OCTAVIO AUGUSTO INGLEZ DE SOUSA

O numero de Reynolds e a resistencia fluidodinamica

TÉSE

apresentada á Congregação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para o concurso ao cargo de Professor Catedrático da cadeira de HIDRAULICA; HIDRAULICA URBANA E SANEAMENTO.

1939

"Leonardo era guidato sempre da uno spirito geometrico, o volesse analizzare un oggetto, o volesse concatenare un ragionamento, o generalizzare le proprie idee. Egli sempre voleva che l'esperienza precedesse il ragionar sulle cose. Cosi parlava Leonardo un secolo avanti Bacone".

LEONARDO DA VINCI
(Del moto e misura dell'acqua — Prefazione).

"It has been said that progress in theoretical engineering is an advance in the way of **"thinking".** I am deeply convinced of the importance for the hydraulic engineer of learning **to think** in terms of **varied flow** and of practicing such **thinking** in the everyday approach toward practical problems."

BAKHMETEFF
(Hydraulics of open channels).

Capitulo I

Configuração Genérica do Problema

Introducção

Toda verdadeira siencia, autoconsiente de seus defeitos, uns inevitaveis, outros a remediar num indeterminado futuro, e de suas impressionantes imperfeições, é afinal, em seus aspétos essenciaes e significativos, uma consequencia logica das revoluções inesperadas que néla se operam.

Esses grandes saltos bruscos são como curvas de inflexão na trajetória aparentemente retilinea do pensamento humano, que é a vida manifesta e a alma recondita de todo saber.

O pensamento não é, como ingenuamente presupõem alguns, sempre o mesmo, não segue uma rota prevista de antemão, não se sujeita a normas inflexiveis traçadas **a priori,** não se presta a induções arbitrarias. Só obedece, autoconsientemente, ás suas proprias leis, ás suas proprias necessidades imperiosas, aos seus altos designios, á profunda natureza cosmica do seu intimo ser.

Desse panorama espiritual que o pensamento domina, surge o inesperado das grandes descobertas, a magnitude do conhecimento, a linha de grandes inflexões que a siencia vae traçando em sua marcha.

Subordinada dinamicamente ao imperativo do pensamento humano, por si sempre livre, pensamento que em sua mais alta e pura expressão independe do mundo fisico, a Siencia é a historia de um dos aspétos da atividade humana, do aspeto que se volve ao estudo do mundo fisico por meio dos sentidos e do cerebro que se acha ligado aos sentidos.

Tambem na Mecanica dos Fluidos, sobretudo em seu ramo mais técnico e pratico que tem o nome de Hidraulica, o fatôr inesperado dessas curvas de inflexão do pensamento teria que se revelar.

"Siencia de coeficientes", como a denominaram alguns espiritos matematicos do seculo XIX, a Hidraulica parecia até 1880 condenada ao empirismo e ao "mais ou menos" das numerosas formulas experimentaes.

O genio penetrante de Osborne Reynolds operou fecunda revolução de imenso alcance no campo dos conhecimentos hidrodinamicos. Dessa genial revolução, que vae buscar a sua inspiração retrocedendo de quatro seculos ao genio primitivo de Leonardo da Vinci, tirou a Hidraulica a sua nova feição, hoje orientada, como queria Leonardo, pelo consorcio entre analise matematica e experimentação: calculo e laboratorio.

Com Reynolds, e, depois de Reynolds, com os seus grandes dicipulos e continuadores, a Hidraulica resurgiu do seu tumulo de coeficientes inexpressivos.

Resurgiu como nova siencia. A nova Hidraulica, ostentando a sabedoria que poderia conter a antiga, tem a mais a pujança que lhe deu a concepção de Reynolds, possivel de se resumir num simples parametro adimensional, numa simples constante especifica: o numero de Reynolds.

Antes de Reynolds é Boussinesq quem se aplica ao torturante problema da resistencia fluidodinamica em regime turbulento. Não o resolve, mas deixa mésse preciosa de observações, de relações entre os diversos fatôres que intervêm no fenomeno.

Ele é o precursor das novas concepções. Prepara o caminho de Reynolds.

De Boussinesq disse Bakhmeteff em seu tratado sobre os canaes descobertos: "The distinction between **states of flow** was made clear by Boussinesq (**Essai sur la théorie des eaux courantes**). This **opus magnum** presents a cornerstone in the development of mechanic of fluids, and remains a treasure of inspiring suggestions. Among other features, we owe to Boussinesq the term **turbulent motion**".

Com Reynolds se transforma a teoria do movimento das correntes fluidas, no seu duplo aspéto laminar e turbulento, esclarece-se o problema da resistencia fluidodinamica, renásce e se amplifica a teoria da semelhança inaugurada por Newton, continuada por Froude, e aplicada com exito pelos fisicos modernos. As duas grandes concepções, a de Boussinesq e a de Newton, se unem para constituir, á luz das concepções de Reynolds, a moderna Fluidodinamica, com as suas importantes aplicações á Hidraulica, á Nautica e á Aéronautica.

Na antiga Hidrodinamica, repleta de longos desenvolvimentos matematicos, as abstrações, afastando-se cada vez mais da realidade exterior, construiam uma estrutura logica artificial que a tudo dominava. Na velha Hidraulica, divorciada cada vez mais da primitiva, mas fecunda, concepção de Leonardo da Vinci, cada problema era penosamente tratado em separado. Faltava-lhe uma vista de conjunto que relacionasse e iluminasse os diversos problemas.

Perdia-se gradualmente o contacto das realidades. Hipóteses subjetivas, mas irreaes, imperavam. O seu valor para resolver os problemas imediatos ficava abaixo de aproximações empiricas, e parecia provir de ilusorias conjecturas ou de vagas probabilidades.

A Hidraulica se desagregava, como a sua mestra mais sábia, a Hidromecanica, em pequenas ilhas monotonas e inexpressivas com o nome de problemas praticos, tudo assinalado, como cruses num cemitério, por coeficientes estéreis a lamentarem a ausencia do verdadeiro Conhecimento. Os espiritos mais exigentes, habituados á precisão e ao rigor da analise matematica, a apodavam de "siencia de coeficientes". E com este apodo e com esta triste esterilidade se ia arrastando por entre a Siencia e a Técnica a veneravel Hidraulica, filha diléta de Leonardo.

Breve resumo.

Newton fundou o que nos aparéce hoje como essencial no nosso conhecimento da viscosidade e da resistencia. A ele devemos a primeira lei de semelhança mecanica. Egualmente de Newton provem a atual possibilidade de unir as duas teorias, ambas desenvolvidas depois pela concepção de Reynolds: a da semelhança fluidodinamica e a da viscosidade, como fatôr decisivo na equação da resistencia.

Naturalmente, como consequencia da atividade de Newton, dêle nos proveiu a equação mais conhecida exprimindo a resistencia fluidodinamica em função da velocidade.

Da compreensão do conjunto destas concepções nasce um melhor entendimento do problema da resistencia. Pedindo á teoria geral de Boussinesq a sua capacidade de definir com suficiente precisão a turbulencia ou a laminaridade do fenomeno, pode-se coordenar as idéas de Reynolds em torno das de Newton, e obtem-se o que os hidraulistas chamaram de "escola ingleza", cujo inspirador é Reynolds.

E assim, com o auxilio que veiu, depois de Reynolds, dos trabalhos de Prandtl, Karman, Mises, Levi-Civita, poderemos expôr sumariamente um dos capitulos mais interessantes da Hidraulica moderna: resistencia entre solidos e correntes fluidas, laminares e turbulentas, á luz do numero de Reynolds e das suas outras concepções.

Viscosidade, e seus primeiros efeitos dinamicos.

O fluido perfeito, idealmente suposto desprovido absolutamente de viscosidade, não existe na realidade.

Todos os fluidos naturaes se afastam menos ou mais desse estado ideal que é um estado asintotico para o qual tende o fluido natural, quando se admite que a sua viscosidade tende para zéro.

Que o fluido perfeito possa ser identificado com um fluido natural, cuja viscosidade é imensamente pequena, é ponto discutivel: os ultimos trabalhos de Prandtl e Karman, bem como a concepção de Villat, indicam que a proposição é verdadeira para certos casos, nos quaes se possa encarar o sistema como em equilibrio, isto é, equipara-lo á situação dos fluidos naturaes no regime hidrostatico.

No estado de equilibrio, os fluidos naturaes são regidos pelas mesmas leis que regulam os fluidos perfeitos ou não viscosos, desde que se suponha imodificada a estrutura molecular de isotropia simetrica, commum aos fluidos em equilibrio. A isotropia simetrica se entende corresponder a uma estrutura molecular homogenea e constante. Quer dizer: o fluido tem as mesmas propriedades fisicas em todas as direções de cada um dos seus pontos, e em ambos os sentidos. Se o corpo não é homogeneo, a estrutura molecular poderá variar de um ponto a outro, mas no estado de repouso, se a estrutura é a mesma num dado ponto, a viscosidade não influe sobre as leis de equilibrio.

Viscosidade, atrito, resistencia, são as formas mais frequentes com que na natureza se manifestam as ações mutuas entre solidos e fluidos. São forças modificadoras do movimento. Tendem, pois, a transformar os resultados das equações geraes da dinamica dos fluidos perfeitos.

Quando o fluido se acha em movimento, em virtude do deslocamento das particulas fluidas, altera-se o estado isotropico em torno a cada ponto. Ações tangenciaes que não existem na ausencia da viscosidade, e que são proporcionaes, por definição, á viscosidade, exercem influencia maior ou menor, mas que de modo geral não é desprezivel, sobre os caractéres essenciaes do fenomeno.

A viscosidade é essencialmente resistencia interna que todo fluido natural opõe ao movimento relativo de duas quaesquer camadas adjacentes. E', pois, uma especie de atrito interno: — atrito que toda camada fluida manifesta contra o movimento das camadas contiguas em toda a superficie de contacto.

Com esta definição se vê que é facil distinguir viscosidade de atrito.

Ha, portanto, hipotéticamente, uma força fluidodinamica que se opõe ao movimento relativo de duas camadas fluidas adjacentes. Força que não existiria no caso ideal dos fluidos perfeitos. Força de viscosidade, ou simplesmente viscosidade, é sinonimo de esforço de torsão que internamente se revela entre duas camadas contiguas quaesquer.

Em estado de movimento, dada a anisotropia que decorre para o fluido, a distribuição dos esforços nos elementos planos passando por um ponto generico é naturalmente diversa do que acontece na situação de repouso. A pressão em cada ponto deixa de ser grandeza escalar, função apenas do tempo e das coordenadas, e tem de ser função geralmente complexa, a valores infinitos, de modulo, direção e sentido, dependentes não só dos elementos primitivos (tempo e espaço), mas outrosim da posição do elemento diferencial sobre o qual essa pressão unitaria se exerce.

A viscosidade, assim considerada, resulta comparavel a uma resistencia interna **especifica**, exercendo-se em cada ponto como força que altera o deslocamento de cada estráto fluido no seio da massa.

Para obter uma suficiente definição matematica, chamemos **f** essa resistencia ou força devida á viscosidade num ponto generico **M** de coordenadas cartesianas **x, y, z.** Representando por **v** a velocidade, e tomando a situação dos eixos coordenados de modo a ter o eixo dos **x** paralelo á direção do movimento, devemos considerar que a força de atrito interno ou de resistencia devida á viscosidade por unidade de área é proporcional ao gradiente de velocidade $\frac{dv}{dy}$.

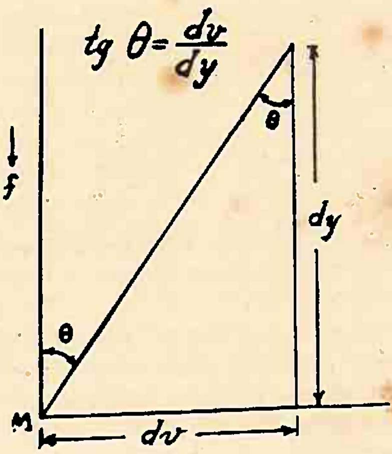


Fig. 1

Esta proporcionalidade foi estabelecida por Newton, cujos trabalhos mostraram que a velocidade varia gradualmente, e não bruscamente ou por saltos, de uma camada para outra camada adjacente.

Os deslocamentos possiveis das particulas fluidas pertencem ao grupo das deformações, em virtude da viscosidade. As tensões, produzidas por estas deformações, são aproximadamente proporcionaes á velocidade das deformações.

Newton estabeleceu, nas considerações que deixou sobre a viscosidade, que a resistencia ao movimento depende do gradiente $\frac{dv}{dy}$, exprimindo assim que, quando duas camadas adjacentes se deslocam uma sobre a outra, a resistencia é proporcional a $\frac{dv}{dy}$.

Designando por μ um fatôr que representa esta proporcionalidade teremos

$$f = \mu \cdot \frac{dv}{dy}$$

O coeficiente μ é o coeficiente de viscosidade.

A viscosidade, assim definida, simples propriedade fisica dos fluidos naturaes, não depende da velocidade de translação das particulas. Depende simplesmente, conforme mostraram as experiencias de Poiseuille confirmadas muitas vezes, da temperatura.

Fisicamente a viscosidade é geralmente definida experimentalmente: uma superficie plana de área **A,** suficientemente grande para se diminuir a influencia do contorno, mergulhada no fluido, é deslocada paralelamente a uma dada direção, isto é, paralelamente a um certo plano situado á distancia **l,** com velocidade constante **v.**

A força necessaria para manter este movimento sendo **f**, temos $f = \mu \cdot \frac{A \cdot v}{l}$

donde
$$\mu = \frac{f}{\frac{Av}{l}}$$

Desta relação resulta uma definição fisica, formulada experimentalmente, para o coeficiente de viscosidade.

Posto que, como vimos, resulte desta definição que os esforços tangenciaes de viscosidade para os diversos fluidos, supondo-se semelhantes as circunstancias do movimento, são dirétamente proporcionaes a este coeficiente μ, não ha duvida, porém, que quando se comparam os diferentes efeitos da viscosidade quanto á modificação que esta imprime á configuração dinamica do fenomeno, é o quociente destes esforços tangenciaes pela inercia do fluido (isto é, pela densidade) que mais importa. O que caracterisa melhor o fenomeno, o que imprime um cunho de apreciação mais impressionante, não é o simples coeficiente μ, e sim o seu quociente pela densidade ρ do fluido.

A este quociente, geralmente representado pela letra ν, dá-se o nome de coeficiente cinematico de viscosidade.

Assim, é ν que é empregado para caracterisar a viscosidade: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Este fatôr determinante e especifico ν é tanto maior quanto menos denso é o fluido.

Experiencias numerosas mostram que este coeficiente cinematico de viscosidade é muito diferente para os diversos fluidos. E' de notar que ν é menor para a agua do que para o ar, ao contrario do primeiro coeficiente μ. Para a temperatura entre 0° e 20° centigrados ν é 7 a 13 vezes maior para o ar do que para a agua.

Embora contraditória á primeira vista, a escolha do coeficiente cinematico de viscosidade obedeceu ao mais profundo critério matematico. E' ν, e não μ, que exprime claramente a resistencia que os fluidos oferecem ás ações de solidos ou de outros fluidos.

No decurso deste estudo da resistencia fluidodinamica, veremos pouco a pouco, sobretudo nos fenomenos particulares que traduzem a influencia do numero de Reynolds, que esta escolha de ν, coeficiente cinematico de viscosidade, se torna cada vez mais justificada.

A denominação de **cinematico** para este coeficiente é muito justa, pois as suas dimensões são independentes da dimensão-força. Ele se manifesta como expressão cinematica, e não dinamica, pois não contem uma dimensão que dependa da força. E' cinematicamente que ν exprime a natureza do movimento de um sistema fluido. Neste sentido, elle exprime a natureza do fenomeno com muito mais evidencia do que μ.

Velocidade reduzida ou numero de Reynolds.

Quando se considera o movimento geral de um sistema fluido relativamente a um corpo solido, ou só prevalecendo por si, sem solido, a velocidade de cada ponto é um valor expressivo do fenomeno, mas não o caracterisa por completo.

Examinando-se os diversos casos do movimento relativo de um fluido e um solido, vê-se que a resistencia, além de ser proporcional, para fluidos viscosos, á primeira potencia da velocidade, ou, em geral, a uma potencia **n** da velocidade, é tambem proporcional ás dimensões lineares do sistema, e inversamente proporcional a $\frac{\mu}{\rho}$.

Assim, aparece desde logo, para caracterisar a resistencia, um fatôr especifico da forma $\frac{\rho l v}{\mu}$ ou $\frac{lv}{\nu}$.

Esse fatôr é adimensional. Basta, para nos convencermos, examinar a dimensão de cada termo. E', pois, uma constante numerica. A este parametro se denomina **velocidade reduzida,** conforme o designa Mises, ou, melhor, numero de Reynolds, que é o nome geralmente usado.

