

Princípios da Dualidade para Análise por Envoltória de Dados

Enzo B. Mariano (EESC/USP) enzo.mariano@gmail.com

Mariana R. Almeida (EESC/USP) almeidamariana@yahoo.com

Daisy A. N. Rebelatto (EESC/USP) daisy@prod.eesc.usp.br

Resumo: A Análise por Envoltória de Dados (DEA) é um dos mais conhecidos métodos de avaliação da eficiência relativa de um conjunto de empresas. Devido ao fato do DEA ser baseado em modelos programação linear, que por definição estão sempre sujeitos aos princípios da dualidade, pode-se analisar os modelos do DEA por meio de duas vertentes: (a) Primal e (b) Dual. A partir da análise conjunta dos modelos Primais e Duais pode-se obter uma série de conclusões que a análise de um único modelo não possibilitaria. Assim, essa análise conjunta pode servir como uma importante ferramenta de auxílio ao gestor. Assim, os principais objetivos deste artigo são: (a) descrever as principais aplicações dos modelos DEA Duais e Primais e; (b) confeccionar uma proposta conjugada desses dois modelos. Com a utilização conjunta dos modelos Primais e Duais é possível obter: (a) a eficiência relativa, (b) as utilidades dos produtos e insumos, (c) as metas para se atingir a eficiência e (d) a determinação dos benchmarks. Para realização desta pesquisa, o procedimento metodológico utilizado foi uma pesquisa bibliográfico-exploratória que consistiu em uma busca na literatura dos principais princípios referentes ao DEA e a integração desses conceitos por meio de deduções matemáticas.

Palavras-chave: Análise por Envoltória de Dados; Modelos matemáticos; Benchmarks.

1. Introdução

Atualmente, um dos grandes debates no meio acadêmico é sobre como as empresas devem proceder para alcançar a máxima eficiência nos processos produtivos, sendo um procedimento essencial para a sobrevivência no mercado globalizado. Tendo em vista essa importância, houve a necessidade do surgimento de técnicas para avaliarem a eficiência de uma empresa perante suas concorrentes (eficiência relativa).

A Engenharia de Produção postula que para avaliar todo e qualquer sistema é necessário definir quais são os principais *inputs* e *outputs* representantes desse sistema em sua totalidade e a pesquisa operacional é a disciplina que melhor circunscreve esse ambiente complexo, apresentando um grande avanço no desenvolvimento das técnicas para análise de eficiência (ALMEIDA, MARIANO e REBELATTO, 2006 e LOVELL *et al.*, 1993).

A Análise por Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis - DEA*) é uma das técnicas oriundas da Pesquisa Operacionais mais utilizadas para avaliar a eficiência relativa de um conjunto de empresas (VILLELA, 2004). Sendo o DEA um modelo de programação linear, ele também está sujeito aos princípios da Dualidade. Segundo esses princípios, todo problema de programação linear (intitulado Primal) está associado a um outro problema de programação linear (intitulado Dual) cujo resultado da função objetivo é o mesmo. Por meio do Dual, pode-se realizar análises que a simples observação do modelo Primal não permite.

Com isso, o objetivo geral deste artigo consiste, em apresentar, discutir e aplicar os modelos Duais e Primais do DEA, apresentando suas principais utilizações e relacionar ambos os modelos com o intuito de apresentar uma proposta de uso conjunto. A principal justificativa deste

trabalho é a falta na literatura de um trabalho nessa direção. Além disso, na literatura os modelos Primais e Duais são pouco explorados e não são, na maior parte das vezes, apresentados em conjunto.

2. Análise por Envoltória de Dados

2.1 Conceitos Básicos

A Análise por Envoltória de Dados (DEA) é uma técnica baseada em programação linear, com o objetivo de medir o desempenho de unidades operacionais (ou tomadoras de decisão), quando a presença de múltiplas entradas e múltiplas saídas torna difícil a comparação (BIONDI NETO, MELO e GOMES, 2003; VILLELA, 2004). Na literatura correspondente, o DEA é comum denominarmos as unidades operacionais analisadas como Unidades Tomadoras de Decisão (*Decision Making Units* – DMUs).

