RT-MAP-8304

O TEOREMA DE STOKES
EM
VARIEDADES CELULÁVEIS

Ivan de Queiroz Barros

JULHO 1983

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Este trabalho originou-se de meu desejo de uma exposição completa e detalhada do Teorema de Stokes em Variedades Celuláveis que admitem cantos, uma vez que não consegui encontrar nenhuma dentro dos requisitos apontados.

Se o objetivo foi atingido deixo ao julgamento do leitor.

São nove parágrafos cujo conteúdo passo a comentar.

Parágrafos 1 e 2

Procurei dar um tratamento elementar e conciso ao produto exterior de formas e formas diferenciais.

Para isso adotei como definição de produto exterior a expressão em 1.4, encontrada na literatura.

Paragrafo 3

Para resolver o problema de demonstrar que a integral de uma k-forma diferencial ω sobre uma variedade celulável V de dimensão independe da particular celulação utilizada introduzo aqui o conceito mais geral de Variedade Retalhável S.

O resultado central deste parágrafo é o lema 3.5 por mim enunciado e demonstrado.

Do lema 3.5 decorre a proposição 3.6 que mostra que dados dois retalhamentos de S existe um retalhamento mais fino que ambos.

Parágrafo 4

Defino a noção de integral de uma k-forma diferencial sobre uma Variedade Retalhável de dimensão k nos moldes usuais e usando a proposição 3.6 demonstro que a integral independe do particular retalhamento.

Parágrafo 5

Estudo aqui as k-células no $\mathbb{R}^n$, imagens por parametrizações regulares do k-simplexo padrão do $\mathbb{R}^k$ $(0 \leq k \leq n)$.

Tirei a demonstração da proposição 5.11 que diz que a definição de s-face de uma k-célula independe da parametrização adotada de SIKORSKI [4].

Esta prova usa a propriedade 5.9 (2) e o lema 5.10 cujas demonstrações tive que produzir.

As funções l_i, $i=0,1,\ldots k$ da definição 5.16, utilizadas para definir orientação positiva das (k-1)-faces do k-simplexo padrão são adaptações de funções correspondentes em NICKERSON, SPENCER, STEENROD [3].

E' minha a demonstração da proposição 5.19 que diz que a orientação de uma (k-1)-face de uma k-celula C, induzida pela orientação de C, está bem definida, isto e', independe da particular parametrização que determina a orientação de C.

Esta prova teria sido consideravelmente encurtada caso tivesse definido as k-celulas como imagens de k-cubos no $\mathbb{R}^k$.

Optei pelo uso de k-simplexos para superar as dificuldades de demonstração da proposição 6.9 que comento mais adiante.

Parágrafo 6

A definição 6.1 de Variedade Celulável V de dimensão k foi tirada de SIKORSKI [4] bem como o enunciado das propriedades 6.5 (1 a 4) e a definição 6.7 de bordo ∂V de V.

O enunciado de 6.5 (5) e' meu bem como as demonstrações de 6.5 (1 a 5).

Na proposição 6.3 mostro que uma celulação de V e' em particular um retalhamento e que portanto a integral de uma k-forma diferencial sobre V independe da particular celulação.

A demonstração da proposição 6.9 que diz que a definição de ∂V independe da particular decomposição celular de V utilizada, foi a que me deu maior trabalho.

A solução foi provar que V é um "poliedro" (definição 9.18) e que o bordo ∂V de V como Variedade Celulável coincide com o bordo de V como poliedro e utilizar então o Teorema 9.20 que afirma que o bordo de um poliedro independe da particular triangulação usada para defini-lo.

Instrumental para a prova da proposição 6.9 foi o lema 6.8 de extensão, por mim enunciado e demonstrado.

O último resultado importante deste parágrafo por mim demonstrado é a proposição 6.15 preparada pelo lema 6.13.

A proposição 6.15 diz que o sistema de orientações induzido no bordo ∂V por uma celulação Φ de V depende apenas do sistema de orientações de V determinado por Φ.

Parágrafo 7

Depois de definir orientação de uma Variedade Celulável, demonstro o Teorema de Stokes adaptando a demonstração encontrada em NICKERSON, SPENCER, STEENROD [3]

Parágrafo 8

Neste ANEXO 1 a definição 8.1 e as proposições 8.3 e 8.4 bem como suas demonstrações foram tiradas de LIMA [2].

Parágrafo 9

O material deste ANEXO 2 sobre complexos simpliciais foi totalmente extraído de AGOSTON [1].

Ivan de Queiroz Barros.

§1. Produto exterior de p-formas

1.1 Definição

Seja $p \in \mathbb{N}$ e $u : (\mathbb{R}^n)^p \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dizemos que u é uma p-forma multilinear se é p-linear e se é alternad[a], isto é, se:

$$X_i = X_j \ , \ i \neq j \quad \Rightarrow \quad u(X_1, X_2, \dots X_p) = 0$$

Indicaremos o espaço das p-formas por $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Propriedades

(1) $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$.

(2) $p > n \Rightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$

(3) $u \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ se e só se u é p-linea[r] e antissimétrica.

Lembremos que $u : (\mathbb{R}^n)^p \longrightarrow \mathbb{R}$ é antissimétrica se:

$$u(\dots \underset{i}{X} \dots \underset{j}{Y} \dots) = -u(\dots \underset{i}{Y} \dots \underset{j}{X} \dots).$$

1.3 <u>Notação</u>

Indicaremos por $Sh(p_1, p_2, \dots p_m)$, o sub-conjunto das permutações σ de $(1, 2, \dots \sum_{i=1}^{n} p_i)$ tais que:

$$\sigma(s(i-1)+1) < \sigma(s(i-1)+2) < \dots < \sigma(s(i))$$

onde $\qquad s(0) = 0$

$$s(i) = \sum_{j=1}^{i} p_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots m.$$

1.4 <u>Definição</u>

Sejam $u_i \in \Lambda^{p_i}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \dots m$.
Definimos <u>produto exterior</u>

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m \in \Lambda^{p_1 + p_2 + \dots p_m}(\mathbb{R}^n)$$

por:

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m (X_1, X_2, \dots X_{s(m)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in Sh(p_1, p_2, \dots p_m)} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{m} u_i (X_{\sigma(s(i-1)+1)}, \dots X_{\sigma(s(i))})$$

1.5 <u>Observação</u>

Podemos definir equivalentemente

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m (X_1, X_2, \dots X_{s(m)}) =$$

$$= \frac{1}{p_1! \, p_2! \dots p_m!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{m} u_i (X_{\sigma(s(i-1)+1)}, \dots X_{\sigma(s(i))}).$$

1.6 Proposição

O produto exterior está bem definido, isto é, $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m : (\mathbb{R}^n)^{p_1+p_2+\dots+p_m} \to \mathbb{R}$ é $s(m)$-linear alternada.

Prova

A verificação que $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ é $s(m)$-linear é imediata a partir da definição.

Provemos que é alternada.

Seja $X_k = X_j$, $k \neq j$ e seja σ' a permutação de $(1, 2, \dots s(m))$ definida por:

$$\sigma'(k) = j \;,\; \sigma'(j) = k \quad e \quad \sigma'(r) = r \text{ se } r \neq k \text{ e } r \neq j .$$

Temos $\operatorname{sgn} \sigma' = -1$

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots u_m (X_1, X_2, \dots X_{s(m)}) =$$

$$= \frac{1}{p_1! p_2! \dots p_m!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{m} u_i (X_{\sigma(s(i-1)+1)}, \dots X_{\sigma(s(i))}) =$$

$$= \frac{1}{p_1! p_2! \dots p_m!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma'\sigma \prod_{i=1}^{m} u_i (X_{\sigma'\sigma(s(i-1)+1)}, \dots X_{\sigma'\sigma(s(i))}) =$$

$$= \frac{1}{p_1! p_2! \dots p_m!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma'\sigma \prod_{i=1}^{m} u_i (X_{\sigma(s(i-1)+1)}, \dots X_{\sigma(s(i))}) =$$

$$= - \frac{1}{p_1! p_2! \dots p_m!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{m} u_i (X_{\sigma(s(i-1)+1)}, \dots X_{\sigma(s(i))}) =$$

$$= - u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m (X_1, X_2, \ldots X_{s(m)}).$$

Logo $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_m (X_1, X_2, \ldots X_{s(m)}) = 0$ ∎

1.7 Proposição
O produto exterior é associativo.

Prova
i) Provemos inicialmente que:

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{m-1}) \wedge u_m = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m .$$

De fato:

$$((u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{m-1}) \wedge u_m)(X_1, X_2, \ldots X_{s(m)}) =$$

$$= \frac{1}{(p_1+p_2+\cdots+p_{m-1})!\; p_m!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \cdot$$

$$\cdot (u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{m-1})(X_{\sigma(1)}, \ldots X_{\sigma(s(m-1))}) \cdot$$

$$\cdot\, u_m (X_{\sigma(s(m-1))+1}, \ldots X_{\sigma(s(m))}) =$$

$$= \frac{1}{s(m-1)!\; p_m!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{p_1!\, p_2! \cdots p_m!} \sum_{\substack{\sigma'(j)=j \text{ para} \\ j > s(m-1)}} \operatorname{sgn}\sigma' \prod_{i=1}^{m-1} u_i (X_{\sigma\sigma'(s(i-1)+1)}, \ldots X_{\sigma\sigma'(s(i))}) \right] \cdot$$

$$\cdot\, u_m (X_{\sigma(s(m-1)+1)}, \ldots X_{\sigma(s(m))}) =$$

$$= \frac{1}{p_1!\,p_2!\cdots p_m!}\cdot\frac{1}{s(m-1)!}\sum_{\substack{\sigma'(j)=j \text{ para} \\ j>s(m-1)}}\left\{\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\sigma'\,.\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{i=1}^{m} u_i\left(X_{\sigma\sigma'(s(i-1)+1)},\dots X_{\sigma\sigma'(s(i))}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{p_1!\,p_2!\cdots p_m!}\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{m} u_i\left(X_{\sigma(s(i-1)+1)},\dots X_{\sigma(s(i))}\right) =$$

$$= u_1\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_m\left(X_1, X_2,\dots X_{s(m)}\right).$$

ii) De forma analoga provamos que

$$u_1\wedge(u_2\wedge\dots\wedge u_m) = u_1\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_m.$$

iii) De i) e ii) resulta facilmente o caso geral por indução sobre o grau de $u_1\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_m$. ∎

1.8 Propriedades

(1) $(u_1+u_2)\wedge v = u_1\wedge v + u_2\wedge v$

(2) $u\wedge(v_1+v_2) = u\wedge v_1 + u\wedge v_2$

(3) $\lambda(u\wedge v) = \lambda u\wedge v + u\wedge\lambda v \quad , \lambda\in\mathbb{R}.$

(4) Se u é p-forma e v é q-forma então: $u\wedge v = (-1)^{pq}\, v\wedge u.$

1.9 <u>Proposição</u> $(1 \leq p \leq n)$

Seja $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ base do $\mathbb{R}^n$ e $(v_1', v_2', \ldots v_n')$ a base dual.

Então

$$(v_{i_1}' \wedge v_{i_2}' \wedge \ldots \wedge v_{i_p}')_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p}$$

é uma base de $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

<u>Prova</u>

i) Seja $u \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ e $X_i = \sum_{j=1}^{n} X_i^j v_j$, $i = 1, 2, \ldots p$.

$$u(X_1, X_2, \ldots X_p) = u\left(\sum_{j_1=1}^{n} X_1^{j_1} v_{j_1}, \ldots \sum_{j_p=1}^{n} X_p^{j_p} v_{j_p}\right) =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \cdots j_p} X_1^{j_1} X_2^{j_2} \ldots X_p^{j_p} \cdot u(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots v_{j_p}) =$$

$$= \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} u(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots v_{j_p}) \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \, X_{\sigma(1)}^{j_1} \cdots X_{\sigma(p)}^{j_p} =$$

$$= \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} a_{j_1 j_2 \cdots j_p} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \, v_{j_1}'(X_{\sigma(1)}) \cdots v_{j_p}'(X_{\sigma(p)}) =$$

$$= \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} a_{j_1 j_2 \cdots j_p} \, v_{j_1}' \wedge v_{j_2}' \wedge \cdots \wedge v_{j_p}' (X_1, X_2, \ldots X_p)$$

Logo $$u = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} a_{j_1 j_2 \cdots j_p} \, v_{j_1}' \wedge v_{j_2}' \wedge \cdots \wedge v_{j_p}'.$$

ii) Mostremos agora que os $v'_{j_1} \wedge v'_{j_2} \wedge \dots \wedge v'_{j_p}$ são linearmente independentes.

Seja $$\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p} a_{j_1 j_2 \dots j_p} \; v'_{j_1} \wedge v'_{j_2} \wedge \dots \wedge v'_{j_p} = 0$$

Aplicando a $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots e_{i_p})$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, obtemos $a_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$. ■

1.10 <u>Corolário</u>

$$\dim \Lambda^p(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{p}$$

1.11 <u>Exercício</u>

Sejam $v_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \dots p$.

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots v_p (X_1, X_2, \dots X_p) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} v_1(X_1) & v_1(X_2) & \dots & v_1(X_p) \\ v_2(X_1) & v_2(X_2) & \dots & v_2(X_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_p(X_1) & v_p(X_2) & \dots & v_p(X_p) \end{bmatrix}$$

§ 2. Formas Diferenciais

2.1 Definição

Uma p-forma diferencial é uma aplicação

$$\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \quad , \quad U \text{ aberto}$$

2.2 Notação

Se $x \in U$ indicaremos $\omega(x)$ por ω_x. Então $\omega_x \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

2.3 Definição

Dizemos que ω é de classe C^m se a aplicação $x \longrightarrow \omega_x(X_1, X_2, \dots X_p)$ de U em $\mathbb{R}$ é de classe C^m para $\forall\ (X_1, X_2, \dots X_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$.

2.4 Exemplo

Seja $(e_1, e_2, \dots e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$dx^i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \quad , \quad i = 1, 2, \dots n \, ,$$

por $\quad (dx^i)_x = e'_i \quad , \quad \forall\, x \in U$.

