), \quad \forall y \in Y.$$

Seja $A = \{x : \|f(x)\| \leq \alpha\}$ e

$$A_{y'} = \{x : |y'f(x)| \leq \alpha\}, \quad y' \in Y'.$$

Como f é fracamente μ -mensurável
temos $A_{y'} \in \beta$, $\forall y' \in Y'$.

É claro que $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{y'_k}$ pois que

$$|y'_k f(x)| \leq \|f(x)\| \leq \alpha \quad \forall x \in A, \forall k.$$

Proveremos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{y'_k} \subset A$.

Seja $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{y'_k}$.

Pela proposição 4.1.5 existe $y'_0 \in \text{ball } Y'$
tal que:

$$|y'_0 f(x)| = \|f(x)\|$$

Seja (y'_{k_n}) sub-sequência de (y'_k) tal que

$$y'_{k_n}(y) \rightarrow y'_0(y), \quad \forall y \in Y.$$

Como $x \in A_{y'_{k_n}} \forall n$, temos $|y'_{k_n} f(x)| \leq \alpha, \forall n$.

Fazendo $n \rightarrow \infty$ vem $|y'_0 f(x)| \leq \alpha$.

Então $\|f(x)\| \leq \alpha$, isto é, $x \in A$.

Logo $\{x : \|f(x)\| \leq \alpha\} = A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{y'_k} \in \beta$.

Como $g: X \rightarrow Y$ definida por $g(x) = f(x) - y$ é fracamente μ -mensurável teremos pois que acabamos de provar que

$$\{x : \|f(x) - y\| \leq \alpha\} \in \beta$$

(4) $\Rightarrow$ (1), (Y separável).

Como Y é separável existem $b_i \in Y$, $i = 1, 2, 3, \dots$, tais que $\{b_i\}$ é denso em Y .

Sejam $C_{ij} = \{x \in X : \|f(x) - b_i\| \leq \frac{1}{j}\}$ e

$$E_{ij}^n = C_{ij} \sim \bigcup \{C_{pq} : (i, j) < (p, q) \leq (n, n)\}.$$

onde a ordem utilizada é a anti-lexicográfica.

$$\text{Então } E_{ij}^n \subset C_{ij}, \quad (i, j) < (n, n).$$

As funções $f_n = \sum_{i,j}^n b_i X_{E_{ij}^n}$ são simples.

Seja $x \in X$.

Provemos que $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Dado $\varepsilon > 0$ fixemos m_0 tal que $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$ e i_0 tal que $\|f(x) - b_{i_0}\| \leq \frac{1}{m_0}$.

Então $x \in C_{i_0 m_0}$.

Seja $n > \max \{i_0, m_0\}$

Então $(i_0, m_0) < (n, n)$

Seja $(k, l) = \max \{ (i, j) : x \in C_{ij}, (i_0, m_0) \leq (i, j) \leq (n, n) \}$

Então $x \in E_{kl}^n$, isto é, $f_n(x) = b_k$.

Resulta:

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \|f(x) - b_k\| \leq \frac{1}{l} \leq \frac{1}{m_0} < \varepsilon$$

e portanto $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (c.q.d.).

4.5.9 COROLARIO 18a (Teorema de Pettis).

Seja $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida positiva em (X, β) .
Então $f: X \rightarrow Y$ é fortemente μ -mensurável
se e só se:

(1) f é fracamente μ -mensurável.

(2) Existe $A \in \beta$ de medida zero tal
que $f(X \setminus A)$ é separável.

Prova

i) Suponhamos f fortemente μ -mensurável.
Pelo Teorema 18, f é fracamente μ -mens.

Sejam φ_n simples, e A de medida zero tais que $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X \setminus A$

Então $f(X \setminus A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(X)} = E$
e E é separável.

Então as condições (1) e (2) são necessárias.

ii) Suponhamos agora que as condições (1) e (2) são satisfeitas.

Substituindo X por $X_0 = X \setminus A$ e Y por $Y_0 = \overline{\text{span } f(X_0)}$ que é um espaço de Banach separável podemos aplicar o Teorema 18 concluindo que $f: X_0 \rightarrow Y_0$ é fortemente μ_{β_0} -mensurável onde $\beta_0 = (\beta) \cap X_0$.
A conclusão agora é fácil. (c.q.d.)

4.5.10 Propriedades (funções fracamente [fortem.] μ -mensuráveis).

(1) Se $f_n: X \rightarrow Y$, $n=1,2,\dots$, são fracamente [fortemente] μ -mensuráveis, $f: X \rightarrow Y$ é definida μ -q.s. e $f_n(x) \rightarrow f(x)$, μ -q.s. então f é fracamente [fortemente] μ -mensurável.

(2) Se $f, g: X \rightarrow Y$ são fracamente [fortemente] μ -mensuráveis e λ é um escalar, então $f+g$ e λf são fracamente [fortemente] μ -mensuráveis.

Prova

(1a)

Sejam f_n fracamente μ -mensuráveis e $y' \in Y'$.
Então $y' \circ f_n$ são μ -mensuráveis e

$$y' \circ f_n(x) \rightarrow y' \circ f(x) \quad \mu\text{-q.s.}$$

Então $y' \circ f$ é μ -mensurável.

Logo f é fracamente μ -mensurável.

(1b)

Sejam f_n fortemente μ -mensuráveis.

Pelo corolário 4.5.9 existem $A_n \in \beta$ de medida zero tais que $f_n(X \setminus A_n)$ são separáveis.

Então $f_n(X \setminus A)$ são separáveis onde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tem medida zero.

Seja $Y_0 = \overline{\text{span}} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(X \setminus A) \subset Y$ e $X_0 = X \setminus A$.

E' um espaço de Banach separável

As $f_n: X_0 \rightarrow Y_0$ são fortemente μ_{β_0} -mens.
onde $\beta_0 = (\beta) \cap X_0$.

Pelo teorema 18 são fracamente μ_{β_0} -mens.
Pela parte (1a) temos que $f: X_0 \rightarrow Y_0$ é
fracamente μ_{β_0} -mens. e portanto pelo
Teorema 18 fortemente μ_{β_0} -mensurável.

Agora é fácil concluir que $f: X \rightarrow Y$ é
fortemente μ -mensurável.

(2) É imediato.

(c.q.d.)

4.5.11 TEOREMA 19 (Egoroff)

Seja $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medida positiva finita
em (X, β) .

Sejam $f_n: X \rightarrow Y$ fortemente μ -mens.
e $f_0: X \rightarrow Y$ definida μ -q.s. e tais que

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \quad \mu\text{-q.s.}$$

Então dado $\varepsilon > 0$ existe $A \in \beta$ com $\mu(A) < \varepsilon$
e tal que

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \quad \text{uniformemente em } X \setminus A.$$

Prova

1º Caso : Y separável

Sem perda de generalidade suporemos f definida para $\forall x \in X$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X$.

Sejam :

$$B_{m,k} = \bigcap_{j=m}^{\infty} \left\{ x \in X : \|f_j(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

Temos :

a) $B_{m,k} \in \beta$ pelo Teorema 18.

b) $m < m' \Rightarrow B_{m,k} \subset B_{m',k}$, $\forall k$.

c) $B_{m,k} \uparrow X$ qdo $m \rightarrow \infty$, k fixado.

De fato, seja $x_0 \in X$.

Como $f_j(x_0) \rightarrow f_0(x_0)$, existe n_0 tal que para $j \geq n_0$, $\|f_j(x_0) - f_0(x_0)\| \leq \frac{1}{k}$.

Portanto $x_0 \in B_{j,k}$, $j \geq n_0$.

d) $\mu(X \setminus B_{m,k}) \rightarrow 0$ qdo $m \rightarrow \infty$, k fixado, pois que μ é finita e $X \setminus B_{m,k} \downarrow \emptyset$.

De (d) vem que dado k existe m_k tal que

$$\mu(X \setminus B_{m_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Seja $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{m_k, k}$ e $A = X \sim E$.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(X \sim \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{m_k, k}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \sim B_{m_k, k})\right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \sim B_{m_k, k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$x \in E = X \sim A \Rightarrow \|f_j(x) - f_0(x)\| \leq \frac{1}{k}, \quad \forall j \geq m_k$$

Mas isto significa que $f_j(x) \rightarrow f_0(x)$ uniformemente em $X \sim A$.

2º Caso : Y espaço de Banach qualquer.

Como os f_n são fortemente μ -mensuráveis, existem pelo corolário 18a, $C_n \in \beta$ de medida zero tais que $f_n(X \sim C_n)$ são separáveis.

Então $f_n(X \sim C)$ são separáveis onde $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ tem medida zero.

Seja $Y_0 = \overline{\text{span}} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(X \sim C)$ e $X_0 = X \sim C$.

