

RT-MAP-8002

MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Cap. I - Medida e Integração
Abstrata

Ivan de Queiroz Barros

Texto de Pós-Graduação

JULHO 1980

INDICE DO CAPITULO I

- §1. Medida
- §2. Medida com sinal
- §3. Medida externa
- §4. Funções Mensuráveis
- §5. Integral de funções mensuráveis positivas.
- §6. Integral de funções integráveis.
- §7. O Teorema de Radon - Nikodym.
- §8. Produto de medidas.
- §9. Exercícios.

INDICE DOS TEOREMAS.

TEOREMA 1	(Decomposição de Lebesgue)	1.1.9
TEOREMA 2	(Decomposição de Hahn)	1.2.6
TEOREMA 3	(Decomposição de Jordan)	1.2.8
TEOREMA 4	(Convergência Monotônica.)	1.5.11
LEMA	(Fatou)	1.6.8
TEOREMA 5	(Convergência Dominada)	1.6.9
TEOREMA 6	(Radon - Nikodym)	1.7.1
TEOREMA 7	(Tonelli)	1.8.5
TEOREMA 8	(Fubini)	1.8.7

INDICE DAS DEFINIÇÕES.

Conjunto	ϕ -mensurável	1.3.3
	λ -negativo	1.2.3
	λ -positivo	1.2.3
Derivada	de Radon-Nikodym	1.7.2
Função	μ -integrável	1.6.2
	β -mensurável	1.4.1
	μ -mensurável	1.4.5
	simples	1.5.2
Ínfimo	essencial	1.4.8
Integral	de função μ -integrável	1.6.4
	de função μ -mens. positiva	1.5.8
	de função simples	1.5.4
Medida(s)	—	1.1.3
	absolutamente contínua	1.1.8
	com sinal	1.2.1
	completa	1.1.6
	finita	1.1.6
	σ -finita	1.1.6
	induzida por medida externa	1.3.6
	produto	1.8.2
	singulares	1.1.8
Medida externa	—	1.3.1
	associada a medida	1.3.12
	regular	1.3.8
	$\mathbb{R}$ -regular	1.3.8
Sigma-algebra	(σ -algebra)	1.1.1
Supremo	essencial	1.4.8

Capítulo I

MEDIDA E INTEGRAÇÃO ABSTRATA

§1. Medida

1.1.1 Definição

Seja X um conjunto e $\beta \subset 2^X$.
Dizemos que β é uma σ -álgebra se

$$SA1 : \emptyset \in \beta$$

$$SA2 : A \in \beta \Rightarrow X \setminus A \in \beta$$

$$SA3 : A_i \in \beta, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$$

1.1.2 Propriedades

$$(1) A_i \in \beta, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$$

(2) Interseção de σ -álgebras é uma σ -álgebra

1.1.3 Definição

Seja X um conjunto, $\beta \subset 2^X$ uma σ -álgebra.
Dizemos que $\mu : \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida em (X, β) se

$$M1 : \mu(A) \geq 0, \forall A \in \beta$$

$$M2 : \mu(\emptyset) = 0$$

$$M3 : A_i \in \beta, i \in \mathbb{N}, \text{ disjuntos}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Chamamos (X, β, μ) espaço de medida

1.1.4 Propriedades

$$(1) \quad A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \quad , \quad A, B \in \beta.$$

$$(2) \quad E_m \in \beta, \quad m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\cup E_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m)$$

$$(3) \quad E_m \in \beta \quad e \quad E_m \uparrow E \Rightarrow \mu(E_m) \uparrow \mu(E)$$

$$(4) \quad E_m \in \beta, \quad E_m \downarrow E \quad e \quad \mu(E_1) < \infty \\ \Rightarrow \mu(E_m) \downarrow \mu(E).$$

1.1.5 Observação

As propriedades acima podem ser obtidas a partir das propriedades de uma medida externa (vide §2).

1.1.6 Definição

Uma medida μ em (X, β) é dita finita, se $\mu(X) < \infty$.

μ é dita σ -finita se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ onde

$X_n \in \beta$ e $\mu(X_n) < \infty$.

Dizemos que μ é completa se

$$B \in \beta, \quad \mu(B) = 0 \quad e \quad A \subset B \Rightarrow A \in \beta.$$

1.1.7 Proposição (Completção).

Sejam (X, β, μ) e

$$\bar{\beta} = \{A \cup N : A \in \beta \text{ e } \exists B \in \beta \text{ tal que } B \supset N, \mu(B) = 0\}$$

$$\bar{\mu} : \bar{\beta} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } \bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A).$$

Então: (i) $\bar{\beta}$ é uma σ -álgebra e $\bar{\beta} \supset \beta$.
 (ii) $\bar{\mu}$ é medida completa extensão de μ .

1.1.8. Definição

Sejam μ e ν duas medidas em (X, β) .

Dizemos que μ e ν são mutuamente singulares (notação: $\mu \perp \nu$) se existe $A \in \beta$ tal que $\mu(A) = 0$ e $\nu(X \setminus A) = 0$.

Dizemos que ν é absolutamente contínua em relação a μ (notação $\nu \ll \mu$) se $A \in \beta, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

1.1.9 TEOREMA 1 (Decomposição de Lebesgue)

Sejam μ e ν medidas em (X, β) , sendo ν σ -finita.

Então existe uma decomposição $\nu = \nu_0 + \nu_1$ tal que $\nu_0 \perp \mu$ e $\nu_1 \ll \mu$.

A decomposição é única.

Prova

(1) Seja inicialmente ν finita.

Seja $\mathcal{N} = \{E \in \beta : \mu(E) = 0\}$ com a relação de pre-ordem definida por:

$$A \leq B \stackrel{\text{def.}}{\iff} \nu(A) \leq \nu(B).$$

Mostremos que $\mathcal{N}$ é indutivo. Seja $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ totalmente pre-ordenado e $\{E_n\} \subset \mathcal{N}_0$ tal que

$$\nu(E_n) \uparrow \sup_{E \in \mathcal{N}_0} \nu(E)$$

Seja $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Então $\nu(E_0) \geq \nu(E_n) \quad \forall n$,
 donde $E_0 \geq E \quad \forall E \in \mathcal{N}_0$.

Logo $\mathcal{N}$ é indutivo. Pelo lema de Zorn $\mathcal{N}$ admite um elemento maximal A .

Sejam ν_0 e ν_1 definidos por:

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap A) \quad , \quad \nu_1(E) = \nu(E \setminus A)$$

Então ν_0 e μ são mutuamente singulares pois $\mu(A) = 0$ e $\nu_0(X \setminus A) = 0$.

Mostremos que $\nu_1 \ll \mu$.

Seja $E \in \beta$, $\mu(E) = 0$. Se fosse $\nu_1(E) > 0$ teríamos $A \cup (E \setminus A) \in \mathcal{N}$ e

$$\nu(A \cup (E \setminus A)) = \nu(A) + \nu(E \setminus A) = \nu(A) + \nu_1(E) > \nu(A)$$

contradizendo a maximalidade de A .

Portanto $E \in \beta$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu_1(E) = 0$ isto é $\nu_1 \ll \mu$.

(2) Seja agora ν σ -finita.

Sejam X_n disjuntos tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$
 $X_n \in \beta$ e $\nu(X_n) < \infty$.

Restringindo μ e ν a σ -álgebra dos conjuntos de β contidos em X_n podemos aplicar a parte (1). Em X_n temos

$\nu = \nu_0^{(n)} + \nu_1^{(n)}$ onde $\nu_0^{(n)}$ e $\nu_1^{(n)}$ são tais que $\nu_1^{(n)} \ll \mu$ e existe $A_n \in \beta$, $A_n \subset X_n$ satisfazendo $\mu(A_n) = 0$ e $\nu_0^{(n)}(X_n \setminus A_n) = 0$.

Sejam agora ν_0 e ν_1 definidos para todo conjunto de β por:

$$\nu_0(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_0^{(n)}(E \cap X_n), \quad \nu_1(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_1^{(n)}(E \cap X_n)$$

Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. É fácil verificar agora que $\mu(A) = 0$, $\nu_1(X \setminus A) = 0$ e que $\nu_1 \ll \mu$.

(3) Suponhamos que $\nu = \nu_0 + \nu_1$ e $\nu = \nu_0' + \nu_1'$ são duas decomposições de Lebesgue. Então existem $A, A' \in \beta$ tais que:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= 0, & \nu_0(X \setminus A) &= 0 \\ \mu(A') &= 0, & \nu_0'(X \setminus A') &= 0. \end{aligned}$$

De $\mu(A \cup A') = 0$ vem $\nu_1(A \cup A') = 0$. Seja $E \in \beta$.

$$\begin{aligned} \nu_1(E) &= \nu_1[E \cap (X \setminus A \cup A')] + \nu_1[E \cap (A \cup A')] = \\ &= \nu_1[E \cap (X \setminus A \cup A')] = \nu_1[E \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus A')] = \\ &= \nu[E \cap (X \setminus A) \cap (X \setminus A')] \end{aligned}$$

uma vez que $\nu_0 [E \cap (X \sim A) \cap (X \sim A')] = 0$.

Analogamente

$$\nu'_1(E) = \nu[E \cap (X \sim A) \cap (X \sim A')]$$

Logo $\nu_1 = \nu'_1$ e por consequência $\nu_0 = \nu'_0$.
(c.q.d.).

§ 2. Medida com Sinal

1.2.1 Definição

Seja $\beta \subset 2^X$ uma σ -álgebra.

Dizemos que $\lambda : \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida com sinal em (X, β) se:

$$\text{MS1} : -\infty \leq \lambda(E) < \infty, \forall E \in \beta \\ \text{ou} \quad -\infty < \lambda(E) \leq \infty \quad \forall E \in \beta.$$

$$\text{MS2} : \lambda(\emptyset) = 0$$

MS3 : Se $E_k \in \beta$, $k=1, 2, \dots$ são disjuntos
então:

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$$

1.2.2 Observação

No primeiro axioma a alternativa "ou" é exclusiva. No terceiro a convergência da série deve ser entendida como incondicional.

1.2.3 Definição

Seja λ medida com sinal em (X, β) .