Como dx^i é aplicação constante (independe de x), escreveremos simplesmente $dx^i(X) = X^i$.

2.5 Definição

Sejam $\omega_1, \omega_2, \omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$
e $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definimos $\omega_1 + \omega_2 : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$
e $f\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ por:

$$(\omega_1 + \omega_2)_x = (\omega_1)_x + (\omega_2)_x$$

$$(f\omega)_x = f(x)\,\omega_x$$

2.6 Definição

Sejam $\omega_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^{p_i}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots k$.
Definimos

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^{p_1 + p_2 + \cdots + p_k}(\mathbb{R}^n)$$

por:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k)_x = (\omega_1)_x \wedge (\omega_2)_x \wedge \cdots \wedge (\omega_k)_x .$$

2.7 Propriedades

(1)
$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1$$
$$(\omega_1 + \omega_2) + \omega_3 = \omega_1 + (\omega_2 + \omega_3)$$
$$f(g\omega) = (fg)\,\omega$$
$$(f+g)\,\omega = f\omega + g\omega$$
$$f(\omega_1 + \omega_2) = f\omega_1 + f\omega_2 .$$

(2)
$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$$
$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$$
$$f(\omega_1 \wedge \omega_2) = f\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge f\omega_2$$

(3) Se ω_1 é p-forma e ω_2 é q-forma então $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\, \omega_2 \wedge \omega_1$.

(4) O produto $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ é associativo

(5) Se $p > n$ então $\omega = 0$.

2.8 Proposição $(1 \leq p \leq n)$

Toda p-forma $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrita de uma e única maneira como:

$$\omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} a_{j_1 j_2 \cdots j_p}\, dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} ,$$

onde $a_{j_1 j_2 \cdots j_p} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Prova

Consequência imediata da proposição 1.9 ∎

2.9 Corolário

Uma p-forma diferencial

$$\omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} a_{j_1 j_2 \cdots j_p}\, dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}$$

é de classe C^m, $0 \leq m \leq \infty$ se e só se

$$a_{j_1 j_2 \cdots j_p} \in C^m , \quad \forall\, j_1 < j_2 < \cdots < j_p .$$

2.10 Observação

Por uma questão de economia de notação consideraremos $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como uma 0-forma diferencial convencionando que

$$\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f \wedge \omega = f\omega .$$

É fácil verificar que estas convenções são consistentes com as propriedades 2.7.

2.11 Definição

Seja $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ de classe C^k, $k \geq 1$.
Definimos

$d\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ de classe C^{k-1}, por:

caso $p = 0$
Seja $\omega = f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definimos $$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

caso $p \geq 1$
Seja $$\omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} a_{j_1 j_2 \cdots j_p} \, dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} .$$

Definimos:

$$d\omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} d a_{j_1 j_2 \cdots j_p} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} .$$

2.12 <u>Propriedades</u>

Sejam $\omega_1, \omega_2 \in C^k$, $k > 1$ e $\omega \in C^k$, $k \geq 2$

(1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

(2) Se ω_1 é p-forma entao:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

(3) $d(d\omega) = 0$

2.13 <u>Definição</u>

Seja $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, U aberto e seja $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$, V aberto, $\varphi \in C^1$.

Definimos $\varphi^*\omega : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^m)$ por:

<u>caso</u> $p = 0$

Seja $\omega = f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definimos $\varphi^* f = f \circ \varphi$

<u>caso</u> $p \geq 1$

Definimos $\varphi^*\omega$ por:

$$(\varphi^*\omega)_y (Y_1, Y_2, \ldots Y_p) = \omega_{\varphi(y)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y) Y_1, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y) Y_p \right).$$

2.14 <u>Propriedades</u>

(1) $\varphi^* dx^i = d\varphi^i$

(2) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$

(3) $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$

(4) $(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega)$.

(5) Se $\omega \in C^1$ e $\varphi \in C^2$ então
$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$.

<u>Prova</u>

(5) Provemos por indução sobre p.
Para $p=0$ denotemos $\omega = f$.

$$d(\varphi^* f) = d(f \circ \varphi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y^j} dy^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} dy^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} dy^j \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \, d\varphi^i =$$

$$= \varphi^*(df).$$

Supondo válido para $p-1$, provemos para p
Basta provar para $\omega \wedge dx^i$ onde ω é
uma $(p-1)$-forma de classe C^1.

$$d(\varphi^*(\omega \wedge dx^i)) = d(\varphi^*\omega \wedge \varphi^* dx^i) =$$

$$= d(\varphi^*\omega) \wedge \varphi^* dx^i + (-1)^{p-1} \varphi^*\omega \wedge d\varphi^* dx^i =$$

$$= \varphi^*(d\omega) \wedge \varphi^* dx^i + (-1)^{p-1} \varphi^*\omega \wedge d(d\varphi^i) =$$

$$= \varphi^*(d\omega \wedge dx^i) =$$

$$= \varphi^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^{p-1} \omega \wedge d(dx^i)) =$$

$$= \varphi^*(d(\omega \wedge dx^i)) . \qquad \blacksquare$$

2.15 <u>Exercício</u>

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} (X_1, X_2, \ldots X_p) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} X_1^{i_1} & X_2^{i_1} & \cdots & X_p^{i_1} \\ X_1^{i_2} & X_2^{i_2} & \cdots & X_p^{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^{i_p} & X_2^{i_p} & \cdots & X_p^{i_p} \end{bmatrix}$$

§3. Variedades Retalháveis

3.1 Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ aberto.

Indicaremos por $\mathcal{C}_\Omega$ a coleção dos subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ que são quadráveis (limitados de fronteira de medida zero) e cuja aderência está contida em Ω.

3.2 Observação

E' fácil verificar que se $A, B \in \mathcal{C}_\Omega$ então $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{C}_\Omega$.

3.3 Definição $(1 \leq k \leq n)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ aberto e $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Dizemos que φ é uma parametrização regular de classe C^m, $m \geq 1$, e dimensão k se:

i) $\varphi \in C^m$

ii) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$ tem posto máximo, $\forall x \in \Omega$

iii) φ é um homeomorfismo sobre a imagem.

3.4 Definição

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade retalhável de dimensão k, $1 \leq k \leq n$ se existem parametrizações regulares $\varphi_i : \Omega_i \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $A_i \in \mathscr{C}_{\Omega_i}$, $i = 1, 2, \dots N$, de classe C^1 tais que :

i) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \varphi_i(A_i) = S$

ii) $\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \varphi_j(\mathring{A}_j) = \emptyset$ se $i \neq j$.

iii) $\varphi_i(\mathring{A}_i)$ é aberto em S , $i = 1, 2, \dots N$.

Então $\Phi = \{(\varphi_1, A_1), (\varphi_2, A_2), \dots (\varphi_N, A_N)\}$ será dito <u>retalhamento</u> de S e os $S_i = \varphi_i(A_i)$ <u>retalhos</u>

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^n$ é <u>variedade retalhável de dimensão $k = 0$</u> se :

$$S = \{P_1, P_2, \dots P_N\} \subset \mathbb{R}^n$$

3.5 <u>Lema</u> $(1 \leq k \leq n)$

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ variedade retalhável de dimensão k e sejam

$$\Phi = \{(\varphi_1, A_1), (\varphi_2, A_2), \dots (\varphi_N, A_N)\}$$

$$\Psi = \{(\psi_1, B_1), (\psi_2, B_2), \dots (\psi_M, B_M)\}$$

dois retalhamentos de S onde $\varphi_i : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi_j : \Omega'_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Sejam

$$C_{ij} = \varphi_i^{-1}[\varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j)]$$

$$D_{ij} = \psi_j^{-1}[\varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j)]$$

e $\quad \Pi = \{(i,j) : \varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j) \neq \emptyset\}$

Então:

i) $\varphi_i(\overline{C_{ij}}) = \psi_j(\overline{D_{ij}})$, $\forall (i,j) \in \Pi$ e

$\theta_{ij} : \overline{C_{ij}} \longrightarrow \overline{D_{ij}}$ definida por $\theta_{ij} = \psi_j^{-1} \circ \varphi_i |_{\overline{C_{ij}}}$
é um difeomorfismo C^1.

ii) $$\mathring{C}_{ij} = \varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)]$$

$$\mathring{D}_{ij} = \psi_j^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)]$$

iii) $C_{ij} \in \mathcal{C}_{\Omega_i}$, $D_{ij} \in \mathcal{C}_{\Omega'_j}$

<u>Prova</u>

i) Seja $(i,j) \in \Pi$.
Mostremos que $\varphi_i(\overline{C_{ij}}) = \psi_j(\overline{D_{ij}})$.

Seja $x \in \overline{C_{ij}}$ e $x_s \in C_{ij}$, $s = 1, 2, \ldots$ tais que $x_s \longrightarrow x$.

Sejam $y_s \in D_{ij}$ tais que $\psi_j(y_s) = \varphi_i(x_s)$.

Como $\overline{D}_{ij}$ é compacto existe sub-sequência (y_{s_p}) tal que $y_{s_p} \to y$.

Fazendo $p \to \infty$ em $\varphi_i(x_{s_p}) = \psi_j(y_{s_p})$ resulta pela continuidade de φ_i e ψ_j que

$$\varphi_i(x) = \psi_j(y) \in \psi_j(\overline{D}_{ij})$$

Logo $\varphi_i(\overline{C}_{ij}) \subset \psi_j(\overline{D}_{ij})$.

Por simetria vem $\psi_j(\overline{D}_{ij}) \subset \varphi_i(\overline{C}_{ij})$ e portanto $\varphi_i(\overline{C}_{ij}) = \psi_j(\overline{D}_{ij})$.

Como $\varphi_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^n$ e $\psi_j : \Omega'_j \to \mathbb{R}^n$ são difeomorfismos C^1 sobre a imagem (prop. 8.9); resulta que $\theta_{ij} : \overline{C}_{ij} \to \overline{D}_{ij}$ definida por $\theta_{ij} = \psi_j^{-1} \circ \varphi_i|_{\overline{C}_{ij}}$ é um difeomorfismo C^1.

Observemos que a aplicação θ_{ij} leva C_{ij} sobre D_{ij} e $\mathring{C}_{ij}$ sobre $\mathring{D}_{ij}$ e que portanto

$$\varphi_i(\mathring{C}_{ij}) = \psi_j(\mathring{D}_{ij}).$$

ii) Como $\mathring{C}_{ij} \subset \mathring{A}_i$, $\mathring{D}_{ij} \subset \mathring{B}_j$ e $\varphi_i(\mathring{C}_{ij}) = \psi_j(\mathring{D}_{ij})$ resulta:

$$\varphi_i(\mathring{C}_{ij}) \subset \varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)$$

donde $$\mathring{C}_{ij} \subset \varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)]$$

Provemos a inclusão oposta.

Como $\varphi_i(\mathring{A}_i)$ e $\psi_j(\mathring{B}_j)$ são abertos em S então $\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)$ é aberto em S.

Pela continuidade da φ_i, $\varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)]$ é aberto em A_i.

Mas $\varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)] \subset \mathring{A}_i$ donde $\varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)]$ é aberto em $\mathbb{R}^k$ e como está contido em C_{ij} resulta

$$\varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)] \subset \mathring{C}_{ij}$$

Logo $\mathring{C}_{ij} = \varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)]$ e analogamente:

$$\mathring{D}_{ij} = \psi_j^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)] .$$

iii) Provemos que $C_{ij} \in \mathcal{C}_{\Omega_i}$

Como $\overline{C_{ij}} \subset \overline{A}_i \subset \Omega_i$, basta mostrar que $\mathcal{F}C_{ij}$ é de medida zero.

$$\mathcal{F}C_{ij} = \mathcal{F}C_{ij} \cap \mathcal{F}A_i + \mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i$$

Ora, $\mathcal{F}C_{ij} \cap \mathcal{F}A_i$ é de medida zero pois está contido em $\mathcal{F}A_i$.

Então se $\mathring{A}_i = \emptyset$ resulta $\mathcal{F}C_{ij}$ de medida zero.

Seja $\mathring{A}_{ij} \neq \emptyset$.

Mostremos inicialmente que

$$x \in \mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i \Rightarrow \theta_{ij}(x) \in \mathcal{F}D_{ij} \cap \mathcal{F}B_j .$$

Suponhamos (por contradição) que

$$y = \theta_{ij}(x) \in \mathcal{F}D_{ij} \cap \mathring{B}_j .$$

Então $x \in \mathring{A}_i$ e $y \in \mathring{B}_j$, donde

$$\varphi_i(x) = \psi_j(y) \in \varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)$$

isto é, $\quad x \in \varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)] = \mathring{C}_{ij}$.

. . . .

Temos uma contradição pois que $x \in \mathcal{F}C_{ij}$.
Fica então estabelecido que:

$$x \in \mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i \quad \Rightarrow \quad \theta_{ij}(x) \in \mathcal{F}D_{ij} \cap \mathcal{F}B_j .$$

Mostremos agora que $\mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i$ é de medida zero.

De $\quad \theta_{ij}(\mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i) \subset \mathcal{F}D_{ij} \cap \mathcal{F}B_j$

vem $\quad \mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i \subset \theta_{ij}^{-1}(\mathcal{F}D_{ij} \cap \mathcal{F}B_j)$.

Como $\mathcal{F}D_{ij} \cap \mathcal{F}B_j \subset \mathcal{F}B_j$ tem medida zero e $\theta_{ij}^{-1} : \overline{D_{ij}} \longrightarrow \overline{C_{ij}}$ é de classe C^1 resulta que $\mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i$ tem medida zero e portanto da decomposição

$$\mathcal{F}C_{ij} = \mathcal{F}C_{ij} \cap \mathcal{F}A_i + \mathcal{F}C_{ij} \cap \mathring{A}_i$$

resulta que $\mathcal{F}C_{ij}$ tem medida zero.
Logo $C_{ij} \in \mathcal{C}_{\Omega_i}$. Analogamente $D_{ij} \in \mathcal{C}_{\Omega_j'}$. $\square$

3.6 <u>Proposição</u> $(1 \leq k \leq n)$

Nas mesmas condições do lema 3.5 para $(i,j) \in \Pi$ definamos $\Omega_{ij} = \Omega_i$ e $\varphi_{ij} = \varphi_i$.