Como Y_0 é separável podemos aplicar o 1º caso a $f_n : X_0 \rightarrow Y_0$, $f : X_0 \rightarrow Y_0$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $A_0 \subset X_0$ com $\mu(A_0) < \varepsilon$

tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente em $X_0 \sim A_0$.

Seja $A = A_0 \cup C$

Então $\mu(A) < \varepsilon$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniforme-
mente em $X \setminus A$.

(c.q.d.).

4.5.12 Observação

Se Y é separável podemos substituir fortemente μ -mensurável por μ -mensurável ou por fracamente μ -mensurável no Teorema de Egoroff.

§ 4.6 - Integral Vetorial

Neste parágrafo Y, Z, W denotarão espaços de Banach. e $B: Y \times Z \rightarrow W$ uma aplicação bi-linear contínua.

Usaremos em geral a notação yz em lugar de $B(y, z)$.

Além disso m denotará uma medida vetorial $m: \beta \rightarrow Z$ em (X, β) .

4.6.1 Definição

Definimos $\tilde{m}: \beta \rightarrow \bar{R}$ por

$$\tilde{m}(E) = \sup \left\| \sum_{i=1}^n y_i m(B_i) \right\|$$

onde o sup é estendido aos conjuntos finitos de pares (y_i, B_i) , onde $y_i \in Y$, $\|y_i\| \leq 1$, os $B_i \in \beta$ são disjuntos e $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset E$.

Chamaremos $\tilde{m}$ semi-variação de m relativamente a β .

Observação

A condição $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset E$ pode ser substituída por $\bigcup_{i=1}^n B_i = E$.

4.6.2 Propriedades

$$(1) \quad \tilde{m}(E) \leq \|B\| |m|(E)$$

$$(2) \quad E \subset F \Rightarrow \tilde{m}(E) \leq \tilde{m}(F) \quad , \quad E, F \in \beta.$$

$$(3) \quad \tilde{m}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{m}(E_k) \quad , \quad E_k \in \beta, \forall k.$$

$$(4) \quad \text{Se } Y = Z' \quad \text{e } B(z', z) = z'(z) \quad \text{então}$$

$$\|m\|(E) \leq \tilde{m}(E) = |m|(E)$$

$$(5) \quad \text{Se } Y = \mathbb{K} \quad \text{e } B(\lambda, z) = \lambda z \quad \text{então}$$

$$\|m\|(E) \leq \tilde{m}(E) \leq 4 \|m\|(E)$$

Prova

$$\begin{aligned} (1) \quad \tilde{m}(E) &= \sup \left\| \sum_{i=1}^n B(y_i, m(E_i)) \right\| \leq \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^n \|B\| \|y_i\| \|m(E_i)\| \leq \|B\| \sup \sum_{i=1}^n \|m(E_i)\| = \|B\| |m|(E) \\ &= \|B\| |m|(E). \end{aligned}$$

$$(2) \quad E' \text{ imediato.}$$

$$(3) \quad \text{Sejam } F_i \in \beta, \quad i=1,2,\dots,n, \text{ disjuntos, tais que} \\ \text{que } \bigcup_{i=1}^n F_i \subset E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Suporemos inicialmente os E_k disjuntos.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^n y_i m(F_i) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^n y_i m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_i \cap E_k\right) \right\| = \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n y_i \sum_{k=1}^{\infty} m(F_i \cap E_k) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} y_i m(F_i \cap E_k) \right\| = \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n y_i m(F_i \cap E_k) \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n y_i m(F_i \cap E_k) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{m}(E_k).
\end{aligned}$$

Então $\left\| \sum_{i=1}^n y_i m(F_i) \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{m}(E_k).$

Tomando sup no primeiro membro obtemos

$$\tilde{m}(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{m}(E_k).$$

Se os E_k não são disjuntos usamos a monotonia de $\tilde{m}$ e a propriedade que acabamos de provar na decomposição:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_1 \cup E_2) + \dots$$

obtendo

$$\begin{aligned}
\tilde{m}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &\leq \tilde{m}(E_1) + \tilde{m}(E_2 - E_1) + \tilde{m}(E_3 - E_1 \cup E_2) + \dots \leq \\
&\leq \tilde{m}(E_1) + \tilde{m}(E_2) + \tilde{m}(E_3) + \dots
\end{aligned}$$

(4) Sejam $z'_i, B_i \quad i=1, 2, \dots, n$; $\|z'_i\| \leq 1$

$B_i \in \beta$, disjuntos, $UB_i \subset E$.

Pela proposição 4.1.5 podemos tomar os z'_i tais que $z'_i m(B_i) = \|m(B_i)\|$. Então:

$$\tilde{m}(E) \geq \left| \sum_{i=1}^n z'_i m(B_i) \right| = \sum_{i=1}^n \|m(B_i)\|.$$

Tomando sup no termo da direita ao variar os B_i obtemos:

$$\tilde{m}(E) \geq |m|(E)$$

Como por (1) $\tilde{m}(E) \leq \|B\| |m|(E) = |m|(E)$ pois que neste caso $\|B\| = 1$ temos

$$\tilde{m}(E) = |m|(E)$$

Como em geral $\|m\|(E) \leq |m|(E)$ temos a 2ª.

(5) Seja $B \in \beta$, $B \subset E$ e $\lambda = 1$

$$\tilde{m}(E) \geq \|m(B)\|$$

Tomando sup a direita obtemos $\tilde{m}(E) \geq \|m\|(E)$ e temos a primeira desigualdade.

Proveamos a segunda desigualdade.

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}(E) &= \sup \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i m(B_i) \right\| = \\
 &= \sup_{\|z'\| \leq 1} \sup \left| z' \sum_{i=1}^m \lambda_i m(B_i) \right| = \\
 &= \sup_{\|z'\| \leq 1} \sup \left| \sum_{i=1}^m \lambda_i z' m(B_i) \right| \leq \\
 &\leq \sup_{\|z'\| \leq 1} \sup \sum_{i=1}^m |z' m(B_i)| = \\
 &= \sup_{\|z'\| \leq 1} |z' m|(E) \leq 4 \sup_{\|z'\| \leq 1} \|z' m\|(E) = \\
 &\leq 4 \sup_{\|z'\| \leq 1} \|m\|(E) = 4 \|m\|(E). \quad (\text{c.q.d.}).
 \end{aligned}$$

4.6.3 Definição

Dizemos que m é de semi-variacao limitada se $\tilde{m}(X) < \infty$

4.6.4 Definição

Dizemos que $\tilde{m}$ é controlável se $\tilde{m}$ é λ -contínua onde λ é uma medida de controle de m .

4.6.5 Propriedades

(1) Se $\tilde{m}$ é controlável então $\tilde{m}$ é λ -contínua para toda medida de controle λ de m .

(2) $\tilde{m}$ é controlável se e só se $\|m\|(E) \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{m}(E) \rightarrow 0$

Prova

(1) Como $\tilde{m}$ é controlável existe medida de controle λ de m tal que $\tilde{m}$ é λ -contínua.

Seja λ_1 outra medida de controle de m .
Pela proposição 4.4.4,

$$\lambda_1(E) \rightarrow 0 \Rightarrow \|m\|(E) \rightarrow 0$$

Como $\lambda(E) \leq \|m\|(E)$ temos:

$$\|m\|(E) \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda(E) \rightarrow 0$$

Por hipótese

$$\lambda(E) \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{m}(E) \rightarrow 0$$

Logo $\tilde{m}$ é λ_1 -contínua.

(2) A propriedade decorre imediatamente de

$$\lambda(E) \rightarrow 0 \iff \|m\|(E) \rightarrow 0$$

onde λ é medida de controle de m ,
que é consequência de $\lambda(E) \leq \|m\|(E)$ e
da proposição 4.4.4. (c.q.d.)

4.6.6 Proposição

Nos seguintes casos $\tilde{m}$ é controlável.

(1) Se m é de variação limitada

(2) Se $Z = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

(3) Se $Y = \mathbb{K}$ e $\mathbb{B}(\lambda, z) = \lambda z$

Prova

(1) Neste caso $|m|$ é medida positiva finita
e como $\lambda(E) = 0 \Rightarrow |m|(E) = 0$ então
 $|m|$ é λ -contínua, onde λ é medida de controle.
Como $\tilde{m}(E) \leq \|B\| |m|(E)$ resulta
que $\tilde{m}$ é λ -contínua.

(2) Como neste caso m é medida escalar,
é de variação limitada.

(3) Veremos

(3) Resulta de $\tilde{m}(E) \leq 4 \|m\|(E)$ (Vide propriedade 4.6.2 (5)).

4.6.7 Proposição

Se $\tilde{m}$ é controlável então $\tilde{m}(X) < \infty$.

Prova

Seja λ medida de controle de m

i) Verifiquemos inicialmente que se $A \in \beta$ é um λ -átomo então $\tilde{m}(A) \leq \|m(A)\|$.