Dizemos que A é λ -positivo se $A \in \beta$, $B \subset A \Rightarrow \lambda(B) \geq 0$ para $B \in \beta$. Definimos analogamente um conjunto λ -negativo.

1.2.4 Lema

Todo subconjunto de um conjunto λ -positivo que pertence a β é λ -positivo.

Toda união enumerável de conjuntos λ -positivos é λ -positiva.

Prova

A primeira afirmação é consequência imediata da definição.

Sejam A_n , $n=1, 2, \dots$, λ -positivos e $B \in \beta$, $B \subset \bigcup A_n$.

De $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B \cap (A_k - \bigcup_{m=1}^{k-1} A_m)$ temos:

$$\lambda(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \left[B \cap (A_k - \bigcup_{m=1}^{k-1} A_m) \right] \geq 0 \quad \text{c.q.d.}$$

1.2.5. Lema

Seja λ medida com sinal em (X, β) .

Seja $E \in \beta$ tal que $0 < \lambda(E) < \infty$.

Então existe um conjunto λ -positivo $A \subset E$ com $\lambda(A) > 0$.

Prova

Se E é λ -positivo temos a tese.

Caso contrário existe subconjunto de E pertencente a β com medida negativa.

Seja n_1 o menor inteiro maior que zero tal que existe $E_1 \in \beta$, $E_1 \subset E$ satisfazendo:

$$\lambda(E_1) < -\frac{1}{n_1}$$

Como $\lambda(E \sim E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) > \lambda(E) + \frac{1}{m_1} > 0$

se $E \sim E_1$ for λ -positivo, temos a tese.

Caso contrário seja m_2 o menor inteiro maior que zero tal que existe $E_2 \in \beta$, $E_2 \subset E \sim E_1$ satisfazendo

$$\lambda(E_2) < -\frac{1}{m_2}$$

Temos então a tese em um número finito de passos ou obteremos duas seqüências $\{E_k\}$, $\{m_k\}$ tais que

$$E_k \subset E \sim \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$$

$$\lambda(E_k) < -\frac{1}{m_k}$$

$$F \in \beta, F \subset E \sim \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \Rightarrow \lambda(F) \geq -\frac{1}{m_k - 1}$$

Seja $A = E \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Mostremos que $\lambda(A) > 0$ e que A é λ -positivo.

De $E = A \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)$ vem

$$\lambda(E) = \lambda(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) < \lambda(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k}$$

Como $\lambda(E) > 0$ resulta $\lambda(A) > 0$ e

também $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \infty$

Portanto $n_k \rightarrow \infty$.

Seja $B \in \beta$, $B \subset A$.

Temos:

$$B \subset A \subset E \sim \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j, \quad \forall k$$

$$\text{Portanto } \lambda(B) \geq -\frac{1}{n_k - 1}, \quad \forall k$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos $\lambda(B) \geq 0$ c.q.d.

1.2.6 TEOREMA 2 (Decomposição de Hahn)

Seja λ medida com sinal em (X, β) .
Então existe um conjunto A λ -positivo
tal que $X \setminus A$ é λ -negativo.

Prova

Suponhamos que $+\infty$ é o valor excluído para λ .

Seja α o supremo de λ sobre os conjuntos λ -positivos. Como $\emptyset$ é λ -positivo temos $\alpha \geq 0$.

Mostremos que $\alpha < \infty$.

Seja $\{A_n\}$ tal que A_n , $n=1, 2, \dots$, são λ -positivos e $\lim \lambda(A_n) = \alpha$.

Pelo lema (1.2.4) $A = \bigcup A_n$ é λ -positivo e portanto $\lambda(A) \leq \alpha$.

Por outro lado $\lambda(A) = \lambda(A_n) + \lambda(A \setminus A_n)$ e como $\lambda(A \setminus A_n) \geq 0$, vem $\lambda(A) \geq \lambda(A_n)$, donde $\lambda(A) \geq \alpha$. Portanto $\alpha = \lambda(A) < \infty$.

Mostremos agora que $X \sim A$ é λ -negativo.
 Suponhamos (por contradição) que $X \sim A$
 não é λ -negativo.

Então existe $E \subset X \sim A$ tal que $0 < \lambda(E) < \infty$.

Pelo lema (1.2.5) existe $D \subset E$ tal que D
 é λ -positivo e $\lambda(D) > 0$.

Como D e A são disjuntos e $D \cup A$ é λ -positivo
 temos:

$$\alpha \geq \lambda(D \cup A) = \lambda(D) + \lambda(A) = \lambda(D) + \alpha$$

Sendo $\alpha < \infty$ resulta $\lambda(D) = 0$ e temos uma
 contradição. Logo $X \sim A$ é λ -negativo.

(c.q.d.)

1.2.7 Observação

A decomposição de Hahn não é única.

1.2.8 TEOREMA 3 (Decomposição de Jordan)

Seja λ medida com sinal em (X, β) .
 Então existem duas medidas λ^+ e λ^- em (X, β) tais que $\lambda^+ \perp \lambda^-$ e $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.
 A decomposição é única.

Prova

Seja $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ uma decomposição de Hahn onde A é λ -positivo e B λ -negativo.

Definamos:

$$\begin{aligned}\lambda^+(E) &= \lambda(E \cap A) & , & \quad E \in \beta \\ \lambda^-(E) &= -\lambda(E \cap B) & , & \quad E \in \beta\end{aligned}$$

É fácil verificar que λ^+ e λ^- são medidas e que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Como $\lambda^+(B) = \lambda^-(A) = 0$, temos $\lambda^+ \perp \lambda^-$.

Mostremos a unicidade.

Sejam λ_1^+ , λ_1^- duas medidas em (X, β) tais que $\lambda = \lambda_1^+ - \lambda_1^-$ e $\lambda_1^+(B_1) = \lambda_1^-(A_1) = 0$ onde $X = A_1 \cup B_1$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_1, B_1 \in \beta$.

Teremos:

Em	$A \cap A_1$	$\lambda^- - \lambda_1^- = 0$	donde	$\lambda^+ = \lambda_1^+$
Em	$B \cap B_1$	$\lambda^+ - \lambda_1^+ = 0$	donde	$\lambda^- = \lambda_1^-$
Em	$A \cap B_1$	$\lambda^- - \lambda_1^+ = 0$	donde	$\lambda^+ = \lambda_1^- = 0$
Em	$B \cap A_1$	$\lambda^+ - \lambda_1^- = 0$	donde	$\lambda^- = \lambda_1^+ = 0$

Resulta $\lambda^+ = \lambda_1^+$ e $\lambda^- = \lambda_1^-$ c.q.d.

§3: Medida Externa

1.3.1 Definição

Seja X um conjunto e $\phi: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que ϕ é uma medida externa em X se:

$$ME1: \phi(\emptyset) = 0$$

$$ME2: A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \phi(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i).$$

1.3.2 Propriedades

$$(1) \phi(A) \geq 0, \forall A \subset X.$$

$$(2) A \subset B \Rightarrow \phi(A) \leq \phi(B)$$

$$(3) \phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i)$$

$$(4) \phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B).$$

1.3.3 Definição

Seja ϕ medida externa em X . Dizemos que $A \subset X$ é ϕ -mensurável se:

$$\phi(T) = \phi(T \cap A) + \phi(T \setminus A), \quad \forall T \subset X.$$

1.3.4 Observação

Para provar que $A \subset X$ é mensurável basta verificar $\phi(T) \geq \phi(T \cap A) + \phi(T \setminus A)$ para $T \subset X$ com $\phi(T) < \infty$.

1.3.5 Proposição (Caratheodory).

Seja ϕ uma medida externa em X .
Então a classe $\beta_\phi \subset 2^X$ dos conjuntos
 ϕ -mensuráveis é uma σ -álgebra e a
restrição μ de ϕ a β_ϕ é uma medida
completa.

Prova

(1) É imediata a verificação que $\emptyset \in \beta_\phi$
e que $A \in \beta_\phi \Rightarrow X \setminus A \in \beta_\phi$.

(2) Mostremos que $A, B \in \beta_\phi \Rightarrow A \cup B \in \beta_\phi$
e que ϕ é aditiva em β_ϕ .

$$\begin{aligned} & \phi(T \cap (A \cup B)) + \phi(T \setminus (A \cup B)) = \\ &= \phi(T \cap (A \cup B)) + \phi(T \cap \tilde{A} \cap \tilde{B}) = \\ &= [\phi(T \cap (A \cup B) \cap A) + \phi(T \cap (A \cup B) \cap \tilde{A})] + \phi(T \cap \tilde{A} \cap \tilde{B}) = \\ &= \phi(T \cap A) + \phi(T \cap B \cap \tilde{A}) + \phi(T \cap \tilde{A} \cap \tilde{B}) = \\ &= \phi(T \cap A) + \phi(T \cap \tilde{A}) = \phi(T). \end{aligned}$$

Logo $A \cup B \in \beta_\phi$.

Sejam $A, B \in \beta_\phi$ disjuntos.

$$\phi(A \cup B) = \phi((A \cup B) \cap A) + \phi((A \cup B) \cap \tilde{A}) = \phi(A) + \phi(B).$$

Por indução é imediato que se $E_k \in \beta_\phi$ $k=1, 2, \dots, n$, são disjuntos; então:

$$\phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n E_k)) = \sum_{k=1}^n \phi(T \cap E_k).$$

(3) Seja $T \subset X$ qualquer e $E_k \in \beta$, $k \in \mathbb{N}$, disjuntos:

$$\begin{aligned} \phi(T) &= \phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n E_k)) + \phi(T \sim (\bigcup_{k=1}^n E_k)) \geq \\ &\geq \phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n E_k)) + \phi(T \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \phi(T \cap E_k) + \phi(T \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\begin{aligned} \phi(T) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(T \cap E_k) + \phi(T \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \geq \\ &\geq \phi(\bigcup_{k=1}^{\infty} (T \cap E_k)) + \phi(T \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \\ &= \phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)) + \phi(T \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k). \end{aligned}$$

Logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \beta$.

Da ultima desigualdade obtemos fazendo $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$:

$$\phi(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k)$$

donde
$$\phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k).$$

Se os E_k , $k \in \mathbb{N}$ não forem disjuntos, temos pela decomposição:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 + (E_2 \sim E_1) + (E_3 \sim E_1 \cup E_2) + \dots$$

que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \beta_\phi$. E' imediato que μ é completa.
(c.q.d.)