No decorrer deste estudo veremos como do numero de Reynolds dependem as condições de movimento de todos os fluidos fisicos, como ele é fundamental na expressão das leis de semelhança mecanica, e, emfim, como influe de modo importante e revelador em grande numero de problemas fluidodinamicos.

Veremos que a sua influencia pode ser diminuta quando se torna muito grande, seja pelo valor enorme da velocidade, seja pelas dimensões consideraveis do sistema, seja pelos pequenos valores de ν. A sua influencia se torna notavel quando se consideram estrátos ou camadas fluidas de pequena espessura, ou quando a velocidade tende para zéro, ou quando cresce o valor de ν. Em qualquer destes casos, o numero de Reynolds, geralmente abaixo dos chamados grandes numeros, representa um importante papel no fenomeno.

Chamando R o numero de Reynolds, temos
$$R = \frac{vl}{\nu}$$

O nome de **velocidade reduzida,** empregado por Mises (Technische Hydromechanik) significa que R é de fato uma velocidade, uma velocidade reduzida na razão de l para ν, isto é, $\frac{l}{\nu}$. A **redução** desta velocidade é tanto maior quanto maior é a dimensão caracteristica do sistema, e quanto menor fôr o coeficiente cinematico de viscosidade.

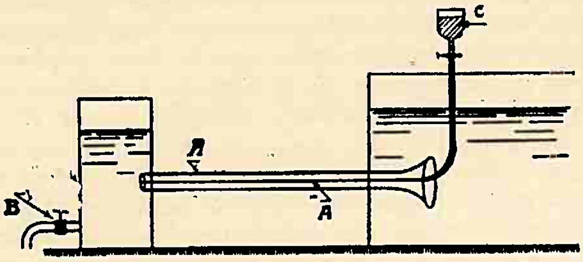


Fig. 2

Aparelho de Reynolds:

A: tubo de vidro com filamento colorido
B: valvula de regularisação da velocidade
C: entrada do liquido e valvula.

Osborne Reynolds, experimentando uma corrente fluida pelo seu metodo de liquido colorido, mostrou que o movimento pode ser de duas naturezas caracteristicas, que correspondem á distinção feita por Boussinesq entre movimento laminar e movimento turbulento.

Introduzindo-se gradualmente o fluido colorido em um recipiente com liquido incolor, aumentando-se lentamente a velocidade, observa-se que o movimento se conserva laminar até um determinado valor da velocidade, chamado **valor critico.** A partir deste valor o movimento é instavel até outro determinado valor da velocidade, que é o segundo valor critico. A partir deste, o movimento se torna nitidamente turbulento, e cada vez mais.

Operando-se com fluidos diferentes, e com dimensões diversas, chega-se á convicção de que a velocidade reduzida $\frac{vl}{\nu}$ é um índice seguro da turbulencia do sistema.

A velocidade reduzida ou numero de Reynolds caracterisa o sistema fluidodinamico. Para valores pequenos de R o movimento é laminar, até o valor critico. Depois, é instavel. A partir da segunda velocidade critica, para numeros grandes de Reynolds, o movimento é turbulento, e tanto mais turbulento quanto maior é o valor do numero de Reynolds.

Das equações de Navier ás equações de Euler.

Em Geometria uma curva se define como asintótica a uma determinada direção quando a sua

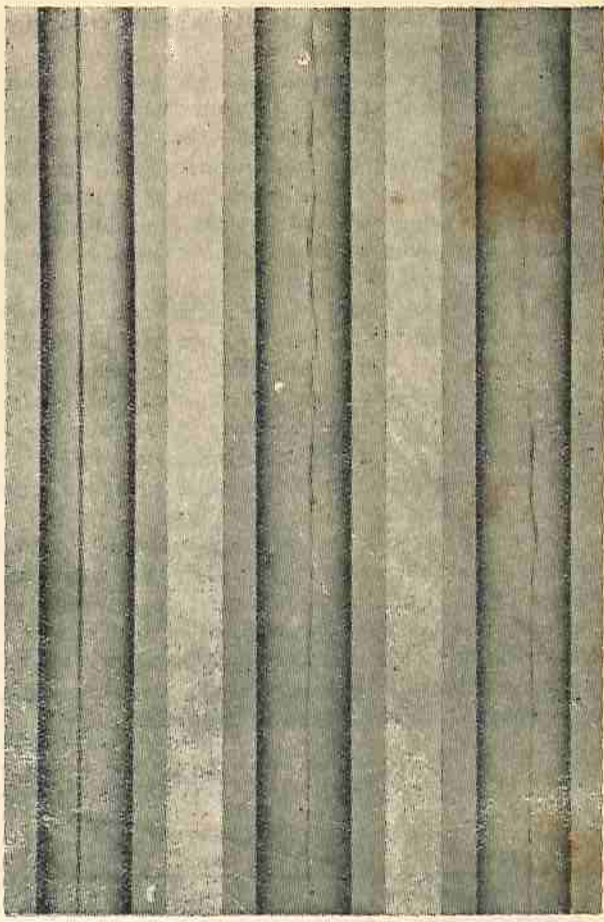


Fig. 3

Experiencias de Reynolds num tubo contendo liquido colorido. O 1.º tubo mostra o movimento laminar até o valor critico da velocidade. O 2.º: o inicio da turbulencia a partir da velocidade critica inferior. O 3.º: franca turbulencia a partir do segundo valor critico da velocidade.

distancia á réta que designa a direção fixa, diminuindo sempre, tende para zéro, sem comtudo ser possivel assinalar o ponto em que esta distancia se anúla. Num percurso finito esta nunca é egual a zéro. Para um percurso imensamente grande, pode-se considerar essa distancia como imensamente pequena.

Vê-se como esta definição dá para o asintotismo uma configuração matematica muito diferente de uma simples e radical interseção entre curva e réta.

Analogamente se passa com muitas concepções e hipóteses que a Fisica julgou necessario estabelecer.

Ha uma grande diferença entre se dizer que o fluido perfeito é o de viscosidade núla, e a outra proposição que tem predominado recentemente nos estudos de Hidrodinamica; que o fluido perfeito deve ser considerado como o estado asintótico de um fluido natural (viscoso), cuja viscosidade tende para zéro.

Esta é a orientação que tem seguido a concepção do fluido perfeito, passo a passo evolvendo com o evolver dos estudos da Dinamica dos Fluidos. E a Hidraulica, sempre subordinada a estudos mais geraes e mais importantes, vem acompanhando, em virtude de sua natureza, o critério cada vez mais analitico-experimental da Fluidodinamica.

Os dois conceitos, acima indicados, são diferentes, no fundo. Dizer que no fluido perfeito a viscosidade é nula, simplifica imediatamente as equações do movimento, mas com esta brusca simplificação perde-se de vista o evolver do fenomeno, passagem de uma pequena viscosidade a uma viscosidade ainda muito menor, ou imensamente pequena.

A segunda concepção, conservando a viscosidade como fator essencial, introduz a sua anulação sómente nos resultados, quando se anulam os termos que contem como fator o coeficiente de viscosidade. Esta concepção, embora na aparencia equivalente á primeira, permite acompanhar o fenomeno, e compreende-lo melhor.

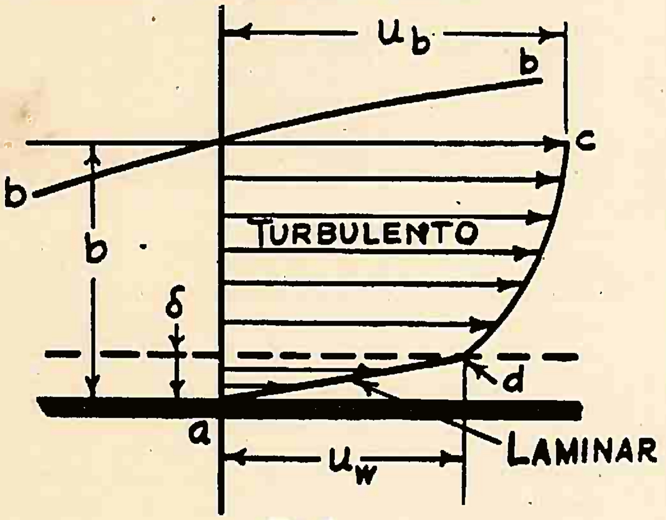


Fig. 4

Camada-limite de Prandtl. — De a a d o movimento é laminar para pequenos valores do numero de Reynolds. De d em diante o movimento é turbulento para grandes numeros de Reynolds.

Na teoria da camada limite, instituida por Prandtl, parte-se da concepção que a viscosidade do sistema só faça sentir a sua influencia em determinadas e restritas regiões do campo.

Assim, pois, o fluido perfeito, concepção ideal, deve ser considerado **asintoticamente** como um **caso limite,** quando a viscosidade, diminuindo progressivamente, tende para zéro.

Segundo a concepção de Villat (1), que é a mesma de Prandtl e de Reynolds quanto á natureza do fluido perfeito, um bom metodo deve consistir em indagar como evolveriam as caracteristicas do movimento de um fluido viscoso, quando se passa a estabelecer que a viscosidade tende a se anular.

"O **movimento - limite** assim obtido, diz Villat, satisfará certamente as equações da Hidrodinamica do fluido perfeito, mas com condições **aux frontières,** que não seria comodo achar **à priori.** E' este metodo que Oseen seguiu, e tambem os seus discípulos, sobretudo Zeilon".

Tambem Prandtl, segue, no fundo, a mesma concepção, e os seus grandes trabalhos sobre as resistencias induzidas, sobre a camada-limite, e sobre as esteiras de sulcos, consistem na maior parte em determinar em cada modalidade do fenomeno as grandezas das **condições-limite,** ou condições no contorno.

Para estabelecer as equações do movimento do sistema fluido viscoso, com uma viscosidade expressa por um certo coeficiente μ, tomemos um ponto generico **M** como origem das coordenadas cartesianas (x, y, z), chamando u, v, w, as componentes da velocidade nesse ponto, paralelamente aos respectivos eixos coordenados. Estas componentes devemos supo-las finitas e contínuas, funções das coordenadas e do tempo **t.**

Para caracterisar o movimento, suponhamos que uma particula do fluido se desloca de **M** para um ponto infinitamente proximo, cujas coordenadas serão $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$.

O intervalo de tempo que dura o deslocamento será representado por δt. A variação de velocidade será δu, diferencial da função **u** em relação as suas quatro variaveis **x, y, z, t:**

$$\delta u = \frac{\delta u}{\delta x}\,\delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\,\delta y + \frac{\delta u}{\delta z}\,\delta z + \frac{\delta u}{\delta t}\,\delta t$$

A derivada será no limite:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\delta u}{\delta z}\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{\delta u}{\delta t}$$

e o mesmo para as derivadas de **v** e **w.**

E como pela definição de u, v, w, estas são as componentes da velocidade, temos:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

donde:

$$\frac{du}{dt} = u\frac{\delta u}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta y} + w\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta u}{\delta t}$$

$$\frac{dv}{dt} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta v}{\delta y} + w\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta v}{\delta t}$$

$$\frac{dw}{dt} = u\frac{\delta w}{\delta x} + v\frac{\delta w}{\delta y} + w\frac{\delta w}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta t}$$

(1) - Villat: Leçons sur l'Hydrodynamique.

Como supomos contínua a massa fluida, de densidade ρ no ponto **M,** deveremos estabelecer as condições de continuidade, que se resumem a exprimir que a diferença entre as quantidades de fluido que entram e saem das faces do paralelepipedo ($\delta x, \delta y, \delta z$) no tempo δt deve ser egual ao acrescimo de massa do fluido contido no paralelepipedo.

Na face $\delta y . \delta z$ do paralelepipedo a massa de fluido que penetra no tempo δt é

$$\rho u \, \delta y \, . \, \delta z \, . \, \delta t$$

A massa que sae pela face oposta no mesmo intervalo de tempo é

$$\rho u \, \delta y \, . \, \delta z \, . \, \delta t + \frac{\delta}{\delta x} (\rho u) \, \delta x \, . \, \delta y \, . \, \delta z \, . \, \delta t$$

O acréscimo de massa é pois:

$$- \frac{\delta}{\delta x} (\rho u) \, \delta x \, . \, \delta y \, . \, \delta z \, . \, \delta t$$

Para as outras duas faces os acrescimos serão respectivamente

$$- \frac{\delta}{\delta y} (\rho v) \, \delta x \, . \, \delta y \, . \, \delta z \, . \, \delta t$$

$$- \frac{\delta}{\delta z} (\rho w) \, \delta x \, . \, \delta y \, . \, \delta z \, . \, \delta t$$

O acrescimo total de massa no paralelepipedo atravez dos tres grupos de faces será, portanto:

$$- \left[\frac{\delta}{\delta x} . (\rho u) + \frac{\delta}{\delta y} (\rho v) + \frac{\delta}{\delta z} (\rho w) \right] \times$$
$$\times \, \delta x \, . \, \delta y \, . \, \delta z \, . \, \delta t \, .$$

A massa do paralelepipedo que é no tempo t egual a $\rho \, \delta x . \, \delta y . \, \delta z .$ torna-se no tempo $t + \delta t$

$$\left(\rho + \frac{\delta \rho}{\delta t} \delta t \right) \delta x \, . \, \delta y \, . \, \delta z$$

Temos, pois:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta (\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta (\rho v)}{\delta y} + \frac{\delta (\rho w)}{\delta z} = o$$

que é a equação geral de continuidade.

Para os fluidos incompressiveis ρ é constante. Essa equação se torna:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = o$$

Para determinar os outros elementos das equações, levando em conta a viscosidade, seguiremos o metodo dos esforços elásticos, isto é, a mesma teoria adotada para o caso dos sólidos elásticos [1].

Se os esforços no fluido dotado de viscosidade μ são representados por

$$p_{xx} \, , \quad p_{xy} \, , \quad p_{xz} \, , \quad . \; . \; . \; . \; .$$

nos quaes simbolos o esforço age no plano perpendicular ao eixo de coordenadas representado pelo primeiro sufixo (**x,** ou **y,** ou **z**), mas na direção do segundo sufixo, as relações que ligam os varios esforços em equilibrio são dadas pelas equações:

$$p_{xx} = - p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) + 2 \mu \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$p_{yy} = - p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{9 w}{\delta z} \right) + 2 \mu \frac{\delta v}{\delta y}$$

$$p_{zz} = - p - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) + 2 \mu \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \right)$$

$$p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z} \right)$$

$$p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \right)$$

Nestas relações $p = - \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$.

Chamando X, Y, Z, as compoentes da resultante F das forças exteriores por unidade de massa, teremos:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\delta p}{\delta x} + \mu (\nabla^2 u)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho Y - \frac{\delta p}{\delta y} + \mu (\nabla^2 v)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho Z - \frac{\delta p}{\delta z} + \mu (\nabla^2 w)$$

designando por ∇^2 o operador de Laplace, isto é

$$\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

---

(1) - Forchheimer (Hidraulica), no capitulo dedicado á **"resistencia devida á viscosidade".**
Gibson (Hydraulics and its applications, **equations of motion).**
Lamb (Hydrodynamics).

Estas ultimas equações são as de Navier, taes como as deduz Gibson em sua **Hidraulica,** pagina 56. Elas são as mesmas que figuram sob outra forma no **Tratado de Hidraulica** de Forchheimer (pag. 46 da tradução hespanhola) e que são as seguintes, feitas algumas transformações simplificativas:

$$\rho X - \frac{\delta p}{\delta x} = \rho \frac{du}{dt} - \mu . \nabla^2 u$$

$$\rho Y - \frac{\delta p}{\delta y} = \rho \frac{dv}{dt} - \mu . \nabla^2 v$$

$$\rho Z - \frac{\delta p}{\delta z} = \rho \frac{dw}{dt} - \mu . \nabla^2 w$$

Quando se trata de fluido pouco viscoso, tal como a agua, pode se estudar o **movimento-limite:** o qual será definido por

$$\mu \longrightarrow 0$$

Nesse caso teremos as equações de Euler, que se tiram das de Navier mediante a anulação do fatôr μ

Se o movimento do fluido viscoso, no qual μ não é desprezivel, se torna turbulento, é necessario substituir μ pelo coeficiente ε e as velocidades **u, v, w,** passam a ser as componentes da velocidade media (1).

O coeficiente ε, muito maior do que μ aumenta com a turbulencia do regime, depende da temperatura e dos caracteristicos do movimento, e foi denominado "**coeficiente de turbulencia**".

E', pois, uma característica do **regime hidraulico,** ou, melhor, o **indice de hidraulicidade** da corrente fluida.

(1) Boussinesq (**Theorie des eaux courantes**).
Forchheimer (**Hidraulica; "turbulencia"**).

Capitulo II

Efeitos Dinamicos entre Solidos e Fluidos

Paradoxo de D'Alembert.