Dado $\varepsilon > 0$ existem $y_i \in Y$, $i=1, 2, \dots, n$, com $\|y_i\| \leq 1$ e $B_i \in \beta$, $i=1, 2, \dots, n$, disjuntos com $\bigcup_{i=1}^n B_i = A$ tais que

$$\tilde{m}(A) < \left\| \sum_{i=1}^n y_i m(B_i) \right\| + \varepsilon$$

Como A é λ -átomo existe i_0 tal que $\lambda(B_i) = 0$, $\forall i \neq i_0$.

Como m é λ -continua, $m(B_i) = 0$, $\forall i \neq i_0$.

Como

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(B_i)$$

resulta $m(A) = m(B_{i_0})$

Então $\tilde{m}(A) < \|y_{i_0} m(A)\| + \varepsilon \leq \|m(A)\| + \varepsilon$

Pela arbitrariedade de ε temos

$$\tilde{m}(A) \leq \|m(A)\|$$

ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \tilde{m}(E) < \varepsilon.$$

Pelo Lema de Saks (), existem $E_i \in \beta$, $i=1, 2, \dots, p$, disjuntos tais que $X = \bigcup_{i=1}^p E_i$, e cada E_i ou é um λ -átomo ou satisfaz $\lambda(E_i) < \delta$.

$$\tilde{m}(X) = \tilde{m}\left(\bigcup_{i=1}^p E_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \tilde{m}(E_i)$$

Como para cada E_i temos

$$\tilde{m}(E_i) \leq \|m(E_i)\| \leq \|m\| \quad \text{se } E_i \text{ é } \lambda\text{-átomo}$$

$$\text{ou } \tilde{m}(E_i) < \varepsilon \quad \text{se } \lambda(E_i) < \delta,$$

resulta que $\tilde{m}(X) < \infty$ (c.q.d.)

4.6.8 Definição

Dizemos que $E \in \beta$ é m-nulo se $\|m\|(E) = 0$.

4.6.9 Observações

Seja λ medida de controle de m .

(1) São equivalentes: $E \in \beta$ é m-nulo, $\lambda(E) = 0$, $|m|(E) = 0$.

(2) As locuções "m-q.s.", "fortemente m-mens.", "m-mens." e "fraca mente m-mens." deverão ser interpretadas como significando aquelas que se obtém substituindo m por λ ou $|m|$.

4.6.10 Definição

Seja $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i X_{E_i}$ uma função simples definida em X com valores em Y .

Definimos integral de φ sobre $E \in \beta$, relativamente à medida vetorial $m: \beta \rightarrow Z$ e à aplicação bilinear contínua B por

$$\int_E \varphi dm = \sum_{i=1}^n y_i m(E_i \cap E)$$

4.6.11 Proposição

A definição de integral de função simples φ dada em 4.6.10, independe da particular representação de φ .

Prova

i) Sejam $B_i \in \beta$, $i=1,2,\dots,m$, não vazios, mas não necessariamente disjuntos.

Mostremos que:

$$\sum_{i=1}^n y_i \chi_{B_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i m(B_i \cap E) = 0$$

Existem $C_j \in \beta$, $j=1,2,\dots,p$, disjuntos, não vazios tais que:

$$\bigcup_{j=1}^p C_j = \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{e} \quad C_j \cap B_i \neq \emptyset \Rightarrow C_j \subset B_i.$$

Seja $J_i = \{j \in \{1,2,\dots,p\} : C_j \subset B_i\}$.

Então $B_i = \bigcup_{j \in J_i} C_j$ donde

$$\chi_{B_i} = \sum_{j \in J_i} \chi_{C_j} = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} \chi_{C_j}$$

onde $\alpha_{ij} = 1$ se $j \in J_i$ e $\alpha_{ij} = 0$ se $j \notin J_i$.

Resulta

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i X_{B_i} &= \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^P \alpha_{ij} X_{C_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^P \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} y_i \right) X_{C_j}.\end{aligned}$$

$$\text{Logo } \sum_{i=1}^n y_i X_{B_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} y_i = 0$$

para cada j .

Então:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i m(E_i \cap E) &= \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^P \alpha_{ij} m(C_j \cap E) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^P \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} y_i \right) m(C_j \cap E) = 0.\end{aligned}$$

ii) Sejam. agora $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i X_{E_i}$ e

$\varphi = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{y}_j X_{\hat{E}_j}$ duas representações de φ .

Aplicando o que acabamos de demonstrar a

$$\sum_{i=1}^n y_i X_{E_i} - \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{y}_j X_{\hat{E}_j} = 0$$

obtemos:

$$\sum_{i=1}^n y_i m(E_i \cap E) - \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{y}_j m(\hat{E}_j \cap E) = 0 \quad (\text{c.q.d.}).$$

4.6.12 Propriedades

Seja S o espaço vetorial das funções simples $\varphi: X \rightarrow Y$ e λ medida de controle de m .

(1) A aplicação de S em W que leva $\varphi \in S$ em $\int_E \varphi dm \in W$, onde $E \in \beta$ e' fixo, e' linear.

(2) Seja $\varphi \in S$. Então $q: \beta \rightarrow W$ definida por

$$q(E) = \int_E \varphi dm$$

e' uma medida vetorial em (X, β) , que e' λ -continua.

(3) Seja $\varphi \in S$ e $E \in \beta$.

Se $\|\varphi(x)\| \leq M$, $\forall x \in E$, então:

$$\left\| \int_E \varphi dm \right\| \leq M \tilde{m}(E).$$

Prova(1) E' imediata.(2) Primeiramente verificamos que q é aditiva o que é trivial.Seja agora $A_k \downarrow \emptyset$, $A_k \in \beta$.

$$q(A_k) = \int_{A_k} \varphi dm = \sum_{i=1}^n y_i m(E_i \cap A_k)$$

Como $m(E_i \cap A_k) \rightarrow 0$ qdo $k \rightarrow \infty$. Temos pela continuidade de B que $q(A_k) \rightarrow 0$. Logo q é medida vetorial.

De $q(E) = \sum_{i=1}^n y_i m(E_i \cap E)$ vem

$$\lambda(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E_i \cap E) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(E_i \cap E) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(E) = 0.$$

Logo q é λ -continua.(3) Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário, e $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{E_i}$.

$$\left\| \int_E \varphi dm \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n y_i m(E_i \cap E) \right\| =$$

$$= (M+E) \left\| \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{M+E} \cdot m(E_i \cap E) \right\|$$

Como $\left\| \frac{y_i}{M+E} \right\| \leq 1$, $E_i \cap E$ são disjuntos e

$$\bigcup_{i=1}^n (E_i \cap E) \subset E \quad \text{vem}$$

$$\left\| \int_E \varphi dm \right\| \leq (M+E) \tilde{m}(E)$$

Pela arbitrariedade de ε temos a tese.
(c.q.d.).

4.6.13. Definição

Seja $f: X \rightarrow Y$ definida m-q.s.
Dizemos que f é $(m, \mathcal{B})$ -integrável se
existe sequência (φ_n) de funções simples
tais que:

$$(1) \quad \varphi_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{m-q.s.}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n dm \quad \text{existe} \quad \forall E \in \beta$$

$$(3) \quad \text{Dado } \varepsilon > 0 \text{ existem } X_\varepsilon \in \beta \text{ e } N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tais que:}$$

$$\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty \quad \text{e}$$

$$\left\| \int_E \varphi_n dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall E \subset X \setminus X_\varepsilon, \quad E \in \beta \\ \forall n \geq N(\varepsilon)$$

4.6.14 Definição

Se $f: X \rightarrow Y$ é $(m, \mathbb{B})$ -integrável e (φ_n) é uma sequência de funções simples satisfazendo as condições (1), (2) e (3) da definição 4.6.13, dizemos que (φ_n) é uma sequência admissível de funções simples para f .

4.6.15 Observações

(1) Se $\tilde{m}(X) < \infty$, a condição (3) na definição 4.6.13 é supérflua.

(2) Se $f: X \rightarrow Y$ é $(m, \mathbb{B})$ -integrável então f é fortemente m -mensurável.

4.6.16 Definição

Seja $f: X \rightarrow Y$ definida m -q.s., $(m, \mathbb{B})$ -integrável, (φ_n) uma sequência admissível de funções simples para f , e $E \in \beta$.

Definimos integral de f sobre E relativamente a medida m e à aplicação bilinear contínua $\mathbb{B}$ por:

$$\int_E f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n dm$$

4.6.17 Proposição

A definição de integral dada na definição 4.6.7 independe da particular sequência admissível de funções simples.

Prova

Suporemos sem perda de generalidade que $f: X \rightarrow Y$ é definida $\forall x \in X$.

Sejam (φ_n^1) e (φ_n^2) duas sequências admissíveis, de funções simples, para f .

Definamos $\Psi_n: X \rightarrow Y$ por:

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi_n^1(x) \not\rightarrow f(x) \text{ ou } \varphi_n^2(x) \not\rightarrow f(x) \\ \varphi_n^1(x) - \varphi_n^2(x) & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Então $\Psi_n(x) \rightarrow 0$, $\forall x \in X$, e

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \Psi_n dm$ existe, $\forall E \in \beta$.