1.3.6 Definição

Seja ϕ uma medida externa em X . A medida obtida por restrição de ϕ a σ -álgebra dos conjuntos ϕ -mensuráveis será chamada medida induzida por ϕ .

1.3.7 Propriedades (dos conjuntos ϕ -mensuráveis).

(1) $\phi(A) = 0 \Rightarrow A$ é ϕ -mens.

(2) Se $A, B \subset X$ e A é ϕ -mens. então

$$\phi(A) + \phi(B) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cup B).$$

(3) Se B_i , $i \in \mathbb{N}$ são disjuntos, ϕ -mens

$$\phi\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(T \cap B_i)$$

(4) Se B_i , $i \in \mathbb{N}$ são ϕ -mens. e $B_i \uparrow B$
 então $\phi(T \cap B_i) \uparrow \phi(T \cap B).$

(5) Se B_i , $i \in \mathbb{N}$ são ϕ -mens, $B_i \downarrow B$
 e $\phi(B_1) < \infty$ então $\phi(T \cap B_i) \downarrow \phi(T \cap B).$

Prova

(1) é imediato

(2) basta aplicar a definição de ϕ -mensurabilidade com $T=B$ e com $T=A \cup B$.

$$(3) \quad \phi(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \geq \phi(T \cap (\bigcup_{i=1}^n B_i)) = \sum_{i=1}^n \phi(T \cap B_i)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos $\phi(T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(T \cap B_i)$.(4) De $B_n = B_1 + (B_2 - B_1) + \dots + (B_n - B_{n-1})$
vem fazendo $A_1 = B_1$, $A_k = B_k - B_{k-1}$, $k=1, 2, \dots$

$$\phi(T \cap B_n) = \sum_{k=1}^n \phi(T \cap A_k)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, como $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, temos

$$\lim \phi(T \cap B_n) = \phi(T \cap B) \quad \text{por (3).}$$

(5) Basta considerar que

$$\phi(T \cap B_i) = \phi(T \cap B_1) - \phi(T \cap (B_1 \sim B_i))$$

e passar ao limite lembrando que $B_1 \sim B_i \uparrow B_1 \sim B$.1.3.8 Definição

Seja ϕ medida externa em X e $\mathcal{Q} \subset 2^X$.
 Dizemos que ϕ é $\mathcal{Q}$ -regular se para todo $A \subset X$ existe $B \in \mathcal{Q}$ tal que $B \supset A$ e $\phi(A) = \phi(B)$.
 Dizemos que ϕ é regular se for β_ϕ -regular.

1.3.9 Propriedades

Seja ϕ medida externa regular.

$$(1) A_n \uparrow A \Rightarrow \phi(A_n) \uparrow \phi(A)$$

$$(2) \text{ Se } A \cup B \text{ } \phi\text{-mens. e } \phi(A \cup B) < \infty.$$

Então $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$ implica que A e B são ϕ -mensuráveis.

Prova

$$(1) \text{ Sejam } C_n \supset A_n, C_n \text{ } \phi\text{-mens. } \phi(C_n) = \phi(A_n).$$

Sejam $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} C_k$. São ϕ -mensuráveis e

$$A_n \subset B_n \subset C_n \text{ donde } \phi(A_n) = \phi(B_n).$$

Seja $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Como $A \subset B$, e $B_n \uparrow B$ tem

$$\phi(A) \leq \phi(B) = \lim \phi(B_n) = \lim \phi(A_n)$$

De $\phi(A_n) \leq \phi(A)$ temos a desigualdade oposta.

$$(2) \text{ Seja } C \text{ } \phi\text{-mens. tal que } A \subset C \subset A \cup B \text{ e } \phi(A) = \phi(C). \text{ Teremos por 1.3.7 (2):}$$

$$\phi(C \cap B) + \phi(C \cup B) = \phi(C) + \phi(B) = \phi(A) + \phi(B) =$$

$$= \phi(A \cup B) = \phi(C \cup B) < \infty.$$

Portanto $\phi(C \cap B) = 0$. Mas $C \setminus A \subset C \cap B$ donde $\phi(C \setminus A) = 0$. Como $C \supset A$ e tanto C como $C \setminus A$ são ϕ -mensuráveis então A é ϕ -mens. Analogamente para B .

(c.q.d.)

1.3.10 METODO I (Construção de medida externa).

Seja X um conjunto, $\mathcal{C} \subset 2^X$,
e $\tau: \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tais que:

$$(1) \emptyset \in \mathcal{C} \quad \text{e} \quad \tau(\emptyset) = 0$$

$$(2) \tau(E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{C}.$$

A função $\phi: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\phi(A) = \inf_{\substack{A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}} \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k), \quad E_k \in \mathcal{C}.$$

é uma medida externa, como é fácil verificar.

1.3.11 Propriedades

(1) Se $E, E_k \in \mathcal{C}$, $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ implica

$$\tau(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k) \quad \text{então } \phi \text{ é extensão de } \tau.$$

(2) Se as seguintes condições são satisfeitas:

a) ϕ é extensão de τ .

b) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ e $A \cup B$ é união finita disjunta de conjuntos de $\mathcal{C}$.

c) $E, E_k \in \mathcal{C}$, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k são disjuntos
 $\Rightarrow \tau(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_k).$

Então os conjuntos de $\mathcal{C}$ são ϕ -mens.

(3) Se $\mathcal{C}$ admite sub-família enumerável que recobre X então ϕ é $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$ -regular.

Prova

(1) não oferece dificuldade.

(2) Seja $A \in \mathcal{C}$.

Se $T \in \mathcal{C}$ então $T \cap A \in \mathcal{C}$ e $T \sim A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,
onde os E_k são disjuntos e $E_k \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \phi(T \cap A) + \phi(T \sim A) &= \phi(T \cap A) + \phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \\ &\leq \phi(T \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k) = \mathcal{C}(T \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}(E_k) = \\ &= \mathcal{C}(T) = \phi(T). \end{aligned}$$

Portanto para $T \in \mathcal{C}$, $\phi(T) = \phi(T \cap A) + \phi(T \sim A)$.

Seja agora $T \subset X$ qualquer, com $\phi(T) < \infty$.

Dado $\varepsilon > 0$ existem $E_k \in \mathcal{C}$, $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$T \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{e} \quad \phi(T) + \varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}(E_k). \quad \text{Então:}$$

$$\begin{aligned} \phi(T) + \varepsilon &> \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k \cap A) + \phi(E_k \sim A) \geq \\ &\geq \phi\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \cap A\right) + \phi\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \sim A\right) \geq \phi(T \cap A) + \phi(T \sim A) \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε vem

$$\phi(T) \geq \phi(T \cap A) + \phi(T \sim A).$$

(3) Seja primeiro $\phi(A) = \infty$.

Ora, $X \in \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$ e como $\phi(X) \geq \phi(A) = \infty$ temos $\phi(X) = \phi(A)$.

Seja agora $\phi(A) < \infty$.

Dado n existem $E_k^{(n)} \in \mathcal{C}$ tais que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}$

e

$$\phi(A) + \frac{1}{n} > \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(E_k^{(n)}) \geq \phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}\right).$$

$$\text{Sejam } B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)} \text{ e } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Então $B \in \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$, $B \supset A$ e

$$\phi(B) + \frac{1}{n} \geq \phi(A) + \frac{1}{n} > \phi(B_n) \geq \phi(B)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos $\phi(B) = \phi(A)$. (c.q.d.)

1.3.12 Definição

Seja μ uma medida em (X, β) .

A medida externa construída pelo MÉTODO I fazendo $\mathcal{C} = \beta$ e $\zeta = \mu$ será chamada medida externa associada a μ e será denotada por μ^* .

1.3.13 Propriedades

Seja μ medida em (X, β) e $\bar{\mu}: \bar{\beta} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$

a medida obtida por completção de μ .

Então:

$$(1) \mu^*(A) = \inf_{A \subset B} \mu(B) \quad , \quad B \in \beta.$$

$$(2) \beta_{\mu^*} \supset \bar{\beta} \quad \text{e} \quad \mu^* \text{ é } \beta\text{-regular.}$$

$$(3) \mu^* \text{ é extensão de } \mu.$$

$$(4) A \in \beta_{\mu^*} \text{ e } \mu^*(A) < \infty \Rightarrow A \in \bar{\beta}$$

$$(5) \mu \text{ é } \sigma\text{-finita} \Rightarrow \beta_{\mu^*} = \bar{\beta}$$

$$(6) \text{ Se } \mu \text{ é induzida pela medida externa } \phi \text{ então } \mu^* = \phi \text{ se e só se } \phi \text{ é regular.}$$

Prova

(1) Consequência imediata da definição de μ^* .

(3) Corolário da propriedade 1.3.11(1).

(2) Da propriedade 1.3.11(2) é imediato que $\beta_{\mu^*} \supset \beta$. Como a medida induzida por μ^* é completa temos $\beta_{\mu^*} \supset \bar{\beta}$.

Da propriedade 1.3.11(3) vem que μ^* é $\beta_{\sigma\sigma}$ -regular e portanto β -regular.

(4) Por (2) existe $B \in \beta$ tal que $B \supset A$ e $\mu^*(B) = \mu^*(A)$. Como $\mu^*(A) < \infty$ vem $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Novamente existe $Z \supset B \setminus A$, $Z \in \beta$ com $\mu(Z) = \mu^*(Z) = 0$. Então $B \setminus A \in \bar{\beta}$. Como também $B \in \bar{\beta}$ temos $A \in \bar{\beta}$.

(5) É consequência de (4) de fácil verificação.

(6) A condição é necessária pois que por (2) μ^* é regular. Seja ϕ regular, isto é, β_ϕ -regular. Como μ é a medida induzida, $\beta = \beta_\phi$. Por (2) μ^* é β -regular. Portanto ϕ e μ^* são extensões de μ e são β -regulares.