Então $\{ (\varphi_{ij}, C_{ij}) : (i,j) \in \Pi \}$ é um retalhamento de S.

<u>Prova</u>

i) $\varphi_{ij} : \Omega_{ij} \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é parametrização regular para $\forall\, (i,j) \in \Pi$ e pelo lema 3.5, $C_{ij} \in \mathcal{C}_{\Omega_{ij}}$.

ii) $$\bigcup_{(i,j)\in\Pi} \varphi_{ij}(C_{ij}) = \bigcup_{(i,j)\in\Pi} \varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M} \varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j) =$$

$$= \left[\bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(A_i) \right] \cap \left[\bigcup_{j=1}^{M} \psi_j(B_j) \right] = S$$

iii) Sejam $(i,j), (r,s) \in \Pi$ tais que $(i,j) \neq (r,s)$.
Pelo lema 3.5 :

$$\varphi_{ij}(\mathring{C}_{ij}) \cap \psi_{rs}(\mathring{C}_{rs}) =$$

$$= [\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \psi_j(\mathring{B}_j)] \cap [\varphi_r(\mathring{A}_r) \cap \psi_s(\mathring{B}_s)] =$$

$$= [\varphi_i(\mathring{A}_i) \cap \varphi_r(\mathring{A}_r)] \cap [\psi_j(\mathring{B}_j) \cap \psi_s(\mathring{B}_s)] = \emptyset$$

pois que $i \neq r$ ou $j \neq s$.

iv) Como $\varphi_{ij} = \varphi_i : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre a imagem resulta que $\varphi_{ij}(\mathring{C}_{ij})$ é aberto em $\varphi_{ij}(\mathring{A}_i)$.
Mas $\varphi_{ij}(\mathring{A}_i) = \varphi_i(\mathring{A}_i)$ é aberto em S.
Logo $\varphi_{ij}(\mathring{C}_{ij})$ é aberto em S ∎

3.7 <u>Definição</u> $(1 \leq k \leq n)$

Sejam $\Phi = \{(\varphi_1, A_1), (\varphi_2, A_2), \dots (\varphi_N, A_N)\}$ e $\Psi = \{(\psi_1, B_1), (\psi_2, B_2), \dots (\psi_M, B_M)\}$ dois retalhamentos de uma variedade retalhável de dimensão k.

Sejam
$$C_{ij} = \varphi_i^{-1}[\varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j)]$$

$$D_{ij} = \psi_j^{-1}[\varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j)]$$

e $\theta_{ij} : \overline{C}_{ij} \longrightarrow \overline{D}_{ij}$ como definido no lema 3.5 para $(i,j) \in \Pi$.

Diremos que Φ e Ψ são <u>coerentes</u> se para $\forall (i,j) \in \Pi$ tal que $\mathring{C}_{ij} \neq \phi$ tivermos:

$$\det \theta'_{ij}(x) = \frac{\partial(\theta^1_{ij}, \theta^2_{ij}, \dots \theta^k_{ij})}{\partial(x^1, x^2, \dots x^k)}(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathring{C}_{ij}.$$

3.8 <u>Exercício</u>

Mostre que a relação "Φ é coerente com Ψ" é uma relação de equivalência.

3.9 Definição

Para $1 \leq k \leq n$ um sistema de orientações de $S \subset \mathbb{R}^n$, variedade retalhável de dimensão k é uma classe de equivalência Σ de retalhamentos coerentes entre si.

Para $k=0$, um sistema de orientações de $S = \{P_1, P_2, \ldots P_N\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma ênupla $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_N)$ onde $\sigma_i \in \{-1, +1\}$.

Indicaremos por $\vec{S}$ o par (S, Σ).

§4. Integração de Formas Diferenciais sobre Variedades Retalhaveis

4.1 Definição ($1 \leq k$)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ aberto, $\omega : \Omega \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$ uma k-forma diferencial contínua representada por $\omega = f\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^k$ e $A \in \mathcal{C}_\Omega$.

Definimos:

$$\int_A f\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_A f\, dx^1 dx^2 \ldots dx^k$$

4.2 Definição. ($1 \leq k \leq n$)

Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrização regular de classe C^1 e $A \in \mathcal{C}_\Omega$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $\varphi(\Omega) \subset U$ e $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ uma k-forma diferencial contínua.

Definimos:

$$\int_{(\varphi, A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega$$

4.3 Definição

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ variedade retalhavel de dimensão

Seja $\Sigma = [\Phi]$ um sistema de orientações de S determinado por:

$$\Phi = \{ (\varphi_1, A_1), (\varphi_2, A_2), \dots (\varphi_N, A_N) \}$$

e seja $\vec{S} = (S, \Sigma)$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $S \subset U$ e $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ uma k-forma diferencial contínua.

Definimos:

$$\int_{\vec{S}} \omega = \int_{\Phi} \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{(\varphi_i, A_i)} \omega$$

4.4 <u>Definição</u> $(k=0)$

Seja $S = \{ P_1, P_2, \dots P_N \} \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade retalhável de dimensão $k=0$.

Seja $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_N)$ um sistema de orientações de S e $\vec{S} = (S, \Sigma)$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $S \subset U$ e $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma diferencial (função).

Definimos:

$$\int_{\vec{S}} \omega = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\, \omega(P_i).$$

4.5 <u>Lema</u>

Sejam $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : \Omega' \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizações regulares e $A \in \mathcal{C}_\Omega$, $B \in \mathcal{C}_{\Omega'}$

tais que $\varphi(A) = \psi(B)$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $\varphi(\Omega) \subset U$ e $\psi(\Omega') \subset U$ e seja $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ k-forma diferencial contínua.

Seja $\theta : \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$ o difeomorfismo C^1 como no lema 3.5.

Entao se $\det \theta' > 0$ em $\mathring{A}$ teremos

$$\int_{(\psi, B)} \omega = \int_{(\varphi, A)} \omega$$

e se $\det \theta' < 0$ em $\mathring{A}$ teremos

$$\int_{(\psi, B)} \omega = -\int_{(\varphi, A)} \omega$$

<u>Prova</u>

Pela linearidade da integral basta provar para $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ onde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Se $\mathring{A} = \emptyset$ resulta $\mathring{B} = \emptyset$ e teremos

$$\int_{(\psi, B)} \omega = \int_{(\varphi, A)} \omega = 0.$$

Seja $\mathring{A} \neq \emptyset$ o que acarreta $\mathring{B} \neq \emptyset$.

$$\int_{(\psi,B)} \omega = \int_B \psi^*\omega = \int_{\mathring{B}} \psi^*\omega = \int_{\mathring{B}} \psi^*(f\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) =$$

$$= \int_{\mathring{B}} f \circ \psi \; \frac{\partial(\psi^{i_1}, \psi^{i_2}, \ldots \psi^{i_k})}{\partial(v^1, v^2, \ldots v^k)} \; dv^1 \wedge dv^2 \wedge \ldots dv^k =$$

$$= \int_{\mathring{B}} f \circ \psi \; \frac{\partial(\psi^{i_1}, \psi^{i_2}, \ldots \psi^{i_k})}{\partial(v^1, v^2, \ldots v^k)} \; dv^1 dv^2 \ldots dv^k .$$

A aplicação θ leva $\bar{A}$ sobre $\bar{B}$ e $\theta|_{\bar{A}}$ é um difeomorfismo C^1. Pelo lema 8.8 temos $\det \theta'(x) \neq 0$, $\forall x \in \bar{A}$.

Pelo Corolário 8.12, $\theta|_{\bar{A}}$ pode ser estendida a um difeomorfismo $g : O \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow O' \subset \mathbb{R}^k$ onde O e O' são abertos.

Como $\mathring{A} \in \mathscr{C}_O$, podemos usar o Teorema de mudança de variáveis em integrais múltiplas e escrever:

$$\int_{\mathring{B}} f \circ \psi \; \frac{\partial(\psi^{i_1}, \psi^{i_2}, \ldots \psi^{i_k})}{\partial(v^1, v^2, \ldots v^k)} \; dv^1 dv^2 \ldots dv^k =$$

$$= \int_{\mathring{A}} f \circ \psi \circ g \; \frac{\partial(\psi^{i_1}, \psi^{i_2}, \ldots \psi^{i_k})}{\partial(v^1, v^2, \ldots v^k)} \; |\det g'| \; du^1 du^2 \ldots du^k$$

Como em $\mathring{A}$, $g = \theta$, $\det g' = \det \theta'$ e como

$$\frac{\partial(\psi^{i_1}, \psi^{i_2}, \ldots \psi^{i_k})}{\partial(v^1, v^2, \ldots v^k)} \cdot \frac{\partial(\theta^1, \theta^2, \ldots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \ldots u^k)} = \frac{\partial(\varphi^{i_1}, \varphi^{i_2}, \ldots \varphi^{i_k})}{\partial(u^1, u^2, \ldots u^k)}$$

pois que $\psi \circ \theta = \varphi$ em $\mathring{A}$, resulta:

$$\int_{(\psi,B)} \omega = \pm \int_{\mathring{A}} f \circ \varphi \, \frac{\partial(\varphi^{i_1}, \varphi^{i_2}, \dots \varphi^{i_k})}{\partial(u^1, u^2, \dots u^k)} \, du^1 du^2 \dots du^k =$$

$$= \pm \int_{(\varphi,A)} \omega$$

conforme seja $\det \theta' > 0$, $\forall x \in \mathring{A}$ ou $\det \theta' < 0$, $\forall x \in \mathring{A}$. ∎

4.6 <u>Proposição</u> $(1 \le k \le n)$

A definição 4.3 de integral de uma k-forma diferencial contínua sobre uma variedade $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k , munida de um sistema de orientações Σ , independe do particular retalhamento $\Phi \in \Sigma$.

<u>Prova</u>

Sejam $\Phi \in \Sigma$ e $\Psi \in \Sigma$ onde

$$\Phi = \{ (\varphi_1, A_1), (\varphi_2, A_2), \dots (\varphi_N, A_N) \}$$

$$\Psi = \{ (\psi_1, B_1), (\psi_2, B_2), \dots (\psi_M, B_M) \} .$$

Provemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_{(\varphi_i, A_i)} \omega = \sum_{j=1}^{M} \int_{(\psi_j, B_j)} \omega$

Sejam $\quad C_{ij} = \varphi_i^{-1} [\varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j)]$

$$D_{ij} = \psi_j^{-1} [\varphi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j)]$$

e sejam $\varphi_{ij} = \varphi_i$, $\psi_{ij} = \psi_j$.
Como:

$$A_i = A_i \cap (\bigcup_j \overset{\circ}{C}_{ij}) + A_i \cap \left[\bigcup_j \mathcal{F} C_{ij} \setminus \bigcup_j \overset{\circ}{C}_{ij} \right] =$$

$$= \bigcup_j \overset{\circ}{C}_{ij} + A_i \cap \left[\bigcup_j \mathcal{F} C_{ij} \setminus \bigcup_j \overset{\circ}{C}_{ij} \right]$$

e $A_i \cap \left[\bigcup_j \mathcal{F} C_{ij} \setminus \bigcup_j \overset{\circ}{C}_{ij} \right]$ tem medida zero vem:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{(\varphi_i, A_i)} \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \varphi_i^* \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{\bigcup_j \overset{\circ}{C}_{ij}} \varphi_i^* \omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \int_{\overset{\circ}{C}_{ij}} \varphi_i^* \omega = \sum_{i,j} \int_{C_{ij}} \varphi_i^* \omega =$$

$$= \sum_{i,j} \int_{C_{ij}} \varphi_{ij}^* \omega = \sum_{i,j} \int_{(\varphi_{ij}, C_{ij})} \omega$$

Como Φ e Ψ são coerentes vem pelo lema 4.5

$$\int_{(\varphi_{ij}, C_{ij})} \omega = \int_{(\psi_{ij}, D_{ij})} \omega \quad , \forall\, i,j .$$

Portanto
$$\sum_{i=1}^{N} \int_{(\varphi_i, A_i)} \omega = \sum_{i,j} \int_{(\varphi_{ij}, C_{ij})} \omega =$$

$$= \sum_{i,j} \int_{(\psi_{ij}, D_{ij})} \omega = \sum_{j=1}^{M} \int_{(\psi_j, B_j)} \omega \qquad \blacksquare$$

§5. k-celulas

5.1 Definição $(k \geq 1)$

Definimos k-simplexo padrão $I^k \subset \mathbb{R}^k$ por:

$$I^k = \{ x \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} x^i \leq 1 \quad , x^i \geq 0 , i = 1, 2, \ldots k \} .$$

Os vértices de I^k são os pontos:

$$e_0 = (0, 0, \ldots 0)$$

$$e_i = (0, 0, \ldots \overset{(i)}{1} \ldots 0) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots k .$$

Introduzindo a coordenada de indice zero por $x^0 = 1 - x^1 - x^2 - \cdots - x^k$ podemos escrever para $\forall\ x \in \mathbb{R}^k$; $x = \sum_{i=0}^{k} x^i e_i$.

As coordenadas $x^0, x^1, \ldots x^k$ são as coordenadas baricentricas de x.

5.2 Definição

Seja $\alpha \subset \{0, 1, 2, \ldots k\}$, card $\alpha \geq 1$.

O conjunto $I^k_\alpha = \{ x \in I^k : x^i = 0 , \forall i \notin \alpha \}$ é dito uma face de I^k de dimensão $s = \operatorname{card} \alpha - 1$ ou uma s-face

Se $s = k$ temos $I^k_\alpha = I^k$

Se $s = 0$, I^k_α possue como único ponto um vertice de I^k.

5.3 <u>Definição</u>

Seja I^k_α uma face de I^k.

Se $\dim I^k_\alpha > 0$ definimos o <u>interior geometrico</u> de I^k_α por:

$$\operatorname{int} I^k_\alpha = \{ x \in I^k_\alpha : \; 0 < x^i < 1 \;, \; \forall i \in \alpha \}$$

Se $\dim I^k_\alpha = 0$ definimos $\operatorname{int} I^k_\alpha = I^k_\alpha$.