Provemos que $\int_E \Psi_n dm \rightarrow 0$, $\forall E \in \beta$.

Seja λ uma medida de controle de m e $q_m: \beta \rightarrow W$ a medida vetorial definida por:

$$q_m(E) = \int_E \Psi_n dm$$

Como q_n é λ -contínua para $\forall n$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(E)$$

existe para $\forall E \in \beta$, temos pelo Teorema de Vitali-Hahn-Saks que as q_n são λ -contínuas uniformemente $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E \Psi_n d\mu \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como (φ_n^1) e (φ_n^2) são sequências admissíveis temos que dado $\varepsilon > 0$ existem $X_\varepsilon \in \beta$ e $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty \quad \text{e}$$

$$\left\| \int_E \Psi_n d\mu \right\| < \varepsilon, \quad \forall E \subset X \sim X_\varepsilon, \quad E \in \beta \\ \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Pelo Teorema de Egoroff existe $A \in \beta$ tal que $\lambda(A) < \delta$ e

$$\Psi_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } X \sim A.$$

Então existe $N_1(\varepsilon)$ tal que

$$\|\Psi_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{\tilde{m}(X_\varepsilon) + 1}, \quad \forall n \geq N_1(\varepsilon) \quad \text{em } X \sim A.$$

Pela decomposição

$$E = E \cap A + (E \sim A) \cap X_E + (E \sim A) \cap X_E$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left\| \int_E \Psi_n dm \right\| &\leq \left\| \int_{E \cap A} \Psi_n dm \right\| + \left\| \int_{E \sim A \cap X_E} \Psi_n dm \right\| + \left\| \int_{(E \sim A) \cap X_E} \Psi_n dm \right\| \leq \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\tilde{m}(X_E) + 1} \cdot \tilde{m}((E \sim A) \cap X_E) \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Portanto $\int_E \Psi_n dm \rightarrow 0$ qdo $n \rightarrow \infty$ (c.q.d.)

4.6.18 Observação

Seja $f: X \rightarrow Y$ $(m, \mathcal{B})$ -integrável e (φ_n) sequência admissível para f de funções simples. Então as φ_n são $(m, \mathcal{B})$ -integráveis.

4.6.19 Propriedades

- (1) As funções $(m, \mathcal{B})$ -integráveis formam um espaço vetorial $L^1(X, \beta, m, \mathcal{B})$ e dado $E \in \beta$ a aplicação

$$f \rightarrow \int_E f dm$$

de L^1 em W é linear.

- (2) Seja $f \in \mathcal{LB}(X, \beta, m, \mathbb{B})$, λ medida de controle de m e $q: \beta \rightarrow W$ definida por

$$q(E) = \int_E f dm.$$

Então $q: \beta \rightarrow W$ é medida vetorial λ -contínua.

- (3) Seja $f \in \mathcal{LB}(X, \beta, m, \mathbb{B})$.
Então dado $\varepsilon > 0$ existe $X_\varepsilon \in \beta$ tal que

$$\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \left\| \int_E f dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall E \subset X \setminus X_\varepsilon, \quad E \in \beta.$$

- (4) Seja $f \in \mathcal{LB}(X, \beta, m, \mathbb{B})$, $E \in \beta$ e $\|f(x)\| \leq M$, m -q.s. em E . Então:

$$\left\| \int_E f dm \right\| \leq M \tilde{m}(E)$$

- (5) Seja $f \in \mathcal{LB}(X, \beta, m, \mathbb{B})$, $E \in \beta$ e $f(x) = 0$, m -q.s. em E . Então

$$\int_E f dm = 0$$

(6) Seja $f \in \mathcal{LB}(X, \beta, m, W)$ e $q: \beta \rightarrow W$ definida por $q(E) = \int_E f dm$.

Então $\{x : f(x) \neq 0\}$ é união de um conjunto com $\tilde{m}$ σ -finita e de um conjunto q -nulo.

Prova

(1) E' imediata.

(2) Seja (φ_n) sequência admissível para f de funções simples e sejam $q_n: \beta \rightarrow W$ definidas por $q_n(E) = \int_E \varphi_n dm$, $\forall E \in \beta$.

Como as q_n são λ -contínuas e $q_n(E) \rightarrow q(E)$, para $\forall E \in \beta$ temos pelo Teorema de Vitali-Hahn-Saks que $q: \beta \rightarrow W$ é medida vetorial.

Como $\lambda(E) = 0 \Rightarrow q_n(E) = 0, \forall n \Rightarrow q(E) = 0$, temos que q é λ -contínua.

(3) Seja (φ_n) sequência admissível para f de funções simples. Dado $\varepsilon > 0$ existem $X_\varepsilon \in \beta$ e $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tais que $\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty$ e $\|\int_E \varphi_n dm\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall E \subset X \setminus X_\varepsilon$, $E \in \beta$.

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos $\|\int_E f dm\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(4) Seja λ medida de controle de m e (φ_n) sequência admissível para f de funções simples. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f dm \right\| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema de Egoroff, existe $A \in \beta$ com $\lambda(A) < \delta$ tal que em $X \setminus A$ a convergência $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ é uniforme.

Então existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|\varphi_n(x)\| \leq \|f(x)\| + \varepsilon \leq M + \varepsilon, \quad \forall x \in E \setminus A \\ \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Portanto

$$\left\| \int_{E \setminus A} \varphi_n dm \right\| \leq (M + \varepsilon) \tilde{m}(E), \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\left\| \int_{E \setminus A} f dm \right\| \leq (M + \varepsilon) \tilde{m}(E)$$

Então

$$\left\| \int_E f dm \right\| \leq \left\| \int_{E \setminus A} f dm \right\| + \left\| \int_A f dm \right\| \leq \\ \leq \varepsilon + (M + \varepsilon) \tilde{m}(E).$$

Pela arbitrariedade de ε , $\left\| \int_E f dm \right\| \leq M \tilde{m}(E).$

(5) Dado $\varepsilon > 0$ existe $X_\varepsilon \in \beta$ com $\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty$ tal que

$$\left\| \int_A f dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall A \subset X \sim X_\varepsilon, \quad A \in \beta.$$

Então

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f dm \right\| &\leq \left\| \int_{E \cap X_\varepsilon} f dm \right\| + \left\| \int_{E \sim X_\varepsilon} f dm \right\| = \\ &\leq 0 \cdot \tilde{m}(X_\varepsilon) + \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε , $\left\| \int_E f dm \right\| = 0$.

(6) Seja $A = \{x : f(x) \neq 0\}$.

Seja $X_k \in \beta$, com $\tilde{m}(X_k) < \infty$ e tal que

$$\left\| \int_E f dm \right\| < \frac{1}{k}, \quad \forall E \subset X \sim X_k, \quad E \in \beta.$$

$$\text{Então } A = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \right) + (A \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k)$$

Seja $E \subset A \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$. Como $A \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \subset X \sim X_n$, $\forall n$,

$$\text{temos } \|q(E)\| = \left\| \int_E f dm \right\| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo $q(E) = 0$

Então $A \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ é q -nulo e em

$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \right)$ $\tilde{m}$ é σ -finita.

(c.q.d.)

4.6.20 Lema

Seja λ medida de controle de m e
sejam $f_n: X \rightarrow Y$ $(m, \mathbb{B})$ -integráveis

Se valem as condições:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe } m\text{-q.s.}$$

$$(3) \text{ dado } \varepsilon > 0 \text{ existem } X_\varepsilon \in \beta \text{ e } N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tais que para } \forall E \subset X \sim X_\varepsilon, E \in \beta$$

$$\left\| \int_E f_n dm \right\| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon)$$

então são equivalentes

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm \text{ existe, } \forall E \in \beta$$

$$(2a) \text{ dado } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f_n dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm \text{ existe, uniformemente, } \forall E \in \beta$$

Prova

$$(2) \Rightarrow (2a)$$

Sejam $q_n: \beta \rightarrow W$ as medidas definidas
por $q_n(E) = \int_E f_n dm, \quad \forall E \in \beta$.

Como as q_n são λ -contínuas e $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(E)$

existem para $\forall E \in \beta$ a conclusão segue do Teorema de Vitali-Hahn-Saks.

(2a) $\Rightarrow$ (2b)

Devemos provar que

$$\left\| \int_E f_n dm - \int_E f_{n'} dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall n, n' \geq N(\varepsilon), \quad \forall E \in \beta.$$

Por hipótese dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f_n dm \right\| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $X_\varepsilon \in \beta$ com $\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty$ e $N_1(\varepsilon)$ tais que

$$\left\| \int_E f_n dm \right\| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall E \subset X \sim X_\varepsilon, \quad E \in \beta \quad \text{e} \quad \forall n \geq N_1(\varepsilon).$$

Pelo Teorema de Egoroff existe $A \in \beta$ com $\lambda(A) < \delta$ e tal que $\lim f_n(x)$ é uniforme em $X \sim A$.