Seja $A \subset X$ qualquer e $B_1, B \in \beta$ tais que

$$B_1 \supset A, \quad \phi(B_1) = \phi(A)$$

$$B \supset A, \quad \mu^*(B) = \mu^*(A)$$

Como $A \subset B \cap B_1 \subset B_1$ e $A \subset B \cap B_1 \subset B$ temos

$$\phi(A) = \phi(B \cap B_1) = \mu(B \cap B_1)$$

$$\mu^*(A) = \mu^*(B \cap B_1) = \mu(B \cap B_1)$$

$$\text{isto é } \phi(A) = \mu^*(A).$$

(c.q.d.)

§4. Funções Mensuráveis

1.4.1 Definição

Seja $\beta \subset 2^X$ uma σ -álgebra, $X_0 \subset X$ e $f: X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que f é uma função β -mensurável se $f^{-1}(O) \in \beta$ para todo aberto O de $\overline{\mathbb{R}}$.

Observações

- (1) Pela definição 1.4.1 a β -mensurabilidade de f implica $X_0 \in \beta$.
- (2) $f^{-1}(O) \in \beta$ para todo aberto O de $\overline{\mathbb{R}}$ é equivalente a $f^{-1}(\{\infty\}) \in \beta$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \beta$ e $f^{-1}(O) \in \beta$ para todo aberto O de $\mathbb{R}$.

1.4.2 Proposição

Seja $f: X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. São equivalentes:

- i) f é β -mensurável
- ii) $\{x: f < a\} \in \beta$, $\forall a \in \mathbb{R}$
- iii) $\{x: f \leq a\} \in \beta$, $\forall a \in \mathbb{R}$
- iv) $\{x: f > a\} \in \beta$, $\forall a \in \mathbb{R}$
- v) $\{x: f \geq a\} \in \beta$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Prova

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad \{x: f < a\} = f^{-1}([-\infty, a[)$$

$$(ii) \Rightarrow (iii) \quad \{x: f \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f < a + \frac{1}{n}\}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Por complementação.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Análogo a (ii) $\Rightarrow$ (iii)

(v) $\Rightarrow$ (ii) Por complementação.

(ii) + (iv) $\Rightarrow$ (i)

$$\{x: f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f > n\} \in \beta$$

$$\{x: f = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f < -n\} \in \beta$$

Se $O \subset \mathbb{R}$ é aberto então $f^{-1}(O) \in \beta$, pois todo aberto de $\mathbb{R}$ é união enumerável de intervalos abertos $]a_n, b_n[$, $a_n < b_n$ e

$$\{x: a_n < f < b_n\} = \{x: f > a_n\} \cap \{x: f < b_n\}$$

c.q.d.

1.4.3 Propriedades

(1) Seja $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \in \beta$ e $f: X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então f é β -mens. se e só se as restrições $f|_{X_n}$ são β -mens.

(2) Seja $f: X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ β -mens. e $g: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ contínua. Então $g \circ f$ é β -mens.

(3) Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $f: X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ β -mens.
Então af , $a+f$, $|f|^a$, f^+ e f^- são β -mens.

(4) Sejam f e g β -mens. Então $f+g$ e fg são β -mens.

(5) Sejam f_n , $n=1, 2, 3, \dots$ β -mens.
Então $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\lim f_n$, $\liminf f_n$ são β -mens.

(6) Sejam f_n , $n=1, 2, 3, \dots$ β -mens.
Então $\liminf f_n$ é β -mensurável.

(7) Se f e g são β -mens. então $f \vee g$ e $f \wedge g$ são β -mens.

Prova

(1) Decorre de $f|_{X_m}^{-1}(0) = X_m \cap f^{-1}(0)$.

(2) $(g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(\bar{g}^{-1}(0)) \in \beta$ pois $\bar{g}^{-1}(0)$ é aberto.

(3) As aplicações consideradas são composições de $f: X_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ com as seguintes funções contínuas de $\overline{\mathbb{R}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ definidas por:

$$y \rightarrow ay, \quad y \rightarrow a+y, \quad y \rightarrow |y|^a,$$

$$y \rightarrow y \vee 0, \quad y \rightarrow (-y) \vee 0.$$

(4) Observemos que $f+g$ resulta definida num conjunto de β pois que

$$\{x: f=\infty \text{ e } g=-\infty\} \cup \{x: f=-\infty \text{ e } g=\infty\} \in \beta.$$

Que $f+g$ é β -mensurável decorre de:

$$\{x: f+g < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x: f < r\} \cap \{x: g < a-r\})$$

Observemos que fg resulta definida num conjunto X_{fg} de β pois que:

$$\{x: f=0 \text{ e } |g|=\infty\} \cup \{x: |f|=\infty \text{ e } g=0\} \in \beta.$$

Seja $X_\infty = \{x: |f|=\infty \text{ e } |g|=\infty\}$.

É imediato que $(fg)|_{X_\infty}$ é β -mens.

Em $X_{fg} \sim X_\infty$ temos:

$$fg = \frac{1}{4} (|f+g|^2 - |f-g|^2)$$

donde $(fg)|_{X_{fg} \sim X_\infty}$ é β -mens.

Por (1) fg é β -mens.

$$(5) \{x: \sup f_n \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f_n \leq a\}$$

$$\{x: \inf f_n \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f_n \geq a\}$$

$$\overline{\lim} f_n = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n$$

$$\underline{\lim} f_n = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n$$

(6) Como $\{x: \underline{\lim} f_n = \overline{\lim} f_n\} \in \beta$, temos que $\underline{\lim} f_n$ é β -mens.

(7) Basta fazer $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_n = 0$, $n = 3, 4, \dots$ em (5).

(c.q.d.).

1.4.4 Convenção

Seja μ uma medida em (X, β) e P uma propriedade atribuível aos elementos de X . Então " $P(x)$ μ -q.s." significa que a propriedade P se verifica em X com exceção de um conjunto de medida zero. Escreveremos ϕ -q.s. onde ϕ é uma medida externa para significar μ -q.s. onde μ é a medida induzida. A abreviação q.s. se lê: "quasi sempre".

1.4.5 Definição

Seja μ medida em (X, β) . Dizemos que f é μ -mensurável se f é definida μ -q.s. e f é β -mensurável.

Se ϕ é medida externa dizemos que f é ϕ -mensurável se f é μ -mensurável para a medida induzida μ .

1.4.6 Observação

As propriedades 1.4.4 (1, 2, 3, 5, 7) continuam válidas se substituírmos " β -mens" por " μ -mens."

1.4.7 Proposição

Seja $\phi : 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medida externa e f definida ϕ -q.s. em X com valores em $\overline{\mathbb{R}}$. Então f é ϕ -mensurável se e só se:

$$\phi(T) \geq \phi(T \cap \{x : f \leq a\}) + \phi(T \cap \{x : f \geq b\})$$

$\forall T \subset X$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$.

Prova

(1) A necessidade da condição é imediata.

(2) Suficiência.

Seja $r \in \mathbb{R}$. Provemos que $\{x : f < r\}$ é ϕ -mens.

Sejam $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ tais que $a_n \uparrow r$ e $a_n < a_{n+1}$, $\forall n$.

Seja $A_k = \{x : a_k \leq f \leq a_{k+1}\}$ e $T \subset X$, $\phi(T) < \infty$. Provemos por indução que

$$\phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n A_{2k-1})) \geq \sum_{k=1}^n \phi(T \cap A_{2k-1})$$

Para $m=1$ é trivialmente verdadeiro.

Suponhamos verdadeiro para n e provemos para $n+1$.

Seja $T' = T \cap (\bigcup_{k=1}^{n+1} A_{2k-1})$. Pela hipótese da proposição temos:

$$\begin{aligned} \phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^{n+1} A_{2k-1})) &= \phi(T') \geq \\ &\geq \phi(T' \cap \{f \leq a_{2n}\}) + \phi(T' \cap \{f \geq a_{2n+1}\}) = \\ &= \phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n A_{2k-1})) + \phi(T \cap A_{2n+1}) \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução temos:

$$\phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^{n+1} A_{2k-1})) \geq \sum_{k=1}^{n+1} \phi(T \cap A_{2k-1})$$

Analogamente provamos que:

$$\phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n A_{2k})) \geq \sum_{k=1}^n \phi(T \cap A_{2k})$$

Então:

$$\sum_{k=1}^n \phi(T \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \phi(T \cap A_{2k-1}) + \sum_{k=1}^n \phi(T \cap A_{2k}) \leq$$

$$\leq \phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n A_{2k-1})) + \phi(T \cap (\bigcup_{k=1}^n A_{2k})) \leq 2\phi(T) < \infty.$$

donde a serie $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(T \cap A_k)$ é convergente.

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \phi(T \cap A_k) < \varepsilon.$$

Teremos então:

$$\begin{aligned} & \phi(T \cap \{f < r\}) + \phi(T \cap \{f \geq r\}) \leq \\ & \leq \phi(T \cap \{f \leq a_{n_0}\}) + \sum_{k=n_0}^{\infty} \phi(T \cap \{a_k \leq f \leq a_{k+1}\}) + \\ & \quad + \phi(T \cap \{f \geq r\}) < \\ & < \phi(T \cap \{f \leq a_{n_0}\}) + \phi(T \cap \{f \geq r\}) + \varepsilon \leq \phi(T) + \varepsilon. \end{aligned}$$

onde a ultima desigualdade provem da hipotese da proposição

Pela arbitrariedade de ε em:

$$\phi(T \cap \{x: f < r\}) + \phi(T \cap \{x: f \geq r\}) \leq \phi(T) + \varepsilon$$

temos que $\{x: f < r\}$ é ϕ -meno. (c.q.d.).

1.4.8 Definição

Seja f função μ -mens. e $E \in \beta$. Definimos supremo essencial e infimo essencial de f em E por:

$$\text{ess. sup}_E f = \inf_{\mu(N)=0} \sup_{x \in E \setminus N} f(x).$$

$$\text{ess. inf}_E f = \sup_{\mu(N)=0} \inf_{x \in E \setminus N} f(x).$$

§5. Integral de funções mensuráveis positivas

1.5.1 Neste paragrafo estaremos sempre nos referindo ao espaço de medida (X, β, μ) .

1.5.2 Definição

Dizemos que $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ é função simples se é definida por

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad E_k \in \beta \text{ disjuntos.}$$

É evidentemente uma função μ -mens.