A teoria do movimento dos fluidos perfeitos, partindo da hipotese da ausencia de viscosidade e de rotações, conduz á conclusão de que um solido que se desloca no interior de massas fluidas não pode encontrar resistencia ao seu movimento. Reciprocamente, poder-se-ia afirmar que o solido imerso em uma corrente fluida não sofre desta nenhum impulso. Este duplo resultado, evidentemente contrario á experiencia e á observação, não é mais que uma consequencia imediata e eloquente da suposição inicial de que os fluidos a estudar são destituidos de viscosidade e de movimentos rotacionaes.

Na natureza, porém, não ha fluido sem viscosidade. Uma camada encontra sempre da parte de outra uma resistencia maior ou menor ao seu deslocamento.

Em contacto com um corpo solido, de superficie mais ou menos rugosa, aumentando a aderencia, a resistencia se eleva. Viscosidade, adesão, ou atrito, determina resistencia. Daí a contradição entre a teoria do fluido perfeito, idealmente desprovido de viscosidade e de atrito interno, e os resultados do conhecimento objetivo, que obriga a reconhecer nos fluidos a resistencia interior e carateristica dos sistemas gasosos e liquidos: resistencia especifica, conhecida pelo nome de **viscosidade.**

Esta obvia contradição, ha muito tempo reconhecida e examinada pelos fisicos, tomou a denominação de **"paradoxo de D'Alembert"**: expressão que denota com enfase a influencia da viscosidade (e de outros fatôres de perturbação e de perda energetica) no movimento das correntes fluidas e das ações mutuas entre estas e os corpos solidos.

Uma proposição tão categorica, estabelecendo a ausencia de impulso ou de resistencia nos solidos imersos nos fluidos, consequencia rigorosa da concepção abstráta do fluido ideal, constitue uma contradição evidente, uma vez que se observe a natureza exterior. A experiencia imediata mostra sempre uma resultante jamais nula das pressões exercidas pelo fluido sobre o solido. Para se obter a concordancia da teoria com os fatos exteriores naturaes, é indispensavel modificar as hipóteses admitidas sobre a natureza do escoamento do fluido em torno do solido, ou do deslocamento do solido no seio da massa fluida.

Helhmoltz, Rayleigh, Kirchhoff, Levi-Civita, Prandtl, e os seus continuadores conceberam superficies de descontinuidade, estendendo-se sem cessar por traz do corpo solido e a partir do seu contorno até o extremo limite da massa fluida.

Deste modo, é visivel que ha, acompanhando o movimento do solido no fluido em repouso ou seguindo o fluido se este se move sobre um solido fixo, uma perturbação ondulatoria e oscilatoria, estendendo-se ao infinito. Esta parte da massa fluida, solidaria do inteiro sistema, compreêndida por estas superficies descontinuas, dá origem a uma certa perda de energia cinetica. Cavadas nos gazes ou ou nos liquidos, estas superficies descontinuas, verdadeiras ondas complexas, compondo-se com redemoinhos e vórtices, formam atraz do solido uma cauda fluida de turbilhões. Os hidraulistas franceses deram-lhes o nome de **sillages.** Os experimentadores italianos, desde Levi-Civita, as chamaram de **scie.** Eu penso poder denominal-as **sulcos,** ou **esteira de sulcos.**

Quando o corpo solido é que se desloca no seio do sistema fluido, o qual se supõe em repouso **ao infinito montante,** o trabalho empregado em vencer a resistencia fluida deve ser considerado como convertido em energia cinetica, representada pela produção dos **sulcos,** que acompanham o corpo solido em seu deslocamento.

Esta concepção, que admite a existencia de turbilhões (deslocamentos rotacionaes) em todo fluido natural em movimento, nos liberta do **paradoxo de D'Alembert**, sem comtudo exigir forçosamente a viscosidade como fatôr unico de resistencia (1).

Foi assim que Prandtl construiu a sua teoria das superficies de sustentação (**Tragflügeltheorie**) postas no seio de massas fluidas sem viscosidade (ou antes com uma viscosidade que tende para zéro), servindo-se desta objetiva consideração dos sulcos e turbilhões, sempre existentes nas massas fluidas que se acham em contacto com solidos, ou, mais propriamente, em movimento relativo com estes (2).

Não é, portanto, só da viscosidade que se deve falar, quando se quer explicar, em sua grande complexidade, o paradoxo de D'Alembert. E' preciso ter em vista que outra hipótese entra em jogo: a do movimento irrotacional, isto é: que as particulas fluidas seguem só movimentos de translação. Tal hipótese é inadmissivel na realidade. Basta observar o movimento mais geral dos fluidos naturaes para se perceber a descontinuidade e o caráter rotacional das superficies ondulatorias e oscilantes que se manifestam nos **sulcos**: são torvelinhos e redemoinhos nos acompanham a parte **turbulenta** do fenomeno hidrodinamico ou aérodinamico. São todos movimentos de rotação, geralmente em torno de eixos instantaneos, compondo-se ou não com as translações do sistema.

O estudo destes fenomenos (correntes turbulentas em contacto com superficies solidas) constitue um campo importante da Fluidodinamica. Encontra aplicações de grande alcance na pratica e na teoria da navegação fluvial, maritima, e aérea, na construção e funcionamento das maquinas hidraulicas e pneumaticas, e, em geral, na Foronomia e nas leis de escoamento dos liquidos nos condutos livres e forçados.

As ações e reações mutuas entre os solidos e os fluidos são extremamente rebeldes á analise matematica. Ha, entretanto, resultados apreciaveis, de valor objetivo, do trabalho analitico de grandes matematicos. Ainda mesmo nos casos mais simples, esses fenomenos penosamente se submetem ao rigor do calculo, tal é sempre a complexidade da realidade fisica, já reconhecida ha quatro seculos pelo genio universal de Leonardo da Vinci.

Fig. 5

Turbulencia causada pelo alargamento brusco da seção. Desenho de Leonardo da Vinci.

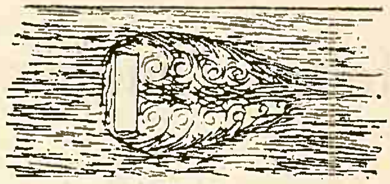


Fig. 6

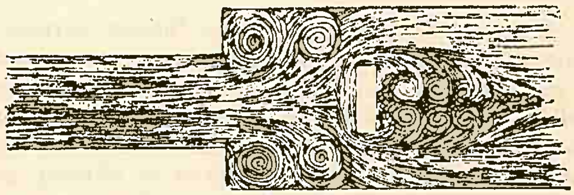


Fig. 7

Turbulencia por obstaculo normal e situado no eixo da corrente.

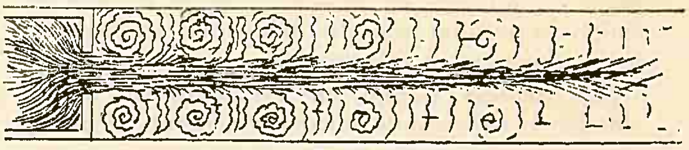


Fig. 8

Turbulencia produzida por estrangulamento da seção.

Leonardo, na sua grande obra **"Del moto e misura dell'acqua"**, estudou com tenacidade infatigavel diversos fenomenos singulares que se apresentam nas correntes liquidas. O movimento mais geral, chamado desde Boussinesq, **movimento turbulento,** ocupou a atenção de Leonardo.

Ele insistiu muitas vezes em explicar e coordenar os diversos aspectos do regime turbulento: rotações, reflexos, oscilações, ondas, vortices, resaltos e depressões, transporte de corpos parcialmente ou de todo submersos, turbilhões, redemoinhos.

A Hidraulica moderna, passado o seu periodo fatigante e monotono de "sciencia de coeficientes" volta a sua atenção para os fenomenos interessantes que Leonardo observou. De Boussinesq a Reynolds, de Reynolds a Prandtl, e Karman, o regime turbulento foi objéto de análise rigorosa e profunda, consagrada obstinadamente ao servi-

(1) Bruno Finzi e Gino Bozza em seu recente tratado **"Resistenza Idro ed Aerodinamica"**, dizem que: "o paradoxo de D'Alembert, para fluidos de tão diminuta viscosidade que possam ser tidos como perfeitos, lá onde pelo menos o seu movimento é regular, fica resolvido para quaesquer obstaculos, quando se leva em conta a **esteira de sulcos** formada por um fluido em repouso, ou médiamente em repouso, ou mesmo formada por turbilhões situados a jusante do obstaculo".

(2) Para maior desenvolvimento quanto aos trabalhos de Prandtl sobre a sua **"Tragflügeltheorie"**, pode-se ver:

Maurice Roy: **La theorie de Prandtl.**

Prandtl u. Tietjens: (Hydro - und Aeromechanik).

ço da observação e da experimentação, cada vez mais perfeitas.

Justamente é isto que Leonardo queria: unir a experiencia á razão pura, a observação ao calculo, o empirismo á analise matematica [1].

*
* *

Paradoxo de Dubuat.

Outra contradição que aparéce quando se passa do estudo ideal do fluido perfeito ao do fluido natural, sempre dotado de maior ou menor viscosidade, é a diversidade que a observação revela entre a resistencia que um corpo solido encontra ao mover-se num sistema fluido em repouso, e o impulso que a mesma corrente fluida, quando em movimento, determina no corpo solido, suposto fixo ou imovel . Teoricamente, da pura concepção ideal do fluido perfeito, essas forças deveriam ser eguaes nos dois casos: resistencia e impulso.

A desegualdade entre esses dous esforços, afirmado por Dubuat e Duchemin e ultimamente por Prandtl, mas negada por Eiffel e alguns outros experimentadores, constitue, á primeira analise racional, no ponto de vista rigorosamente teorico e ideal da concepção inicial do fluido perfeito, uma proposição realmente absurda, conhecida geralmente com a designação de **paradoxo de Dubuat.**

Essa desigualdade, se é que existe de fato, como parecem indicar numerosas experiencias, tem sido atribuida a uma irregular distribuição das velocidades nos diversos pontos de uma seção generica da corrente. Essa distribuição irregular das velocidades poderia explicar o resultado experimental: que o impulso determinado pela corrente sobre um obstaculo imovel é maior, embora com pequena diferença, do que a resistencia oposta pela mesma massa fluida, quando em repouso, ao mesmo solido suposto movel.

Prandtl, operando sobre modelos reduzidos de aéroplanos, foi levado a admitir essa diferença. O esforço medido sobre as areas expostas ao sopro das correntes aéreas, nas experiencias feitas no tunel aérodinamico, era sempre sensivelmente maior do que a resistencia oferecida pelo mesmo modelo, quando se movia com a mesma velocidade relativa no seio de uma atmosféra tranquila.

Os outros experimentadores que, como Eiffel, chegaram á conclusão contraria, afirmando a egualdade entre tal impulso e tal resistencia, parece terem sido induzidos á equivalencia das experiencia pela sedução doutrinaria, a que dificilmente se pode fugir quando prevalecem as considerações ideaes do raciocinio puro.

Entretanto, embora sejam de grande peso as opiniões uniformes de Dubuat, Prandtl e outros, tem-se admitido na pratica a identidade dos dous fenomenos. Entre os limites das aproximações permitidas em calculos desta natureza, as diferenças encontradas podem ser equiparadas a erros insignificantes de observação, sem comtudo se atribuir a esta identidade uma certeza absoluta. E' o que se admite geralmente na aferição e emprego dos instrumentos de medida: taquimetros, molinetes, tubos de Pitot, e em muitos outros casos de aferição.

Dubuat exprimiu o seu celebre paradoxo com a interrogação: "Não seria possivel que no estado de absoluto repouso a agua, ou outro fluido, ofereça uma facilidade maior a deixar-se dividir e separar, opondo, pois, uma resistencia menor, do que quando se acha em movimento?".

As experiencias de Joukowsky, realizadas em um canal de paredes moveis, mostraram que Dubuat tinha razão, e fizeram com que ele atribuisse a divergencia encontrada ao atrito entre a corrente e as paredes do canal, atrito este que determinava vortices e outros movimentos rotacionaes, de valores deseguaes (como perda de energia) nos dois casos em apreço.

Impulso e resistencia em função da velocidade.

Desde Newton que se estuda, pela observação e experiencia e pelo calculo, o fenomeno da resistencia que um corpo solido sofre da parte de um fluido, seja que um dêles se conserve em repouso emquanto o outro se move, seja que ambos se achem em movimento. Dous regimes diferentes ha a considerar: o **regime viscoso,** que é o dos fluidos naturaes, e o **regime hidraulico,** em que a viscosidade, extremamente reduzida ou nula, deixa de influir no movimento. No primeiro caso, a experiencia, confirmada pela teoria, mostra que a resistencia é simplesmente proporcional á velocidade. No **regime hidraulico** a resistencia varía proporcionalmente ao quadrado da velocidade. Para as grandes velocidades, como as que se encontram nos projetís das armas de fogo, sobretudo na artilharia, considera-se que a resistencia do ar cresce com o cubo da velocidade (regime balistico).

Representando por **a, b** e **c** constantes especificas do regime do movimento, por **v** a velocidade, e por S a resistencia, e considerando que a resistencia é tanto maior quanto maior é a area da secção mestra, chamando A esta area maxima, temos para os tres regimes mencionados:

---

(1) Quatro seculos depois de Leonardo, um outro grande sabio, o eminente hidraulista Boris Bakhmeteff, proferiu estas palavras valiosas: "In the close cooperation and mutual guidance between theoretical work and laboratory observations lies the key to future research. Abstract reasoning is just as sterile as blind and unenlightened experiment".
Bakhmeteff (The Mechanics of Turbulent Flow, pag. 101).

1.° — $S = a A v$ (regime viscoso)

2.° — $S = b A v^2$ (regime hidraulico)

3.° — $S = c A v^3$ (regime balistico)

Para melhor definir, delimitemos o problema ao caso dos fluidos pouco viscosos, ou antes ao caso ideal dos fluidos perfeitos. Entre estes, tomemos a agua como exemplo.

Suponhamos que um corpo solido se acha completamente submerso na agua.

Examinando-se o solido imerso numa corrente liquida, na qual se tenha injetado uma boa porção de particulas coloridas, é impressionante a extrema complexidade de movimentos, quasi todos rotacionaes, que se pode observar na visinhança das paredes do solido, em toda a superficie de contato entre solido e liquido. (Fig. 9)

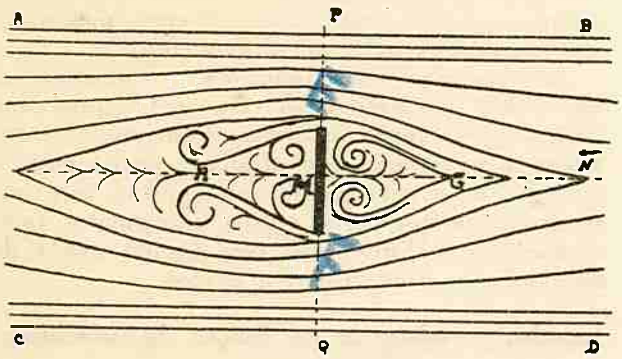


Fig. 9

Consideremos um disco delgado plano **E F** em repouso, ou antes fixo, num liquido em movimento, que suporemos uniforme. As moleculas liquidas já a uma certa distancia **M N** do disco começam a se separar. As trajétorias que eram até então paralelas tornam-se divergentes, e acabam passando lateralmente pelos bordos do obstaculo, para depois convergirem pouco a pouco até se tornarem outra vez paralelas, quando já tenham ultrapassado o obstaculo. Em alguns espaços singulares da corrente liquida dão-se estacionamento de moléculas fluidas, as quaes, sem translação, ficam apenas animadas de movimentos de rotação: vortices, redemoinhos, etc., formando o que Levi-Civita, Prandtl e Karman chamaram de **esteira de sulcos.** Assim acontece, por exemplo, nos espaços singulares **E F G**, antes do disco, e **E F H,** depois do disco. Aí estacionam grupos de moleculas fluidas animadas de rotações numerosas, constituindo verdadeiras **caudas rotacionaes de sulcos,** que devem produzir evidentemente perdas de energia para o sistema fluidodinamico.

Egualmente porém, com menor intensidade, e como se amortecendo para jusante, dão-se deslocamentos analogos aos dos sulcos. A parte do fluido situada entre a superficie do plano fixo e os limites da massa fluida, isto é, **E.P e F Q,** anima-se de um movimento intermediario entre a laminaridade da parte que se acha muito longe do solido e a turbulencia da esteira de sulcos.

O mesmo se observa essencialmente para outras formas de corpos fixos submersos.

Em geral, qualquer que seja a forma geometrica do obstaculo fixo, as particulas liquidas começam a divergir um pouco antes de atingirem o obstaculo, continuam a divergir depois que ultrapassam a face anterior do solido, até atingirem uma seção transversal do obstaculo, a partir da qual tendem a readquirir o paralelismo. Depois tornam a divergir para tocar outra vez o solido.

Finalmente, a uma certa distancia além da face posterior do obstaculo, depois de terem vencido o inteiro obstaculo, convergem para se reunirem, e tendem então a novo paralelismo.