Então

$$\|f_n(x) - f_{n'}(x)\| < \frac{\varepsilon}{5(\tilde{m}(X_\varepsilon) + 1)} \quad \text{para} \quad n, n' \geq N_2(\varepsilon)$$

e $\forall x \in X \sim A$.

Considerando a decomposição

$$E = E \cap A + E \cap (A \cup X_E) + (E \cap A) \cap X_E$$

e tomando $m, m' \geq N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$
podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_m dm - \int_E f_{m'} dm \right\| &\leq \left\| \int_{E \cap A} f_m dm \right\| + \left\| \int_{E \cap A} f_{m'} dm \right\| + \\ &+ \left\| \int_{E \cap A \cup X_E} f_m dm \right\| + \left\| \int_{E \cap A \cup X_E} f_{m'} dm \right\| + \left\| \int_{(E \cap A) \cap X_E} (f_m - f_{m'}) dm \right\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} \frac{\tilde{m}((E \cap A) \cap X_E)}{\tilde{m}(X_E) + 1} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(2b) $\Rightarrow$ (2)

$\mathcal{E}'$ trivial

(c.q.d.)

4.6.21 Definição

Seja $f: X \rightarrow Y$ definida m-q.s. e
 $f_m: X \rightarrow Y$, $m \in \mathbb{N}$, funções $(m, \mathcal{B})$ -integráveis.
Dizemos que (f_m) é uma sequência admissível para f se:

$$(1) \quad f_m(x) \rightarrow f(x), \quad m\text{-q.s.}$$

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E f_m dm \quad \text{existe} \quad \forall E \in \beta$$

(3) dado $\varepsilon > 0$ existem $X_\varepsilon \in \beta$ e $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tais que

$$\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \left\| \int_E f_n dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall E \subset X \sim X_\varepsilon, E \in \beta \\ \forall n \geq N(\varepsilon).$$

4.6.22 Observação

Devido ao lema 4.6.20, podemos na definição de sequência admissível substituir a condição (2), por (2a) ou (2b).

4.6.23 TEOREMA 20 (da convergência de Vitali)

Seja $f: X \rightarrow Y$ definida m -q.s. e (f_n) sequência admissível para f , de funções $(m, \mathbb{B})$ -integráveis. Então f é $(m, \mathbb{B})$ -integrável e

$$\int_E f_n dm \rightarrow \int_E f dm, \quad \text{uniformemente, } \forall E \in \beta.$$

Prova

i) Seja λ medida de controle de m e $(\psi_{m,k})_{k \in \mathbb{N}}$ sequência admissível para f_m de funções simples.

Vamos mostrar que existe uma sequência (φ_k) admissível para f de funções simples provando assim que f é $(m, \mathbb{B})$ -integrável.

ii) Vamos inicialmente provar por indução o seguinte:

"Existe uma sequência não decrescente (K_ℓ) onde $K_\ell: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma sequência não crescente (X_ℓ) , $X_\ell \in \beta$, tais que:

$$\lambda(X_\ell) < \frac{1}{\ell} \quad \text{e} \quad \text{para } \forall k \geq K_\ell(m) \text{ temos}$$

$$\|\Psi_{m,k}(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{m}, \quad \forall x \in X \sim X_\ell$$

$$\text{e} \quad \left\| \int_E \Psi_{m,k} dm - \int_E f_m dm \right\| < \frac{1}{n}, \quad \forall E \in \beta "$$

Provemos para $\ell=1$.

Pelo teorema de Egoroff existem $E_m^1 \in \beta$ tais que

$$\lambda(E_m^1) < \frac{1}{2^m} \quad \text{e} \quad \|\Psi_{m,k}(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{m}$$

$$\text{para } \forall k \geq K_1'(m) \quad \text{e} \quad \forall x \in X \sim E_m^1$$

$$\text{Seja } X_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^1 \quad \text{Então } \lambda(X_1) < 1$$

$$\text{Como } \left\| \int_E \Psi_{m,k} dm - \int_E f_m dm \right\| \rightarrow 0 \quad \text{qdo } k \rightarrow \infty$$

uniformemente $\forall E \in \beta$ (Lema 4.6.20), podemos

escrever

$$\left\| \int_E \Psi_{m,k} dm - \int_E f_m dm \right\| < \frac{1}{n}, \quad \forall k \geq K_0(n), \forall E \in \beta.$$

Então para $k \geq K_1(n) = \max(K'_1(n), K_0(n))$ temos

$$\|\Psi_{m,k}(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in X \sim X_1$$

$$\text{e } \left\| \int_E \Psi_{m,k} dm - \int_E f_m dm \right\| < \frac{1}{n}, \quad \forall E \in \beta.$$

$$\text{e } \lambda(X_1) < 1.$$

Suponhamos agora que temos

$$\begin{aligned} K_1 &\leq K_2 \leq \dots \leq K_{l-1} \\ X_1 &\supset X_2 \supset \dots \supset X_{l-1} \end{aligned}$$

tais que

$$\lambda(X_j) < \frac{1}{j} \quad \text{e para } \forall j \geq K_j(n) \text{ temos}$$

$$\|\Psi_{m,k}(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in X \sim X_j$$

$$\text{e } \left\| \int_E \Psi_{m,k} dm - \int_E f_m dm \right\| < \frac{1}{n}, \quad \forall E \in \beta$$

Pelo Teorema de Egoroff existem $E_n^l \in \beta$,

$E_m^l \subset X_{l-1}$, com $\lambda(E_m^l) < \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2^n}$ e tais que

$$\|\Psi_{m,k}(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{n}, \quad \forall k \geq K'_l(n), \quad \forall x \in X_{l-1} \setminus E_m^l$$

Seja $X_l = \bigcup_{l=1}^n E_m^l$ e $K(n) = \max(K'_l(n), K_{l-1}(n))$

Como $K_l(n) \geq K_{l-1}(n) \geq K_0(n)$ e $X_l \subset X_{l-1}$ temos:

$$\lambda(X_l) < \frac{1}{l} \quad \text{e para } \forall k \geq K_l(n)$$

$$\|\Psi_{m,k}(x) - f_m(x)\| < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in X \setminus X_l$$

$$\text{e } \left\| \int_E \Psi_{m,k} dm - \int_E f_m dm \right\| < \frac{1}{n}, \quad \forall E \in \beta.$$

e a prova por indução está terminada.

iii) Seja agora $\Phi_l = \Psi_{l, K_l(l)}$

Provemos que (Φ_l) é sequência admissível para f , de funções simples.

Seja $x \in X \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$ e $\varepsilon > 0$

Como $X_l \downarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$, existe l_0 tal que $\frac{1}{l_0} < \varepsilon$

e $x \in X \setminus X_l$, $\forall l \geq l_0$.

Então $\| \varphi_l(x) - f_l(x) \| < \frac{1}{l} \leq \frac{1}{l_0} < \varepsilon$, $\forall l \geq l_0$

Como $\lambda(\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j) = 0$ teremos

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_l(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_l(x) = f(x), \text{ m-q.s.}$$

De $\| \int_E \varphi_l dm - \int_E f_l dm \| < \frac{1}{l}$, $\forall E \in \beta$, vem que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_E \varphi_l dm = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f_l dm$$

existe para $\forall E \in \beta$.

Como (f_n) é sequência admissível para f ,
dado $\varepsilon > 0$ existe $X_\varepsilon \in \beta$ com $\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty$
e $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tais que

$$\| \int_E f_l dm \| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall E \subset X \sim X_\varepsilon, E \in \beta \text{ e } \forall l \geq N(\varepsilon).$$

$$\text{Como } \| \int_E \varphi_l dm \| < \| \int_E f_l dm \| + \frac{1}{l}$$

teremos

$$\| \int_E \varphi_l dm \| < \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} < \varepsilon, \quad \forall E \in \beta,$$

para $l > N_1(\varepsilon) = \max(N(\varepsilon), \frac{2}{\varepsilon})$.

Portanto (φ_l) é sequência admissível para f .

iv) Como (φ_l) é sequência admissível para f de funções simples, f é $(m, \mathcal{B})$ -integrável.

$$\text{e } \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E \varphi_l dm = \lim_{l \rightarrow \infty} \int \varphi_l dm = \int_E f dm$$

para $\forall E \in \beta$.

A. uniformidade do limite em relação a $E \in \beta$ vem do Lema 4.6.20.

(c.q.d.).