1.5.3 Lema

Seja $f \geq 0$, μ -mens. Então existe uma sequência não decrescente de funções simples $\varphi_n \geq 0$ tais que $\varphi_n \uparrow f$ μ -q.s.

Prova

As φ_n definidas por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \text{ não é definida em } x \\ n & \text{se } n \leq f(x) \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 2, \dots, n2^n. \end{cases}$$

satisfaz as condições,

(c.q.d.)

1.5.4 Definição

Seja $\varphi \geq 0$ função simples definida por

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$$

e $E \in \beta$. Definimos integral de φ sobre E por:

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k \cap E)$$

1.5.5 Observação

É fácil verificar que a definição independe da particular representação de φ .

Quando E não é mencionado sub-entende-se $E = X$.

1.5.6 Propriedades

Sejam $\varphi \geq 0$, $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$ funções simples, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, e $E, E_1, E_2 \in \beta$ com $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Então:

$$(1) \int_E c \varphi d\mu = c \int_E \varphi d\mu.$$

$$(2) \int_E (\varphi_1 + \varphi_2) d\mu = \int_E \varphi_1 d\mu + \int_E \varphi_2 d\mu$$

$$(3) \int_{E_1 \cup E_2} \varphi d\mu = \int_{E_1} \varphi d\mu + \int_{E_2} \varphi d\mu$$

$$(4) \int_E \varphi d\mu \geq 0, \quad \int_E \varphi d\mu = 0. \Leftrightarrow \varphi = 0 \quad \mu\text{-q.s.}$$

$$(5) \varphi_1 \leq \varphi_2 \Rightarrow \int_E \varphi_1 d\mu \leq \int_E \varphi_2 d\mu.$$

$$(6) \int_E \varphi d\mu \leq \max_E \varphi \cdot \mu(E).$$

$$(7) \mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E \varphi d\mu = 0.$$

1.5.7 Lema

Sejam $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ duas seqüências não decrescentes de funções simples ≥ 0 e $E \in \beta$. Se $\lim \varphi_n = \lim \psi_n$ μ -q.s. em E , então:

$$\lim \int_E \varphi_n d\mu = \lim \int_E \psi_n d\mu.$$

Prova

i) Seja $Z \in \beta$ tal que $\mu(Z) = 0$, o conjunto excepcional. Como

$$\int_Z \varphi_n d\mu = \int_Z \psi_n d\mu = 0, \quad \forall n,$$

basta provar que:

$$\lim \int_{E \setminus Z} \varphi_n d\mu = \lim \int_{E \setminus Z} \psi_n d\mu.$$

Podemos então supor sem perda de generalidade que $Z = \emptyset$.

Provemos que $\lim \int_E \varphi_n d\mu \geq \int_E \psi_k d\mu$, $\forall k$.

iii) Seja $\int_E \psi_k d\mu = \infty$.

Então existe $A \subset E$, $A \in \beta$ tal que

$$\psi_k(x) = a > 0 \text{ para } x \in A \text{ e } \mu(A) = \infty.$$

Seja $A_n = \{x \in E : \varphi_n(x) \geq \frac{a}{2}\}$.

A sequência A_n é não decrescente e $\cup A_n \supset A$.

$$\begin{aligned} \text{Logo } \lim \int_E \varphi_n d\mu &\geq \lim \frac{a}{2} \mu(A_n) = \\ &= \frac{a}{2} \mu(\cup A_n) \geq \frac{a}{2} \mu(A) = \infty \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } \lim \int_E \varphi_n d\mu \geq \int_E \psi_k d\mu.$$

iv) Seja agora $\int_E \psi_k d\mu < \infty$.

Seja $E_0 = \{x \in E : \psi_k(x) > 0\}$. Então $\mu(E_0) < \infty$.

$$\text{Se } \mu(E_0) = 0 \text{ temos } \lim \int_E \varphi_n d\mu \geq 0 = \int_E \psi_k d\mu.$$

Portanto resta examinar o caso $0 < \mu(E_0) < \infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $x \in E_0 \Rightarrow \psi_k(x) - \frac{\varepsilon}{\mu(E_0)} > 0$

$$B_n = \left\{ x \in E : \varphi_n(x) \geq \psi_k(x) - \frac{\varepsilon}{\mu(E_0)} \right\}$$

Tomos $B_m \in \beta$, $\{B_m\}$ é não decrescente
e $\cup B_m \subset E_0$.

$$\begin{aligned}
 \int_E \varphi_m d\mu &\geq \int_{E_0 \cap B_m} \varphi_m d\mu \geq \int_{E_0 \cap B_m} \left(\psi_k - \frac{\varepsilon}{\mu(E_0)} \right) d\mu = \\
 &= \int_{E_0 \cap B_m} \psi_k d\mu - \varepsilon \cdot \frac{\mu(E_0 \cap B_m)}{\mu(E_0)} \geq \int_{E_0 \cap B_m} \psi_k d\mu - \varepsilon = \\
 &= \int_{E_0} \psi_k d\mu - \int_{E_0 \sim B_m} \psi_k d\mu - \varepsilon \geq \\
 &\geq \int_{E_0} \psi_k d\mu - \max_E \psi_k \cdot \mu(E_0 \sim B_m) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Como $(E_0 \sim B_m) \downarrow \emptyset$ e $\mu(E_0 \sim B_1) < \infty$
temos que $\mu(E_0 \sim B_m) \rightarrow 0$.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ e em seguida $\varepsilon \rightarrow 0$
temos:

$$\lim \int_E \varphi_m d\mu \geq \int_E \psi_k d\mu$$

v) Fazendo agora $k \rightarrow 0$ obtemos

$$\lim \int_E \varphi_m d\mu = \lim \int_E \psi_k d\mu$$

e por simetria temos a desigualdade oposta,
(c.q.d.)

1.5.8 Definição

Seja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, μ -mens. Seja $\{\varphi_n\}$ sequência de funções simples $\varphi_n \geq 0$, tais que $\varphi_n \uparrow f$ μ -q.s. e seja $E \in \beta$. Definimos integral de f sobre E por

$$\int_E f d\mu = \lim \int_E \varphi_n d\mu$$

1.5.9 Observações

- (1) Pelo lema 1.5.3 existe a sequência $\{\varphi_n\}$.
- (2) Pelo lema 1.5.7 a definição independe da particular sequência.
- (3) A definição 1.5.8 estende a definição 1.5.4.

1.5.10 Propriedades

Sejam $f \geq 0$, $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ funções μ -mens. $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e $E, E_1, E_2 \in \beta$ com $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Então:

$$(1) \int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$$

$$(2) \int_E (f_1 + f_2) d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu$$

$$(3) \int_{E_1 \cup E_2} f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$$

$$(4) \int_E f d\mu \geq 0, \quad \int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

$$(5) f_1 \leq f_2 \text{ } \mu\text{-q.s.} \Rightarrow \int_E f_1 d\mu \leq \int_E f_2 d\mu$$

$$(6) \quad \int_E f d\mu \leq \text{ess. sup}_E f \cdot \mu(E)$$

$$(7) \quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0.$$

1.5.11 TEOREMA 4 (Convergência monotônica)

Se $f_n \geq 0$ são μ -mens. e $f_n \uparrow f$ μ -q.s. em $E \in \beta$ então:

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu.$$

Prova

Sem perda de generalidade suporemos as $\frac{f}{f_n}$ definidas em todo X e $f_n(x) \uparrow f(x)$, $\forall x \in X$.

Sejam $\psi_{nk} \geq 0$ funções simples tais que $\psi_{nk} \uparrow \frac{f}{f_n}$.

Teremos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1k} & \dots & \longrightarrow & \frac{f}{f_1} \\
 \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2k} & \dots & \longrightarrow & \frac{f}{f_2} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nk} & \dots & \longrightarrow & \frac{f}{f_n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 \psi_{k1} & \psi_{k2} & \dots & \psi_{kk} & \dots & \longrightarrow & \frac{f}{f_k} \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & f
 \end{array}$$

Seja $\varphi_k = \psi_{1k} \vee \psi_{2k} \vee \dots \vee \psi_{kk}$

Temos $\varphi_k \uparrow$ e para $n \leq k$

$$\psi_{nk} \leq \varphi_k \leq f_k$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ temos $f_n \leq \lim \varphi_k \leq f$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos $f \leq \lim \varphi_k \leq f$
isto é $\varphi_k \uparrow f$.

De $\psi_{nk} \leq \varphi_k \leq f_k$

$$\text{vem} \quad \int_E \psi_{nk} d\mu \leq \int_E \varphi_k d\mu \leq \int_E f_k d\mu.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ temos:

$$\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \lim \int_E f_k d\mu.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos:

$$\lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \lim \int_E f_n d\mu$$

isto é $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$ (c.q.d.)

1.5.12 Corolário 1

Se $f_n \geq 0$ são μ -mens. e $E \in \beta$ então:

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

1.5.13 Corolário 2

Se $f \geq 0$ e' μ -mens. então $\lambda: \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \beta$$

e' uma medida em (X, β) absolutamente contínua em relação a μ .

§6 - Integral de funções integráveis

1.6.1. Neste parágrafo estaremos sempre nos referindo ao espaço de medida (X, β, μ) .

1.6.2 Definição

Seja f definida μ -q.s. em X com valores em $\overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que f é μ -integrável se f é μ -mensurável e

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

1.6.3 Observação

f é μ -integrável se e só se:

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_X f^- d\mu < \infty.$$

1.6.4 Definição

Seja f μ -integrável e $E \in \beta$. Definimos integral de f sobre E por:

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

1.6.5 Observação

A definição 1.6.4 estende a definição de integral de funções μ -mens. não negativas com integral finita.

1.6.6 Proposição

Seja f μ -integrável.

Então $\{x: |f(x)| = \infty\}$ tem medida nula e a medida μ em $\{x: f(x) \neq 0\}$ é σ -finita.

Prova

Pela definição de integral basta considerar o caso $f \geq 0$.

Se fosse $\mu\{x: f(x) = \infty\} > 0$ teríamos

$$\int_X f d\mu = \infty$$

e f não seria μ -integrável.