Como no exemplo precedente, nos espaços singulares mencionados, podem ser observadas simetricamente rotações complexas, qualquer que seja o obstaculo, constituindo sempre a caracteristica **esteira de sulcos.**

O mesmo fenomeno pode ser observado quando é um corpo solido que se desloca num fluido em repouso. Resumindo-se a configuração esquematica deste fenomeno, deve-se dizer que no movimento relativo de um solido e de um fluido ha sempre duas esteiras ou caudas de sulcos, uma situada a montante, outra a jusante, do deslocamento.

A resistencia que resulta desse movimento complexo é extremamente rebelde á analise matematica, e não ha grande esperança de que o calculo venha a achar a expressão exáta dessa resistencia para o caso mais geral.

Os matematicos resignaram-se a tratar o problema por aproximações sucessivas. E' nesta direção que se fizeram grandes progressos, desde Newton a Boussinesq e Reynolds, a Karman e Prandtl.

Newton construiu duas teorias para encarar o problema. Uma foi adotada pelos seus sucessores, mas a outra caíu no esquecimento.

A primeira consiste em ponderar que todo solido que se desloca forma idealmente no fluido um volume singular, que se destaca do restante da massa, volume esse que fica circumscrito a um cilindro gerado pela seção mestre.

Chamando **A** a área da seção mestre, **v** a velocidade relativa, **t** o tempo decorrido, esse volume assim idealisado será **A v t.**

A força viva das moleculas assim deslocadas é

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\gamma A v t}{g} \quad v^2$$

sendo γ o peso especifico e **g** a aceleração propria da gravidade.

Essas moleculas assim deslocadas determinam uma pressão (ou foram deslocadas em virtude dessa pressão), cujo trabalho **P v t** equivale á força viva. E' necessario, portanto, que

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\gamma A v t}{g} \quad v^2 = Pvt$$

donde

$$P = \gamma A \quad \frac{v^2}{2g}$$

Esta pressão **P** nada mais é do que a resistencia **S** que em sentido contrario o fluido opõe ao deslocamento do solido.

Bélanger, tratando o problema analiticamente, aplicando o teorema de Bernouilli, juntamente com o principio das quantidades de movimento, supondo o fluido incompressivel, achou uma expressão identica:

$$S = k \gamma A \quad \frac{v^2}{2g}$$

sendo **k** um parametro caracteristico do sistema em movimento.

Poncelet, aplicando o principio da transformação do trabalho, e estudando casos diversos: discos arredondados, discos delgados, etc.; e estendendo estes resultados ao caso em que o solido se desloca num fluido indefinido, chegou á mesma expressão de Newton e Bélanger.

Se o comprimento do solido é muito grande em comparação ás dimensões da linha mestre, será necessario levar em conta o atrito superficial sobre as paredes do corpo submerso.

No estudo da resistencia fluidodinamica, Coulomb chegou á conclusão que era necessario exprimir esta resistencia, no caso mais geral, por dous termos: o primeiro, que é a formula de Newton, e o segundo composto de duas partes, uma proporcional á simples potencia da velocidade, relativa á viscosidade do meio fluido e que é empregada em vencer a coesão do sistema, e a outra, proporcional ao quadrado da velocidade, representando a perda de força viva produzida ao choque do fluido contra as paredes. Outros experimentadores chegaram ao mesmo resultado.

A expressão da resistencia total será, portanto

$$S = k \gamma A \quad \frac{v^2}{2g} + \gamma A_1 + (a v + b v^2)$$

na qual formula A_1 é a area da superficie molhada, **a** e **b** dous coeficientes que devem ter valores resultantes de numerosas experiencias.

Grande tem sido o numero de experiencias para determinação desses coeficientes, bem como muitos tem sido os fisicos que trataram do problema da resistencia fluidodinamica. Galileu foi o primeiro a estudar metodicamente os diversos aspectos da resistencia. Newton, Borda, D'Alembert, Condorcet, Dubuat, Coulomb, Duchemin, e muitos outros consagraram grandes esforços para constituir uma teoria teorico-pratica desse fenomeno. Apesar desta preciosa atividade scientifica, a resistencia não foi completamente elucidada, e os coeficientes não encontraram valores fixos e incontestaveis.

Dubuat achou para o coeficiente **k** valores oscilando entre 1,10 a 1,43. Borda encontrou valores entre 1,39 a 1,64. Hutton, valores entre 1,24 e 1,43. Duchemin: 1,25.

Para **a** e **b** foram achados valores medios seguintes:

$$a = 0{,}000100 \quad b = 0{,}000125$$

Prony no estudo dos canaes encontrou:

$$a = 0{,}000044 \quad b = 0{,}000309$$

e nos condutos forçados:

$$a = 0{,}000172 \quad b = 0{,}000348$$

A incerteza sobre esses valores empiricos mostra como tem sido penoso e dificil este estudo da resistencia, e como é ainda insuficiente o nosso conhecimento desses fenomenos. As pesquizas de Bernouilli, Euler, Cauchy, Navier, Poisson, e tantos outros grandes matematicos, pouco adiantaram. Depois dessa velha e gloriosa escola, resurgiu com Reynolds a tendencia á observação do fenomeno **in loco,** como fez Leonardo, e, ao mesmo tempo, intensificou-se o consorcio entre a analise infinitesimal e a experimentação. Daí o grande merito da "escola ingleza", que Reynolds inaugurou.

E' evidente á primeira vista que o valor da resistencia deve depender sómente do movimento relativo entre o solido e o fluido.

Entretanto das experiencias numerosas e precisas de Dubuat e Duchemin resultou um valor da resistencia que não depende tão sómente do movimento relativo. Foi demonstrado experimentalmente que a resistencia, no caso de um corpo solido em repouso no seio de uma corrente fluida, ou no caso de um jacto fluido contra um obstaculo fixo, era maior do que no caso do movimento de um solido num meio fluido em repouso. Ha varias considerações que explicam, como já dissemos, esta aparente contradição.

Um solido em movimento de translação no seio de um sistema fluido, ou em repouso núma corrente em movimento, sofre uma resistencia que depende da velocidade relativa, das propriedades fisicas do fluido, das dimensões e da forma do solido, e tambem, para velocidades acima de um certo valor, que veremos ser a velocidade critica, da natureza mais ou menos rugosa de seu contorno.

Para velocidades inferiores a essa velocidade critica, isto é, para o estado laminar da corrente, a resistencia é produzida principalmente pela viscosidade das camadas adjacentes. Neste caso é proporcional á velocidade, ao coeficiente de viscosidade, e, como dissémos, á area da seção mestre.

Para velocidades acima do valor critico, o movimento é, conforme mostrou Boussinesq, e conforme demonstraram a teoria e a experiencia de Reynolds, Prandtl e outros, francamente turbulento, mas deve-se admitir que acompanhando o contorno do solido, no interior de uma delgada camada aderente ou quasi aderente ao solido, o movimento deixa de ser turbulento e pode ser considerado laminar. A rugosidade do contorno influe na turbulencia dinamica: aumentando a formação de turbilhões, aumenta a resistencia.

Para grandes velocidades, acima do valor critico, a resistencia não é devida apenas á camada viscosa em torno do solido, mas tambem, e em grande parte, á **cauda de sulcos:** ondas, turbilhões, e outros movimentos rotacionaes. Taes velocidades determinam resistencias hidraulicas, isto é, resistencias proporcionaes ao quadrado das velocidades, e á densidade do fluido.

Se é verdade que o fato de ser viscoso determina de certo modo o aparecimento dos **sulcos** e outros fenomenos rotacionaes, não é menos verdadeiro que a viscosidade pouco influe sobre o valor da resistencia em movimento turbulento. Pode-se dizer, de acordo com as ultimas experiencies de Reynolds, Prandtl, Karman, que a viscosidade não exerce ação apreciavel num sistema em que a resistencia fosse devida exclusivamente á formação de **sulcos:** tal sistema seria equivalente a um fluido perfeito. A viscosidade entraria no fenomeno como se fosse egual a zéro.

De modo geral, em correntes de regime turbulento, as experiencias têm revelado que a resistencia é proporcional a uma certa potencia **n** da velocidade: **n** é algumas vezes egual a 2, mas muito frequentemente é ligeiramente inferior a 2.

Outras experiencias, em mais amplas circumstancias, abrangendo maior numero de casos, mostraram que a proporcionalidade a **v** não dá para a resistencia um valor incontestavel. E' necessario conceber a resistencia como a soma dos tres casos já considerados, isto é:

$$S = a' v + b' v^2 + c' v^3$$

em que essas constantes são proporcionaes á area da seção mestre, e dependem da rugosidade do corpo solido, das propriedades fisicas do sistema fluido, e da forma do solido.

Entretanto, dentro dos limites da pratica, e levando em conta a natureza do regime que prevaleces (viscoso, hidraulico, balistico), pode-se tomar, como primeira aproximação, um valor adequado de **n**, e usar da formula mencionada:

$$S = k\, v^n$$

Para o caso particular de uma lamina plana ou de um disco delgado de área A, disposto perpendicularmente á direção do movimento em uma corrente liquida idealmente desprovida de viscosidade, uniforme, irrotacional no inicio, animada sem cessar de uma velocidade **v**, o valor da resistencia que a lamina sofre por parte da corrente sendo

$$S = b\, A\, v^2$$

o coeficiente **b**, estudado teoricamente por Kirchhoff e Rayleigh, pode ser posto sob a forma

$$b = \frac{\gamma}{g} \; \frac{\pi}{4 + \pi}$$

sendo γ o peso especifico e g a aceleração da gravidade.

Para o caso da agua, as considerações de Kirchhoff e Rayleigh conduzem ao valor numerico

$$b = 44{,}6$$

Experimentalmente têm-se achado para o coeficiente **b** valores numericos superiores a este. As experiencias, sobretudo as de Gebers e Engels, deram a **b** valores comprehendidos entre 60 e 70. Esta diferença pode ser atribuida aos movimentos rotacionaes numerosos que geralmente acompanham o deslocamento do disco: turbilhões, sulcos, etc.

Para uma lamina nessas condições, plana, normal á direção do deslocamento, em virtude dos redemoinhos e sulcos que se formam na face posterior, constituindo dissipações de trabalho ou perdas de energia cinética, a resultante das resistencias elementares agindo sobre cada particula do corpo é maior do que no caso de formas geometricas alongadas ou afuniladas. Ha sempre proporcionalidade entre a resistencia fluidodinamica e a área da seção mestra ou seção maxima.

Esta seção mestra é a área encerrada pela linha mestra, projetada sobre um plano normal á direção do movimento. A linha mestra, relativa a uma determinada direção do deslocamento, é a linha de contacto entre o corpo solido e a superficie cilindrica que lhe é tangente, e cujas geratrizes são paralelas á direção do movimento.

As experiencias, nesse e em outros casos, têm revelado que a resistencia varía bastante com a forma geometrica dos corpos solidos, ou, em termos mais precisos, com o quociente do raio medio da seção mestre pelo maior comprimento do solido. D'aí a forma especial, alongada, simetrica em torno do maior comprimento, que tomam as embarcações fluviaes ou maritimas, bem como os aéroplanos, com o objetivo de obter uma resistencia minima.

Essa é tambem a constante configuração que assumem os animaes aéreos e aquaticos. Passaros e peixes, constrangidos, no decorrer das gerações sucessivas, pela necessidade, sentida inconscientemente, de reduzir ao minimo a resistencia do fluido ao deslocamento quando imersas no ar ou na agua, adquiriram o instinto, transmissivel aos descendentes, da forma alongada ou afunilada, a qual reduz ao minimo a seção mestre, e permite a maior celeridade no ambiente fluido. Houve, como em tantos casos da vida animal, adaptação lenta e progressiva ás condições do meio, com a finalidade instintiva da melhor satisfação de desejos e de necessidades. A forma-peixe é a que se acha reproduzida, em seu aspecto essencial, nos submarinos que o homem creou, e, menos rigorosamente, nos grandes transatlanticos, nos quaes a modificação é mais visivel na parte aérea. A forma-passaro, que tanto ocupou o genio de Leonardo, é a que venceu em Aéronautica, emquanto esta se orientou pelo mais pesado do que o ar.

O vôo nos passaros e a natação nos peixes, ambos estudados e profundamente observados por Leonardo, constituem um pitoresco e interessante capitulo á parte da Fluidodinamica, cujas

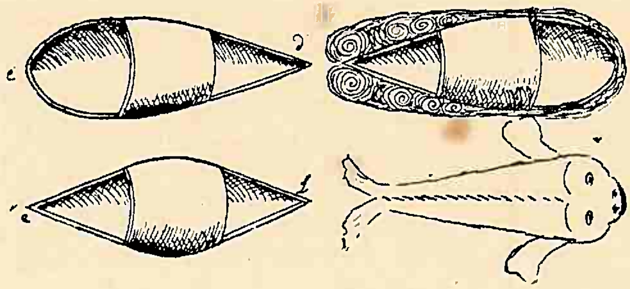


Fig. 10

Forma alongada e afunilada, imitando a forma da **esteira de sulcos.** Analogia da **forma-peixe,** segundo Leonardo da Vinci.

principaes indicações, penosamente deduzidas de laboriosas teorias, os animaes do ar e da agua instintivamente revelam, quer em sua forma, quer em seus orgãos motores e nos caracteres essenciaes de certos dispositivos anatomicos.

Na remotissima adaptação ao meio fluido em que haviam de se locomover, transmitindo de geração em geração o fruto das experiencias espontaneas, conseguiram emfim fixar a forma que lhes era a mais propicia, ao mesmo tempo que se diferenciavam os orgãos motores, admiravelmente aptos ao deslocamento no seio de enormes massas fluidas.

Capitulo III

O Numero de Reynolds e a Teoria da Semelhança Mecanica

Necessidade dos modelos reduzidos.

As ações mutuas entre solidos e fluidos não poderão sempre ser determinadas com simples procedimentos analiticos. As equações geraes, exprimindo matematicamente a configuração generica do fenomeno fluidodinamico, são de dificil integração, salvo em raros casos excecionaes. Elas se conservam inacessiveis, quando se quer utilisal-as para a particularisação dos diversos aspétos do fenomeno da resistencia.

Nessas ações mutuas ha tres casos a considerar:

1.° — impulso de uma corrente fluida contra solidos fixos;

2.° — resistencia de um fluido em repouso contra o deslocamento de solidos;

3.° — ações e reações entre correntes fluidas e corpos solidos tambem em movimento.

O 1.° caso abrange os fenomenos de percussão de fluidos contra as paredes dos involucros que os contêm, os impulsos dos gazes e liquidos contra obstaculos fixos, bem como a resistencia que os fluidos encontram no escoamento em condutos livres ou forçados (canaes ou encanamentos). Este é o caso que mais interessa á Hidraulica, e que aféta as formulas de escoamento mais comuns.

O 2.° caso, comquanto de grande importancia para a Hidraulica, interessa imensamente a navegação aérea e maritima, e subdivide-se em duas categorias:

a) resistencia de uma grande massa de gaz (considerada teoricamente infinita), e geralmente o ar, contra um aeroplano, ou outro solido qualquer, em movimento;

b) resistencia de uma grande massa liquida (agua doce ou salgada dos rios ou dos mares) contra uma embarcação em movimento.

Quanto ao 2.° caso, o mais complexo de todos, abrangendo os dois primeiros como situações particulares, ele se apresenta frequentemente, sobretudo nos receptores hidraulicos: turbinas, rodas hidraulicas, roda Pelton, bombas centrifugas, etc.

Todos esses casos, de relevante alcance em todo o campo hidraulico, inclusive na Hidraulica Fluvial e Maritima, bem como na Aeronautica, exigem ampla e frequente experimentação. Seria extremamente penosa a observação diréta do fenomeno em verdadeira grandeza.

Nasceu daí a necessidade de se examinar o complexo fenomeno em laboratorios de capacidade limitada em vez de o observar na natureza, seja no infinito do ar atmosférico, seja na imensidão dos mares.

Esta experimentação só se tornou possivel com a creação dos modelos reduzidos e com uma teoria que permitisse passar do exame do modelo á observação diréta das verdadeiras grandezas. E' esta a teoria da semelhança mecanica, que de Newton a Reynolds foi creada com um dispendio admiravel de genio e perseverança, e que cada vez mais tem cooperado na constituição da nova Fluidodinamica.

Para evitar dificuldades insuperaveis que se encontrariam na observação e experimentação diréta do vôo dos aeroplanos, instituiu-se para o estudo da navegação aérea o modelo reduzido de aeroplano, ou de azas finitas, o qual geralmente fica em repouso, ou fixado de qualquer modo, emquanto se produzem correntes aéreas artificiaes com velocidades equivalentes ás dos aviões reaes e em verdadeira grandeza. Tal é a idéa que serviu de base á construção dos tuneis aérodinamicos, cujo principio consiste na proposição: a resistencia do solido em repouso contra o fluido em movimento é identica á resistencia do fluido em repouso contra o solido em movimento, desde que seja a mesma a velocidade relativa.