Casa Nova (2002) define Análise por Envoltória de Dados como sendo uma curva de eficiência (ou de máxima produtividade) considerando uma relação ótima entre os insumos e os produtos de um conjunto de empresas. Essa curva pode ser definida como Fronteira de eficiência onde as unidades consideradas eficientes estarão nessa curva enquanto as ineficientes se localizarão abaixo dela.

De acordo com Oliveira e Gomes (2003), a Análise por Envoltória de Dados (DEA) é uma abordagem de programação matemática, alternativa aos métodos estatísticos tradicionais, que possibilita estimar a eficiência relativa mediante uma fronteira de eficiência. Desse modo, o termo de fronteira de eficiência denomina quais pontos limitam a produtividade sobre o qual uma unidade produtiva hipotética é tecnicamente eficiente (LORENZETT *et al.*, 2004).

2.2 Origem e evolução

A técnica DEA teve origem com o conceito de produtividade, que é a relação entre os produtos e insumos de uma empresa. Nos casos de múltiplos insumos (x) e múltiplos produtos (y), o cálculo da produtividade de uma empresa foi proposto por originalmente por Knight (1933) por meio da Expressão 1 (MOITA, 2002):

$$\text{Produtividade} = \frac{u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + u_3 \cdot y_3 \dots}{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 \dots} = O_v / I_v \quad (1)$$

Em que:

u_i = Utilidade (coeficiente de importância) do *output* i;

y_i = Quantidade do *output* i;

v_j = Utilidade (coeficiente de importância) do *input* j;

x_j = Quantidade do *input* j;

O_v = *Output* virtual;

I_v = *Input* virtual.

Dessa forma, a medida de produtividade depende de um conjunto de pesos a serem atribuídos a cada *input* (v) e a cada *output* (u). Esses pesos são as utilidades de um insumo ou de um produto. Porém, nem sempre a utilidade de um insumo (ou produto) pode ser facilmente

mensurada. Além disso, para cada empresa a importância (utilidade) dos produtos e dos insumos são diferentes. Assim, as letras u e v da fórmula de produtividade são variáveis, sendo que cada entidade avaliada possuirá utilidades diferentes.

A abordagem analítica rigorosa aplicada à medida da eficiência na produção teve origem com o trabalho de Pareto-Koopmans e Debreu (1951). A eficiência relativa de uma empresa pode ser dividida em duas categorias: (a) a técnica e (b) a de escala. A definição de Pareto-Koopmans para a eficiência técnica é um vetor *input-output* que tecnicamente eficiente se e só se:

- a) Nenhum dos *outputs* pode ser aumentado sem que algum outro *output* seja reduzido ou algum *input* necessite ser aumentado;
- b) Nenhum dos *inputs* possa ser reduzido sem que algum outro *input* seja aumentado ou algum *output* seja reduzido.

Com base nessa definição de unidade eficiente, a eficiência de uma empresa qualquer pode ser calculada pela Expressão 2, assim resultado do cálculo da eficiência é sempre um valor entre 0 e 1, que pode ser expresso em termos percentuais ou absolutos.

$$\text{Eficiência} = P / P_{\max} \quad (2)$$

Em que:

P = Produtividade atual da DMU;

$P_{\max}$ = Produtividade máxima que pode ser alcançada por essa DMU.

O estudo das medidas de eficiência baseadas em técnicas não paramétricas teve prosseguimento com Farrel (1957), que propôs um modelo empírico para o cálculo da eficiência relativa, isto é, a eficiência de uma empresa em relação às outras. Para Farrel (1957), era melhor comparar a eficiência de uma empresa com os melhores níveis até então observados do que com algum ideal inatingível (OLIVEIRA e GOMES, 2003).