Os conjuntos $X_n = \{x: f(x) > \frac{1}{n}\}$ pertencem a $\mathcal{F}$

$$\cup X_n = \{x: f(x) > 0\}$$

$$\text{e } \mu(X_n) = \int_{X_n} d\mu \leq n \int_{X_n} f d\mu \leq n \int_X f d\mu < \infty.$$

(c.q.d.)

1.6.7. Propriedades (da integral)

Sejam f, g μ -integráveis e $E \in \beta$. Então:

(1) As funções μ -integráveis formam um espaço vetorial real $L_1(X, \beta, \mu)$.

(2) A aplicação $I: L_1(X, \beta, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $I(h) = \int_E h d\mu$ é linear.

(3) $f \leq g$, μ -q.s. $\Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

(4) Se h é μ -mens. e $|h| \leq |f|$ μ -q.s. então h é μ -integrável.

(5) $\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$.

(6) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $E \in \beta$, $\mu(E) < \delta$ então $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$.

Prova

(1) a (5) são imediatas.

(6) Seja $g_n = |f| \wedge n$. Então g_n é μ -integrável.

$g_n \geq 0$ e $g_n \uparrow |f|$ μ -q.s.

Então dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que:

$$\int_E |f| d\mu < \int_E g_{n_0} d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leq n_0 \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2 n_0}$. (c.q.d.)

1.6.8. LEMA (Fatou)

Sejam $f_n \geq 0$, μ -mens. e $E \in \beta$. Então:

$$\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

Prova

Como $\underline{\lim} f_n = \lim_K \inf_{n \geq K} f_n$, μ -q.s.

temos $\inf_{n \geq K} f_n \uparrow \underline{\lim} f_n$, μ -q.s.

Pelo Teorema da Convergência Monotônica:

$$\int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \lim_K \int_E \inf_{n \geq K} f_n d\mu$$

De $\int_E \inf_{n \geq K} f_n d\mu \leq \int_E f_K d\mu$, $\forall K$

vem $\lim_K \int_E \inf_{n \geq K} f_n d\mu \leq \lim_K \int_E f_K d\mu$

donde $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$ (c.q.d.)

1.6.9 TEOREMA 5 (Convergência Dominada)

Seja g μ -integrável. Sejam f_n , $n=1,2,\dots$ μ -mens. tais que $|f_n| \leq g$, μ -q.s. e $f_n \rightarrow f$, μ -q.s.
Então f e f_n são μ -integráveis e

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \beta.$$

Prova

Como $|f_n| \leq g$ μ -q.s. as f_n são integráveis.

Como $f_n \rightarrow f$ μ -q.s. f é μ -mensurável.

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos $|f| \leq g$ μ -q.s.

donde f é μ -integrável.

Como $g - f_n \geq 0$ μ -q.s., e são μ -mens. temos pelo Lema de Fatou:

$$\int_E (g - f) d\mu = \int_E \liminf (g - f_n) d\mu \leq \liminf \int_E (g - f_n) d\mu$$

donde
$$\int_E f d\mu \geq \liminf \int_E f_n d\mu.$$

Como $g + f_n \geq 0$ μ -q.s. e são μ -mens. temos novamente pelo Lema de Fatou

$$\int_E (g + f) d\mu = \int_E \liminf (g + f_n) d\mu \leq \liminf \int_E (g + f_n) d\mu$$

donde
$$\int_E f d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu.$$

Portanto
$$\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu. \quad (\text{c.q.d.})$$

1.6.10 Cowling

Seja f μ -integrável. então $\lambda: \beta \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu \quad E \in \beta$$

é uma medida com sinal, finita, em $(X, \mathcal{E})$.

§7. O Teorema de Radon-Nikodym

1.7.1 TEOREMA 6 (Radon-Nikodym)

Sejam μ e ν medidas em (X, β) tais que $\nu \ll \mu$ e μ é σ -finita.
Então existe $f \geq 0$, μ -mens. tal que:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \beta.$$

Se $g \geq 0$, μ -mens. é outra função com a mesma propriedade, então $f = g$, μ -q.s.

Prova

(1) Seja inicialmente $\mu(X) < \infty$.

Vamos introduzir no conjunto

$$\mathcal{H} = \{h \geq 0, \mu\text{-mens} : \int_E h d\mu \leq \nu(E), \forall E \in \beta\}$$

que é não vazio pois $0 \in \mathcal{H}$, a relação de pre-ordem

$$h < g \stackrel{\text{def}}{\iff} \int_X h d\mu \leq \int_X g d\mu$$

Mostremos que $\mathcal{H}$ é indutivo.

Seja $\mathcal{Z} \subset \mathcal{H}$ totalmente pre-ordenado e

$$\alpha = \sup_{h \in \mathcal{Z}} \int_X h d\mu$$

Sejam $g_n \in \mathcal{Z}$ tais que $\int_X g_n d\mu \rightarrow \alpha$.

Construamos $h_n = g_1 \vee g_2 \vee \dots \vee g_n$.

Mostremos por indução que $h_n \in \mathcal{H}$, $\forall n$.

Para $n=1$, $h_1 = g_1 \in \mathcal{H}$.

Suponhamos $h_n \in \mathcal{H}$.

Dado $E \in \beta$ seja:

$$A = \{x \in E : (h_n \vee g_{n+1})(x) = h_n(x)\}$$

$$\text{Então } \int_E h_{n+1} d\mu = \int_E (h_n \vee g_{n+1}) d\mu =$$

$$= \int_A h_n d\mu + \int_{E \setminus A} g_{n+1} d\mu.$$

Como $h_n, g_{n+1} \in \mathcal{H}$ temos:

$$\int_E h_{n+1} d\mu \leq \nu(A) + \nu(E \setminus A) = \nu(E).$$

Logo $h_{n+1} \in \mathcal{H}$ e a prova por indução está terminada.

Pela definição de h_m , $\{h_m\}$ é não decrescente.

Seja $h_m \uparrow h_0$.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em:

$$\int_E h_m d\mu \leq \nu(E), \quad \forall E \in \beta,$$

obtemos $\int_E h_0 d\mu \leq \nu(E), \quad \forall E \in \beta,$

donde $h_0 \in \mathcal{H}$. Como $h_m \geq g_m$ temos:

$$\int_X h_m d\mu \geq \int_X g_m d\mu$$

e passando ao limite

$$\int_X h_0 d\mu \geq \alpha.$$

Então para $\forall h \in \mathcal{L}$ temos $\alpha \geq \int_X h d\mu$
donde $h_0 \geq h$.

Portanto $\mathcal{H}$ é indutivo.

Pelo Lema de Zorn existe um elemento maximal $f \in \mathcal{H}$, isto é: tal que

$$\int_E f d\mu \leq \nu(E), \quad \forall E \in \beta$$

$$\text{e} \quad \int_X f d\mu \geq \int_X h d\mu, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

(2) Mostremos agora que f é a função procurada, isto é, mostremos que

$$\int_E f d\mu = \nu(E) \quad , \quad \forall E \in \beta.$$

Seja $E_0 \in \beta$, qualquer.

Se $\int_{E_0} f d\mu = \infty$ teremos necessariamente

$$\int_{E_0} f d\mu = \nu(E_0).$$

Examinemos então o caso $\int_{E_0} f d\mu < \infty$.

Suponhamos (por contradição) que

$$\int_{E_0} f d\mu < \nu(E_0).$$

Então existe $k_0 > 0$ tal que para $\forall k \geq k_0$

$$\int_{E_0} \left(f + \frac{1}{k}\right) d\mu < \nu(E_0).$$

Consideremos a medida com sinal λ definida em $(E_0, \beta \cap 2^{E_0})$ por

$$\lambda(E) = \int_E \left(f + \frac{1}{k}\right) d\mu - \nu(E) \quad , \quad E \in \beta, E \subset E_0.$$

Pelo Teorema de decomposição de Hahn, existe $A \in \mathcal{E}_0$ tal que:

$$\int_{E \cap A} \left(f + \frac{1}{k}\right) d\mu - \nu(E \cap A) \leq 0, \quad \forall E \in \beta$$

$$\int_{E \cap (E_0 \setminus A)} \left(f + \frac{1}{k}\right) d\mu - \nu(E \cap (E_0 \setminus A)) \geq 0, \quad \forall E \in \beta.$$

Suponhamos (por contradição) que $\mu(A) > 0$.

Definindo $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{para } x \in A \\ 0 & \text{para } x \in X \setminus A \end{cases}$

temos

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_{E \setminus A} f d\mu + \int_{E \cap A} \left(f + \frac{1}{k}\right) d\mu \leq$$

$$\leq \nu(E \setminus A) + \nu(E \cap A) = \nu(E), \quad \forall E \in \beta$$

e ainda:

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_A \frac{1}{k} d\mu =$$

$$= \int_X f d\mu + \frac{1}{k} \mu(A) > \int_X f d\mu.$$

Portanto $f+g \in \mathcal{H}$ e $f+g > f$ contrariando a hipótese de ser f maximal.

Portanto $\mu(A)=0$ e como $\nu \ll \mu$ também $\nu(A)=0$.

Mas agora

$$\int_{E_0} \left(f + \frac{1}{k}\right) d\mu - \nu(E_0) = \int_{E_0 \sim A} \left(f + \frac{1}{k}\right) d\mu - \nu(E_0 \sim A) \geq 0$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ temos:

$$\int_{E_0} f d\mu \geq \nu(E_0)$$

contrariando a hipótese feita anteriormente que $\int_{E_0} f d\mu < \nu(E_0)$.

Portanto $\int_{E_0} f d\mu = \nu(E_0) \quad \forall E_0 \in \beta$.

(3) Seja agora μ σ -finita.

Sejam $X_k \in \beta$ disjuntos tais que $X = \cup X_k$ e $\mu(X_k) < \infty$, $k=1, 2, \dots$.

Por (2) existe $f_k \geq 0$ μ -mens. sobre X_k tal que:

$$\nu(E \cap X_k) = \int_{E \cap X_k} f_k d\mu, \quad \forall E \in \beta$$

Seja $f \geq 0$ definida por:

$$f(x) = f_k(x) \quad \text{para } x \in X_k, \quad k=1,2,3,\dots$$

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \nu\left(\bigcup (E \cap X_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap X_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap X_k} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap X_k} f d\mu = \\ &= \int_{\bigcup (E \cap X_k)} f d\mu = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

(4) Mostremos a unicidade.