A semelhança mecanica em traços geraes.

Em todos os casos acima referidos, e mais ainda no estudo de numerosos problemas da Hidraulica moderna, e de outros problemas importantes da Nautica e da Aéronautica, tornou-se indispensavel o estabelecimento, tanto analitico quanto experimental, de uma teoria adequada, que permitisse a passagem de uma experiencia a outra.

Esta é a teoria da semelhança mecanica, cujo inicio se encontra em Newton, e que Reynolds desenvolveu com uma visão genial da sua capacidade de aplicabilidade á teoria e á pratica da resistencia dos fluidos. Esta teoria da semelhança, conjuntamente com a da homogeneidade das equações, tem sido fecunda para estabelecer novas relações entre as diversas grandezas que figuram nos fenomenos fluidodinamicos.

Desta teoria disse Bairstow na sua **"Airscrew Theory"**: "A mais sadia de todas as nossas teorias de utilidade pratica é a que dá o principio de semelhança dinamica, mas o seu uso se acha limitado a leis de comparação. Só num sentido limitado é uma teoria do movimento dos fluidos. Por outro lado o seu uso governa amplamente os processos técnicos dos nossos laboratorios aérodinamicos. A construção e emprego de um túnel de densidade variavel na America, que está sendo seguido tambem na Inglaterra, é atualmente uma das mais impressionantes demonstrações que esta teoria é considerada sadia e importante".

No ponto de vista em que se colocam os fisicos modernos, as grandezas fundamentaes são tres: tempo, espaço, força. Não podem ser menos de tres as grandezas fundamentaes, nem serão mais do que tres, pois que as outras se deduzem délas, ou com élas se compôem.

Em vez da força, pode-se tomar como terceira grandeza a massa. Este é o sistema absoluto. No sistema pratico escolhe-se a força. As unidades correspondentes são o segundo como unidade de tempo, o centimetro como unidade de comprimento, e a grama como unidade de massa. No sistema pratico prevaléce a escolha do kilograma como unidade de força.

A primeira idéa de semelhança encontra-se em Geometria. Duas figuras geometricas são semelhantes, quando a cada grandeza espacial linear de comprimento $\mathbf{l}_1$ do primeiro sistema de linhas corresponde outro comprimento $\mathbf{l}_2$ da segunda figura, de tal modo que o quociente $\frac{l_1}{l_2}$ se mantem constante para as linhas que assim se correspondem. A esta relação constante $\frac{l_1}{l_2} = L$ chama-se **modulo de homologia**, e define o conjunto dos dous sistemas semelhantes.

A primeira consequencia é que o angulo entre duas rétas do 1.° sistema é egual ao angulo das duas homologas do 2.°. A relação entre as áreas de figuras semelhantes é $\mathbf{L}^2$.

Um segundo grão de semelhança que se pode imaginar entre dous sistemas já geometricamente semelhantes é que, estando ambos em movimento, os intervalos $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ de tempo para um e outro estejam sempre na mesma relação θ, de modo que se tenha invariavelmente

$$\frac{t_1}{t_2} = \theta$$

A este segundo grão de semelhança chama-se **cinematica,** visto que no movimento não se faz entrar a noção de força ou de massa.

Se a estes dois primeiros gráos de semelhança se acréce um terceiro, introduzindo-se a condição de que as massas respetivas elementares $\mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_2$ são sempre proporcionaes, obtem-se um terceiro grão de semelhança, que é a **semelhança mecanica** ou **dinamica.**

Supõe-se assim que

$$\frac{m_1}{m_2} = \mu \text{ (constante)}$$

As grandezas adimensionaes são as que não dependem do tempo, nem do espaço, nem da massa. São simples numeros, e terão o mesmo valor em dous sistemas dinamicamente semelhantes. Taes são as chamadas linhas trigometricas (senos, tangentes, etc.), os rendimentos de maquinas semelhantes, e certas outras relações que aparecem no estudo da Hidrodinamica: numero de Froude, numero de Reynolds, etc.

Os rendimentos das turbinas semelhantes, sendo adimensionaes, dão uma caracteristica importante: o rendimento de duas maquinas semelhantes, em condições analogas de marcha, é o mesmo. Assim, construindo-se um modelo reduzido de turbina, segundo uma escala adequada, pode-se prever qual seja o rendimento de uma inteira serie de turbinas do mesmo tipo, e com as dimensões que se quizérem ter. As caracteristicas de todas as turbinas do mesmo tipo serão conhecidas pela experimentação sobre o modelo reduzido em escala apropriada.

A **semelhança de Newton** é o caso particular de semelhança entre dous sistemas, quando a aceleração da gravidade não influe ou influe extremamente pouco sobre o fenomeno. Isto se dá quando os pesos nos dous sistemas podem ser desprezados ou postos á margem.

A relação $\mu = \frac{m_1}{m_2}$ torna-se

$$\mu = L^3$$

O mesmo acontece com o quociente das forças

$$\frac{f_1}{f_2} = \mu = L^3.$$

Temos, pois:

$$L^3 = \frac{m_1\ l_1\ t_1{}^{-2}}{m_2\ l_2\ t_2{}^{-2}}\ L^3.\ L.\ \theta^{-2}$$

De onde se tira

$$L\ \theta^{-2} = 1\ ,\ \theta = L^{\frac{1}{2}}$$

A relação **w** entre as velocidades é

$$w = \frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1\ t_1{}^{-1}}{l_2\ t_2{}^{-1}} = L^{\frac{1}{2}}$$

Assim, conhecido ou fixado o modulo de homologia **L,** ficam determinados os modulos μ e θ, o que caracterisa a **semelhança de Newton.**

O quociente das acelerações é:

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{l_1\ t_1{}^{-2}}{l_2\ t_2{}^{-2}} = L.\ L^{-1} = 1$$

e isto permite o confronto entre duas maquinas geometricamente semelhantes, cujas partes homologas tenham o mesmo material de construcção, e cujas acelerações $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ em pontos correspondentes sejam eguaes.

A **semelhança de Froude** é uma aproximação, e é expressa pela regra de Froude:

"Quando duas embarcações, geometricamente semelhantes, têm as suas velocidades proporcionaes ás raizes quadradas das suas dimensões homologas, as suas resistencias são proporcionaes aos cubos das mesmas dimensões."

Isto é, quando

$$w = \frac{v_1}{v_2} = L^{\frac{1}{2}}$$

tem-se

$$\frac{S_1}{S_2} = L^3$$

pois que

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} = \frac{f_1}{f_2} = L^3.$$

O tanque de Froude foi projetado e construido para servir á experimentação de uma embarcação em movimento uniforme de translação sobre um liquido inicialmente em repouso, e deduzir do valor da resistencia do modelo reduzido a resistencia da embarcação em verdadeira grandeza. O peso do liquido deslocado pelo modelo e pela embarcação verdadeira deve dar uma relação constante $= L^3$.

O teorema de Bernouilli deve dar:

$$\frac{v_1{}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - gz_1 = \frac{v_2{}^2}{2} + \frac{p^2}{\rho} - g\,z_2 = \text{constante}$$

mas sendo

$$\frac{gz_1}{gz_2} = L$$

o mesmo deve acontecer aos outros termos para se conservar a homogeneidade das equações:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = w^2 = L$$

$$\frac{p_1}{p_2} = L$$

de onde se tira:

$$w = L^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{L}{w} = \theta = L^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{p_1}{p^2} = \varphi\, L^{-2} = L\ ;\ \varphi = L^3$$

e como $\varphi = \frac{f_1}{f_2} = L\ .\ \mu\ .\ \theta^{-2}$ tem-se

$$\mu = L^3$$

Esta relação mostra que a semelhança entre os filetes liquidos é uma verdadeira **semelhança de Newton.**

Nesta semelhança aproximada de Froude, determinada a escala do modelo pela determinação de **L,** ficam determinados os valores de θ e de μ pois que se tem:

$$\theta = L^{\frac{1}{2}} \text{ ou } \theta = \sqrt{L}$$

$$\mu = L^3$$

Na **semelhança de Froude** é necessario examinar a questão da compatibilidade com a formula da resistencia. Na maioria dos casos pode-se considerar válida a variação quadratica, como vimos no capitulo anterior: a resistencia é proporcional ao quadrado da velocidade, á densidade do fluido, e á área A da superficie de separação entre solido e fluido [1]. Neste caso teremos.

$$S = b\,A\,v^2 = \alpha\,\rho\ A\,v^2$$

sendo α uma constante e ρ a densidade.

---

(1) Ou área da seção mestre, como já vimos.

Considerando-se um corpo em verdadeira grandeza (A_1, v_1) e um modelo reduzido (A_2, v_2) teremos:

$$S_1 = \alpha\rho A_1 v_1^2 \quad e \quad S_2 = \alpha\rho A_2 v_2^2$$

A resistencia S_1 do corpo (geralmente embarcação) em verdadeira grandeza é, pois:

$$S_1 = \frac{S_2}{\rho A_1 v_1^2} \rho A_2 v_2^2$$

sendo que os valores relativos ao modelo (S_2 e v_2) podem ser medidos no tanque de Froude, onde se realiza a experimentação do modelo.

E' importante examinar se ha compatibilidade entre a lei de semelhança de Froude e a formula quadratica da resistencia, desde que se admite **a priori** a semelhança newtoniana entre os dois sistemas. Temos, pois:

$$\varphi = \mu = L_3 \; ; \; w = \sqrt{L}$$

E' facil ver que estas condições se harmonisam com a lei quadratica. De fáto, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\alpha \rho A_1 v_1^2}{\alpha \rho A_2 v_2^2} = L^3 .$$

isto é: a relação entre as forças é o cubo do modulo de homologia, e é egual á relação φ e á relação μ (relação entre as massas).

Se a variação de velocidade em vez de seguir a lei quadratica, seguisse outra lei qualquer:

$$S = \alpha\rho A v^n$$

se veria que não ha acôrdo possivel. O expoente **n** tem que ser $= 2$ para que haja compatibilidade entre a regra de Froude e o valor da resistencia.

Esta lei de compatibilidade é verdadeira sempre, ainda mesmo que os fluidos sejam de densidades diferentes.

Neste caso, teriamos:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} - g z_1 = \text{constante}$$

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} - g z_2 = \text{constante}$$

Chamando ρ_0 a relação $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ entre as densidades, e aplicando a lei de homogeneidade, temos:

$$L = \frac{gz_1}{gz_2} = \frac{\frac{p_1}{\rho_1}}{\frac{p_2}{\rho_2}} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{1}{\rho_0} =$$

$$= \varphi L^{-2} \cdot \frac{1}{\rho_0}$$

Donde: $\varphi = \rho_0 \cdot L^3$

A simples semelhança geometrica entre modelo e embarcação mostra que a relação entre as massas μ é egual á relação entre os volumes $= L^3$, multiplicado por ρ_0 (relação entre as densidades):

$$\mu = \rho_0 \cdot L^3$$

De outro lado, a equação de Bernouilli, relativamente aos termos que contêm a velocidade, fornece a relação:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = L \quad \text{de onde:} \quad \frac{v_1}{v_2} = L^{\frac{1}{2}} = w$$

As resistencias S_1 e S_2 estão na relação:

$$\varphi = \frac{S_1}{S_2} = \mu \cdot L \cdot \theta^{-2}$$

e, como $\frac{v_1}{v_2} = w = L\,\theta^{-1}$, tem-se

$$\varphi = \mu \cdot \frac{w^2}{L}$$

Já tinhamos achado:

$$\mu = \rho_0 \cdot L^3$$

$$w = L^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo estes dois valores na equação anterior, teremos:

$$\varphi = \rho_0 \cdot L^3 \cdot L \cdot L^{-1} = \rho_0 \cdot L^3$$

Este resultado concorda perfeitamente com a lei quadratica de variação da velocidade na formula da resistencia, pois que:

$$\varphi = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\alpha \rho_1 A_1 v_1^2}{\alpha \rho_2 A_2 v_2^2} = \rho_0 \cdot L^2 \cdot L =$$

$$= \rho_0 \cdot L^3$$

O numero de Reynolds como relação de semelhança. Semelhança de Reynolds.

O caso mais geral dos sistemas fluidodinamicos é que tanto o sistema real em verdadeira grandeza como o seu modelo de laboratorio sejam influenciados pela viscosidade, e que esta seja diferente para cada um dos dois sistemas. Vejamos, neste caso, o que é necessario para que haja semelhança dinamica entre os dois sistemas.

Sejam ρ_1 e ρ_2 as densidades respectivas, μ e μ_2 os coeficientes de viscosidade, e

$$\nu_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1}$$

$$\nu_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2}$$

os coeficientes cinematicos de viscosidade.

Teremos:

$$S_1 = \alpha \rho_1 A_1 v_1^2 \qquad S_2 = \alpha \rho_2 A_2 v_2^2$$

$$\text{e} \quad \varphi = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_1 A_1 v_1^2}{\rho_2 A_2 v_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} L^2 w^2$$

Como vimos no Capitulo I, os esforços tangenciaes devido á viscosidade nos dois sistemas são respetivamente:

$$f_1 = \mu_1 \frac{dv_1}{dy_1}$$

$$f_2 = \mu_2 \frac{dv_2}{dy_2}$$

E como f_1 e f_2 são forças por unidade de área, segue-se que:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\varphi}{L_2} = \frac{\mu_1 \dfrac{dv_1}{dy_1}}{\mu_2 \dfrac{dv_2}{dy_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{w}{L}$$

$$\varphi = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot w L$$

Temos assim dois valores para φ, a saber:

$$\varphi = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot L^2 w^2$$

$$\varphi = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot w L$$

mas

$$L = \frac{l_1}{l_2}$$

sendo l_1 e l_2 duas dimensões homologas **quaesquer,** e

$$w = \frac{v_1}{v_2}$$

sendo v_1 e v_2 duas velocidades homologas **quaesquer.**

Donde se tira:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} L w = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

e portanto:

$$\frac{l_1 v_1}{\nu_1} = \frac{l_2 v_2}{\nu_2} = \text{Constante} = R$$

Assim, pois, os dous sistemas serão semelhantes se o produto **l v** dividido poi ν fôr o mesmo para os dois sistemas.

Esta é a semelhança de Reynolds, que se pode exprimir tambem do modo seguinte:

"Em dois ou mais sistemas dinamicamente semelhantes a grandeza $R = \dfrac{lv}{\nu}$ é a mesma para todos esses sistemas, isto é: o produto **l v** de uma dimensão pela velocidade carateristica é sempre proporcional ao coeficiente cinematico de viscosidade".

Esta constante R assim obtida é **adimensional,** é um simples numero, e toma o nome de **numero de Reynolds,** ou, conforme o denomina Mises, é a **velocidade reduzida.**

A homogeneidade das equações do movimento dos fluidos.

Quando aparéce uma constante numa dada equação, não é certo que seja adimensional. E' preciso verificar a sua procedencia pela análise dimensional. Pode acontecer que não seja numero puro: será necessario atribuir-lhe dimensões para não prejudicar a homogeneidade das equações.

Com o numero de Reynolds é facil ver que se trata de grandeza adimensional. As suas dimensões são com efeito:

$$\left[R\right] = \frac{[l]\ [v]}{[\nu]} = \frac{L \, . \, L\, T^{-1}}{L^2 \, . \, T^{-1}} = 1$$

R é, pois, um numero puro, sem dimensões.

Como segundo exemplo tomemos a formula conhecida em Hidraulica sobre o escoamento dos liquidos:

$$U = \alpha \sqrt{r\, J}$$

sendo U a velocidade média, α uma constante, **r** o raio hidraulico, **J** a perda de carga por unidade de comprimento.

Para haver homogeneidade devemos ter:

$$\left[\alpha\right] = \frac{[U]}{[r^{\frac{1}{2}}]}$$

pois que **J** é adimensional.

As dimensões da constante α serão portanto:

$$L \, . \, T^{-1} \, . \, L^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}\ T^{-1}$$

Essa constante, pois, não é adimensional.

Ela só é constante para um dado sistema de dimensões, e será diversa quando se mudar de sistema de dimensões. E mudará em razão da raiz quadrada das grandezas lineares, e inversamente proporcional ao tempo.

E' muito util verificar a homogeneidade das formulas pela análise dimensional, pois assim se interpréta o verdadeiro significado das grandezas mecanicas ou se distingue uma grandeza de outra.

Tomemos, por exemplo, uma dada função da velocidade: a quantidade de movimento. Tal que a definiu Bernouilli, é o produto da massa pela velocidade. As suas dimensões são:

$$[m]\,[v] = M\,.\,L\,.\,T^{-1}$$

o que mostra que é um impulso, e não uma força. Esta teria as dimensões:

$$M\,.\,L\,.\,T^{-2}$$

isto é, seria a dimensão da quantidade de movimento dividida pelo tempo, o que de fáto é indicado pela relação:

$$F\,t = m\,v, \quad \text{ou} \quad F = \frac{m\,v}{t}$$

onde F é o impulso na unidade de tempo.