Baseados nas análises de Farrel (1957) e no conceito de produtividade de Knight (1933), os autores Charnes, Cooper e Rhodes iniciaram o estudo da abordagem não paramétrica para análise de eficiência relativa de firmas com múltiplos insumos e múltiplos produtos. Foram esses pesquisadores que utilizaram pela primeira vez o termo DEA. O primeiro modelo criado para o DEA pressupunha retornos constantes a escala, ou seja, não considerava os ganhos de escala quando se calculava a eficiência. Desse modo, a eficiência calculada era a eficiência técnica. Esse modelo passou a ser conhecido como modelo CCR, em homenagem aos seus autores, ou modelo como modelo de retornos constantes (*Constant Returns to Scale* - CRS) (OLIVEIRA e GOMES, 2001).

Em 1984 Banks, Charnes e Cooper criaram um novo modelo, considerando o retorno variável à escala, ou seja, considerando o ganho de escala no cálculo da eficiência. Esse passou a ser identificado como modelo de retornos variáveis (BCC) (*Variable Returns to Scale* - VRS), em homenagem aos seus autores. Esse modelo incorporava pela primeira vez o conceito de eficiência de escala (LORENZET, LOPES, LIMA, 2004). Desde então, uma série de modelos foram desenvolvidos a partir de modificações no modelo BCC, assim para estender a aplicabilidade do DEA aos mais diversos segmentos. Esses modelos se destinavam aos mais diversos fins e pode-se obter resultados cada vez mais completos.

3. Cálculo das metas de uma DMU ineficiente

O ponto de projeção de uma DMU ineficiente na fronteira nada mais é do que uma meta para que a DMU ineficiente se torne eficiente. O ponto de projeção da DMU ineficiente dependerá da orientação do modelo (que determinará a direção da projeção) e do modelo utilizado (que determinará a forma da fronteira). A Figura 1 ilustra a projeção de um modelo CCR para ambas as orientações ao insumo e ao produto.

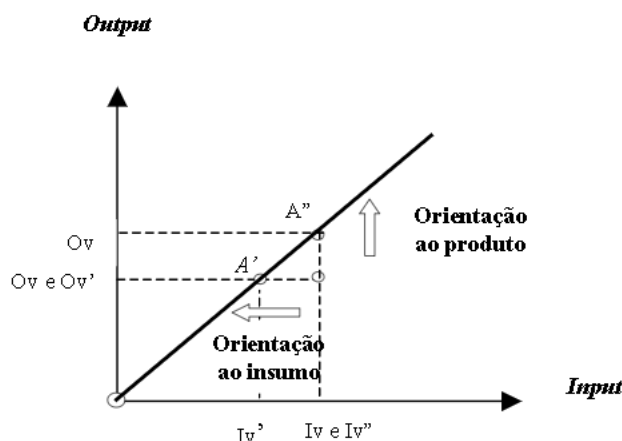


FIGURA 1 - Modelo de Orientação ao insumo ou ao produto

Fonte: Coelli, Prazada Rao e Batteze (1998).

A Expressão 3 apresenta o procedimento de cálculo da eficiência relativa da DMU A da Figura 1, a partir da definição de eficiência, para as duas orientações (ao insumo e ao produto):

$$E = P / P_{\max} = P_A / P_{A'} \text{ (insumo) ou } P_A / P_{A''} \text{ (produto)} \quad (3)$$

Em que:

P = Produtividade atual da DMU;

$P_{\max}$ = Produtividade máxima que pode ser alcançada por essa DMU;

P_A = Produtividade da DMU A (DMU ineficiente em análise);

$P_{A'}$ = Produtividade da DMU virtual A' (projeção da DMU ineficiente segundo o modelo orientado ao insumo);

$P_{A''}$ = Produtividade da DMU virtual A'' (projeção da DMU ineficiente segundo o modelo orientado ao produto).

A produtividade da DMU A (P_A) pode ser substituída pela expressão (Ov / Iv) sendo Ov e Iv respectivamente o *output* virtual e o *input* virtual da DMU A. Do mesmo modo, as produtividades das DMUs A' ($P_{A'}$) e A'' ($P_{A''}$) podem ser substituídas respectivamente por (Ov' / Iv') e (Ov'' / Iv'') .