A passagem do caso $\mu(X) < \infty$ para o caso em que μ é σ -finita é trivial. Suponhamos então $\mu(X) < \infty$ e sem perda de generalidade que f e g são definidas para $\forall x \in X$.

Sejam:

$$F_{\infty} = \{x : f(x) = \infty\}, \quad G_{\infty} = \{x : g(x) = \infty\}$$

$$F_m = \{x : f(x) \leq m\}, \quad G_k = \{x : g(x) \leq k\}.$$

Temos :

$$X = F_{\infty} \cap G_{\infty} + (F_{\infty} \sim G_{\infty}) + (G_{\infty} \sim F_{\infty}) + \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_m \cap G_k$$

Sobre $F_\infty \cap G_\infty$ é claro que $f = g$.

Sobre $F_m \cap G_k$ temos

$$\int_{F_m \cap G_k} f d\mu \leq m \mu(X) < \infty$$

$$\int_{F_m \cap G_k} g d\mu \leq k \mu(X) < \infty$$

Logo de $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu \quad \forall E \subset F_m \cap G_k, \quad \exists \epsilon \in \beta$

vem $\int_E (f - g) d\mu = 0, \quad \forall E \subset F_m \cap G_k, \quad \exists \epsilon \in \beta$

donde $f = g$ μ -q.s. em $F_m \cap G_k$.

Mostremos agora que $\mu(F_\infty \cap G_\infty) = 0$.

$$\mu(F_\infty \cap G_\infty) = \mu\left(F_\infty \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_\infty \cap G_k)$$

Se fosse (por contradição) $\mu(F_\infty \cap G_\infty) > 0$ existiria k_0 tal que

$$\mu(F_\infty \cap G_{k_0}) > 0.$$

Teríamos então

$$\int_{F_\infty \cap G_{k_0}} f d\mu = \infty \quad \text{e} \quad \int_{F_\infty \cap G_{k_0}} g d\mu \leq k_0 \mu(X) < \infty$$

o que contradiz $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$, $\forall E \in \beta$.

Logo $\mu(F_\infty \sim G_\infty) = 0$.

Analogamente $\mu(G_\infty \sim F_\infty) = 0$.

Dos resultados obtidos podemos concluir que $f = g$ μ -q.s. em X . (c.q.d.)

1.7.2 Definição

Sejam ν e μ medidas em (X, β) tais que $\nu \ll \mu$ e μ é σ -finita.

A função $f \geq 0$ μ -mensurável definida μ -q.s. pelo Teorema de Radon - Nikodym será denotada por:

$$\left[\frac{d\nu}{d\mu} \right]$$

e será chamada "Derivada de Radon-Nikodym" de ν em relação a μ .

1.7.3. Propriedades

Sejam ν, λ, μ medidas em (X, β) .

(1) Se $\nu \ll \mu$, $\lambda \ll \mu$ e μ é σ -finita

$$\left[\frac{d(\nu + \lambda)}{d\mu} \right] = \left[\frac{d\nu}{d\mu} \right] + \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right]$$

(2). Se $\nu \ll \lambda \ll \mu$ e λ, μ são σ -finitas.

$$\left[\frac{d\nu}{d\mu} \right] = \left[\frac{d\nu}{d\lambda} \right] \cdot \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right]$$

(3) Se $\nu \ll \mu$, $\mu \ll \nu$ e ν, μ são σ -finitas

$$\left[\frac{d\nu}{d\mu} \right] = \left[\frac{d\mu}{d\nu} \right]^{-1}$$

(4) Se $\nu \ll \mu$, μ é σ -finita e $f \geq 0$ é μ -mensurável, então:

$$\int_E f d\nu = \int_E f \cdot \left[\frac{d\nu}{d\mu} \right] d\mu \quad \forall E \in \beta.$$

Prova

(1) Consequência da aditividade da integral.

(2) Seja $\varphi_k \uparrow \left[\frac{d\nu}{d\lambda} \right]$, $\varphi_k \geq 0$, simples.

Suponhamos que

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \chi_{E_{kj}} \quad E_{kj} \in \beta$$

$$\begin{aligned} \int_E \varphi_k d\lambda &= \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \lambda(E_{kj} \cap E) = \\ &= \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \int_{E_{kj} \cap E} \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right] d\mu = \\ &= \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \int_E \chi_{E_{kj}} \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right] d\mu = \int_E \varphi_k \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right] d\mu. \end{aligned}$$

Como $\varphi_k \uparrow \left[\frac{d\nu}{d\lambda} \right]$ teremos fazendo $k \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \int_E \left[\frac{d\nu}{d\lambda} \right] d\lambda = \lim \int_E \varphi_k d\lambda = \\ &= \lim \int_E \varphi_k \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right] d\mu = \int_E \left[\frac{d\nu}{d\lambda} \right] \cdot \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right] d\mu. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto} \quad \left[\frac{d\nu}{d\mu} \right] = \left[\frac{d\nu}{d\lambda} \right] \cdot \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right].$$

(3) e (4) São consequências imediatas de (2).

(c.q.d.)

§8. Produto de Medidas

1.8.1. Seja μ medida em $(X, \mathcal{A})$ e ν medida em (Y, β) .

Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos retângulos $A \times B$ onde $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \beta$ e seja $\mathcal{E}: \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\mathcal{E}(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$.

Indiquemos por $\phi: 2^{X \times Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a medida externa construída pelo METODO I a partir de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}$.

1.8.2 Definição

A medida induzida por ϕ será chamada medida produto de μ por ν e denotada por $\mu \times \nu$.

1.8.3 Observação

$\mu \times \nu$ é medida completa.

1.8.4 Propriedades (da medida externa ϕ).

- (1) ϕ é extensão de $\mathcal{E}$
- (2) Os retângulos em $\mathcal{E}$ são ϕ -mens.
- (3) ϕ é $\mathcal{E}$ -regular.

Prova

(1), (2) e (3) são consequências respectivamente das propriedades 1.3.11 (1), 1.3.11 (2) e 1.3.11 (3).

1.8.5 TEOREMA 7 (Tomelli)

Seja μ medida completa em $(X, \mathcal{A})$
e ν medida completa em (Y, β) .

Seja $f \geq 0$ $\mu \times \nu$ -mensurável e tal que em
 $\{(x, y) : f(x, y) > 0\}$ a medida $\mu \times \nu$ é σ -finita.

Então:

a) $f(x, -)$ é ν -mensurável μ -q.s.

a') $f(-, y)$ é μ -mensurável ν -q.s.

b) $\int_Y f(x, y) d\nu$ é μ -mensurável

b') $\int_X f(x, y) d\mu$ é ν -mensurável

c) $\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f d\nu \right] d\mu$

c') $\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f d\mu \right] d\nu$

Observação

Se μ e ν são σ -finitas então $\mu \times \nu$
é σ -finita e portanto a condição de $\mu \times \nu$ em
 $\{(x, y) : f(x, y) > 0\}$ ser σ -finita é satisfeita
automaticamente para todo $f \geq 0$, $\mu \times \nu$ -mens.

Prova

Pela simetria do enunciado, basta demonstrar
a), b), c) o que será feito através de
generalizações sucessivas.

(1) O Teorema vale para "funções características de retângulos de $\mathcal{C}$ ".

Seja $A \times B \in \mathcal{C}$ e $f = X_{A \times B} = X_A \cdot X_B$.

É claro que $f(x, -) = X_A(x) X_B$ é ν -mens. para $\forall x \in X$.

$$\int_Y X_A(x) X_B d\nu = \nu(B) X_A(x) \quad \text{e} \quad \nu(B) X_A \text{ é } \mu\text{-mens.}$$

$$\int_{X \times Y} X_{A \times B} d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) =$$

$$= \int_X X_A d\mu \int_Y X_B d\nu = \int_X \left[\int_Y X_A \cdot X_B d\nu \right] d\mu =$$

$$= \int_X \left[\int_Y X_{A \times B} d\nu \right] d\mu.$$

(2) O Teorema vale para "funções características de conjuntos de $\mathcal{C}_\sigma$ ".

Seja $E \in \mathcal{C}_\sigma$. Então $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$, $R_k \in \mathcal{C}$.

Como

$$E = R_1 + (R_2 \sim R_1) + \dots + \bigcap_{j=1}^{k-1} (R_k \sim R_j) + \dots$$

é a diferença entre dois elementos de $\mathcal{C}$ e união finita disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, podemos considerar sem perda de generalidade que os $R_k = A_k \times B_k$ são disjuntos.

Seja $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k = \chi_{A_k \times B_k}$

Como por (1) o Teorema vale para cada f_k , é imediata a verificação que vale para f .

(3) O Teorema vale para "funções características de conjuntos de $\mathcal{C}_{\sigma\sigma}$ de medida finita"

Seja $E \in \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$ com $(\mu \times \nu)(E) < \infty$.

Sejam $E_m \in \mathcal{C}_{\sigma}$ tais que $E_m \downarrow E$.

Como $(\mu \times \nu)(E) < \infty$ podemos supor $(\mu \times \nu)(E_1) < \infty$.

Seja $f = \chi_E$ e $f_m = \chi_{E_m}$.

Por (2) o teorema vale para cada f_m .

Verificação de (a).

As $f_m(x, -)$ são ν -mens. $\forall x \in X$.

Como $f_m(x, -) \downarrow f(x, -)$, $f(x, -)$ é ν -mens. $\forall x \in X$.

Verificação de (b).

Por (2) temos:

$$\int_X \left[\int_Y f_1 d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f_1 d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(E_1) < \infty$$

Portanto $\int_Y f_1 d\nu < \infty$, μ -q.s.

Como $f_m(x, -) \leq f_1(x, -)$, a sequência $\{f_m(x, -)\}$ é dominada μ -q.s.

Pelo teorema da convergência dominada

$$\int_Y f_n(x, y) dv \rightarrow \int_Y f(x, y) dv \quad \mu\text{-q.s.}$$

Como por (2) $\int_Y f_n(x, y) dv$ é μ -mens. como

função de x , então $\int_Y f(x, y) dv$ é μ -mensurável μ -q.s.