Do mesmo modo se poderia proceder com as outras grandezas usadas em Hidraulica.

Se, por exemplo, se considera a altura piezometrica, sabe-se que esta deve ser uma grandeza linear: quociente da pressão unitaria pelo peso especifico. As suas dimensões serão

$$\frac{F\,.\,L^{-2}}{F\,.\,L^{-3}} = L$$

Outro exemplo pode ser examinado pela equação de Clapeyron entre pressão e volume:

$$p\,v = r\,\theta$$

sendo θ a temperatura absoluta, **v** o volume da unidade de peso.

As dimensões do primeiro membro são:

$$[p\,v] = [p] \div [\rho]$$

sendo ρ a densidade.

De onde:

$$[pv] = F.\ L^{-2}.\ L^{3} = F.\ L.$$

que são as dimensões de um trabalho mecanico.

Teremos, pois:

$$[r] = \frac{F.\ L.}{[\theta]} = F.\ L.\ \theta^{-1}$$

Se a temperatura fôr computada como simples dimensão linear, teremos

$$[r] = [F]$$

Assim, o coeficiente terá as dimensões de uma força.

Se a temperatura não fôr contada como dimensão, teremos:

$[r] = [F]\ [L]$. (dimensões de um trabalho).

Em nenhum dos dois casos, o coeficiente **r** póde ser tido como adimensional.

As leis de semelhança pela análise dimensional.

As equações de Navier para um fluido de viscosidade μ, densidade ρ, sendo X, Y, Z, as componentes da força exterior resultante, **p** a pressão unitaria, **u, v, w,** as componentes da velocidade num ponto generico, são:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) -$$

$$- \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

e mais duas equações analogas para Y e Z, bem como a equação de continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

A pressão **p** pode ser substituida pela altura equivalente ρ **g h,** e introduzindo o coeficiente cinematico de viscosidade ν definido por $\nu = \dfrac{g\mu}{\gamma}$

teremos:

$$X - g\frac{\partial h}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) +$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

Imaginemos agora um outro sistema semelhante a este, no qual haja proporcionalidade constante **L** entre as grandezas geometricas correspondentes, bem como uma relação constante H entre as alturas piezométricas **h,** uma relação constante U entre as velocidades, uma relação constante P entre as pressões, uma relação constante F_ν entre os coeficientes cinematicos de viscosidade. O equilibrio deste segundo sistema, semelhante ao primeiro, se dará quando todas as forças tenham aumentado nas mesmas proporções.

Ora, as forças existentes são X, $g\dfrac{\partial h}{\partial x}$, as forças de inercia da forma $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e as forças de viscosidade da forma $\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Deixando de parte as componentes X, Y, Z, a semelhança dinamica exige, pois:

$$\frac{H}{L} = \frac{U^2}{L} = \frac{F_\nu\ U}{L^2}$$

sabendo-se que as dimensões de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ são $\dfrac{U}{L^2}$

e as de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ são $\dfrac{U}{L}$.

Teremos pois

$$\frac{H}{L} = \frac{U^2}{L} \quad \text{ou} \quad H = U^2$$

$$\frac{U^2}{L} = \frac{F_\nu\ U}{L^2} \quad \text{ou}\ U\,L = F_\nu$$

Se a força X,Y,Z, é o peso, pode ser tido como invariavel, tal como a aceleração g., e supondo que a viscosidade é muito pequena, ou que tende para zéro, teremos por um processo analogo ao anterior:

$$\frac{H}{L} = \frac{U^2}{L} \quad \text{onde} \quad H = U^2$$

Comparando os processos seguidos, podemos concluir que ha dois casos a considerar:

1.º — a ação da gravidade é insignificante em relação á viscosidade e ao atrito do fluido sobre as paredes do conduto, e, neste caso:

$$UL = F_\nu \quad \text{ou} \quad \frac{UL}{F_\nu} = 1$$

2.º — se existe uma superficie livre, ou, mais geralmente, se a viscosidade é insignificante ou tende para zéro, sendo a considerar sómente a aceleração da gravidade, teremos

$$U^2 = H \quad \text{ou} \quad \frac{U^2}{H} = 1$$

O 1.º caso é aplicavel á perda de carga em tubos lisos, ao atrito superficial sobre superficies planas, ás pressões e esforços que sofrem os corpos submersos a grandes profundidades, taes como os aeroplanos e submarinos, isto é, solidos longe da superficie livre ou da superficie limite, ou quando esta não existe.

Este caso, que se dá sempre que se possa desprezar o peso do solido em comparação com a viscosidade, ou quando esta assume uma influencia notavelmente preponderante, conduz á relação

$$\frac{UL}{F_\nu} = 1, \quad \text{isto é,}$$

$$\frac{U_1 L_1}{\nu_1} = \frac{U_2 L_2}{\nu_2} = \frac{U_3 L_3}{\nu_3} \ldots \text{etc.} \ldots$$

sendo U_1 a velocidade, L_1 uma dimensão linear qualquer do 1.º sistema, ν_1 a sua viscosidade cinematica, e U_2, L_2, ν_2, os mesmos elementos correspondentes de um 2.º sistema semelhante ao 1.º, e U_3, L_3, ν_3, os mesmos elementos correspondentes a um 3.º sistema, semelhante dinamicamente aos dois primeiros.

Chamando R um numero, isto é uma grandeza adimensional, tal que se tenha

$$R = \frac{UL}{\nu}$$

teremos o teorema seguinte: "em dois ou mais sistemas fluidodinamicos, haverá semelhança dinamica sempre que o parametro $R = \frac{UL}{\nu}$ entre esses sistemas seja o mesmo".

O parametro constante R, que é uma grandeza adimensional, isto é um puro numero, é o **numero de Reynolds,** e representa um papel muito importante no estudo das correntes turbulentas e no da resistencia fluidodinamica.

O 2.º caso é o dos sistemas em cujo movimento não influe sensivelmente a viscosidade, sendo tão sómente a considerar o peso. Então teremos $U^2 = H$, ou seja $\frac{U_1^2}{H_1} = \frac{U_2^2}{H_2}$ isto é, as velocidades são directamente proporcionaes á raiz quadrada das dimensões lineares:

$$\frac{U_1}{\sqrt{H_1}} = \frac{U_2}{\sqrt{H_2}}$$

Esta é a semelhança de Froude.

Quando se trata de sistemas fluidodinamicos em que é forçoso levar em consideração tanto a viscosidade quanto o peso, o modelo de ensaio, para que haja semelhança dinamica, deve satisfazer as condições:

$$\frac{H}{L} = \frac{UL}{F_\nu} = \frac{L}{U^2} = \frac{H}{U^2} = 1$$

ou seja:

$$H = L \qquad L = U^2 \qquad H = U^2$$

$$F_\nu = UL = U \,.\, U^2 = U^3$$

donde $\quad U = F_\nu^{\frac{1}{3}} \quad L = F_\nu^{\frac{2}{3}}$

E considerando variavel a aceleração da gravidade **g** temos:

$$\frac{H}{L} = \frac{UL}{F_\nu} = \frac{GL}{U^2}$$

Assim, pois, toda equação fluidodinamica que deva satisfazer as condições da semelhança dinamica deve ser da forma:

$$F\left(\frac{H}{L}, \frac{UL}{\nu}, \frac{gL}{U^2}\right) = \text{constante}$$

isto é, deve ser tal que os valores de H, L, etc., estejam ligados pela equação anterior, pois que assim $\frac{H}{L}$, $\frac{UL}{\nu}$, $\frac{gL}{U^2}$ permanecem constantes, bem como uma função F qualquer destas grandezas.

Na equação geral

$$F\left(\frac{H}{L}, \frac{UL}{\nu}, \frac{gL}{U^2}\right) = \text{constante}$$

as unidades de medida H, L, U, etc., entram com o mesmo expoente no numerador e denominador de cada termo da função. Estes termos da equação são, pois, todos de dimensão nula, isto é, são **adimensionaes.** Desta equação, portanto, é sempre possivel passar a outras equações fluidodinamicas, cujos membros sejam homogeneos relativamente ás unidades fundamentaes.

A teoria da semelhança dinamica é, pois, uma consequencia da lei de homogeneidade, que exige que os membros de toda equação verdadeira sejam homogeneos em relação ás unidades fundamentaes.

Neste 3.º caso, que é o mais complexo de todos, em que tanto a viscosidade como a gravidade têm que ser levadas em conta, vê-se que a lei de semelhança não exige apenas a identidade do **numero de Reynolds.** Os outros **numeros** $\frac{H}{l}$ e $\frac{gl}{U^2}$ tambem devem ser os mesmos nos dous sistemas, para que estes possam ser tidos como semelhantes.

A expressão $\frac{gl}{U^2}$ que caracteriza aproximadamente os sistemas semelhantes, para os quaes é preponderante a ação da gravidade, tem o nome de numero de Froude, e é adimensional, como o numero de Reynolds.

Quando se procura um fluido, que torne possivel a semelhança dinamica em confronto com outro fluido, fixado de antemão, o problema é geralmente soluvel. Bastará influir sobre a densidade e o coeficiente de viscosidade, de modo que o numero de equações seja egual ao numero de relações de semelhança a determinar.

O problema, porém, se torna insoluvel quando o fluido é o mesmo nos dois casos, pois que, alem de **g** ser o mesmo, será egual tambem o coeficiente de viscosidade nos dois casos, o que obriga a ser egual á unidade a relação de homologia: quer dizer que o modelo é o mesmo que o sistema em verdadeira grandeza.

Em casos como esse devemos nos contentar de uma semelhança parcial aproximada, fazendo preponderar os fatôres adimensionaes que mais influem no fenomeno, e vendo quaes são os fatores que devem ser tomados em consideração, e quaes os que devem ser desprezados.

Em liquidos viscosos, por exemplo, movendo-se em encanamentos ou em canaes, a resistencia dos solidos, quando de dimensões relativamente pequenas, pode ser posta sob a forma:

$$S = \rho v^2 l^2 \varphi (R , \lambda , \text{etc})$$

ou sob a forma:

$$S = \mu v l \psi (R , \lambda , \text{etc.})$$

conforme forem as resistencias proporcionaes ao quadrado ou á simples primeira potencia das velocidades.

A resistencia de uma pequena esfera, por exemplo, pode ser posta sob a forma:

$$S = 6 \pi \mu r v$$

sendo **r** o raio e **v** a velocidade media da esfera.

Sob essa forma, a resistencia é proporcional a **v,** como no regime viscoso.

De fáto, essa formula é devida a Stokes, que a deduziu para regime viscoso.

Podemos escrevel-a de dous modos:

$$\frac{S}{\mu v r} = 6 \pi \quad \text{(constante)}$$

$$\frac{S}{\rho v^2 r^2} = \frac{6 \pi}{R} \quad \left[\begin{array}{l} \text{inversamente propor-} \\ \text{cional ao numero de} \\ \text{Reynolds.} \end{array} \right]$$

Assim, se ha dois casos semelhantes para o mesmo fluido, é necessario que as velocidades sejam inversamente proporcionaes ao raio da esfera, e os tempos diretamente proporcionaes aos quadrados das dimensões. Então, as resistencias **S** resultam independentes das dimensões, o numero de Reynolds **R** será o mesmo e os dous sistemas são semelhantes.

Para os movimentos de grande velocidade, e quando o campo apresentar dimensões grandes, sendo os liquidos de pouca viscosidade (tal, por exemplo, a agua dos rios e dos mares), havendo, além de tudo, uma superficie livre, o numero de Froude deve preponderar no calculo da semelhança. Esta semelhança será, pois, a de Froude.

Teremos em casos desses:

$$S = \rho v^2 l^2 \varphi \left(\frac{gl}{U^2} , \lambda , \text{etc.} \right)$$

isto é, o numero de Froude $\frac{gl}{U^2}$ é que determinará a semelhança, como se dá no exemplo estudado por Froude com as duas embarcações movendo-se sobre a superficie do mar: "para que haja semelhança dinamica, é necessario que as velocidades sejam proporcionaes á raiz quadrada das dimensões lineares, e desta relação resulta que as resistencias são proporcionaes aos cubos das dimensões lineares".

Essa é a regra de Froude para a navegação maritima, e para os casos analogos (semelhança de Froude).

Quanto á influencia da viscosidade, se ela se torna apreciavel como na maioria dos casos, é ao numero de Reynolds que cabe decidir. Será necessario ter-se o mesmo numero de Reynolds para dous sistemas fluidos, para que eles possam ser tidos como semelhantes, desde que as ações da gravidade sejam insignificantes, quando comparadas aos efeitos da viscosidade.

Isto representa certamente um grande auxilio pratico, porque permite enfeixar em classes restritas um grande numero de experiencias, realizadas nas mais diversas condições. O numero de Reynolds, reunindo tres fatores importantes (velocidade, dimensão, viscosidade) é uma caracteristica precisa dos sistemas fluidos. No caso, por exemplo, do escoamento em condutos forçados, conhecidos o diametro, a velocidade, e o coeficiente de viscosidade, fica determinado o numero de Reynolds. Se este numero de Reynolds é o mesmo para dois ou para varios encanamentos, em que se escoem os fluidos mais diversos, os sistemas assim definidos por um mesmo numero de Reynolds são dinamicamente semelhantes. E assim, com esta concepção, a variação de tres grandezas (velocidade, diametro, viscosidade) fica reduzida a consideração de uma só: o numero de Reynolds.

Resumindo as conclusões principaes da teoria da semelhança, e de um modo geral, temos as duas proposições:

1.°) — quando a influencia da gravidade terrestre é preponderante na ação mutua entre solidos e fluidos, como no caso da formação de ondas superficiaes, de cauda de sulcos e outras perturbações em superficie livre, e quando a influencia imediata da viscosidade é tão pequena que possa ser desprezada, as velocidades correspondentes a dois sistemas semelhantes são proporcionaes á raiz quadrada das dimensões lineares correspondentes.

2.°) — quando não ha interferencia das ações proprias á gravidade, ou quando estas podem ser desprezadas em comparação das forças de viscosidade, unicas então a considerar, as velocidades correspondentes em dois sistemas semelhantes são inversamente proporcionaes ás dimensões lineares correspondentes, e diretamente proporcionaes ao respetivo coeficiente cinematico de viscosidade.

Sendo R uma constante, tem-se

$$v = R \frac{\nu}{l}$$

donde

$$R = \frac{vl}{\nu}$$

Esta constante, egual para os dois sistemas dinamicamente semelhantes, é o numero de Reynolds.

O fluxo de um liquido que se escôa atravez de um orificio em parede delgada sob a ação do seu peso é um exemplo tipico do primeiro caso, e ele é definido, quanto á semelhança com outro escoamento, pelo numero de Froude, isto é, pela relação:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}$$

ou como é conhecido em Hidraulica, na parte de Foronomia:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_2}}$$

ou seja $v = \alpha \sqrt{2\,g\,h}$.

A resistencia de um aeroplano, ou a de um submarino navegando a grande profundidade de modo a não se formarem ondas e sulcos na superficie livre, representa uma boa exemplificação do 2.° caso. As velocidades em dois sistemas semelhantes serão para este exemplo:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{\nu_1}{l_1}}{\frac{\nu_2}{l_2}}$$

e o numero de Reynolds será:

$$R = \frac{v_1\ l_1}{\nu_1} = \frac{v_2\ l_2}{\nu_2} = \text{constante.}$$

Capitulo IV

O Numero de Reynolds como caracteristica das correntes fluidas

Formula do movimento dos fluidos, deduzida da lei de homogeneidade.

Osborne Reynolds fez diversas aplicações da lei de homogeneidade. As leis de semelhança dinamica foram desenvolvidas e ampliadas mediante uma extensão adequada da teoria da homogeneidade. Entre outras aplicações importantes desta teoria, ha a mencionar a formula que Reynolds e Rayleigh deduziram para o caso do movimento dos fluidos.

Reynolds partiu da consideração de que em um fragmento **l** de conduto circular de diametro constante **d**, a resistencia **S** é egual á quéda de pressão, isto é,

$$S \, . \, \pi d l = \frac{\pi d^2}{4} (p_0 - p)$$

Passando a considerar uma variação dp infinitamente pequena da pressão p num trecho **d l**, teremos

$$S = \frac{p_0 - p}{l} \, \frac{d}{4} = \frac{dp}{dl} \, . \, \frac{d}{4}$$

ou $\quad d p = 4 \, . \, S \, . \, d^{-1} \, . \, d l$

Reynolds considera dp proporcional ao diametro, á viscosidade, á densidade, e á velocidade, de modo a ter

$$d p = k \, d^{m-3} \, \eta^{2-m} \, \rho^{m-1} \, v^m \, d l$$

junto com a equação

$$d p = 4 \, . \, S \, . \, d^{-1} \, . \, d l$$

donde ele tirou:

$$S = k_1 \, v^m \, \rho^{m-1} \, d^{m-2} \, \eta^{2-m} = k_1 \, \rho v^2 \left(\frac{vd}{\nu} \right)^{m-2}$$

e desde que $m = 2 - n$, tem-se

$$S = k_1 \, \rho \, v^2 \left(\frac{v \, d}{\nu} \right)^{-n} = k_1 \, \rho \, v^2 \left(\frac{1}{R} \right)^n$$

sendo R o numero de Reynolds.

o que significa que a resistencia é proporcional ao inverso do numero de Reynolds, ou mais exatamente, a uma certa potencia **n** do inverso do numero de Reynolds.