No caso da orientação para os *inputs*, Ov' é igual a Ov já que o *output* virtual é constante. Assim, o desenvolvimento algébrico para o cálculo da eficiência nessas condições é estabelecida pela Expressão 4:

$$E = P_A / P_{A'} = (Ov / Iv) / (Ov' / Iv') = Iv' / Iv \quad (4)$$

Em que:

P_A = Produtividade da DMU A;
 $P_{A'}$ = Produtividade da DMU virtual A';
 O_v = *Output* virtual da DMU A;
 I_v = *Input* virtual da DMU A;
 $O_{v'}$ = *Output* virtual da DMU virtual A';
 $I_{v'}$ = *Input* virtual da DMU virtual A'.

Ao intitular a eficiência da orientação para *inputs* de θ , a Expressão 4 é transformada na Expressão 5.

$$I_{v'} = \theta * I_v \quad (5)$$

Em que:

I_v = *Input* virtual da DMU A;
 $I_{v'}$ = *Input* virtual da DMU virtual A' (meta da DMU A);
 θ = Eficiência da orientação para o *input*,
 n = Número de *inputs* (insumos).

Por meio da Expressão 5, pode-se calcular a meta para DMU ineficiente A, já que $I_{v'}$ é a meta para a DMU A quando se considera os produtos constantes. O I_v é por definição uma combinação linear de todos os insumos da DMU A, assim a Expressão 5 pode ser desmembrada em n equações, uma para cada insumo, conforme a Expressão 7.

No caso da orientação para os produtos, $I_{v''}$ é igual a I_v . Ao realizar o desenvolvimento algébrico semelhante ao da orientação aos insumos e ao intitular o inverso da eficiência relativa para orientação ao *output* de η , obtém-se a Expressão 6, que também permite o cálculo da meta DMU A, para essa orientação. Essa Expressão também pode ser subdividida em m equações, uma para cada produto, conforme a Expressão 9.

$$O_{v''} = \eta * O_v \quad (6)$$

Em que:

O_v = *Output* virtual da DMU k;
 $O_{v''}$ = *Output* virtual da DMU virtual A'' (meta da DMU_k);
 η = Inverso da eficiência da orientação para o *output*,
 m = Número de *outputs* (produtos).

A partir das expressões do cálculo das metas da DMU A, derivam-se as expressões para o cálculo das metas de uma DMU 0 aleatória. No entanto, essas expressões apenas servirão para o modelo CCR, pois a fronteira do modelo BCC é caracterizada como sendo linear por partes e isso pode ocasionar distorções ao resultado da meta caso a fronteira seja paralela a um dos eixos, conforme ilustra a Figura 2.

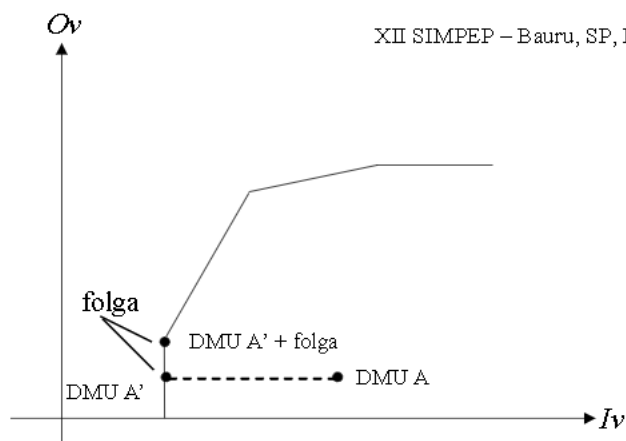


FIGURA 2 - Exemplificação do conceito de folga para DMU's

Essas distorções, indicadas na Figura 2, são intituladas folgas e devem ser incorporadas ao cálculo das metas para obter-se uma expressão que seja utilizada tanto para o modelo CCR quanto para o modelo BCC. As Expressões 7, 8, 9, 10 são fórmulas que permitem o cálculo das metas de qualquer DMU ineficiente, a partir dos valores da eficiência, dos *inputs* e dos *outputs* para essas DMUs.