Verificação de (c)

Por ser $\{f_n\}$ dominada por f_1 e por (2) temos:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \lim \int_{X \times Y} f_n d(\mu \times \nu) = \lim \int_X \left[\int_Y f_n dv \right] d\mu$$

Como a sequência das funções $\int_Y f_n dv$ é dominada por $\int_Y f_1 dv$ tem:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) &= \lim \int_X \left[\int_Y f_n dv \right] d\mu = \\ &= \int_X \left(\lim \int_Y f_n dv \right) d\mu = \int_X \left[\int_Y f dv \right] d\mu \end{aligned}$$

(4) O Teorema vale para "funções características de conjuntos ϕ -mens. de medida zero"

Seja $E \subset X \times Y$ com $\phi(E) = 0$.

Como ϕ é $\mathcal{C}_{0\sigma}$ -regular existe $F \in \mathcal{C}_{0\sigma}$ tal que $F \supset E$ e $(\mu \times \nu)(F) = (\mu \times \nu)(E) = 0$.

Por (3) o teorema vale para X_F .

É fácil agora verificar que vale para X_E . Nessa verificação as hipóteses de serem μ e ν completas são utilizadas.

(5) O Teorema vale para "funções características de conjuntos ϕ -mens. de medida finita"

Seja $E \subset X \times Y$, ϕ -mens. com $(\mu \times \nu)(E) < \infty$.

Como ϕ é $\mathcal{C}_{0\sigma}$ -regular existe $F \in \mathcal{C}_{0\sigma}$ tal que $F \supset E$ e $(\mu \times \nu)(F) = (\mu \times \nu)(E)$.

O Teorema vale para X_F por (3) e vale para $X_{F \setminus E}$ por (4) e portanto vale para $X_E = X_F - X_{F \setminus E}$.

(6) O Teorema vale para "funções simples
 $f = \sum_{k=1}^n a_k X_{E_k}$ onde os E_k são ϕ -mens. de medida finita."

É imediato de (5).

(7) O Teorema vale para "funções $f \geq 0$
 $\mu \times \nu$ -mens. tais que em $\{(x, y) : f(x, y) > 0\}$
a medida $\mu \times \nu$ é σ -finita."

Sejam E_n ϕ -mens. tais que $(\mu \times \nu)(E_n) < \infty$
 e $E_n \uparrow \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$.

Sejam ψ_n funções simples tais que $\psi_n \uparrow f$.

Então $\varphi_n = \psi_n \cdot \chi_{E_n}$ são funções simples
 para as quais por (6) o teorema vale
 e tais que $\varphi_n \uparrow f$.

É fácil verificar agora que o teorema se
 aplica a f .

(c.q.d.).

1.8.6 Corolário

Seja $E \subset X \times Y$, ϕ -mensurável, de medida
 σ -finita.
 Então

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \in \beta \quad \mu\text{-q.s.}$$

$$E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\} \in \mathcal{A} \quad \nu\text{-q.s.}$$

1.8.7 TEOREMA 8 (Fubini)

Seja μ medida completa em $(X, \mathcal{A})$
e ν medida completa em $(Y, \mathcal{B})$.

Seja f $\mu \times \nu$ -integrável.

Então:

$$a) f(x, -) \text{ é } \nu\text{-integrável } \mu\text{-q.s.}$$

$$a') f(-, y) \text{ é } \mu\text{-integrável } \nu\text{-q.s.}$$

$$b) \int_Y f(x, y) d\nu \text{ é } \mu\text{-integrável}$$

$$b') \int_X f(x, y) d\mu \text{ é } \nu\text{-integrável}$$

$$c) \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f d\nu \right] d\mu$$

$$c') \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f d\mu \right] d\nu$$

Prova

Como f é $\mu \times \nu$ -integrável então f^+ é $\mu \times \nu$ -integrável donde f^+ é $\mu \times \nu$ -mensurável e em $\{(x, y) : f^+(x, y) > 0\}$ a medida $\mu \times \nu$ é σ -finita. Pelo teorema de Tonelli

$$f^+(x, -) \text{ é } \nu\text{-mens. } \mu\text{-q.s.}$$

$$f^+(-, y) \text{ é } \mu\text{-mens. } \nu\text{-q.s.}$$

$\int_Y f^+ d\nu$ é μ -mens. e $\int_X f^+ d\mu$ é ν -mens.

$$\int_X \left[\int_Y f^+ d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) < \infty$$

$$\int_Y \left[\int_X f^+ d\mu \right] d\nu = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) < \infty.$$

As ultimas desigualdades provem da $\mu \times \nu$ -integrabilidade de f^+ .

Resulta então que

$\int_Y f^+ d\nu$ é μ -integrável

$\int_X f^+ d\mu$ é ν -integrável.

e ainda que $\int_Y f^+ d\nu < \infty$ μ -q.s. e

$\int_X f^+ d\mu < \infty$ ν -q.s. isto é,

$f^+(x-) \in \nu$ -integrável μ -q.s. e

$f^+(-, y) \in \mu$ -integrável ν -q.s.

Como as mesmas conclusões valem para f^-
e $f = f^+ - f^-$ temos a tese. (c.q.d.)

1.8.8 Observação

Para verificar se f é $\mu \times \nu$ -integrável podemos aplicar o Teorema de Tonelli a $|f|$ quando em $\{(x, y) : |f(x, y)| > 0\}$ a medida $\mu \times \nu$ é σ -finita.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.º 20.570 (Avenida Iguaçu) - Tel. 310-5011

SÃO PAULO — BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

- RT-MAP-7701 - Ivan de Queiroz Barros
On equivalence and reducibility of Generating
Matrices of RK-Procedures - Agosto 1977
- RT-MAP-7702 - V.W.Setzer
A Note on a Recursive Top-Down
Analyzer of N.Wirth - Dezembro 1977
- RT-MAP-7703 - Ivan de Queiroz Barros
Introdução a Aproximação Ótima
Dezembro 1977
- RT-MAP-7704 - V.W.Setzer, M.M.Sanches
A Linguagem "LEAL" para Ensino
básico de Computação - Dezembro 1977
- RT-MAP-7801 - Ivan de Queiroz Barros
Proof of two Lemmas of Interest
In connection with discretization of
Ordinary Differential Equations
Janeiro 1978



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.º 20.570 "Pq. Jd. Acazil" - Tel. 511-0211
SÃO PAULO — BRASIL

RT-MAP-7302 - Silvio Ursic, Cyro Patarra
Exact solution of Systems of Linear
Equations with Iterative Methods

Fevereiro - 1973

RT-MAP-7803 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypohamiltonian Digraphs

Março 1973

RT-MAP-7804 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypotractable Digraphs

Maio 1978

RT-MAP-7805 - W.Hesse, V.W.Setzer
The Line-Justifier: an example of program
development by transformations

Junho 1978

RT-MAP-7806 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap.II - Tópicos Introdutórios
Cap.II - Discretização

Julho 1978

RT-MAP-7807 - Ivan de Queiroz Barros
(Γ, Γ)-Estabilidade e Métodos Preditores-Corretores

Setembro 1978

RT-MAP-7808 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap. III - Métodos de passo progressivo para
Eq. Dif. Ord. com condições iniciais

Setembro 1978



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.º 20.510 (Agência Iguaçu) - Tel. 211-0011
SÃO PAULO - BRASIL

RT-MAP-7809 - V.W.Setzer

Program development by transformations applied
to relational Data-Base queries

Novembro 1978

RT-MAP-7810 - Nguiffo B. Boyom, Paulo Boulos

Homogeneity of Cartan-Killing spheres and
singularities of vector fields

Novembro 1978

RT-MAP-7811 - D.T.Fernandes e C. Patarra

Sistemas Lineares Esparsos, um Método Exato
de Solução

Novembro 1978

RT-MAP-7812 - V.W.Setzer e G.Bressan

Desenvolvimento de Programas por Transformações:
uma Comparação entre dois Métodos

Novembro 1978

RT-MAP-7813 - Ivan de Queiroz Barros

Variação do Passo na Discretização de Eq.Dif.
Ord. com Condições Iniciais

Novembro 1978

RT-MAP-7814 - Martin Grötschel e Yoshiko Wakabayashi

On the Complexity of the Monotone Asymmetric
Travelling Salesman Polytope I: HIPOHAMILTONIAN
FACETS

Dezembro 1978



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Cidade Postal n.º 20.570 (Agência Iguaçu) - Tel. 211-0011
SÃO PAULO — BRASIL

RT-MAP-7815 - Ana F. Humes e E. I. Jury

Stability of Multidimensional Discrete Systems:
State-Space Representation Approach

Dezembro 1978

RT-MAP-7901 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi

On the complexity of the Monotone Asymmetric
Travelling Salesman Polytope II: HYPOTRACEABLE
FACETS

Fevereiro 1979

RT-MAP-7902 - M.M.Sanches e V.W.Setzer

A portabilidade do Compilador para a Linguagem LEAL

Junho 1979

RT-MAP-7903 - Martin Grötschel, Carsten Thomassen,

Yoshiko Wakabayashi
Hypotractable Digraphs

Julho 1979

RT-MAP-7904 - N'Guiffo B. Boyom

Translations non triviales dans
les groupes (transitifs) des
transformations affines.

Novembro 1979

Rt-MAP-8001 - Angelo Barone Netto

Extremos detectáveis por Jatos

Junho 1980



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.º 20.570 (Agência Iguaçu) - Tel. 211-0011
SÃO PAULO - BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-8002 - Ivan de Queiroz Barros

Medida e Integração

Cap. I - Medida e Integração Abstrata - Julho 1980

RT-MAP-8003 - Routo Terada

Fast Algorithms for NP-Hard Problems which are
Optimal or Near-optimal with Probability one

Setembro 1980

RT-MAP-8004 - V.W.Setzer e R.Lapyda

Uma Metodologia de Projeto de Bancos de Dados
para o Sistema ADABAS - Setembro 1980

RT-MAP-8005 - Imre Simon

On Brzozowski's Problem: $(1uA)^m = A^*$ - Outubro 1980

RT-MAP-8006 - Ivan de Queiroz Barros

Medida e Integração

Cap. II - Espaços L_p - Outubro 1980