4.6.24 TEOREMA 21 (da convergência dominada)

Seja $f: X \rightarrow Y$ definida m -q.s. e $f_n: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, funções $(m, \mathcal{B})$ -integráveis tais que:

$$(1) f_n(x) \rightarrow f(x) \quad , \quad m\text{-q.s.}$$

(2) Existe $g: X \rightarrow Y$, $(m, \mathcal{B})$ -integrável tal que

$$\left\| \int_E f_n dm \right\| \leq \left\| \int_E g dm \right\| \quad \forall E \in \beta, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então f é $(m, \mathcal{B})$ -integrável e

$$\int_E f_n dm \rightarrow \int_E f dm \quad , \quad \forall E \in \beta.$$

Prova

Seja λ medida de controle de m .
 Provemos que (f_n) é sequência admissível para f .

A condição (1) da definição 4.6.21 está satisfeita por hipótese.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E g dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall E \in \beta.$$

$$\text{Como } \left\| \int_E f_n dm \right\| \leq \left\| \int_E g dm \right\|, \quad \forall E \in \beta,$$

a condição (2) da definição 4.6.21 está satisfeita.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $X_\varepsilon \in \beta$ tal que $\tilde{m}(X_\varepsilon) < \infty$ e $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tais que

$$\left\| \int_E g dm \right\| < \varepsilon; \quad \forall E \subset X \setminus X_\varepsilon, E \in \beta, \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Então também a condição (3) da definição 4.6.21 está satisfeita.

Pelo Teorema 20 da convergência de Vitali, temos a tese.

(c.q.d.)

4.6.25 TEOREMA 22 (da convergência limitada)

Seja $f: X \rightarrow Y$ definida m-q.s. e
 $f_n: X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, funções $(m, \mathcal{B})$ -integráveis.
 Se:

$$(1) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{m-q.s.}$$

$$(2) \quad \|f_n(x)\| \leq M, \quad \text{m-q.s.}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(3) \quad \tilde{m} \text{ é controlável.}$$

Então f é $(m, \mathcal{B})$ -integrável e

$$\int_E f_n d m \rightarrow \int_E f d m.$$

Prova

Verifique mos as tres condições de admissibilidade para a sequência (f_n) .

A primeira está verificada por hipótese.

Como $\tilde{m}$ é controlável, $\tilde{m}(X) < \infty$ e portanto a terceira está automaticamente verificada.

Seja λ medida de controle de m .

Como $\tilde{m}$ é controlável dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \tilde{m}(E) < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Pela propriedade 4.6.19 (4) temos:

$$\left\| \int_E f_n dm \right\| \leq M \tilde{m}(E), \quad \forall n.$$

$$\text{Logo } \lambda(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f_n dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall n.$$

Pelo lema 4.6.20 a segunda condição está satisfeita.

(c.q.d.)

4.6.26 Proposição

Seja $f: X \rightarrow Y$ definida m -q.s.

Se:

(1) f é fortemente m -mensurável.

(2) $\|f(x)\| \leq M$, m -q.s.

(3) $\tilde{m}$ é controlável.

Então f é $(m, \mathbb{B})$ -integrável.

Prova

Seja λ medida de controle de m e (ψ_n) sequência de funções simples tal que

$$\psi_n(x) \rightarrow f(x) \quad m\text{-q.s.}$$

Sejam φ_n funções simples definidas por:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{se } \|\psi_n(x)\| < M \\ \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n(x)\|} \cdot M & \text{se } \|\psi_n(x)\| \geq M \end{cases}$$

Então $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ m-q.s.,

e $\|\varphi_n(x)\| \leq M$, $\forall x \in X$.

Como $\left\| \int_E \varphi_n d\mu \right\| \leq M \tilde{\mu}(E)$

e $\tilde{\mu}$ é λ -contínua, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\lambda(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E \varphi_n d\mu \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então a segunda condição para que (φ_n) seja admissível para f está satisfeita.

Como $\tilde{\mu}(X) < \infty$, isto basta.

Logo f é $(m, \mathbb{B})$ -integrável.

C.q.d.)

§.4.7 - Exercícios

Cada exercício está identificado de acordo com a fonte. Aqueles imaginados pelo autor deste texto estão identificados com a sigla [IQB].

Neste parágrafo Y, Z, W indicam espaços de Banach, X um conjunto, β uma σ -álgebra em X e $\mathbb{K}$ o corpo dos escalares.

4.7.1 Exercício [IQB]

Sejam $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) , $\dim Z < \infty$, $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ uma base de Z e

$$m(E) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(E) z_j, \quad \forall E \in \beta.$$

Mostre que $\lambda_j: \beta \rightarrow \mathbb{K}$ são medidas escalares.

4.7.2 Exercício [IQB]

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) , $\mathbb{B}: Y \times Z \rightarrow W$ bi-linear contínua e $y \in Y$.

Então $m_y: \beta \rightarrow W$ definida por

$$m_y(E) = \mathbb{B}(y, m(E))$$

é medida vetorial em (X, β) .

4.7.3 Exercício [MR]

Seja $X = \mathbb{N}$, $\beta = 2^{\mathbb{N}}$ e $m: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$.

Em quais dos casos a seguir m é uma medida vetorial?

a) $Z = \ell_{\infty}$ espaço das seqüências reais limitadas e $m(E) \in \ell_{\infty}$ definida por:

$$(m(E))_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } k \in E \\ 0 & \text{se } k \notin E \end{cases}$$

b) $Z = \ell_{\infty}$, $m(E) = \chi_E$

c) Z é o espaço das seqüências reais $z \in Z$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |z_k| < \infty$$

com a norma definida por $\|z\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |z_k|$, e $m(E) = \chi_E$.

d) $Z = \ell_1$ espaço das seqüências reais absolutamente somáveis com a norma definida por:

$$\|z\| = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

e

$$(m(E))_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{se } k \in E \\ 0 & \text{se } k \notin E \end{cases}$$

4.7.4 Exercício [MR]

Calcule $|m|$ e $\|m\|$ nos casos do exercício 4.7.3 nos quais m é medida vetorial.

4.7.5 Exercício [IQB]

Justifique as observações 4.2.6 e 4.6.1.

4.7.6 Exercício [IQB]

Seja $m: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$ medida vetorial em (X, β) e $\dim \mathbb{Z} < \infty$. Então m é de variação limitada.

4.7.7 Exercício [IQB]

Se $m: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma medida vetorial em (X, β) dizemos que $A \in \beta$ é um m -átomo se $m(A) \neq 0$ e

$$(B \subset A, B \in \beta) \Rightarrow (m(B) = 0 \text{ ou } m(B) = m(A))$$

Seja λ medida de controle de m . Prove que $A \in \beta$ é um m -átomo se e só se é um λ -átomo.

4.7.8 Exercício [IQB]

Demonstre a seguinte generalização do Lema de Saks para medidas vetoriais $m: \beta \rightarrow \mathbb{Z}$.

" Dado $\varepsilon > 0$ e $A \in \beta$ existe uma decomposição:

$$A = \bigcup_{i=1}^p E_i$$

onde $p \in \mathbb{N}$, $E_i \in \beta$ são disjuntos e cada E_i ou é um m -átomo ou $\|m(E_i)\| < \varepsilon$ "

Suponha provado o Lema de Saks. para medidas positivas finitas (Vide Cap. I., §1).

4.7.9 Exercício [MR]

Seja $X = \mathbb{R}$, $\beta = 2^X$, $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida positiva definida por $\mu(E) = \#E$, Y o espaço das funções reais limitadas definidas sobre $\mathbb{R}$ com a norma $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow Y$ definida por $f(x) = \chi_{[x, \infty)}$.
Mostre que

- i) Y não é separável.
- ii) f é μ -mensurável.
- iii) f não é fortemente μ -mensurável.

4.7.10 Exercício [MR]

Mostre que a condição $\mu(X) < \infty$ no Teorema de Egoroff não pode ser eliminada.

Sugestão: Tome $X = \mathbb{N}$, $\beta = 2^{\mathbb{N}}$, $\mu(E) = \#E$, $Y = \mathbb{R}$ e exiba sequência $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $f_n(k) \rightarrow f(k)$, μ -q.s. e para a qual a tese do Teorema de Egoroff é falsa.

4.7.11 Exercício [1QB]

Sejam $m_1: \beta \rightarrow Z$ e $m_2: \beta \rightarrow Z$ medidas vetoriais em (X, β) e $\lambda \in \mathbb{K}$.
 Mostre que $\widetilde{m_1 + m_2} \leq \widetilde{m_1} + \widetilde{m_2}$ e $\widetilde{\lambda m_1} = |\lambda| \widetilde{m_1}$.

4.7.12 Exercício [ND]

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) e $\mathbb{B}: Y \times Z \rightarrow W$ bi-linear contínua. Então:

$$\widetilde{m}(E) = \sup_{\|\varphi\|_{\infty} \leq 1} \left\| \int_E \varphi dm \right\|, \quad E \in \beta,$$

onde $\varphi: X \rightarrow Y$ é função simples e $\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|\varphi(x)\|$.

4.7.13 Exercício [DS]

Seja $Y = \mathbb{K}$, $W = Z$, $\mathbb{B}(\lambda, z) = \lambda z$ e $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .

Seja $U: Z \rightarrow Z_1$ linear contínua, onde Z_1 é espaço de Banach e seja $\mathbb{B}_1: \mathbb{K} \times Z_1 \rightarrow Z_1$ definida por $\mathbb{B}_1(\lambda, z_1) = \lambda z_1$.

Então $Um: \beta \rightarrow Z_1$ é medida vetorial e se $f: X \rightarrow Y$ é $(m, \mathbb{B})$ -integrável temos que

f é $(U_m, \mathcal{B}_1)$ -integrável e

$$\bigcup_E \int f d\mu = \int_E f d(U_m) \quad , \quad \forall E \in \beta.$$

4.7.14 Exercício [DS]

Seja $Z = \mathbb{K}$, $W = Y$, $\mathcal{B}(y, \lambda) = \lambda y$
e $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{K}$ medida escalar em (X, β) .
Seja $T: Y \rightarrow Y_1$ linear contínua onde Y_1
é espaço de Banach e seja $\mathcal{B}_1: Y \times \mathbb{K} \rightarrow Y_1$
definida por $\mathcal{B}_1(y, \lambda) = \lambda y_1$.
Então se $f: X \rightarrow Y$ é $(\mu, \mathcal{B})$ -integrável
temos que $Tf: X \rightarrow Y_1$ é $(\mu, \mathcal{B}_1)$ -integrável e

$$T \int_E f d\mu = \int_E Tf d\mu \quad , \quad \forall E \in \beta.$$

4.7.15 Exercício [RGB]

Seja $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}^3$, $Z = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$
e $\mathcal{B}: Y \times Z \rightarrow W$ definida por $\mathcal{B}(y, z) = \sum_{i=1}^3 y_i z_i$.

Seja β a σ -álgebra de Borel em $[0, 1]$,
 $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$,
 $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medida de Lebesgue e $m: \beta \rightarrow \mathbb{R}^3$
definida por:

$$m(E) = \mu(E) e_1 \quad , \quad E \in \beta.$$

Seja $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x} e_2.$$

Mostre que f é $(m, \mathcal{B})$ -integrável, que

$$\int_E f dm = 0, \quad \forall E \in \mathcal{B}$$

e que a função $\|f(\cdot)\|: x \rightarrow \|f(x)\|$ não é $(m, \mathcal{B}_1)$ -integrável onde $\mathcal{B}_1(\lambda, z) = \lambda z$.

4.7.16 Exercício [RGB]

Mostre com relação ao Teorema 4.6.23 (de convergência de Vitali) que as hipóteses (2) e (3) mais a tese não implicam a hipótese (1).

Sugestão: Tome $X, Y, Z, W, \mathcal{B}$ e m como no exercício 4.7.15 e considere $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$f_n(x) = e_2, \quad \forall n \quad \text{e} \quad f(x) = e_3.$$

4.7.17 Exercício [RGB]

Mostre que no Teorema 4.6.24 (da convergência dominada) a condição (2) não pode em geral ser substituída pela condição:

(2') : " Existe $g: X \rightarrow Y$ $(m|B)$ -integrável tal que $\|f_n(x)\| \leq \|g(x)\|$ m -q.s., $\forall n$."

Sugestão: Tome X, Y, Z, W, B, m como no exercício 4.7.15 e considere

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} e_1, \quad g(x) = \frac{1}{x} e_2$$

4.7.18 Exercício [IQB]

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) e $B: Y \times Z \rightarrow W$ bi-linear contínua. Mostre que se $\dim Y < \infty$ ou $\dim Z < \infty$ então m é de semi-variación controlável.

4.7.19 Exercício [IQB]

Sejam Y_1 e Y_2 espaços de Banach, $Y = Y_1 \oplus Y_2$, $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .

Sejam $B_1: Y_1 \times Z \rightarrow W$ e $B_2: Y_2 \times Z \rightarrow W$ restrições da aplicação bi-linear contínua $B: Y \times Z \rightarrow W$.

Sejam $\tilde{m}_1$ e $\tilde{m}_2$ as semi-varições de m relativamente a B_1 e B_2 .

Mostre que $\tilde{m}$ é controlável se e só se $\tilde{m}_1$ e $\tilde{m}_2$ são controláveis.

4.7.20 Exercício [DS]

Seja $Y = \mathbb{K}$, $W = Z$, $B: \mathbb{K} \times Z \rightarrow Z$ definida por $B(\lambda, z) = \lambda z$, e $m: \beta \rightarrow Z$

medida vetorial em (X, β) .

Sejam $f_n: X \rightarrow Y$ $(m, \mathbb{B})$ -integráveis.

Mostre que se:

$$(1) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad m\text{-q.s.}$$

$$(2) \quad \|m\|(E) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_E f_n dm \rightarrow 0$$

uniformemente para $\forall n \in \mathbb{N}$

então f é $(m, \mathbb{B})$ -integrável e

$$\int_E f_n dm \rightarrow \int_E f dm, \quad \forall E \in \beta.$$

4.7.21 Exercício [1QB]

Seja $Y = \mathbb{K}$ ou $Z = \mathbb{K}$ e $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .

Então vale o Teorema 4.6.24 (da convergência dominada) com a condição (2) substituída pela condição

(2'): "Existe $g: X \rightarrow Y$ $(m, \mathbb{B})$ -integrável tal que $\|f_n(x)\| \leq \|g(x)\|$ m -q.s., $\forall n$ "

4.7.22 Exercício [IQB]

Dê um exemplo de medida vetorial de semi-variación não limitada, e de medida vetorial com semi-variación limitada e variación não limitada.

4.7.23 Exercício [G. Birkhoff]⁽¹⁾

Seja $Z = \ell_2$ espaço das sequências de quadrado somável com a norma $\|z\| = (\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2)^{1/2}$.

Seja $X = \mathbb{R}_+$, $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida de Lebesgue em (X, β) e $m: \beta \rightarrow \ell_2$ definida por

$$(m(E))_k = \frac{1}{k} (E \cap [k-1, k])$$

Mostre que m é medida vetorial de variación não limitada.

4.7.24 Exercício [RGB]

Seja $Y = \mathbb{R}$ [ou $\mathbb{C}$], $Z = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$ [ou $\mathbb{C}$]
 $B(y, z) = yz$, $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}$ medida positiva finita em (X, β) . Então $f: X \rightarrow Y$ é μ -integrável no sentido do Cap. I [Cap II] se e só se f é (μ, B) -integrável e as integrais coincidem.

⁽¹⁾ "Integration of functions with values in a Banach space"

Trans. A.M.S. 38 (1935) 357-378.

4.7.25 Definição

Seja $\mu: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma medida positiva em (X, β) . Dizemos que $f: X \rightarrow Y$ é Bochner μ -integrável se existe sequência de funções simples $\varphi_n: X \rightarrow Y$ com suporte de medida finita tal que

$$(1) \quad \varphi_n(x) \rightarrow f(x) \quad \mu\text{-q.s.}$$

$$(2) \quad \int_X \|f(x) - \varphi_n(x)\| d\mu \rightarrow 0$$

Então prova-se⁽¹⁾ que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n d\mu$ existe

para $\forall E \in \beta$ e define-se

$$(\text{Bochner}) \quad \int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n d\mu, \quad E \in \beta.$$

Verifica-se⁽¹⁾ que a definição independe da particular sequência (φ_n) e que se f é fortemente μ -mensurável então é Bochner μ -integrável se e só se $\|f(\cdot)\|$ é μ -integrável.

4.7.26 Exercício [RGB]

Seja $Z = \mathbb{R}$, $W = Y$, $\mathcal{B}(y, \lambda) = \lambda y$ e $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ medida real positiva.

Mostre que toda $f: X \rightarrow Y$ Bochner μ -integrável é $(\mu, \mathcal{B})$ -integrável e que as integrais coincidem.

4.7.27 Exercício [IQB]

Seja $X = \mathbb{N}$, $\beta = 2^{\mathbb{N}}$, Y espaço das seqüências reais $y \in Y$ tais que $\sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j| < \infty$ com a norma

$$\|y\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j|,$$

e ainda $Z = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(y, \lambda) = \lambda y$, $\mu: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(\{k\}) = \frac{1}{k^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Seja ainda $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$ definida por $f(k) = X_{\{k\}}$.

Mostre que:

- i) Y é espaço de Banach
- ii) $f(k) \in Y$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- iii) f é $(\mu, \mathcal{B})$ -integrável
- iv) f não é Bochner μ -integrável.

4.7.28 Definição

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) .
 Definimos $\tilde{m}^*: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\tilde{m}^*(A) = \inf_{\substack{E \supset A \\ E \in \beta}} \tilde{m}(E)$$

Sejam $f_n: X \rightarrow Y$, $f: X \rightarrow Y$ definidas m-q.s.
 Diremos que $f_n \xrightarrow{\tilde{m}} f$ se

$$\tilde{m}^*\{x: \|f_n(x) - f(x)\| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$ para $\forall \varepsilon > 0$.