Metas para os modelos orientados aos insumos:

$$x_{j0}' = \theta * x_{j0} - S_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$y_{i0}' = y_{i0} + S_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (8)$$

Metas para os modelos orientados aos produtos:

$$y_{i0}' = \eta * y_{i0} - S_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (9)$$

$$x_{j0}' = x_{j0} + S_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Em que:

x_{j0} = Quantidade do insumo j da unidade 0;

y_{i0} = Quantidade do produto i da unidade 0;

x_{j0}' = Meta do insumo j da unidade 0;

y_{i0}' = Meta do produto i da unidade 0;

S_j = Folga referente ao insumo j ;

S_i = Folga referente ao produto i ;

m = Número de tipos de produtos;

n = Número de tipos de insumos.

Qualquer insumo ou produto de uma DMU virtual pode ser expresso como uma combinação linear dos insumos ou produtos do conjunto de DMUs que se está considerando.

Pode-se nas equações acima substituir y_{i0}' e x_{j0}' respectivamente por $\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k$ e $\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k$ onde

λ_k é um coeficiente referente a DMU k , y_{ik} é o output i da DMU k , x_{jk} é o input j da DMU k e z é o número de DMUs analisadas. Assim uma alternativa para se achar a meta de uma DMU ineficiente é determinar o valor dos coeficientes λ_k .

4. Modelo DEA fracionário

O modelo DEA fracionário é obtido diretamente das fórmulas de produtividade de Knight (1933) e de eficiência relativa de uma empresa. O grande problema do cálculo da eficiência relativa por essas fórmulas é determinação das utilidades dos insumos e dos produtos de uma empresa. Para resolver esse problema, foi necessário considerar que as utilidades dos insumos e dos produtos de uma empresa são aquelas que maximizam a sua eficiência relativa. Isso não necessariamente é verdade, sendo, portanto, uma das hipóteses do DEA.

O modelo DEA originalmente desenvolvido por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) transformava o problema do cálculo da eficiência relativa em um problema de programação fracionária como expresso pelas Expressões 11, 12 e 13.

$$\text{MAX } P_0 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}} \quad (11)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (12)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (13)$$

Em que:

u_i = Peso calculado para o *output* i ;

v_j = Peso calculado para o *input* j ;

x_{jk} = Quantidade do *input* j para unidade k de um determinado setor;

y_{ik} = Quantidade do *output* i para unidade k de um determinado setor;

x_{j0} = Quantidade do *input* j para unidade em análise;

y_{i0} = Quantidade do *output* i para unidade em análise;

z = Número de unidades em avaliação;

m = Número de *outputs*;

n = Número de *inputs*.

O modelo apresentado nas expressões 11, 12, 13 é o modelo CCR fracionário. Neste artigo serão apresentados apenas os modelos CCR, porém todas as demonstrações matemáticas realizadas para os modelos CCR também podem ser adaptadas para os modelos BCC. Vale destacar que um problema de programação fracionária apresenta infinitas soluções. Dessa maneira, os problemas desse tipo requerem uma linearização para que se obtenha uma solução mais adequada para cada modelo. Os modelos DEA Primais originam-se da linearização do modelo DEA fracionário.

5. Modelos Primais do DEA

O modelo DEA Primal é obtido a partir da linearização do modelo fracionário. Essa linearização pode ser realizada por meio de dois procedimentos, ou mantendo-se os produtos

constantes e minimizando os insumos (modelo orientado aos insumos), ou mantendo-se os insumos constantes e maximizando os produtos (modelo orientado aos produtos). Os modelos DEA Primais são modelos de programação linear que por definição apresentam uma única solução, que não necessariamente é igual para as duas orientações. Almeida, Mariano e Rebelatto (2006) corroboraram essas afirmações por meio de um estudo de caso.