5.4 <u>Propriedades</u>

(1) Se $\alpha \neq \alpha'$ então $\operatorname{int} I^k_\alpha \cap \operatorname{int} I^k_{\alpha'} = \emptyset$

(2) $I^k_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha' \subset \alpha} \operatorname{int} I^k_{\alpha'}$

(3) $I^k = \bigcup\limits_{\alpha} \operatorname{int} I^k_\alpha$

5.5 <u>Definição</u>

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$.

Dizemos que C é uma <u>k-celula</u>, $1 \leq k \leq n$, se existe parametrização regular $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tal que $I^k \subset \Omega$ e $\varphi(I^k) = C$.

Por abuso de notação escreveremos $\varphi : I^k \to \mathbb{R}^n$.

Dizemos que C é uma <u>0-celula</u> se C é unitário.

5.6 <u>Definição</u> $(1 \leq k \leq n)$

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ uma k-celula e $\varphi : I^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular tal que $\varphi(I^k) = C$.

Uma <u>s-face</u> de C é a imagem por φ de uma s-face de I^k, $0 \leq s \leq k$.

5.7 <u>Definição</u>

Seja $Z \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in Z$.

Dizemos que $v \in \mathbb{R}^n$ é <u>vetor tangente</u> a Z em x se existe $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow Z$, $\varepsilon > 0$, de classe C^1 tal que $\psi(0) = x$ e $\psi'(0) = v$.

5.8 <u>Definição</u>

Seja $Z \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in Z$.

Definiremos <u>$\mathrm{tr}(x, Z)$</u> como sendo o número maximo de vetores tangentes a Z em x linearmente independentes.

5.9 <u>Propriedades</u>

(1) Seja $x \in Z \subset \mathbb{R}^n$ e O vizinhança aberta de x em $\mathbb{R}^n$.
Então $\mathrm{tr}(x, Z) = \mathrm{tr}(x, Z \cap O)$.

(2) Seja $A \subset \mathbb{R}^k$, $\theta : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ difeomorfismo C^1 de A sobre a imagem $\theta(A)$ e $x \in A$ ponto aderente ao interior de A.
Então $\mathrm{tr}(x, A) = \mathrm{tr}(\theta(x), \theta(A))$.

Prova

(1) É imediata.

(2) Seja $tr(x, A) = s$.

Suponhamos inicialmente $s > 0$ e sejam $v_1, v_2, \dots v_s$ vetores tangentes a A em x linearmente independentes.

Sejam $f_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \longrightarrow A$, $i = 1, 2, \dots s$, de classe C^1, tais que $f_i(0) = x$, $f_i'(0) = v_i$, $i = 1, 2, \dots s$.

Seja $\bar{\theta} : \Omega \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ onde Ω é aberto, extensão de θ de classe C^1 e sejam

$$g_i = \theta \circ f_i = \bar{\theta} \circ f_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots s.$$

Temos $g_i \in C^1$, $g_i(0) = \bar{\theta}(x) = \theta(x)$ e $g_i'(0) = \bar{\theta}'(x)\, v_i$, $i = 1, 2, \dots s$.

Como $\det \bar{\theta}'(x) \neq 0$ (lema 8.8) os vetores $w_i = g_i'(0)$ são linearmente independentes.

Portanto $tr(x, A) \leq tr(\theta(x), \theta(A))$.

Por simetria $tr(\theta(x), \theta(A)) \leq tr(x, A)$.

Se $tr(x, A) = 0$ então $tr(\theta(x), \theta(A)) = 0$ pois caso contrario pela primeira parte teríamos $tr(x, A) > 0$. ∎

5.10 Lema

Seja $0 \leq s \leq k$ e S_s a união dos interiores geométricos das s-faces de I^k. Seja $x \in I^k$.

Então $tr(x, I^k) = s \iff x \in S_s$.

Prova

i) Como I^k é união disjunta dos $\operatorname{int} I^k_\alpha$ para $\alpha \subset \{0,1,\dots k\}$ com $\operatorname{card}\alpha \geq 1$, basta provar que se $x \in \operatorname{int} I^k_\alpha$ e $\dim I^k_\alpha = s$ então $\operatorname{tr}(x, I^k) = s$.

O caso $s = 0$ é trivial.

ii) Seja $1 \leq s \leq k$.

O $\operatorname{int} I^k_\alpha$ é uma superfície local regular de dimensão s e classe C^∞.

De fato $\varphi : \overset{\circ}{I}{}^s \longrightarrow \operatorname{int} I^k_\alpha$ definida por

$$\varphi(t) = e_{i_0} + t^1(e_{i_1} - e_{i_0}) + \dots + t^s(e_{i_s} - e_{i_0})$$

onde $e_{i_0}, e_{i_1}, \dots e_{i_s}$ são os vértices de I^k_α é uma parametrização regular C^∞.

Como em qualquer ponto $x \in \operatorname{int} I^k_\alpha$ o espaço tangente é de dimensão s resulta $\operatorname{tr}(x, I^k) \geq s$.

Como $\operatorname{tr}(x, I^k) \leq k$ resulta para $s = k$ que $\operatorname{tr}(x, I^k) = k$.

iii) Seja $1 \leq s < k$.

Se existissem mais que s vetores tangentes a I^k em x, linearmente independentes, então pelo menos um deles seria linearmente independente dos vetores $e_i - e_{i_0}$, $i \in \alpha \setminus \{i_0\}$.

$$\text{Seja} \quad v = \sum_{i \in \alpha \setminus \{i_0\}} \lambda^i (e_i - e_{i_0}) + \sum_{i \notin \alpha} \lambda^i (e_i - e_{i_0})$$

tal que $\lambda^i \neq 0$ para algum $i \notin \alpha$.

Provemos que v não é vetor tangente a I^k em x.

Seja $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^k$ de classe C^1 tal que $\psi(0) = x$, $\psi'(0) = v$.

Provemos que necessariamente $\psi(h) \notin I^k$ para algum $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Seja $\psi^0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \psi^i$ e $j \notin \alpha$ tal que $\lambda^j \neq 0$. Calculando obtemos:

$$\psi^j(0) = 0 \quad , (\psi^j)'(0) = \lambda^j$$

Como $\psi^j(h) = (\psi^j)'(\xi)\, h$, $|\xi| < |h|$, resulta que para $|h|$ pequeno e h com sinal oposto ao de λ^j teremos $\psi^j(h) < 0$ donde $\psi(h) \notin I^k$.

Logo v não é vetor tangente a I^k em x

∎

5.11 <u>Proposição</u>

A definição 5.6 de s-face de uma k-célula independe da parametrização adotada.

<u>Prova</u>.

Sejam $\varphi : I^k \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : I^k \to \mathbb{R}^n$ duas parametrizações regulares da k-célula C.

Então $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi : I^k \longrightarrow I^k$ é um difeomorfismo como composição de difeomorfismos.

Portanto $tr(x, I^k) = tr(\theta(x), I^k)$, $\forall x \in I^k$.

Disto se conclue que θ leva S_s sobre S_s.

O espaço topologico S_s é disconexo e suas componentes conexas são os interiores geométricos das s-faces de I^k.

Como $\theta : S_s \longrightarrow S_s$ é um homeomorfismo θ transforma s-faces em s-faces.

Logo as s-faces de C determinadas por φ são s-faces de C determinadas por ψ e reciprocamente. ∎

5.12 <u>Observação</u>

Uma k-celula C é uma variedade retalhável. Para $1 \leq k \leq n$ uma parametrização regular $\varphi : I^k \rightarrow C$ determina um retalhamento $\{(\varphi, I^k)\}$ de C.

5.13 <u>Definição</u>

Seja $1 \leq k \leq n$.

Um "sistema de orientações" de uma k-celula $C \subset \mathbb{R}^n$ determinado por uma parametrização regular $\varphi : I^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de C será chamado <u>orientação</u> de C.

Seja $C = \{P\}$ uma 0-célula no $\mathbb{R}^n$.

Um sistema de orientações (σ) de C será chamado <u>orientação</u> de C.

5.14 Observação $(0 \leq k \leq n)$

Uma k-célula admite apenas duas orientações que serão ditas opostas.

5.15 Exemplo $(0 \leq s \leq k)$

Os s-faces de um k-simplexo padrão no $\mathbb{R}^k$ são exemplos de s-células.

(Vide propriedade 6.5(1).)

5.16 Definição $(1 \leq k \leq n)$

Caso. $2 \leq k \leq n$

Dizemos que as $(k-1)$-faces de um k-simplexo padrão estão orientadas positivamente se a orientação dessas faces é determinada pelas parametrizações regulares

$$\ell_i : I^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad , \quad i=0,1,\dots k .$$

definidas por:

$$\ell_0(x^1, x^2, \dots x^{k-1}) = (1-x^1-x^2-\dots-x^{k-1}, x^1, x^2, \dots x^{k-1})$$

$$\ell_i(x^1, x^2, \dots x^{k-1}) = \begin{cases} (x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\ \qquad \text{se } i \text{ é par} \\ (x^2, x^1, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\ \qquad \text{se } i \text{ é impar e } k \geq 3. \end{cases}$$

$$\ell_1(x^1) = (0, 1-x^1) \qquad \text{se } i=1 \text{ e } k=2.$$

Caso $k=1$

Dizemos que as 0-faces $\{0\}$ e $\{1\}$ do 1-simplexo padrão $I^1=[0,1]$ estão orientadas positivamente se suas orientações forem (-1) e $(+1)$ respectivamente.

5.17 Observações

(1) Para $k \geq 3$

$$f_1(x^1, x^2, \dots x^{k-1}) = (0, x^2, x^1, x^3, \dots x^{k-1}).$$

(2) Seja $2 \leq k \leq n$ e F uma $(k-1)$-face de $I^k \subset \mathbb{R}^k$.

Seja $\psi : I^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ uma parametrização regular de F.

Seja $\vec{n}$ vetor normal a F apontando para o interior de I^k se k é par e para o exterior se k é impar.

Então a orientação $[\psi]$ de F é positiva se e só se para $\forall x \in I^{k-1}$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x), \frac{\partial \psi}{\partial x^2}(x), \dots \frac{\partial \psi}{\partial x^{k-1}}, \vec{n} \right) \text{ é uma base}$$

positiva do $\mathbb{R}^k$ (da mesma classe de equivalência que a base canônica).

5.18 Definição

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ uma k-célula e $\varphi : I^k \to C$ uma parametrização regular de C.

No caso $2 \leq k \leq n$ dizemos que as $(k-1)$-faces de C tem orientações induzidas por φ se as orientações das $(k-1)$-faces são determinadas por:

$$\varphi_i = \varphi \circ \ell_i : I^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad i = 0, 1, \ldots k.$$

No caso $k=1$ dizemos que as 0-faces de C tem orientações induzidas por φ se as orientações das 0-faces $\{\varphi(0)\}$ e $\{\varphi(1)\}$ são (-1) e $(+1)$ respectivamente.

5.19 <u>Proposição</u> $(1 \leq k \leq n)$

Sejam $\varphi : I^k \longrightarrow C$ e $\psi : I^k \longrightarrow C$ duas parametrizações regulares da k-celula $C \subset \mathbb{R}^n$ que determinam a mesma orientação.

Então as orientações induzidas por φ e por ψ sobre as $(k-1)$-faces de C são as mesmas.

<u>Prova</u>

1° <u>Parte</u> : $k=1$

Neste caso $I^1 = [0,1]$.

$\theta = \psi^{-1} \circ \varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ é um difeomorfismo C^1 e como por hipótese $\det \theta' = \frac{d\theta}{dt} > 0$ para $0 < t < 1$, θ é crescente donde $\varphi(0) = \psi(0)$ e $\varphi(1) = \psi(1)$.

Logo as orientações induzidas sobre as 0-faces de C são as mesmas.

2° Parte : $2 \leq k \leq n$.

Seja $F \subset C$ uma $(k-1)$-face e sejam $l_i : I^{k-1} \longrightarrow I^k$, $l_j : I^{k-1} \longrightarrow I^k$ tais que

$$(\varphi \circ l_i)(I^{k-1}) = (\psi \circ l_j)(I^{k-1}) = F.$$

Seja $\zeta : I^{k-1} \longrightarrow I^{k-1}$ definida por:

$$\zeta = l_j^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \varphi \circ l_i = l_j^{-1} \circ \theta \circ l_i$$

onde $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
& I^k \arrow[dd, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
I^{k-1} \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & & C \\
& I^k \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Por hipótese $\dfrac{\partial(\theta^1, \theta^2, \ldots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \ldots u^k)}(u) > 0$, $\forall u \in I^k$ (1).

Queremos provar que

$$J_\zeta(x) = \frac{\partial(\zeta^1, \zeta^2, \ldots \zeta^{k-1})}{\partial(x^1, x^2, \ldots x^{k-1})}(x) > 0, \quad \forall x \in I^{k-1}$$

(1) Pelo lema 8.8 podemos aqui escrever $\forall u \in I^k$ em lugar de $\forall u \in \mathring{I}^k$.

1° <u>Caso</u> : $3 \leq k \leq n$, $i \neq 0$, $j \neq 0$.

Vamos exemplificar o calculo de $\dfrac{\partial(\zeta^1, \zeta^2, \dots \zeta^{k-1})}{\partial(x^1, x^2, \dots x^{k-1})}(x)$ para i par e j par.

$$
\begin{aligned}
\zeta^1 &= \theta^1(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\
\zeta^2 &= \theta^2(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\
\vdots\ & \quad \vdots \\
\zeta^{j-1} &= \theta^{j-1}(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\
\zeta^{j} &= \theta^{j+1}(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\
\vdots\ & \quad \vdots \\
\zeta^{k-1} &= \theta^{k}(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1})
\end{aligned}
$$

Resulta :

$$
J_\zeta = \det \begin{bmatrix}
\theta^1_1 & \theta^1_2 & \cdots & \theta^1_{i-1} & \theta^1_{i+1} & \cdots & \theta^1_k \\
\theta^2_1 & \theta^2_2 & \cdots & \theta^2_{i-1} & \theta^2_{i+1} & \cdots & \theta^2_k \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta^{j-1}_1 & \theta^{j-1}_2 & \cdots & \theta^{j-1}_{i-1} & \theta^{j-1}_{i+1} & \cdots & \theta^{j-1}_k \\
\theta^{j+1}_1 & \theta^{j+1}_2 & \cdots & \theta^{j+1}_{i-1} & \theta^{j+1}_{i+1} & \cdots & \theta^{j+1}_k \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta^{k}_1 & \theta^{k}_2 & \cdots & \theta^{k}_{i-1} & \theta^{k}_{i+1} & \cdots & \theta^{k}_k
\end{bmatrix} = \det \Theta
$$

onde θ^r_s é a derivada $\dfrac{\partial \theta^r}{\partial u^s}(l_i(x^1, x^2, \dots x^{k-1}))$.