Bartle define em [RGB], uma noção de integrabilidade e de integral relativamente a uma medida vetorial aditiva e a uma forma bi-linear contínua $\mathbb{B}: Y \times Z \rightarrow W$.

Em particular a definição pode ser aplicada ao caso de uma medida vetorial (σ-aditiva) $m: \beta \rightarrow Z$.

Dizemos que $f: X \rightarrow Y$ definida m-q.s. é integrável segundo Bartle, se existe uma sequência de funções simples $\varphi_n: X \rightarrow Y$ de suporte de semi-variância finita, tal que:

$$(1) \quad \varphi_n \xrightarrow{\tilde{m}} f$$

(2) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{m}(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E \varphi_n dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (E \in \beta).$$

(3) Dado $\varepsilon > 0$ existe $X_\varepsilon \in \beta$ tal que para $\forall E \subset X \setminus X_\varepsilon, E \in \beta$ temos:

$$\left\| \int_E \varphi_n dm \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso prova-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n dm$ existe para $\forall E \in \beta$ e define-se:

$$(\text{Bartle}) \int_E f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n dm.$$

Esta definição de integral independe da particular sequência (φ_n) satisfazendo (1), (2), (3).

4.7.29 Exercício [RGB]

Seja $m: \beta \rightarrow Z$ medida vetorial em (X, β) e $B: Y \times Z \rightarrow W$ bi-linear contínua.

Mostre que se $\tilde{m}$ é controlável então $f: X \rightarrow Y$ é integrável segundo Bartle se e só se é (m, B) -integrável e as integrais coincidem.

4.7.30 Exercício [12B]

Sejam $X = \mathbb{N}$, $\beta = 2^{\mathbb{N}}$, $Y = \ell_1$, $Z = \ell_0$
 $\mathbb{B}(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j z_j$ e $m: \mathbb{N} \rightarrow \ell_0$ definida por

$$m(\{k\}) = \frac{1}{k} X_{\{k\}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(i.) Construa seqüências $(E_k), (y_k)$ onde $E_k \in \beta$ são disjuntos e $y_k \in \ell_1$ tais que

$$|m|(E_k) \geq 1, \quad \|y_k\| = 1$$

$$\mathbb{B}(y_k, m(E)) < \frac{1}{k^2} \text{ para } \forall E \subseteq E_k, E \in \beta.$$

ii) Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \ell_1$ definida por:

$$f(i) = \begin{cases} y_k & \text{se } i \in E_k \\ 0 & \text{se } i \notin E_k, \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Mostre que f é $(m, \mathbb{B})$ -integrável mas não é integrável segundo Bartle.

REFERÊNCIAS

[RGB] - Bartle, R.G.

A general bi-linear vector integral
Studia Math. 15 (1956) 337-352

[ND] - Dinculeanu, N

Vector Measures

Pergamon Press - 1967

[DS] - Dunford, N. - Schwartz, J.T.

Linear Operators - Part I

Interscience Publishers - 1967

[HF] - Federer, H.

Geometric Measure Theory

Springer - Verlag - 1969

[CH] - Hönig, C.S.

Análise Funcional e Aplicações

Publicação do IME USP - 1970

[KY] - Yosida, K.

Functional Analysis

Academic - Press - 1965

[MR] - Rieffel, M.

Notas de Curso - (datilografadas) -



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Cidade Postal n.º 05318 (Cidade Universitária) - Tel. 504-6001
SÃO PAULO - BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-7701 - Ivan de Queiroz Barros
On equivalence and reducibility of Generating
Matrices of RK-Procedures - Agosto 1977

RT-MAP-7702 - V.V.Setzer
A Note on a Recursive Top-Down
Analyzer of N.Wirth - Dezembro 1977

RT-MAP-7703 - Ivan de Queiroz Barros
Introdução a Aproximação ótima
Dezembro 1977

RT-MAP-7704 - V.V.Setzer, M.M.Sanches
A linguagem "LEAL" para Ensino
básico de Computação - Dezembro 1977

RT-MAP-7801 - Ivan de Queiroz Barros
Proof of two Lemmas of interest
in connection with discretization of
Ordinary Differential Equations
Janeiro 1978



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Cidade Postal n.º 05318 (Cidade Universitária) - Tel. 504-6001
SÃO PAULO - BRASIL

RT-MAP-7802 - Silvío Ursic, Cyro Patarra
Exact solution of Systems of Linear
Equations with Iterative Methods
Fevereiro - 1978

RT-MAP-7803 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakebayashi
Hypohamiltonian Digraphs
Março 1978

RT-MAP-7804 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakebayashi
Hypotractable Digraphs
Maio 1978

RT-MAP-7805 - W.Hesse, V.V.Setzer
The Line-Justifier: an example of program
development by transformations
Junho 1978

RT-MAP-7806 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap.II - Tópicos Introdutórios
Cap.II - Discretização
Julho 1978

RT-MAP-7807 - Ivan de Queiroz Barros
(Γ, Γ')-Estabilidade e Métodos Preditores-Corretores
Setembro 1978

RT-MAP-7808 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap. III - Métodos de passo progressivo para
Eq. Dif. Ord. com condições Iniciais
Setembro 1978



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Cidade Petrópolis 20.510, (Agência Spetrol) - Tel. 55-004
SÃO PAULO - BRASIL

RT-MAP-7809 - V.W.Setzer

Program development by transformations applied
to relational Data-Base queries

Novembro 1978

RT-MAP-7810 - Ngulffo B. Boyom, Paulo Boulos

Homogeneity of Cartan-Killing spheres and
singularities of vector fields

Novembro 1978

RT-MAP-7811 - D.T.Fernandes e C. Patarra

Sistemas Lineares Esparsos, um Método Exato
de Solução

Novembro 1978

RT-MAP-7812 - V.W.Setzer e G.Bressan

Desenvolvimento de Programas por Transformações:
uma Comparação entre dois Métodos

Novembro 1978

RT-MAP-7813 - Ivan de Queiroz Barros

Verificação do Passo na Discretização de Eq.Dif.
Ord. com Condições Iniciais

Novembro 1978

RT-MAP-7814 - Martin Grötschel e Yoshiko Wakabayashi

On the Complexity of the Monotone Asymmetric
Travelling Salesman Polytope I: HIPOHAMILTONIAN
FACETS

Dezembro 1978



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Cidade Petrópolis 20.510, (Agência Spetrol) - Tel. 55-004
SÃO PAULO - BRASIL

RT-MAP-7815 - Ana F. Humes e E. I. Jury

Stability of Multidimensional Discrete Systems:
State-Space Representation Approach

Dezembro 1978

RT-MAP-7901 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi

On the complexity of the Monotone Asymmetric
Travelling Salesman Polytope II: HYPOTRACEABLE
FACETS

Fevereiro 1979

RT-MAP-7902 - M.M.Sanches e V.W.Setzer

A portabilidade do Compilador para a Linguagem LEAL

Junho 1979

RT-MAP-7903 - Martin Grötschel, Carsten Thomassen,

Yoshiko Wakabayashi
Hypotractable Digraphs

Julho 1979

RT-MAP-7904 - Ngulffo B. Boyom

Translations non triviales dans
les groupes (transitifs) des
transformations affines.

Novembro 1979

RT-MAP-8001 - Angelo Barone Netto

Extremos detectáveis por jatos

Junho 1980



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Cidade Postal n.º 50.510 (Agência Espacial) - Tel. 514-000
SÃO PAULO - BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

- RT-MAP-8102 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap-III - Medidas em Espaços Topológicos - Março 1981
- RT-MAP-8103 - V.W. Setzer, R. Lapyda
Design of Data Models for the
ADABAS System using the Entity-Relationship Approach
Abril 1981
- RT-MAP-8104 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap-IV - Medida e Integração Vetoriais - Abril 1981



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Cidade Postal n.º 50.510 (Agência Espacial) - Tel. 514-000
SÃO PAULO - BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

- RT-MAP-8002 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. I - Medida e Integração Abstrata - Julho 1980
- RT-MAP-8003 - Raulo Terada
Fast Algorithms for NP-Hard Problems which are
Optimal or Near-optimal with Probability one
Setembro 1980
- RT-MAP-8004 - V.W. Setzer e R. Lapyda
Uma Metodologia de Projeto de Bancos de Dados
para o Sistema ADABAS - Setembro 1980
- RT-MAP-8005 - Imre Simon
On Brzozowski's Problem: (LUA)^m = A* - Outubro 1980
- RT-MAP-8006 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. II - Espaços Lp - Outubro 1980
- RT-MAP-8101 - Luzia Kazuko Yoshida e Gabriel Richard Bitran
Um algoritmo para Problemas de Programação Vetorial
com Variáveis Zero-Um - Fevereiro 1981