Para ambas as orientações, os modelo Primais são obtidos com o acréscimo de uma restrição ao modelo DEA fracionário. Para cada DMU que será analisada, é necessário construir um modelo de programação linear diferente, sendo que a eficiência relativa da DMU em análise será o próprio resultado da função objetivo (no caso do modelo orientado aos insumos) ou o inverso dela (no caso do modelo orientado aos produtos). Isso é claramente constatado por meio das Expressões 14 e 18 que apresentam as funções objetivo respectivamente dos modelos orientados aos insumos e aos produtos. As Expressões 14, 15, 16 e 17 apresentam a montagem do modelo CCR Primal orientado aos insumos a partir do modelo DEA fracionário.

$$\text{MAX } P0 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{1} = \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} \quad (14)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} = 1 \quad (15)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 = \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (16)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (17)$$

As Expressões 18, 19, 20 e 21 apresentam a montagem do modelo CCR Primal orientado aos produtos a partir do modelo DEA fracionário.

$$\text{MAX } P0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}} = \text{MIN FO} = \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} \quad (18)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} = 1 \quad (19)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 = \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (20)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (21)$$

Em que:

u_i = Peso calculado para o *output* i ;

v_j = Peso calculado para o *input* j ;

x_{jk} = Quantidade do *input* j para unidade k de um determinado setor;

y_{ik} = Quantidade do *output* i para unidade k de um determinado setor;

x_{j0} = Quantidade do *input* j para unidade em análise;

y_{i0} = Quantidade do *output* i para unidade em análise;

z = Número de unidades em avaliação;

m = Número de *outputs*;

n = Número de *inputs*.

Os modelos Primais fornecem como resposta, além da eficiência relativa, os pesos u_i e v_j . Esses pesos são estimativas das utilidades dos insumos e dos produtos para cada DMU em análise. Tendo em vista que a utilidade é um coeficiente de importância, os modelos DEA Primais podem ser utilizados para estimar as utilidades de insumos (ou produtos) que não são factíveis. Para contemplar esse enfoque, a literatura apresenta trabalhos como o de Ângulo-Meza, Mello e Clímaco (2006) que propõe a utilização do DEA Primal como uma ferramenta para a análise multicritério.

É importante destacar que as utilidades dos insumos e dos produtos não podem ser obtidas diretamente por meio dos coeficientes u_i e v_j , já que esses coeficientes dependem da ordem de grandeza dos insumos e produtos. Para que os coeficientes reflitam exatamente o valor das utilidades é preciso realizar uma normalização prévia dos dados do problema.

6. Modelos Duais do DEA

A todo problema de programação linear associa-se um outro problema de programação linear chamado de Dual cujo resultado da função objetivo é o mesmo do problema original que é chamado de Primal (THANASSOLIS, 2001). Por meio dos modelos Duais pode-se realizar análises que a resolução dos problemas Primais são incapazes de contemplar. Segundo Ramalhete, Guerreiro e Magalhães (1984), as regras para se obter o problema Dual a partir de seu correspondente Primal são:

- Cada restrição do problema Primal corresponde a uma variável do problema Dual;
- Cada variável do problema Primal corresponde a uma restrição do problema Dual;
- A matriz dos coeficientes técnicos do problema Dual é uma matriz transposta da matriz correspondente do problema original;
- Os termos independentes do problema Dual são os coeficientes da função objetivo do problema Dual. Os coeficientes da função objetivo do problema Primal são os termos independentes do problema Dual;
- Se o problema original for um problema de maximização (minimização), então o problema Dual é um problema de minimização (maximização);

Sendo os modelos CCR e BCC, modelos de programação linear, também pode-se encontrar para esses dois modelos e suas duas orientações (*input* e *output*) os seus correspondentes Duais. Assim o modelo CCR orientado ao *input* Dual pode ser expresso pelas Expressões 22, 23, 24 e 25.

$$\text{MIN FO} = \theta \quad (22)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k \geq y_{i0} \text{ para } i=1,2,3\dots m \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} \leq 0 \text{ para } j=1,2,3,n \quad (24)$$

$$\lambda_k \text{ e } \theta > 0 \quad (25)$$

Enquanto isso, o modelo CCR orientado ao *output* Dual pode ser expresso pelas Expressões 26, 27, 28 e 29.