Se i é impar há inversão de duas colunas consecutivas. Se j é impar há inversão de duas linhas consecutivas.

Portanto em geral $J_\zeta = (-1)^{i+j} \det \Theta$.

Pelo desenvolvimento de Laplace temos:

$$J_\zeta = \det \begin{bmatrix} \theta^1_1 & \theta^1_2 & \cdots & \theta^1_{i-1} & \theta^1_i & \theta^1_{i+1} & \cdots & \theta^1_k \\ \theta^2_1 & \theta^2_2 & \cdots & \theta^2_{i-1} & \theta^2_i & \theta^2_{i+1} & \cdots & \theta^2_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{j-1}_1 & \theta^{j-1}_2 & \cdots & \theta^{j-1}_{i-1} & \theta^{j-1}_i & \theta^{j-1}_{i+1} & \cdots & \theta^{j-1}_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta^{j+1}_1 & \theta^{j+1}_2 & \cdots & \theta^{j+1}_{i-1} & \theta^{j+1}_i & \theta^{j+1}_{i+1} & \cdots & \theta^{j+1}_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^k_1 & \theta^k_2 & \cdots & \theta^k_{i-1} & \theta^k_i & \theta^k_{i+1} & \cdots & \theta^k_k \end{bmatrix}$$

Como $\theta^j_s = \dfrac{\partial \theta^j}{\partial u^s}(\ell_i(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad s \neq i \\ > 0 & \text{se} \quad s = i \end{cases}$

resulta:

$$J_\zeta = \frac{1}{\theta^j_i(\ell_i(x))} \cdot \frac{\partial(\theta^1, \theta^2, \dots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \dots u^k)}(\ell_i(x)) > 0$$

<u>2º Caso</u>: $3 \leq k \leq n$, $i = 0$, $j = 0$.

Neste caso:

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= \theta^2(1 - x^1 - x^2 - \dots - x^{k-1}, x^1, x^2, \dots x^{k-1}) \\ \zeta^2 &= \theta^3(1 - x^1 - x^2 - \dots - x^{k-1}, x^1, x^2, \dots x^{k-1}) \\ &\vdots \\ \zeta^{k-1} &= \theta^k(1 - x^1 - x^2 - \dots - x^{k-1}, x^1, x^2, \dots x^{k-1}) \end{aligned}$$

$$J_\zeta = \det \begin{bmatrix} -\theta_1^2 + \theta_2^2 & -\theta_1^2 + \theta_3^2 & \cdots & -\theta_1^2 + \theta_k^2 \\ -\theta_1^3 + \theta_2^3 & -\theta_1^3 + \theta_3^3 & \cdots & -\theta_1^3 + \theta_k^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\theta_1^k + \theta_2^k & -\theta_1^k + \theta_3^k & \cdots & -\theta_1^k + \theta_k^k \end{bmatrix} \qquad (5.19.1)$$

No caso presente θ está levando a face I_α^k, $\alpha = \{1, 2, \dots k\}$ em si mesma. Portanto:

$$\sum_{j=1}^{k} \theta^j (1 - x^1 - x^2 - \cdots - x^{k-1}, x^1, x^2, \dots x^{k-1}) = 1$$

Derivando em relação a x^i, $1 \leq i \leq k-1$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{k} \theta_1^j = \sum_{j=1}^{k} \theta_2^j = \cdots = \sum_{j=1}^{k} \theta_k^j = c$$

O vetor $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ é normal a I_α^k, $\alpha = \{1, 2, \dots k\}$.

Como θ transforma I^k em si mesmo devemos ter $\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} e \,\middle|\, e\right) \geq 0$. donde

$$\left(e \,\middle|\, \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^t e\right) = (e \,|\, ce) = kc \geq 0 .$$

Como $c \neq 0$ pois caso contrário teríamos $\det \frac{\partial\theta}{\partial u} = J_\theta = 0$ contra a hipótese, resulta $c > 0$.

Transformando o determinante em (5.19.1) obtemos sucessivamente:

$$J_\zeta = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_1^2 & -\theta_1^2+\theta_2^2 & \cdots & -\theta_1^2+\theta_k^2 \\ \theta_1^3 & -\theta_1^3+\theta_2^3 & \cdots & -\theta_1^3+\theta_k^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_1^k & -\theta_1^k+\theta_2^k & \cdots & -\theta_1^k+\theta_k^k \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \cdots & \theta_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_1^k & \theta_2^k & \cdots & \theta_k^k \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{c} \det \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k \theta_1^j & \sum_{j=1}^k \theta_2^j & \cdots & \sum_{j=1}^k \theta_k^j \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \cdots & \theta_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_1^k & \theta_2^k & \cdots & \theta_k^k \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{c} \det \begin{bmatrix} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \cdots & \theta_k^1 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \cdots & \theta_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_1^k & \theta_2^k & \cdots & \theta_k^k \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{c(l_0(x))} \cdot \frac{\partial(\theta^1, \theta^2, \ldots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \ldots \theta^k)} (l_0(x)) > 0 .$$

<u>3º caso</u> : $3 \leq k \leq n$, $i \neq 0$, $j = 0$

Se i é par temos:

$$\begin{aligned}
\zeta^1 &= \theta^2(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\
\zeta^2 &= \theta^3(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) \\
&\vdots \\
\zeta^{k-1} &= \theta^k(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1})
\end{aligned}$$

$$J_\zeta = \det \begin{bmatrix} \theta^2_1 & \theta^2_2 & \cdots & \theta^2_{i-1} & \theta^2_{i+1} & \cdots & \theta^2_k \\ \theta^3_1 & \theta^3_2 & \cdots & \theta^3_{i-1} & \theta^3_{i+1} & \cdots & \theta^3_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^k_1 & \theta^k_2 & \cdots & \theta^k_{i-1} & \theta^k_{i+1} & \cdots & \theta^k_k \end{bmatrix}$$

Como θ leva a face $I^k_{\{1,2,\dots i-1,0,i+1,\dots k\}}$ na face $I^k_{\{1,2,\dots k\}}$ teremos

$$\sum_{j=1}^{k} \theta^j(x^1, x^2, \dots x^{i-1}, 0, x^i, \dots x^{k-1}) = 1$$

Derivando em relação a $x^1, x^2, \dots x^{k-1}$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{k} \theta^j_s = 0 \quad \text{para } s \neq i .$$

Certamente $\sum_{j=1}^{k} \theta^j_i \neq 0$ pois caso contrário teríamos $\det \frac{\partial\theta}{\partial u} = 0$ contra a hipótese.

Como θ transforma I^k em I^k devemos ter $\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} e_i \mid e\right) \leq 0$, isto é, $\sum_{j=1}^{k} \theta^j_i \leq 0$.

Logo $\sum_{j=1}^{k} \theta_i^j < 0$. Então:

$$J_\zeta = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \theta_i^j} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{j=1}^{k} \theta_i^j & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \cdots & \theta_{i-1}^2 & \theta_i^2 & \theta_{i+1}^2 & \cdots & \theta_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_1^k & \theta_2^k & \cdots & \theta_{i-1}^k & \theta_i^k & \theta_{i+1}^k & \cdots & \theta_k^k \end{bmatrix}$$

Subtraindo-se todas as linhas da primeira, temos:

$$J_\zeta = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \theta_i^j(l_i(x))} \cdot \frac{\partial(\theta^1, \theta^2, \ldots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \ldots u^k)}(l_i(x)) > 0$$

Se i é ímpar temos o mesmo resultado.

<u>4º Caso</u>: $3 \leq k \leq n$, $i = 0$, $j \neq 0$

Tomando-se a inversa ζ^{-1} recaímos no caso anterior e podemos escrever:

$$J_\zeta(l_0(x)) = [J_{\zeta^{-1}}(l_j(y))]^{-1} > 0$$

<u>5º Caso</u>: $k = 2$.

Basta verificar os casos $(i=1, j=0)$, $(i=1, j=1)$ e $(i=1, j=2)$. O procedimento é análogo. ∎

5.20 <u>Observação</u>

Em vista da proposição 5.20 vemos que podemos falar em orientações das $(k-1)$-faces de C induzidas pela orientação de C.

§6. Variedades Celuláveis

6.1 Definição $(0 \leq k \leq n)$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$.

Dizemos que V é uma variedade celulável de dimensão k se existe um conjunto finito $D = \{C_1, C_2, \ldots C_N\}$ de k-células no $\mathbb{R}^n$ tais que:

i) $\bigcup_{i=1}^{N} C_i = V$

ii) Se $i \neq j$ então $C_i \cap C_j$ ou é vazio ou é uma s-face, $0 \leq s < k$, comum a C_i e a C_j.

O conjunto D é chamado decomposição celular de V.

6.2 Definição $(1 \leq k \leq n)$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade celulável de dimensão k. Sejam $\varphi_i : I^k \longrightarrow C_i$ parametrizações regulares das k-células C_i, $i = 1, 2, \ldots N$.

Dizemos que $\Phi = \{(\varphi_1, I^k), (\varphi_2, I^k), \ldots (\varphi_N, I^k)\}$ ou abreviadamente $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_N\}$ é uma celulação de V se $D = \{C_1, C_2, \ldots C_N\}$ é uma decomposição celular de V.

6.5 Propriedades ($0 \leq q \leq s \leq k \leq m$)

Seja $D = \{C_1, C_2, \ldots C_N\}$ uma decomposição celular de uma variedade celulável $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k.

(1) Seja F uma s-face de C_i. Então F é uma s-celula.
(Podemos então falar nas q-faces de F).

(2) Seja F uma s-face de C_i. Se $G \subset F$ é q-face de F então G é q-face de C_i.

(3) Seja F uma s-face de C_i. Se $G \subset C_i$ é q-face de C_i e $G \subset F$ então G é q-face de F.

(4) Seja $F_1 \subset C_i$ face de C_i e $F_2 \subset C_j$ face de C_j. Se $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ então $F_1 \cap F_2$ é face comum de F_1 e F_2.

(5) Se duas k-celulas C_i e C_j tem em comuns os vertices $Q_0, Q_1, \ldots Q_q$ então tem em comum as q-faces determinadas em C_i e em C_i e em C_j por estes vertices.

Prova

Na demonstração de (1), (2) e (3) o caso $s = 0$ é trivial. Suporemos $s \geq 1$.

(1) Seja $\varphi_i : I^k \to C_i$ parametrização regular de C_i e $F = \varphi_i(I^k_\alpha)$.
Seja $\ell_\alpha : I^s \to I^k_\alpha$ definida por:

$$\ell^i_\alpha(x^1, x^2, \dots x^s) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin \alpha \\ 1 - x^1 - \dots - x^s & \text{se } i = \alpha_0 \\ x^j & \text{se } i = \alpha_j,\ j \neq 0. \end{cases}$$

Então $\psi = \varphi_i \circ \ell_\alpha : I^s \to F$ é parametrização regular de dimensão s.

(2) Como G é q-face de F, existe I^s_β, q-face de I^s tal que $\psi(I^s_\beta) = G$.

$$G = \psi(I^s_\beta) = \varphi_i(\ell_\alpha(I^s_\beta)).$$

Como $\ell_\alpha : I^s \to I^k$ é simplicial, injetora, $\ell_\alpha(I^s_\beta)$ é q-face de I^k.
Logo G é q-face de C_i.

(3) Como G é q-face de C_i, existe I^k_γ, q-face de I^k tal que $\varphi_i(I^k_\gamma) = G$.
Tambem $\varphi_i(I^k_\alpha) = F$. De $G \subset F$ vem que $\varphi_i(I^k_\gamma) \subset \varphi_i(I^k_\alpha)$. Como $\varphi_i : I^k \to C_i$ é bijet[ora] temos $I^k_\gamma \subset I^k_\alpha = \ell_\alpha(I^s)$.
Como $\ell_\alpha : I^s \to I^k$ é injetora e $\ell_\alpha(I^s) \supset I^k_\gamma$ vem $G = \varphi_i(I^k_\gamma) = (\varphi_i \circ \ell_\alpha)(\ell^{-1}_\alpha(I^k_\gamma)) = \psi(\ell^{-1}_\alpha(I^k_\gamma))$.

Como ℓ_α é simplicial $\ell_\alpha^{-1}(I_\gamma^k)$ é q-face I_β^s de I^s donde $G = \Psi(I_\beta^s)$.

Como $F = \Psi(I^s)$ temos que G é q-face de F.

(4) Como $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ então $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ e portanto $C_i \cap C_j$ é uma face comum a C_i e C_j.

$$F_1 \cap F_2 = [F_1 \cap (C_i \cap C_j)] \cap [F_2 \cap (C_i \cap C_j)]$$

Ora, $F_1 \cap (C_i \cap C_j)$ é interseção de duas faces de C_i e portanto uma face de C_i

Como esta face está contida em $C_i \cap C_j$, é face de $C_i \cap C_j$ por (3). Analogamente $F_2 \cap (C_i \cap C_j)$ é face de $C_i \cap C_j$.

Então $F_1 \cap F_2$ é face de $C_i \cap C_j$.

Por (2), $F_1 \cap F_2$ é face comum de C_i e de C_j.

Por (3), $F_1 \cap F_2$ é face comum de F_1 e de F_2.

(5) As 0-faces $\{Q_0\}, \{Q_1\}, \ldots \{Q_q\}$, de C_i são 0-faces de $C_i \cap C_j$ por (3).