Ao mesmo resultado chegou logo depois Rayleigh pela consideração de que a resistencia S tem que ser proporcional:

1.º) a uma certa potencia **m** da densidade,

2.º) a uma certa potencia **n** da viscosidade,

3.º) a uma certa potencia **p** da velocidade,

4.º) e a uma certa potencia **s** do diametro **d** ou de um comprimento generico **l** a uma só dimensão. E como não é possivel imaginar outro fatôr que possa intervir neste fenomeno, Lord Rayleigh estabeleceu de inicio:

$$S = k \, \rho^m \, \nu^n \, v^p \, d^s$$

As dimensões de **S**, sendo uma força dividida por uma area, são:

$$[\, S \,] = M \, L^{-1} \, T^{-2}$$

Donde, tomando as dimensões do 2.º membro:

$$M L^{-1} \, T^{-2} = (M L^{-3})^m \times (L^2 \, T^{-1})^n \times (L T^{-1})^p \, L^s =$$
$$= M^m \, L^{-3m + 2n + p + s} \, T^{-n-p}$$

o que exige para satisfazer a lei de homogeneidade que se tenha simultaneamente:

$$m = 1$$
$$-3m + 2n + p + s = -1$$
$$-n - p = -2$$

ou seja:

$$m = 1$$
$$p = 2 - n$$
$$s = - n$$

donde

$$S = k \rho \nu^n v^{2-n} d^{-n} =$$
$$= k \rho v^2 \left(\frac{\nu}{v d}\right)^n =$$
$$= k \rho v^2 \left(\frac{1}{R}\right)^n$$

que é a mesma expressão de Reynolds, na qual porem, o diametro **d** pode ser substituido por uma grandeza generica **l** de uma só dimensão.

De modo que a expressão geral da equação de Reynolds e Rayleigh é:

$$S = k \rho v^2 \left(\frac{\nu}{v l}\right)^n = k \rho v^2 \left(\frac{1}{R}\right)^n$$

Assim, a resistencia por unidade de area é proporcional á densidade e ao quadrado da velocidade, e inversamente proporcional a uma determinada potencia do numero de Reynolds.

Aplicação da equação de Reynolds e Rayleigh a um caso particular da TRAGFLÜGELTHEORIE de Prandtl.

Imaginemos, como fez Prandtl na sua teoria das azas de sustentação **(Tragflügeltheorie)**, que uma superficie retangular plana se move **ao largo,** isto é, numa massa fluida homogenea de grandes dimensões. Sejam **l** e **b** o comprimento e a largura da superficie movel, **u** a velocidade da corrente fluida a alguma distancia da superficie, de modo a evitar-se a perturbação imediata da agitação dos **sulcos** e outras turbulencias, δ a espessura, sempre muito pequena, da camada limite. O peso do fluido que passa por uma seção transversal da camada limite na unidade de tempo é proporcional ao peso especifico γ, á espessura δ da camada, á largura **b** da superficie e á velocidade **u.**

Temos que o peso P é:

$$P = k \gamma \delta b u$$

Esta massa de fluido que chega com a velocidade **u** perde na camada limite uma parte da sua velocidade, de modo que a perda da quantidade de movimento é

$$\frac{\gamma}{g} \delta b u^2$$

a qual deve ser egual ao impulso produzido pela força de atrito contra a parede, isto é, deve ser proporcional a

$$\eta l b \frac{u}{\delta}$$

donde se deduz que

$$\frac{\gamma}{g} \delta b u^2 = k_1 \eta l b \frac{u}{\delta}$$

donde

$$\delta = k_2 \sqrt{\frac{g \eta l}{\gamma u}}$$

Tomando ν como coeficiente cinematico de viscosidade, temos

$$\nu = \frac{g \eta}{\gamma}$$

donde

$$\delta = k_2 \sqrt{\frac{\nu l}{u}}$$

e, dividindo por l ambos os membros:

$$\frac{\delta}{l} = k_2 \sqrt{\frac{\nu}{u l}}$$

ou, desde que o numero de Reynolds é egual a

$$\frac{u l}{\nu}$$

$$\frac{\delta}{l} = k_2 \sqrt{\frac{1}{R}}$$

Isto mostra que a espessura da camada limite dividida pelo comprimento do retangulo movel é inversamente proporcional á raiz quadrada do numero de Reynolds.

Anteriormente tinhamos achado que, pela equação de Reynolds e Rayleigh para o caso da superficie cilindrica, a resistencia unitaria **S** é

$$S = k \rho u^2 \left(\frac{1}{R}\right)^n \qquad (1)$$

Agora, porém, no caso figurado por Prandtl, trata-se de uma superficie retangular limitada, de area bl, para a qual se tem:

$$S_0 = k_1 \eta l b \frac{u}{\delta}$$

e o impulso por unidade de area será

$$S = \frac{S_0}{lb} = k \eta \frac{u}{\delta} \qquad (2)$$

Destas duas equações (a primeira de Rayleigh e Reynolds, a segunda de Prandtl) se conclue que:

$$k \rho u^2 \left(\frac{1}{R}\right)^n = k_1 \eta \frac{u}{\delta} \qquad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

e como

$$\frac{g \eta}{\gamma} = \nu \qquad e \qquad \gamma = \rho g$$

temos

$$k \delta u \left(\frac{1}{R}\right)^n = k_1 \nu$$

e

$$\delta = \frac{k_1 \nu}{k u \left(\frac{1}{R}\right)^n}$$

$$\frac{\delta}{l} = \frac{k_1}{k \left(\frac{u l}{\nu}\right) \left(\frac{1}{R}\right)^n}$$

e pois que $R = \frac{u l}{\nu}$, $\frac{1}{R} = \frac{\nu}{u l}$,

temos

$$\frac{\delta}{l} = \frac{k_1}{k \left(\frac{1}{R}\right)^{n-1}} = \frac{k_2}{\left(\frac{1}{R}\right)^{n-1}}.$$

Metodo de Kozeny para a dedução da equação de Reynolds e Rayleigh.

Imaginemos um tubo cilindrico de diametro **D,** comprimento **l,** no qual a agua adére ás paredes do tubo e determina uma força de viscosidade capaz de equilibrar a componente da força exterior paralela ao eixo do tubo, componente esta que é a do peso da agua contida no cilindro.

Teremos

$$\frac{\eta u}{\delta} \pi D l = \gamma l \frac{\pi D^2}{4} J$$

sendo J a perda de carga por unidade de comprimento, isto é, $J = \frac{p}{l}$, u a velocidade na periféria, δ a espessura da camada limite, η o coeficiente mecanico de viscosidade, e γ o peso especifico do fluido. Da equação acima pode-se tirar

$$J = \frac{4 \eta u}{\gamma \delta D}$$

Chamando **U** a velocidade media no interior do tubo, α um coeficiente de proporcionalidade, que veremos em seguida ser de fáto uma constante para grandes valores do numero de Reynolds, teremos que, de acordo com as propriedades do movimento em tubos, a perda de carga J devida á viscosidade pode ser considerada proporcional ao quadrado da velocidade e inversamente proporcional ao diametro, isto é,

$$J = \alpha \frac{U^2}{2 g D}$$

donde

$$\frac{4 \eta u}{\gamma \delta D} = \alpha \frac{U^2}{2g D}$$

e como

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

teremos

$$\delta = \frac{8 \nu u}{\alpha U^2}$$

donde

$$\frac{\delta}{D} = \frac{8 \nu u}{\alpha U^2 D} = \frac{8 u}{\alpha U} \cdot \frac{\nu}{U D} =$$

$$= \frac{8 u}{\alpha U} \cdot \frac{1}{R}$$

Das experiencias de Lees, Koseny e outros, resultou que para valores muito grandes do numero de Reynolds o coeficiente α pode ser considerado constante e egual, em media, aproximadamente, a 0,007.

Temos, pois:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{8 u}{\alpha U} \cdot \frac{1}{R}$$

na qual equação, para grandes valores do numero de Reynolds, α é constante, bem como $\frac{u}{U}$ que é a relação entre a velocidade devido á viscosidade e a velocidade media na seção transversal.

Vê-se, portanto, que a relação $\frac{\delta}{D}$ é proporcional ao inverso do numero de Reynolds.

Este resultado parece em contradição com o valor obtido anteriormente para o retangulo de Prandtl:

$$\frac{\delta}{D} = k \sqrt{\frac{1}{R}}$$

Para que houvesse acordo entre os dois resultados seria necessario que

$$\frac{8u}{\alpha U} \cdot \frac{1}{R} = k \frac{1}{\sqrt{R}}$$

ou

$$\frac{u}{U} = k \frac{\alpha \sqrt{R}}{8}$$

Substituindo α pelo seu valor, encontrado nas experiencias de Koseny e Lees, teremos:

$$\alpha = 0{,}007 + 0{,}6\, R^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{u}{U} = k \frac{\sqrt{R}\,\left(0{,}007 + 0{,}6\, R^{-\frac{1}{3}}\right)}{8}$$

$$= k \frac{0{,}007\ R^{\frac{1}{2}} + 0{,}6\ R^{\frac{1}{6}}}{8}$$

Para valores de R suficientemente elevados teremos a possibilidade de ter o numerador maior do que o denominador, isto é,

$$0{,}007\ R^{\frac{1}{2}} + 0{,}6\ R^{\frac{1}{6}} > \frac{8}{k}$$

A partir deste valor de R teriamos $u > U$, o que é impossivel, visto que a velocidade na periferia, devido á viscosidade do fluido, não pode ser maior do que a velocidade media.

Este resultado indica **ad absurdum** que a formula de Kozeny não é exacta para valores muito elevados do numero de Reynolds. Do estudo das correntes turbulentas resulta que os valores elevados da constante de Reynolds indicam franca turbulencia do regime, ao passo que os pequenos numeros de Reynolds caracterisam as correntes laminares. Os valores medios significam um regime de transição. Para estes dois regimes, até mesmo para um principio de turbulencia, a equação de Kozeny, que não contradiz os resultados geraes de Reynolds e Rayleigh, parece traduzir bem os resultados da experiencia, e não está em desacordo com a formula anterior:

$$\frac{\delta}{l} = k\ R^{n-1}$$

no qual **n** deve ser egual a $\frac{1}{2}$ para que

$$R^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

O resultado obtido:

$$\frac{\delta}{D} = k \frac{1}{\sqrt{R}}$$

bem como outras formulas analogas do movimento de fluidos viscosos, não tem encontrado uma completa verificação por parte da experiencia. Traçando diagramas, cujas abcissas sejam proporcionaes a R, e as ordenadas proporcionaes a δ ou a $\frac{\delta}{D}$, observa-se que a lei $\frac{\delta}{D} = k \frac{1}{\sqrt{R}}$ não é valida para todo e qualquer valor do numero de Reynolds.

Ela só é verdadeira até um certo e determinado valor de R. Este valor-limite do parametro de Reynolds tem o nome de **valor critico.** A velocidade que corresponde a este valor limite é chamada **velocidade critica.** E' a velocidade para a qual cessa o movimento laminar.

Distinção entre movimento laminar e movimento turbulento.

O problema estudado por Poiseuille se refere a correntes laminares, isto é, a correntes de turbulencia núla, ou, como se pode dizer depois dos trabalhos de Reynolds e Rayleigh, a correntes em que é pequeno o valor do indice de Reynolds.

Para taes correntes em regime Poiseuille, defluindo em tubos cilindricos de seção circular de raio **a,** a velocidade generica **v** no ponto em que o raio generico é **r** satisfaz a formula de Poiseuille:

$$v = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx}\left(a^2 - r^2\right)$$

A distribuição da velocidade numa seção transversal é representada por uma parabola, cujo eixo coincide com o do tubo. A velocidade média **U** é

$$U = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi\, r\, v\, dr = -\frac{a^2}{8\mu} \cdot \frac{dp}{dx}$$

De fáto, sendo **Q** a vasão, **d Q** o seu elemento diferencial, temos

$$U = \frac{dQ}{\sigma} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\,\pi\, r\, v\, dr =$$

$$= -\frac{1}{2\,a^2\,\mu} \cdot \frac{dp}{dx}\left[\int_0^a a^2\, r dr - \int_0^a r^3\, dr\right]$$

$$= -\frac{1}{2\,a^2\,\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{a^4}{4} = -\frac{a^2}{8\,\mu} \cdot \frac{dp}{dx}$$

A velocidade generica é, pois:

$$v = 2\,U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

Para $r = o$ tem-se $v = 2\,U$, isto é: a velocidade no eixo do tubo (velocidade maxima) é o dobro da velocidade media.

Para um comprimento **l** do tubo a resistencia devida ao atrito é proporcional á area $s = 2\,\pi\,a\,l$, sendo por outro lado proporcional a **l** e á area da base $\pi\,\mathbf{a}^2$ e ao gradiente de pressão $\left(-\frac{dp}{dx}\right)$.

Temos então:

$$S = -\pi\,a^2\,l\,\frac{dp}{dx} \qquad e \qquad S = 8\,\mu\,\pi\,l\,U$$

donde:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\,\mu\,U}{a^2}$$

donde

$$U = -\frac{a^2}{8\,\mu}\,.\,\frac{dp}{dx}\,.$$

Introduzindo o valor do numero de Reynolds, temos:

$$R = \frac{aU}{\nu}\,;\quad \mu = \rho\,\nu = \rho\,\frac{a\,U}{R}$$

d'onde:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8U}{a^2}\,.\,\rho\,\frac{a\,U}{R} = -\frac{8\,\rho\,U^2}{a\,R}$$

ou:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\,\rho\,U^2}{a}\,.\,\frac{1}{R}$$

A resistencia S por unidade de superficie é

$$S = \frac{S_0}{2\,\pi\,a\,l} = -\frac{a}{2}\,.\,\frac{dp}{dx} =$$

$$= \frac{a}{2}\,.\,\frac{8\,\rho\,U^2}{a}\,.\,\frac{1}{R} =$$

$$= 4\,\rho\,U^2\,.\,\frac{1}{R}$$

Portanto, para correntes laminares, a resistencia por unidade de área é proporcional á densidade do fluido, ao quadrado da velocidade media, e inversamente proporcional ao numero de Reynolds, resultado este de acôrdo com o de Kozeny.

Mas é bom de ver, conforme indicam as experiencias, que este regime laminar de Poiseuille só se estabelece para valores não muito grandes do numero de Reynolds. Experiencias numerosas demonstraram que a estabilidade do regime exige que o indice reynoldiano não vá alem de um certo numero inferior a 2000.

Em alguns tratados de Aerodinamica este limite é abaixado até 1200, e mesmo até 1160. De modo que é necessario ter-se $R < 1160$ para que as formulas deduzidas, tendo em vista o regime laminar, possam aplicar-se com segurança. Até mesmo na opinião dos que fizeram descer o numero de Reynolds ao limite inferior de $R < 1160$, pode-se esperar que em condições normaes o regime se liberte da turbulencia propria aos grandes numeros de Reynolds, e que, sem erro apreciavel, a corrente possa ser tida como laminar, até mesmo para alguns valores do numero de Reynolds acima de 2000.

Singularidades da turbulencia. Vortices. Esteira de sulcos.

Em geral pode-se dizer que qualquer movimento de rotação da parte fluida de um sistema em torno de eixos instantaneos ou permanentes constitue um vortice, desde que não se tenham especificado mais precisamente as condições da rotação.

E' facil compreênder o vortice plano: rotação em torno de um eixo constante, geralmente vertical. Mais dificil é conceber o **anél de vortices,** ou o vortice espacial a tres dimensões.

Na superficie de um liquido o vortice se torna visivel não só pela depressão ou sulco profundo, como pelo movimento das particulas flutuantes. Nos casos mais geraes de anél de vortices, de vortice espacial, ou de cauda de sulcos, com as suas superficies descontinuas caracteristicas, a observação diréta é mais penosa, e ás vezes extremamente dificil, salvo quando se encontram envoltas nos turbilhões particulas visiveis. A observação tem sido coadjuvada em alguns casos, como nas classicas experiencias de Reynolds, pela adjunção de liquidos coloridos, que permitem acompanhar melhor o fenomeno da turbulencia.