$$\text{MIN FO} = \eta \quad (26)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k \geq x_{j0} \text{ para } j=1,2,3\dots n \quad (27)$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - \eta \cdot y_{i0} \leq 0 \text{ para } i=1,2,3,m \quad (28)$$

$$\lambda_k \text{ e } \eta > 0 \quad (29)$$

Em que:

θ = Eficiência;

η = Inverso da Eficiência;

λ_k = Não possui significado econômico, porém tem algumas aplicações práticas no cálculo das metas e *benchmarks*;

x_{jk} = Quantidade do *input* j para unidade k;

y_{ik} = Quantidade do *output* i para unidade k;

x_{j0} = Quantidade do *input* j para unidade em análise;

y_{i0} = Quantidade do *output* i para unidade em análise;

z = Número de unidades em avaliação;

m = Número de tipos de *outputs*;

n = Número de tipos de *inputs*.

Devido ao fato do resultado da função objetivo do problema Primal ser por definição igual ao do Dual, pode-se afirmar que a variável θ é a própria eficiência da DMU analisada, enquanto η é o inverso da eficiência da DMU analisada.

Em um problema de programação linear, uma inequação pode ser transformada em equação por meio do acréscimo de uma variável auxiliar. Para transformar as inequações, representadas pelas Expressões 23, 24, 27 e 28, em equações pode-se acrescentar uma variável (+S) para as equações do tipo menor ou igual e (-S) para restrições do tipo maior ou igual. Ao acrescentarmos essas variáveis auxiliares nas restrições do DEA, elas se transformam nas equações do cálculo das metas, como pode ser verificado ao comparando-se as Expressões 23, 24, 27 e 28 com as Expressões 7, 8, 9 e 10. Sendo assim, pode-se concluir que por meio dos

modelos Duais é possível calcular metas para DMUs ineficientes e que $\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k$ e $\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k$ são as metas respectivamente de um *output* i e de um *input* j da DMU ineficiente que está sendo analisada (esse cálculo é o mesmo para as duas orientações).

7. Determinar os *Benchmarks*

Nos modelos Primais, cada restrição corresponde a eficiência de uma DMU diferente e, portanto, nos modelos Duais cada variável λ_k é associada a uma diferente DMU k. Segundo o teorema da dualidade, após a resolução do Dual caso a variável associada a uma restrição for igual a 0, isso significa que essa restrição não atinge o seu valor máximo e portanto não limita apenas o valor da F.O. do problema Primal. Por outro lado, caso o valor de λ_k for diferente de 0, isso significa que a restrição atingiu o seu valor máximo e que, portanto limitou o valor da F.O. do problema Primal.

Quando uma restrição limita o valor da F.O. isso significa que a DMU representada por essa restrição é eficiente mesmo quando usa os coeficientes que maximizam eficiência da DMU em análise. Assim a DMU representada por essa restrição pode ser definido como um *benchmark* para a DMU ineficiente em análise. Um *benchmark* é uma DMU real que pode ser adotada como padrão para uma DMU alcançar as suas metas organizacionais e se tornar eficiente. Vale lembrar que a meta de uma DMU é uma combinação linear dos *inputs* e *outputs* de seus *benchmarks*.

8. Conclusões

A partir dos conceitos apresentados neste artigo foi possível construir um painel das principais análises que podem ser realizadas ao se utilizar os modelos Primais e Duais do DEA.

Ambos os modelos permitem o cálculo da eficiência relativa. Nos modelos Primais e Duais orientados aos insumos a eficiência relativa será o próprio resultado da função objetivo (F.O.). Enquanto isso, nos modelos Primais e Duais orientados aos produtos a eficiência relativa é o inverso desse valor. Especificamente para os modelos Duais, a eficiência relativa pode ser dada pela variável θ (modelo orientado ao insumo) ou pelo inverso da variável η (modelo orientado ao produto).

Assim, por meio dos modelos Primais, além da eficiência, pode-se determinar também estimativas para as utilidades de cada *input* e cada *output* de uma DMU em análise. Essas informações são obtidas por meio da análise dos coeficientes u_i e v_j .