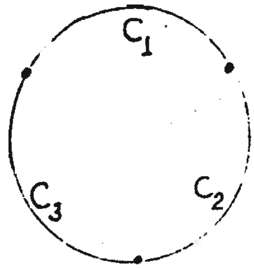
As q-faces determinadas por $Q_0, Q_1, \ldots Q_q$ em $C_i \cap C_j$ é q-face comum de C_i e de C_j por (2). ⊠

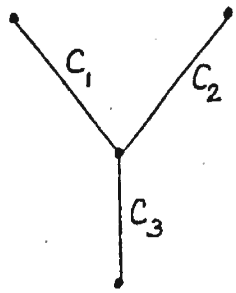
6.6 <u>Exemplos</u>

(1) Uma k-celula é uma variedade celulável de dimensão k.

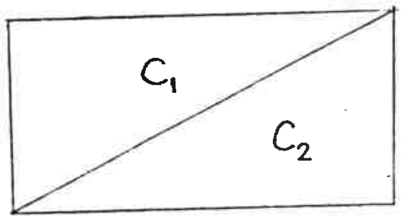
(2) A fronteira de um k-simplexo padrão é uma variedade celulável de dimensão k.

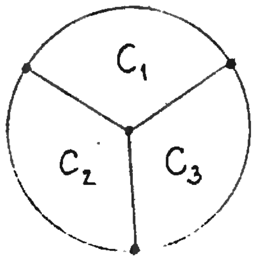
(3) Os seguintes são exemplos de variedades celuláveis de dimensão 1 no $\mathbb{R}^2$.





(4) Um retângulo e um círculo são variedades celuláveis de dimensão 2 no $\mathbb{R}^2$.





(5) Um cubo e uma bola são exemplos de variedades celuláveis de dimensão 3 no $\mathbb{R}^3$.

(6) Uma esfera, um toro e uma faixa de Moebius são exemplos de variedades celuláveis de dimensão 2 no $\mathbb{R}^3$.

6.7 <u>Definição</u> $(1 \le k \le n)$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ variedade celulável de dimensão k e $D = \{C_1, C_2, \dots C_N\}$ uma decomposição celular.

Sejam F_j, $j = 1, 2, \dots M$ as $(k-1)$-células no $\mathbb{R}^n$ cada uma das quais é $(k-1)$-face de uma única k-célula de D. Definimos <u>bordo</u> ∂V de V por:

$$\partial V = \bigcup_{j=1}^{M} F_j .$$

Temos que $\tilde{f}$ é contínua, injetora, coincide com h sobre a face $v_1 v_2$ e com f sobre as restantes faces de dimensão 1.

Além disso $\tilde{f}(s) = f(s)$, $\forall s \in \bar{\sigma}^k$.

Substituindo o par (f, h) por $(\tilde{f}, h)$ temos situação análoga à original.

Repetindo-se o procedimento anterior relativo a 1-face $v_1 v_2$ sucessivamente com relação as 1-faces restantes de S obteremos uma função

$$\hat{f} : \sigma^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

contínua, injetora, que coincide com h sobre as faces de dimensão 0 e 1 de S e tal que $\hat{f}(s) = f(s)$, $\forall s \in \bar{\sigma}^k$.

Se dimensão de S é 1, $\hat{f}$ é a extensão pedida.

ii) Seja $\dim S > 1$ e seja por exemplo $v_0 v_1 v_2 \in S$

Definamos $\bar{f} : \sigma^k \to \mathbb{R}^n$ por:

$$\bar{f}(\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) =$$

$$= \hat{f}\left((\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\, \hat{f}^{-1} \circ h \left(\frac{\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} \right) + \lambda_3 v_3 \right)$$

A função $\hat{f}$ é contínua, injetora, coincide com h sobre as faces de dimensão 0 e 1 de S e sobre a 2-face $v_0 v_1 v_2 \in S$.

Sobre as restantes faces de dimensão 2 coincide com $\hat{f}$. Alem disso $\bar{f}(s) = f(s)$, $\forall s \in \bar{\sigma}^k$.

Repetindo-se o procedimento anterior relativo a 2-face $v_0 v_1 v_2$ sucessivamente com relação as 2-faces restantes de S, obteremos uma função

$$\check{f} : \sigma^k \to \mathbb{R}^n$$

contínua, injetora, que coincide com h sobre as faces de dimensão 0, 1 e 2 de S e tal que $\check{f}(s) = f(s)$, $\forall s \in \bar{\sigma}^k$.

iii) Como $\dim S \leq 2$, $\check{f}$ é a extensão pedida.

6.9 <u>Proposição</u> $(1 \leq k \leq n)$

A definição 6.7 de bordo de uma variedade celulável de dimensão k independe da particular decomposição celular.

<u>Prova</u>

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade celulável de dimensão k. Seja $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ uma celulação de V e $C_i = \varphi_i(I^k)$, $i = 1, 2, \dots N$.

Sejam $P_0, P_1, \dots P_M$ os vértices da decomposição celular, isto é os pontos do $\mathbb{R}^n$ que são vértices de alguma k-célula C_i, $i = 1, 2, \dots N$

E' fácil ver que o conjunto $\mathcal{K}$ definido por

$$\mathcal{K} = \{ S \subset \{P_0, P_1, \dots P_M\} : S \neq \phi, \ \exists i : S \subset C_i \}$$

é um complexo abstrato.

Seja (Ψ, Q) uma realização geométrica de $\mathcal{K}$ onde Q é um k-complexo em $\mathbb{R}^M$ e Ψ uma aplicação bi-jetora dos vertices de $\mathcal{K}$ nos vertices de Q tal que se $\{v_0, v_1, \dots v_q\}$ é um q-simplexo de $\mathcal{K}$ então $\Psi(v_0)\Psi(v_1)\dots\Psi(v_q)$ é um q-simplexo de Q.

Sejam $\sigma_i^k \in Q$, $i = 1, 2, \dots N$ os k-simplexos correspondentes por Ψ as k-células
Seja $g_i : \bar{\sigma}_i^k \longrightarrow \bar{I}^k$ a aplicação simplicial que leva os vertices de σ_i^k nos vertices de I^k obtida atraves de Ψ e φ_i.
Seja $|g_i| : \sigma_i^k \to I^k$ a aplicação simplicial correspondente.
Sejam $f_i = \varphi_i \circ |g_i| : \sigma_i^k \longrightarrow C_i$, $i = 1, 2, \dots N$.

Seja $h_1 = f_1$. E' contínua e injetora. Pelo Lema 6.8 existe $h_2 : \sigma_2^k \longrightarrow C_2$ contínua injetora tal que se $\sigma_1^k \cap \sigma_2^k \neq \phi$, h_2 e h_1 coincidem na interseção e h_2 leva s-faces de σ_2^k em s-faces de C_2, $0 \leq s \leq k$.

Pelo lema 6.8 existe $h_3 : \sigma_3^k \to C_3$ contínua injetora tal que se $\sigma_1^k \cap \sigma_3^k \neq \emptyset$ h_1 e h_3 coincidem na interseção, se $\sigma_2^k \cap \sigma_3^k \neq \emptyset$ h_2 e h_3 coincidem na interseção e h_3 leva s-faces de σ_3^k em s-faces de C_3.

Sucessivamente obtemos h_i, $i = 1, 2, \ldots N$.

Seja $h : |Q| \longrightarrow V$ definida por

$$x \in \sigma_i^k \quad \Rightarrow \quad h(x) = h_i(x).$$

A aplicação h é contínua, injetora e portanto um homeomorfismo de $|Q|$ sobre a imagem V. Então (Q, h) é uma triangulação de V o qual é portanto um poliedro. O bordo de V como poliedro é $h(|\partial Q|)$, onde ∂Q é o bordo do complexo Q.

Seja ∂V o bordo da variedade celulável como definido em 6.7. É fácil ver que $\partial V = h(|\partial Q|)$.

Como pelo Teorema 9.20. o bordo de um poliedro independe da particular triangulação então o bordo ∂V da variedade celulável independe da particular celulação. ∎

6.10 Observação

Na demonstração da proposição 6.9 a propriedade 6.5.(5) garante a aplicabilidade do lema 6.8.

6.11 Proposição ($1 \leq k \leq n$)

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ variedade celulável de dimensão k. Então o bordo ∂V de V é variedade celulável de dimensão $k-1$.

Prova

Consequência imediata das propriedades 6.5 (1) e 6.5 (4) e das definições de V e ∂V. ◻

6.12 Definição ($2 \leq k \leq n$)

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ variedade celulável de dimensão k e ∂V o bordo de V.

Seja $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_N\}$ celulação de V e $C_i = \varphi_i(I^k)$, $i = 1, 2, \ldots N$.

Sejam F_j, $j = 1, 2, \ldots M$ as $(k-1)$-células no $\mathbb{R}^n$ cada uma das quais é $(k-1)$-face de uma única k-célula de $D = \{C_1, C_2, \ldots C_N\}$.

Sejam $\eta_j : I^{k-1} \to F_j$ as parametrizações regulares induzidas por Φ.

Definimos $\partial\Phi$ por

$$\partial\Phi = \{\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_M\}.$$

6.13 <u>Lema</u> $(2 \leq k \leq n)$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ variedade celulável de dimensão k.
Sejam Φ e Ψ duas celulações coerentes de V.
Então $\partial\Phi$ e $\partial\Psi$ são celulações coerentes de ∂V.

<u>Prova</u>

i) Sejam $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ e $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots \psi_{\tilde{N}}\}$ duas celulações coerentes de V.
Sejam $C_i = \varphi_i(I^k)$, $i = 1, 2, \dots N$ e $D_j = \psi_j(I^k)$, $j = 1, 2, \dots \tilde{N}$.
As celulações $\partial\Phi$ e $\partial\Psi$ podem ser escritas:

$$\partial\Phi = \{\varphi_{p_1} \circ l_{s_1}, \varphi_{p_2} \circ l_{s_2}, \dots \varphi_{p_M} \circ l_{s_M}\}$$

$$\partial\Psi = \{\psi_{q_1} \circ l_{r_1}, \psi_{q_2} \circ l_{r_2}, \dots \psi_{q_{\tilde{M}}} \circ l_{r_{\tilde{M}}}\}$$

onde $1 \leq p_i \leq N$, $i = 1, 2, \dots M$.
$1 \leq q_j \leq \tilde{N}$, $j = 1, 2, \dots \tilde{M}$.

As aplicações $l_i : I^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ são as definidas em 5.16. Provemos que as celulações $\partial\Phi$ e $\partial\Psi$ do bordo ∂V são coerentes.

ii) Seja $F_i = \varphi_{p_i} \circ l_{s_i}(I^{k-1})$ uma $(k-1)$-célula de ∂V relativamente a $\partial\Phi$ e $G_j = \psi_{q_j} \circ l_{r_j}(I^{k-1})$ uma $(k-1)$-célula de ∂V relatuamente a $\partial\Psi$ tais que:

$$\varphi_{p_i} \circ l_{s_i}(\mathring{I}^{k-1}) \cap \psi_{q_j} \circ l_{r_j}(\mathring{I}^{k-1}) = \operatorname{int} F_i \cap \operatorname{int} G_j \neq \emptyset .$$

Então os conjuntos:

$$\Omega_\varphi = (\varphi_{p_i} \circ l_{s_i})^{-1} (\text{int } F_i \cap \text{int } G_j)$$
$$\Omega_\psi = (\psi_{q_j} \circ l_{r_j})^{-1} (\text{int } F_i \cap \text{int } G_j)$$

são abertos de $\overset{\circ}{I}{}^{k-1}$ e $\zeta : \Omega_\varphi \to \Omega_\psi$ definida por

$$\zeta = (\psi_{q_j} \circ l_{r_j})^{-1} \circ (\varphi_{p_i} \circ l_{s_i}) \big|_{\Omega_\varphi}$$

é um difeomorfismo C^1 de Ω_φ sobre Ω_ψ (lema 3.

Queremos provar que:

$$\frac{\partial(\zeta^1, \zeta^2, \dots \zeta^{k-1})}{\partial(x^1, x^2, \dots x^{k-1})}(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega_\varphi .$$

iii) O conjunto $O \subset V$ definido por

$$O = (\text{int } F_i + \text{int } C_{p_i}) \cap (\text{int } G_j + \text{int } D_{q_j})$$

é aberto em V.

De fato $O = V \setminus K$ onde

$$K = (V \setminus (\text{int } F_i + \text{int } C_{p_i})) \cup (V \setminus (\text{int } G_j + \text{int } D_{q_j}))$$

é compacto como união de k-células e $(k-1)$-células em numero finito.

Sejam $A_\varphi \subset I^k$ e $A_\psi \subset I^k$ definidos por $A_\varphi = \varphi_{p_i}^{-1}(O)$, $A_\psi = \psi_{q_j}^{-1}(O)$. Sao abertos em I^k.

Como A_φ é aberto em I^k existe aberto W tal que $A_\varphi = I^k \cap W$

$$\mathring{A}_\varphi = \overset{\circ}{\overline{I^k \cap W}} = \mathring{I}^k \cap W = \mathring{I}^k \cap I^k \cap W = \mathring{I}^k \cap A_\varphi$$

$$\therefore \quad \mathring{A}_\varphi = \mathring{I}^k \cap A_\varphi \qquad (6.13.1)$$

$\overline{\mathring{A}_\varphi} = \overline{\mathring{I}^k \cap W} \supset I^k \cap W = A_\varphi$ donde $\overline{\mathring{A}} \supset \overline{A_\varphi}$

Mas $\mathring{A}_\varphi \subset A_\varphi \Rightarrow \overline{\mathring{A}_\varphi} \subset \overline{A_\varphi}$

Portanto $\overline{\mathring{A}_\varphi} = \overline{A_\varphi}$ (6.13.2).

De $A_\varphi \neq \emptyset$ resulta por (6.13.2) que $\mathring{A}_\varphi \neq \emptyset$.