Chama-se **vortice forçado** a rotação que resulta da obrigação de girar em torno de um eixo fixo, comportando-se como um sistema solido em relação á velocidade de cada ponto. O vortice é **livre** quando num movimento plano as linhas de corrente seguem circunferencias concentricas em torno do eixo fixo normal ao plano do movimento. Neste caso, as velocidades são inversamente proporcionaes aos raios dos circulos, ao passo que nos vortices forçados as velocidades são dirétamente proporcionaes ás distancias do eixo de rotação. Os vortices são livres, na superficie de um liquido, quando este se escôa por um orificio. A deformação de uma particula liquida neste caso é uma dilatação, e a componente relativa ao movimento vorticoso é nula. A rotação aqui não poderia ser comparada a de um corpo rigido; o vortice, pois, não é forçado, é livre. Rigorosamente falando, ao contrario da linguagem popular que chama de vortice a este movimento de rotação, a verdade é que não ha vortices, a não ser no centro, numa zona muito limitada. (1)

Quando duas correntes se encontram ha geralmente produção de vortices. O mesmo se dá quando ha movimento relativo entre solidos e fluidos. Se duas correntes com velocidades diferentes, obliquas, acabam por se tangenciar, o ponto de encontro é origem de vortices. A superficie de separação torna-se a séde de turbilhões diversos e de uma esteira de sulcos ondulosos. E' o que acontece quando um solido, um navio por exemplo, se desloca no mar: á pôpa forma-se uma cauda de sulcos, que se restabelece periodicamente.

Os anéis de vortices têm sido estudados experimentalmente por diversos observadores, tanto nos gazes como nos liquidos. Quando se introduz um jacto liquido por uma torneira ou por um registro em outro liquido em repouso, é possivel colorir o jacto e seguir o desenvolvimento da turbulencia: anéis vorticosos se desenvolvem na massa antes tranquila com velocidades apreciaveis. Observadores como Oberbeck verificaram que a velocidade pode ir a 70 metros por segundo.

Tambem no ar foi facil obter os anéis, que se tornaram visiveis com fumaça de substancias coloridas, ou com fumo de tabaco. Foi possivel observar a energia cinetica de certos anéis de vortices: resultado que confirma a tendencia moderna a atribuir á turbulencia um valor ás vezes muito maior do que á viscosidade, quanto á resistencia fluidodinamica, explicando-se assim como é possivel que os fluidos perfeitos, ou de viscosidade núla, ofereçam resistencia relativamente ás superficies solidas, o que seria inexplicavel se só a viscosidade determinásse a resistencia, como se pretende ás vezes quando se quer esclarecer o paradoxo de D'Alembert.

Dos vortices em geral tratou amplamente Leonardo da Vinci em sua obra "Del moto e misura dell'acqua". Das duas especies essenciaes de vortices, uns crescendo com a distancia ao eixo, outros diminuindo á proporção que dêle se afastam, falou Leonardo, ilustrando as suas observações com desenhos numerosos e interessantes.

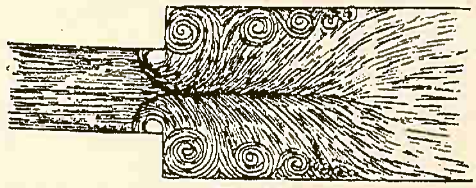
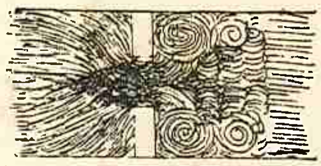


Fig. 11

Turbulencia acentuada em virtude de obstaculos laterais no alargamento brusco de seção.
Desenho de Leonardo da Vinci.



Fgi. 12

Turbulencia em virtude de obstaculos simetricamente postos na seção.

Fig. 13

Vortices e esteira de sulcos em obstaculo obliquo, segundo Leonardo da Vinci.

(1) No tratado de Prandtl e Tietjens (Hydro- und Aeromechanik) encontram-se observações que esclarecem a distinção a fazer entre as duas naturezas de vortices.

"Helmholtz denominou **vortice** (Wirbel) o que aqui chamámos giro ou rotação (Drehung). Empregando esta palavra **vortice** caímos em contradição com a linguagem habitual, que entende como **vortice** o movimento giratorio circular de um fluido. Segundo Helmholtz, o simples movimento laminar de um fluido viscoso seria vorticoso, o que contradiz categoricamente o uso habitual da linguagem. Os movimentos laminares possuem giros ou rotações, mas não possuem vortices".

Prandtl und Tietjens (Hydro- und Aeromechanik, Seite 186 - 187).

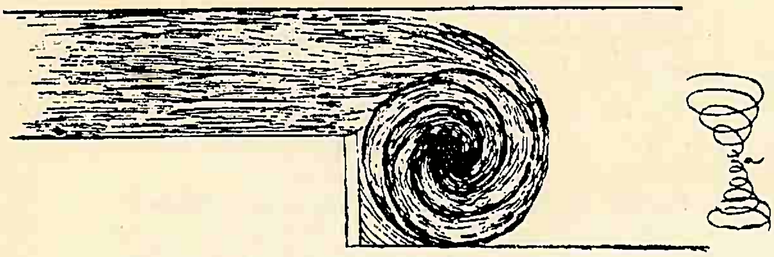


Fig. 14

"La corrente corre piu di sopra che di sotto, e per conseguenza, se per la velocitá di sopra il retroso é girato per un verso, nell'acqua tarda si reunisse in un punto, e rinova il suo circular moto con contrario movimento".
(Leonardo da Vinci).

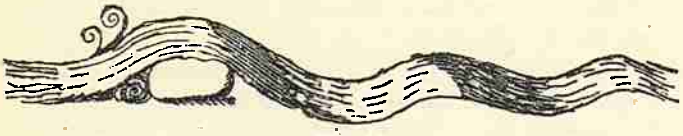


Fig. 15

Obstaculo no fundo da corrente. **"In un fiume piano, se nel fondo fia un sol sasso, l'acqua doppo quello fa molti globi".**
(Leonardo da Vinci).

Fig. 16

Vortices no escoamento por orificio. **"Il retroso, ch'é veloce in mezzo della sua circolatione, porta aria ed acqua nel suo fondo. E la ragione é perché tali retrosi, oltre al moto suo circolare, hanno il moto del trivellamento inverso al fondo."**
(Leonardo da Vinci).

Dos vortices a que acima nos referimos diz Leonardo:

"Il retroso alcuna volta cresce in potenza, e diminuisce in diametro, ed alcuna volta diminuisce in potenza, e cresce in diametro. Ed il primo è quando l'acqua versa per il suo fondo. [Caso do orificio praticado na parede ou no fundo de um reservatorio]. Perchè l'acqua che compone il retroso è tanto piu veloce, quant'ella è piu bassa, perchè ha sopra di sè maggior peso d'acqua, e peró si fa piu veloce."

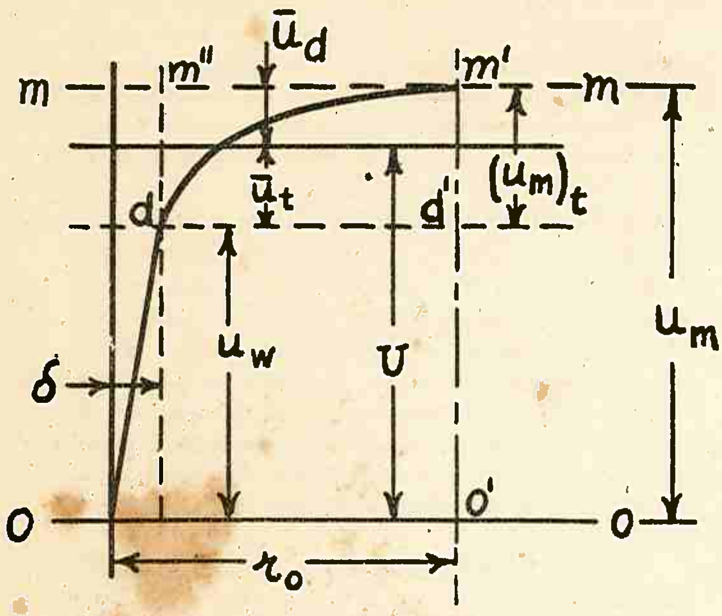
As duas especies de vortices ficam assim caracterisadas: no primeiro caso, as velocidades são inversamente proporcionaes ao raio de rotação, isto é, o movimento é tanto mais rapido quanto mais proximo do eixo. O eixo é a parte mais veloz. No segundo caso, as velocidades são dirétamente proporcionaes ao raio de giração, isto é, o movimento é tanto mais rapido quanto maior é a distancia ao eixo. No eixo a velocidade é nula. O eixo está em repouso.

Explicando com admiravel clareza o movimento singular de vortices, que ele chama **"caso degno d'ammiratione"**, diz Leonardo: "Il moto elico, overo revertiginoso d'ogni liquido è tanto piu veloce, quanto egl'è piu vicino al centro della sua rivolutione. Questo che noi proponiamo è caso degno d'ammiratione. Conciosia che il moto circolare della rota è tanto piu tardo, quanto egl'è piu vicino al centro del circonvolubile. Ma questo tal caso non habbiamo nel particolare dell'acqua."

E mais adiante, no breve capitulo intitulado: **"Del movimento de retrosi"** acrescenta Leonardo estas preciosas observações: "L'acqua nel fondo fa li suoi retrosi, quali si raggirano per contrario movimento a quello di sopra. La ragione è che li circoli, i quali sono larghi di sopra, si riducano ad un punto, ed ivi si sommergono. E seguitando il loro moto per l'incomminciato corso, viene nel fondo a fare contrario moto a quello di sopra, quando si disgrega dal suo centro".

A leitura da obra extremamente original de Leonardo, e riquissima de observações que ainda hoje não perderam de valor, antes de interessante atualidade, faz compreênder a enorme importancia dessas perdas complexas de energia cinetica, que Levi-Civita tanto estudou como "esteira ou cauda de sulcos", que Helmholtz submeteu á analise matematica com o nome generico de "Wirbelbewegung", e que Prandtl descreve minuciosamente. (Dynamik der Wirbelbewegung).

Estes fenomenos de turbilhões e esteira de sulcos estão intimamente ligados ás caracteristicas do movimento turbulento, e mais precisamente, se acham bem caracterisados pelo numero de Reynolds. Para valores muito pequenos de numeros de Reynolds não se observa nenhum fenomeno turbilhonario. Os vortices aparecem depois de um certo valor (valor critico) do numero de Reynolds. Para numeros muito grandes de Reynolds, aumentam os vortices, mas amortece a periodicidade da sua formação, bem como a da esteira de sulcos. Por isto, é de esperar que as formulas que dão o valor da resistencia sejam diversas. Mas em qualquer caso, o numero de Reynolds é uma informação preciosa sobre o gráo de turbulencia, sobre a natureza e a intensidade dos vortices.



A velocidade média **U** é a soma das duas velocidades u_t e u_w, sendo u_t a velocidade média da parte turbulenta e u_w a velocidade perto da parede.

$$\text{Tem-se } U = \frac{Q}{\pi r_0^2} = u_t + u_w$$

O numero de Reynolds como fatôr da resistencia e como indice da turbulencia das correntes.

Já mostrámos que a resistencia, considerada, conforme mostram a teoria e a experiencia, como função do numero de Reynolds, pode ser dada pela equação:

$$S = k \rho v^2 \left(\frac{1}{R}\right)^n$$

na qual a resistencia depende do quadrado da velocidade e de uma potencia **n** do inverso do numero de Reynolds. E' claro que este valor da resistencia se refere ao regime hidraulico, e que, no caso de regime viscoso, conviria pôr a equação sob a forma

$$S = k \mu v \varphi \left(\frac{1}{R}\right)$$

A primeira equação, de forma quadratica para o valor da velocidade, pode ser escrita de modo geral, desta fórma:

$$S = k \rho v^2 \psi \left(\frac{1}{R}\right)$$

Assim, ambos os regimes ficam subordinados a uma função do numero de Reynolds, o que exprime tambem uma propriedade fisica deste parametro, que assume justamente a capacidade de caracterisar o movimento.

A experimentação tem procurado descriminar empiricamente, mas sempre subordinada á analise matematica, a natureza das duas funções φ e ψ.

Para numeros de Reynolds bastante grandes, a função ψ tende a tornar-se independente do numero de Reynolds.

Ao contrario, para valores muito pequenos deste parametro, a função ψ torna-se uma proporcionalidade ao inverso de **R,** tal como achámos anteriormente:

$$S = k \rho v^2 \left(\frac{1}{R}\right)^n$$

Destas ponderações resulta a possibilidade de classificar o estudo da resistencia conforme esse parametro é notavelmente grande ou notavelmente pequeno.

A resistencia para grandes numeros de Reynolds, nas regiões onde as rotações não são sensiveis, torna-se identica a que é propria dos fluidos perfeitos. Nas regiões onde ha movimentos rotacionaes a resistencia é identica á dos fluidos viscosos. E' claro que sendo $R = \frac{lv}{\nu}$, o valor deste parametro pode ser grande em virtude de grandes dimensões **l** e de velocidades moderadas ou pequenas, ou em virtude de grandes velocidades, como no caso do regime balistico, embora sejam moderadas ou pequenas as dimensões. Tanto no 1.° caso como no 2.° ha identica influencia do denominador, que é sempre o coeficiente cinematico de viscosidade.

A vantagem do numero de Reynolds é justamente, entre outras muitas, a de reduzir a caracterisação de um sistema fluidodinamico a um só parametro, em vez da obrigação de examinar a todo momento as tres possiveis variaveis do sistema: dimensão, velocidade, e viscosidade.

Esta classificação das correntes pelos numeros de Reynolds corresponde á classica distinção delas em correntes laminares e correntes turbulentas, que prevaleceu desde Boussinesq. Para o regime laminar ou viscoso valem sempre as equações de Navier, nas quaes o transporte da quantidade de movimento de uma camada a outra se efetúa por simples difusão. Para o regime turbulento ou sinuoso essas equações de Navier deixam de valer, pois não é então possivel admitir que os esforços tangenciaes sejam simplesmente proporcionaes ao gradiente de velocidade. E' certo, e já posto fóra de duvida, quer pela analise matematica, quer pela experimentação, que este tipo de movimento, denominado turbulento em contraposição ao regime laminar, surge sempre acompanhado de valores muito grandes do parametro de Reynolds. Ele provem naturalmente de qualquer corrente ou sistema laminar, sempre que o numero de Reynolds ultrapassa um determinado limite, limite este que corresponde a uma **velocidade critica,** ou a um numero de Reynolds **critico.**

Quando se aplicam as equações de Navier ao regime laminar ou viscoso, desprezam-se os termos quadraticos, e assim se chega a uma expressão da resistencia em função do numero de Reynolds, em que este é sempre pequeno.

Os movimentos chamados **laminares** não se devem confundir com o regime laminar ou viscoso, pois que esses movimentos são caracterisados pelo fato que eles se efetuam paralelamente a uma dada superficie livre ou a uma parede fixa, seja plana, seja cilindrica, emquanto que o regime denominado **laminar** é definido pela sua expressão analitica, expressão que é dada pelo sistema de equações de Navier.

No movimento laminar pode-se admitir que as velocidades, forçosamente paralelas entre si, são paralelas a uma direção dada, á direção de um dos eixos de coordenadas. Suporemos que esse eixo é o dos x, e assim a equação de continuidade se reduzirá a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = o$$

e as componentes v e w serão nulas, bem como serão nulos os termos $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $v \frac{\partial v}{\partial y}$ e $w \frac{\partial w}{\partial z}$.

Este movimento laminar, assim definido, não é forçosamente identico ao chamado regime laminar, caracterisado pelo sistema de equações de Navier e pelo fato de ser representado por um numero de Reynolds de valor diminuto.

Nas experiencias que Reynolds realizou em tubos cilindricos, foi observado o movimento de um filete liquido adequadamente colorido atravéz de uma massa liquida incolor. Esse filete colorido permanecia retilineo, regular, paralelo ao eixo do tubo, sempre que era pequeno o valor do numero de Reynolds, abaixo, pois, do valor critico. Esse movimento era, pois, laminar. O regime era tambem laminar, mas não é forçoso que sempre o movimento laminar se identifique com o regime laminar.

Os movimentos laminares podem se efetuar sómente ao longo de paredes planas ou cilindricas, como os encanamentos, os canaes, ou entre superficies cilindricas concentricas, e podem prevalecer tambem para grandes numeros de Reynolds, emquanto que o regime laminar é caracterisado por pequenos numeros de Reynolds, e pode se dar conjuntamente com o movimento de um solido no seio de um sistema fluido, o que não é possivel para o movimento propriamente laminar. No movimento relativo entre um solido qualquer e um fluido tambem qualquer pode haver regime laminar, mas é impossivel o movimento laminar.

A deficiencia da linguagem sientifica atual, que se pode atribuir ao fato de serem ainda recentes os estudos sobre o movimento e o regime laminares, não deve, porém, conduzir a uma confusão, que seria nociva para a compreensão destes fenomenos.