Com os modelos Duais, além da eficiência, também se obtém os valores dos coeficientes λ_k que podem ser utilizados para:

- a) Calcular as metas das DMUs ineficientes;
- b) Determinar os *benchmarks* para cada DMUs ineficientes.

Por meio da análise conjunta dos modelos Duais e Primais verificou-se que apenas um único modelo não permitiria. Ao resolver-se apenas o modelo Primal, por exemplo, é impossível determinar as metas das DMUs ineficientes e os seus *benchmarks* respectivos. Por outro lado, ao analisar-se apenas o modelo Dual não é possível determinar as utilidades dos insumos e dos produtos analisados. Assim, a melhor opção é utilizar os dois modelos em conjunto para obter mais informações do sistema.

Vale lembrar que neste artigo foi apenas apresentado o modelo CCR. Porém, as conclusões a respeito das diferenças e das possíveis utilizações das modelagens Primais e Duais também são válidas para o modelo BCC, visto que a única diferença existente entre os modelos CCR e BCC é que o primeiro calcula a eficiência total enquanto o segundo calcula a eficiência técnica.

Como sugestão para futuros trabalhos, sugere-se a aplicação dos conceitos da dualidade a outros modelos do DEA e a outras técnicas que também são baseadas em programação linear.

9. Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, M.R.; MARIANO, E.B.; REBELATTO, D.A.N. **Análise Por Envoltória De Dados - Evolução E Possibilidades De Aplicação**. IX SIMPOI - Simpósio de Administração de Produção, Logística e Operações Internacionais, São Paulo, 2006, **Anais**.
- ANGULO MEZA, L., SOARES MELLO, J.C.C.B., CLÍMACO, J.C.N. **Estudos conjuntos de análise envoltória de dados (DEA) e programação linear multiobjetivo (PLMO): Uma revisão bibliográfica**. Relatórios de Pesquisa em engenharia de Produção, vol. 6, n. 5. Universidade Federal Fluminense, 2006.
- CASA NOVA, S.P.C. **Utilização da análise por envoltória de dados (DEA) na análise de demonstrações contábeis**. 2004. Tese (Doutorado em Ciências Contábeis) - Universidade de São Paulo, São Paulo.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. **European Journal of Operational Research**, vol. 2, p. 429-444, 1978.
- COELLI, T.; PRAZADA RAO, D.S.; BATTESE, G. E. **An introduction to efficiency and productivity analysis**. Massachussets Kluwer Academic Publishers, 1998.
- LORENZETT, J.R.; LOPES, A. L. M.; LIMA, M.V.A. **Aplicação do método de pesquisa operacional DEA na avaliação de desempenho de unidades produtivas para área de educação profissional**. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.
- LOVELL, C. A. K. **Productions frontiers and productive efficiency**. In: FRIED, 1933.
- MOITA, M. H. V. **Um modelo para avaliação da eficiência técnica de professores universitários utilizando Análise de Envoltória de Dados: o caso dos professores da área de engenharias**. Florianópolis. 2002. 169 f. (Doutorado em Engenharia de produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC.
- BIONDI NETO, L. B.; MELLO, J. C. C. B. C.; GOMES. **Método Fourier – DEA na medição de um componente da quantidade de energia elétrica**. In: XXIII ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO. Ouro Preto, 21 a 24 de outubro, 2003.
- OLIVEIRA, H.C.; GOMES, A.P. **Eficiência na agroindústria avícola mineira**. In: CONGRESSO DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES. Ouro Preto, 28 a 31 de agosto, 2003.
- RAMALHETE, M.; GUERREIRO, J.; MAGALHÃES, A. **Programação Linear**. Volumes I e II. São Paulo: McGraw-Hill, Lisboa, 1984.
- THANASSOULIS, E. **Introduction to the theory and application of data envelopment analysis: a foundation text with integrated software**, Kluwer Academic Publishers, 2001
- VILELA, D.L. **Utilização do método Análise Envoltório de Dados Para Avaliação do Desempenho Econômico de Cooperativas de Crédito**. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.