De $\operatorname{int} C_{p_i} \cap \operatorname{int} D_{q_j} \subset \operatorname{int} C_{p_i} = \varphi_{p_i}(\mathring{I}^k)$

vem $\varphi_{p_i}^{-1}(\operatorname{int} C_{p_i} \cap \operatorname{int} D_{q_j}) \subset \mathring{I}^k$ (6.13.3)

De $\operatorname{int} F_i \cap \operatorname{int} G_j \subset \operatorname{int} F_i = \varphi_{p_i} \circ l_{s_i}(\mathring{I}^{k-1})$

vem $\varphi_{p_i}^{-1}(\operatorname{int} F_i \cap \operatorname{int} G_j) \subset l_{s_i}(\mathring{I}^{k-1})$ (6.13.4)

De $\operatorname{int} F_i \subset \partial V$ e $\operatorname{int} D_{q_j} \cap \partial V = \emptyset$

vem $\operatorname{int} F_i \cap \operatorname{int} D_{q_j} = \emptyset$ e analogamente

$$\operatorname{int} C_{p_i} \cap \operatorname{int} G_j = \emptyset$$

donde O pode ser escrito :

$$0 = \operatorname{int} F_i \cap \operatorname{int} G_j + \operatorname{int} C_{p_i} \cap \operatorname{int} D_{q_j}$$

$$A_\varphi = \varphi_{p_i}^{-1}(\operatorname{int} F_i \cap \operatorname{int} G_j) + \varphi_{p_i}^{-1}(\operatorname{int} C_{p_i} \cap \operatorname{int} D_{q_j}) \quad (6.13.5)$$

Como $\mathring{I}^k \cap l_{s_i}(\mathring{I}^{k-1}) = \phi$ vem de (6.13.1), (6.13.3), (6.13.4) e (6.13.5) que:

$$\mathring{A}_\varphi = \varphi_{p_i}^{-1}(\operatorname{int} C_{p_i} \cap \operatorname{int} D_j) \subset \mathring{I}^k$$

$$A_\varphi \setminus \mathring{A}_\varphi = \varphi_{p_i}^{-1}(\operatorname{int} F_i \cap \operatorname{int} G_j) \subset l_{s_i}(\mathring{I}^{k-1})$$

Então $\mathring{A}_\varphi$ está contida no interior geometrico de I^k e $A_\varphi \setminus \mathring{A}_\varphi$ no interior geometrico de uma $(k-1)$-face de I^k.

A aplicacão $\theta : A_\varphi \to A_\psi$ definida por $\theta = \psi_{q_j}^{-1} \circ \varphi_{p_i}|_{A_\varphi}$ é um difeomorfismo C^1 pois que φ_{p_i} e ψ_{q_j} são difeomorfismos C^1 pela proposição 8.9.

Como Φ e Ψ são coerentes por hipótese, temos:

$$\frac{\partial(\theta^1, \theta^2, \dots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \dots u^k)}(u) > 0 \quad , \quad \forall\, u \in \mathring{A}_\varphi$$

Por (6.3.2) e pelo lema 8.8 vem:

$$\frac{\partial(\theta^1, \theta^2, \dots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \dots u^k)}(u) \neq 0 \quad , \quad \forall\, u \in A_\varphi$$

Por continuidade resulta

$$\frac{\partial(\theta^1, \theta^2, \dots \theta^k)}{\partial(u^1, u^2, \dots u^k)}(u) > 0 \quad , \quad \forall u \in A_\varphi .$$

Como θ é difeomorfismo C^1, leva $\mathring{A}_\varphi$ sobre $\mathring{A}_\psi$ e $A_\varphi \setminus \mathring{A}_\varphi = l_{s_i}(\Omega_\varphi)$ sobre $A_\psi \setminus \mathring{A}_\psi = l_{r_j}(\Omega_\psi)$.

iv) Como

$$l_{s_i}(\Omega_\varphi) = \varphi_{p_i}^{-1}(\mathrm{int}\, F_i \cap \mathrm{int}\, G_j) \subset \varphi_{p_i}^{-1}(O) = A_\varphi$$

podemos escrever:

$$\zeta = (\psi_{q_j} \circ l_{r_j})^{-1} \circ (\varphi_{p_i} \circ l_{s_i})|_{\Omega_\varphi} =$$

$$= l_{r_j}^{-1} \circ \psi_{q_j}^{-1} \circ \varphi_{p_i}|_{A_\varphi} \circ l_{s_i}|_{\Omega_\varphi} =$$

$$= l_{r_j}^{-1} \circ \theta \circ l_{s_i}|_{\Omega_\varphi} .$$

Estamos agora em situação análoga à da demonstração da proposição 5.19. Como na demonstração dessa proposição os argumentos utilizados para provar que

$$\frac{\partial(\zeta^1, \zeta^2, \dots \zeta^k)}{\partial(x^1, x^2, \dots x^k)}(x) > 0$$

foram de natureza local, os mesmos podem ser repetidos aqui sem modificação. ∎

6.14 Definição $(1 \le k \le n)$.

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ variedade celulável de dimensão k e $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ uma celulação de V.

Seja $\Sigma = [\Phi]$ o sistema de orientações de V determinado por Φ.

Caso $2 \le k \le n$:

Definimos o sistema de orientações $\partial\Sigma$ de ∂V por:

$$\partial\Sigma = \partial[\Phi] = [\partial\Phi].$$

Caso $k = 1$:

Seja $\partial V = \{P_1, P_2, \dots P_M\}$ onde $P_i \in \varphi_{P_i}(I^1)$, $i = 1, 2, \dots M$.

Definimos

$$\partial\Sigma = \partial[\Phi] = (\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_M)$$

onde $\sigma_i = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad \varphi_{P_i}^{-1}(P_i) = 0 \\ +1 & \text{se} \quad \varphi_{P_i}^{-1}(P_i) = 1 . \end{cases}$

6.15 Proposição

A definição 6.14 de $\partial\Sigma$ independe da particular celulação $\Phi \in \Sigma$ utilizada.

Prova

Se $2 \leq k \leq n$ a proposição é consequência imediata do lema 6.13 e da definição de sistema de orientações.

O caso $k=1$ deixamos ao leitor como exercício. ■

6.16 Definição $(1 \leq k \leq n)$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ variedade celulável de dimensão k e $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ uma celulação de V.

Seja $\Sigma = [\Phi]$ sistema de orientações e $\vec{V} = (V, \Sigma)$.

Definimos $\partial\vec{V} = (\partial V, \partial\Sigma)$.

§7. Variedades celuláveis orientáveis e Teorema de Stokes

7.1 Definição $(1 \leq k \leq n)$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade celulável de dimensão k, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ uma celulação de V, e $C_i = \varphi_i(I^k)$, $i = 1, 2, \dots N$.

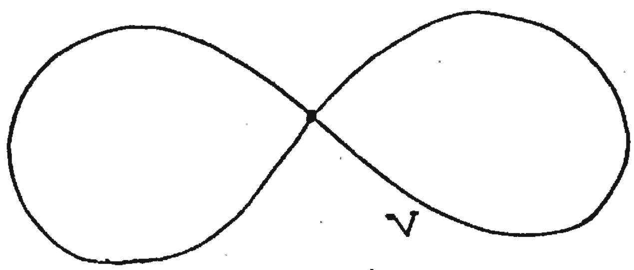
Dizemos que a celulação Φ é consistente se a seguinte condição é satisfeita:

"Se $C_i \cap C_j$ é uma $(k-1)$-face comum a C_i e a C_j então as orientações induzidas nesta $(k-1)$-face por φ_i e por φ_j são opostas".

7.2 Observação

Se uma variedade celulável admite uma celulação consistente $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ e $C_i = \varphi_i(I^k)$, $i = 1, 2, \dots N$, então uma $(k-1)$-face qualquer das k-células C_i, $i = 1, 2, \dots N$, é face comum de no máximo duas k-células de $D = \{C_1, C_2, \dots C_N\}$

A variedade celulável de dimensão 1 abaixo não admite celulação consistente:



7.3 <u>Definição</u> $(0 \leq k \leq n)$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ variedade celulável de dimensão k.

Se $1 \leq k \leq n$ um sistema de orientações $\Sigma = [\Phi]$ determinado por uma celulação consistente Φ de V será dito uma <u>orientação</u> de V.

Se $k = 0$ um sistema de orientações Σ de V será chamado <u>orientação</u> de V

Uma variedade celulável $V \subset \mathbb{R}^n$ será dita <u>orientável</u> se admite orientação Σ.

Então $\vec{V} = (V, \Sigma)$ é uma <u>variedade orientada</u>.

7.4 <u>Definição</u> $(1 \leq k \leq n)$

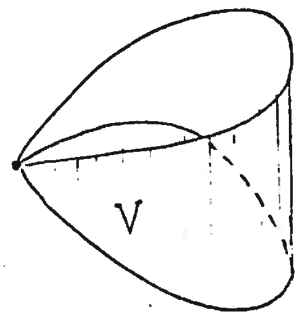
Dizemos que uma variedade celulável V é de <u>classe C^m</u> se admite uma celulação $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ de classe C^m isto é, tal que $\varphi_i \in C^m$, $i = 1, 2, \dots N$.

Dizemos que V é variedade celulável <u>orientável de classe C^m</u> se admite celulação Φ consistente de classe C^m.

7.5 <u>Observações</u>

(1) Pela definição 7.3, toda variedade celulável de dimensão $k = 0$ é orientável.

(2) Uma variedade celulável V de dimensão $k \geq 2$ pode ser orientável e seu bordo ∂V não o ser como no exemplo abaixo onde $k = 2$.



7.6 TEOREMA DE STOKES $(1 \leq k \leq n)$.

Seja $\vec{V} = (V, \Sigma)$ uma variedade orientada no $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e classe C^2.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\Omega \supset V$ e $\omega : \Omega \to \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ uma $(k-1)$-forma diferencial de classe C^1.

Então:

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\partial\vec{V}} \omega$$

<u>Prova</u>

Seja Φ celulação consistente de V de classe C^1 tal que $\Sigma = [\Phi]$.

<u>1° Caso</u> : $k = 1$

Seja $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_N\}$ e $\omega = f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\vec{V}} df = \int_{\Phi} df = \sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi_j} df =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{[0,1]} \varphi_j^* df = \sum_{j=1}^{N} \int_{[0,1]} d\varphi_j^* f =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{[0,1]} d(f \circ \varphi_j) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \frac{d}{dt} f \circ \varphi_j \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} [f(\varphi_j(1)) - f(\varphi_j(0))]$$

Sejam $J_0 = \{ j \in \{1, 2, \dots N\} : \varphi_j(0) \in \partial V \}$
$J_1 = \{ j \in \{1, 2, \dots N\} : \varphi_j(1) \in \partial V \}$

Então : $$\int_{\vec{V}} d\omega = \sum_{j \in J_1} f(\varphi_j(1)) - \sum_{j \in J_0} f(\varphi_j(0)) +$$

$$+ \sum_{j \notin J_1} f(\varphi_j(1)) - \sum_{j \notin J_0} f(\varphi_j(0)) =$$

$$= \sum_{j \in J_1} f(\varphi_j(1)) - \sum_{j \in J_0} f(\varphi_j(0)) = \int_{\partial \vec{V}} f = \int_{\partial \vec{V}} \omega$$

2° Caso : $2 \leq k \leq n$.

1° parte : $n = k$, $\Phi = \{ id \}$ onde $id : I^k \to \mathbb{R}^k$ é a inclusão.

Temos $\partial\Phi = \{\ell_0, \ell_1, \dots \ell_k\}$.

Pela linearidade da integral basta provar para

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k$$

onde $1 \le i \le k$ e $f : \Omega \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1.

Calculemos $\int_{\nabla} d\omega = \int_{id} d\omega$

$$\int_{id} d\omega = \int_{I^k} d\omega =$$

$$= \int_{I^k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^1\, dx^2 \dots dx^k$$

Calculemos $\int_{\partial\nabla} \omega = \int_{\partial\{id\}} \omega$

$$\int_{\partial\{id\}} \omega = \sum_{j=0}^{k} \int_{\ell_j} f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_{I^{k-1}} (f \circ \ell_j)\, d\ell_j^1 \wedge \dots \wedge d\ell_j^{i-1} \wedge d\ell_j^{i+1} \wedge \dots \wedge d\ell_j^k$$

Lembrando a definição dos ℓ_j, $j=0,1,\dots k$, (definição 5.16) obtemos para $j=0$

$$d\ell_0^1\wedge\dots\wedge d\ell_0^{i-1}\wedge d\ell_0^{i+1}\wedge\dots\wedge d\ell_0^k = (-1)^{i-1}dx^1\wedge dx^2\wedge\dots\wedge dx^{k-1}$$

e para $j\neq 0$

$$d\ell_j^1\wedge\dots\wedge d\ell_j^{i-1}\wedge d\ell_j^{i+1}\wedge\dots\wedge d\ell_j^k =$$

$$=\begin{cases}(-1)\,dx^1\wedge dx^2\wedge\dots\wedge dx^{k-1} & \text{se } j=i\\ 0 & \text{se } j\neq i\end{cases}$$

Teremos então:

$$\int_{\partial\overline{V}}\omega = (-1)^{i-1}\int_{I^{k-1}}(f\circ\ell_0)\,dx^1dx^2\dots dx^{k-1} +$$

$$+(-1)^i\int_{I^{k-1}}(f\circ\ell_i)\,dx^1dx^2\dots dx^{k-1}.$$

Resta então provar que

(7.6.1) $$\int_{I^k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^1dx^2\dots dx^k =$$

$$=\int_{I^{k-1}}f\circ\ell_0\,dx^1dx^2\dots dx^{k-1} - \int_{I^{k-1}}f\circ\ell_i\,dx^1dx^2\dots dx^{k-1}$$

Apliquemos o Teorema de Fubini a integral do 1º membro de (7.6.1).

Seja

$$F_i = \{ (t^1, \ldots t^{i-1}, t^{i+1}, \ldots t^k) : t^j \geq 0 \;,\; j = 1, \ldots i-1, i+1, \ldots k \;,$$

$$\text{e} \quad t^1 + \cdots + t^{i-1} + t^{i+1} + \cdots + t^k \leq 1 \}$$

$$J = \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial t^i} \, dt^1 dt^2 \ldots dt^k =$$

$$= \int_{F_i} dt^1 \ldots dt^{i-1} dt^{i+1} \ldots dt^k \int_0^{1 - t^1 - \ldots - t^{i-1} - t^{i+1} - \ldots - t^k} \frac{\partial f}{\partial t^i} \, dt^i$$

$$J = \int_{F_i} f(t^1, \ldots t^{i-1}, 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} t^j, t^{i+1}, \ldots t^k) \, dt^1 \ldots dt^{i-1} dt^{i+1} \ldots dt^k -$$

$$- \int_{F_i} f(t^1, \ldots t^{i-1}, 0, t^{i+1}, \ldots t^k) \, dt^1 \ldots dt^{i-1} dt^{i+1} \ldots dt^k \qquad (7.6.2)$$

Com a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
t^1 &= 1 - x^1 - x^2 - \ldots - x^{k-1} \\
t^2 &= x^1 \\
&\vdots \\
t^{i-1} &= x^{i-2} \\
t^{i+1} &= x^i \\
&\vdots \\
t^k &= x^{k-1}
\end{aligned}$$

a primeira integral do segundo membro de (7.6.2) fica igual a:

$$\int_{I^{k-1}} f \circ l_0 \, dx^1 dx^2 \dots dx^{k-1}$$

Analogamente com transformação de variáveis conveniente a segunda integral fica igual a

$$\int_{I^{k-1}} f \circ l_i \, dx^1 dx^2 \dots dx^{k-1}$$

Logo $\displaystyle\int_{id} d\omega = \int_{\partial\{id\}} \omega$.

<u>2º parte</u>: $2 \le k \le n$, $\Phi = \{\varphi\}$ onde $\varphi : I^k \to R^n$ é parametrização regular de classe C

Temos $\partial\Phi = \{\varphi \circ l_0, \varphi \circ l_1, \dots \varphi \circ l_k\}$

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\varphi} d\omega = \int_{I^k} \varphi^* d\omega = \int_{I^k} d(\varphi^*\omega) = \int_{id} d(\varphi^*\omega)$$

$$\int_{\partial\vec{V}} \omega = \sum_{j=0}^{k} \int_{\varphi \circ l_j} \omega = \sum_{j=0}^{k} \int_{l_j} \varphi^*\omega = \int_{\partial\{id\}} \varphi^*\omega$$

Pela primeira parte $\displaystyle\int_{id} d(\varphi^*\omega) = \int_{\partial\{id\}} \varphi^*\omega$ donde

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\partial\vec{V}} \omega .$$

<u>3° parte</u> : $2 \leq k \leq n$, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\}$ onde Φ é celulação consistente de V de classe C^2.

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\Phi} d\omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{\varphi_i} d\omega$$

Pela 2° parte $\int_{\varphi_i} d\omega = \sum_{j=0}^{k} \int_{\varphi_i \circ l_j} \omega$ donde

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{k} \int_{\varphi_i \circ l_j} \omega \qquad \text{ou}$$

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega + \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq k \\ \varphi_i \circ l_j \notin \partial\Phi}} \int_{\varphi_i \circ l_j} \omega \qquad (7.6.3)$$

Seja $\varphi_i \circ l_j \notin \partial\Phi$.
Então existe $\varphi_{i'} \circ l_{j'} \notin \partial\Phi$ tal que

$$(\varphi_i \circ l_j)(I^{k-1}) = (\varphi_{i'} \circ l_{j'})(I^{k-1})$$

e tal que $\theta = (\varphi_{i'} \circ l_{j'})^{-1} \circ (\varphi_i \circ l_j)$ restrita a $\mathring{I}^k$ tem Jacobiano negativo, pela definição 7.1 de celulação consistente.

Pelo lema 4.5 temos:

$$\int_{\varphi_i \circ l_j} \omega = - \int_{\varphi_{i'} \circ l_{j'}} \omega$$

Pela observação 7.2 estas integrais aparecem aos pares e portanto o segundo termo do segundo membro de (7.6.3) se anula.

Logo

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\partial\vec{V}} \omega .$$

7.7 <u>Observação</u>

Para <u>calcular</u> as integrais que aparecem no primeiro e segundo membros de

$$\int_{\vec{V}} d\omega = \int_{\partial\vec{V}} \omega$$

podemos usar <u>qualquer</u> retalhamento de V coerente com Φ e <u>qualquer</u> retalhamento de ∂V coerente com $\partial\Phi$, mesmo os de classe C

ANEXO 1.

§8. Funções de classe C^k num subconjunto qualquer do $\mathbb{R}^n$

8.1 Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Dizemos que f é de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$ se para $\forall x \in X$ existe uma vizinhança aberta Ω de x em $\mathbb{R}^n$ e uma extensão $\bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de $f|_{X \cap \Omega}$ que é de classe C^k no sentido usual.

É imediata a verificação que esta definição estende a definição usual.

8.2 Propriedades.

(1) Se X é discreto, toda $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞.

(2) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^k se e só se cada componente $f^i : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^k, $i = 1, 2, \ldots m$.

(3) Se $f : X \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^k e $Y \subset X$ então $f|_Y$ é de classe C^k.

(4) Se $f : X \to \mathbb{R}^m$ e $g : Y \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ são

de classe C^k e $f(X) \subset Y$ então $g \circ f$ é de classe C^k.

(5) Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
Se todo ponto $x \in X$ admite vizinhança aberta Ω de x em $\mathbb{R}^n$ tal que $f_{|X \cap \Omega}$ é de classe C^k então f é de classe C^k.

8.3 <u>Proposição</u>

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Então f é de classe C^k se e só se existe aberto Ω, $\Omega \supset X$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k tal que $g_{|X} = f$.

<u>Prova</u> ([2]).

i) Que a condição é suficiente é trivial.

ii) Mostremos que é necessária.

Existe cobertura μ de X por abertos tal que para cada $V \in \mu$, existe uma aplicação $f_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k, extensão de $f_{|X \cap V}$.

Seja $\Omega = \bigcup_{V \in \mu} V$. É aberto e $\Omega \supset X$.

Seja $(\varphi_V)_{V \in \mu}$, partição da unidade de classe C^k, estritamente subordinada à cobertura μ.

Seja $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$g = \sum_{V \in \mu} \varphi_V \cdot f_V$$

Está bem definida porquê a família $(\operatorname{supp} \varphi_V \cdot f_V)_{V \in \mu}$ é localmente finita e é de classe C^k.

É uma extensão de f.

De fato, para $x \in X$ temos

$$g(x) = \sum_{\substack{V \in \mu \\ V \ni x}} \varphi_V(x) f_V(x) = \sum \varphi_V(x) f_V(x) = f(x)$$

∎

8.4 <u>Proposição</u>

Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $f : F \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k. Então f pode ser estendida a $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k.

<u>Prova</u> ([2]).

i) Seja $m = 1$.

Pela proposição anterior existe $\Omega \supset F$ aberto e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^k, extensão de f.

Seja V aberto tal que $F \subset V \subset \bar{V} \subset \Omega$.

Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que $h(F) = \{1\}$ e $h(\mathbb{R}^n \setminus V) = \{0\}$.

Então $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} h(x)\,g(x) & \text{se } x \in V \\ 0 & \text{se } x \notin V \end{cases}$$

é de classe C^k e estende f.

ii) Se $m > 1$ aplicamos i) a cada componente de f

∎

8.5 <u>Definição</u>

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ com interior não vazio e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k.

Seja $\Omega \supset X$ aberto e $\bar{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k extensão de f.

Seja D^α um operador de derivação parcial de ordem $\leq k$.

Definimos $D^\alpha f(x)$, $x \in X \cap \overline{\mathring{X}}$ por

$$D^\alpha f(x) = D^\alpha \bar{f}(x).$$

8.6 <u>Observações</u>

(1) A definição de $D^\alpha f(x)$ em $\mathring{X}$ coincide com a definição usual.

(2) A definição 8.5 independe da particular extensão $\bar{f}$

(3) $D^\alpha f : X \cap \overline{\mathring{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

8.7 <u>Definição</u>

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^m$

Dizemos que f é um difeomorfismo C^k, $k \geq 1$, se f é um homeomorfismo de classe C^k e f^{-1} é de classe C^k.

8.8 Lema

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ e $\theta : A \longrightarrow B$ um difeomorfismo C^1.

Se $x \in A$ e é aderente ao interior de A então $y = \theta(x)$ é aderente ao interior de B e

$$[\theta'(x)]^{-1} = [\theta^{-1}]'(y)$$

Em particular $\det \theta'(x) \neq 0$.

Prova

Seja (x_j) sequência tal que $x_j \in \mathring{A}$ e $x_j \to x$.
Então $\theta(x_j) \longrightarrow \theta(x) = y$.

Como θ é um homeomorfismo $\theta(\mathring{A}) = \mathring{B}$.

Portanto $\theta(x_j) \in \mathring{B}$ e y é aderente a $\mathring{B}$.

Sejam $\Omega_A \supset A$ e $\Omega_B \supset B$ abertos e $\alpha : \Omega_A \to \mathbb{R}^n$, $\beta : \Omega_B \to \mathbb{R}^n$ extensões C^1, respectivamente de θ e θ^{-1}.

Como $x_j \in \mathring{A}$ e $\theta(x_j) \in \mathring{B}$, temos:

$$I = [\theta^{-1}]'(\theta(x_j)) \cdot \theta'(x_j) = \beta'(\theta(x_j))\, \alpha'(x_j).$$

Fazendo $j \to \infty$ e considerando a definicao 8.5 obtemos:

$$I = \beta'(\theta(x))\, \alpha'(x) = [\theta^{-1}]'(\theta(x)) \cdot \theta'(x) \qquad \blacksquare$$

8.9 Proposição

Seja $\Psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular de classe C^r.

Então Ψ é um difeomorfismo C^r do aberto Ω sobre $\Psi(\Omega)$.

Prova

$S = \Psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ é superfície local regular de dimensão k e classe C^r.

Então dado $z \in S$ existe $B \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\xi : B \to \mathbb{R}^k$ de classe C^r tais que $z \in \mathring{B}$ e $\xi|_{B \cap S} = \Psi^{-1}|_{B \cap S}$.

Logo $\Psi^{-1} : S \to \Omega$ é de classe C^r.

Como Ψ é por hipótese um homeomorfismo sobre a imagem de classe C^r, é então um difeomorfismo C^r sobre a imagem. ∎

8.10 Propriedades

(1) A restrição de um difeomorfismo C^r é um difeomorfismo C^r.

(2) A composição de difeomorfismos C^r é um difeomorfismo C^r.

8.11 Proposição

Seja $K \subset \mathbb{R}^k$ compacto e $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ injetora de classe C^r, $r \geq 1$, com

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$ de posto maximo em K.[1]

Então φ pode ser estendida a uma parametrização regular $\psi: \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ onde $\Omega \supset K$ é aberto.

Prova

Seja $\Omega_0 \supset K$ aberto e $\psi: \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r tal que $\psi|_K = \varphi$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x)$ tem posto maximo em K. O conjunto:

$$\Omega' = \{ x \in \Omega_0 : \text{posto } \frac{\partial \psi}{\partial x} = k \}$$

é aberto, e vale $K \subset \Omega' \subset \Omega_0$.

Temos que $\psi|_{\Omega'} \in C^r$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x)$ tem posto máximo em Ω'.

Sejam $\Omega_j = \{ x \in \Omega' : \text{dist}(x, K) < \frac{1}{j} \}$ $j = 1, 2, 3, \ldots$

Os Ω_j são abertos, $K \subset \Omega_j \subset \Omega'$ e $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j = K$.

Suponhamos (por contradição) que $\psi|_{\Omega_j}$ seja não injetora para $\forall j$.

---

(1) Com isto, queremos dizer que existe extensão $\psi: \Omega_0 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r, onde $\Omega_0 \supset K$ é aberto e $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x)$ tem posto maximo em K.

Então dado j, existem $x_j, y_j \in \Omega_j$, $x_j \neq y_j$, tais que $\Psi(x_j) = \Psi(y_j)$.

Como Ω_1 é limitado, existem subsequências (x_{j_s}), (y_{j_s}), tais que $x_{j_s} \to x$, $y_{j_s} \to y$.

Como $\text{dist}(x_{j_s}, K) < \frac{1}{j_s}$ e $\text{dist}(y_{j_s}, K) < \frac{1}{j_s}$ resulta $x, y \in K$.

Passando ao limite $\Psi(x_{j_s}) = \Psi(y_{j_s})$ quando $s \to \infty$ resulta $\Psi(x) = \Psi(y)$ donde $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Como φ é injetora, vem $x = y$.

Como posto de $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x)$ é maximo existe vizinhança aberta O de x onde Ψ é injetora.

Para s suficientemente grande, $x_{j_s}, y_{j_s} \in O$ donde $\Psi(x_{j_s}) \neq \Psi(y_{j_s})$ e temos uma contradição!

Logo existe p tal que $\Psi|_{\Omega_p}$ é injetora, de classe C^r, $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x)$ tem posto maximo para $\forall x \in \Omega_p$ e $K \subset \Omega_p$.

Como K é compacto existe aberto Ω tal que $K \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset \Omega_p$.

Como $\Psi|_{\overline{\Omega}}$ é continua e injetora e $\overline{\Omega}$ é compacto, $\Psi|_{\overline{\Omega}}$ é homeomorfismo sobre a imagem.

Então $\Psi|_{\Omega}$ é homeomorfismo sobre a imagem de classe C^r e $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x)$ tem posto máximo para $\forall x \in \Omega$. ∎

ANEXO 2

§9. Complexos Simpliciais

9.1 Definição

Os pontos $v_0, v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ são ditos linearmente independentes se os vetores $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$, $\dots$ $v_k - v_0$ são linearmente independentes.

9.2 Observação

A definição 9.1 independe da ordem.

9.3 Definição

Seja $k \geq 0$.

Um simplexo de dimensão k é a envoltória convexa σ de $k+1$ pontos linearmente independentes $v_0, v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$.

Os pontos v_i são chamados vértices de σ

9.4 Observações

(1) Escreveremos σ^k para evidenciar a dimensão. Indicaremos tambem

$$\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$$

(2) σ^k depende apenas dos vertices e não de sua ordem.

9.5 Definição

Seja $\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$ um k-simplexo e $\{w_0, w_1, \dots w_\ell\}$ um subconjunto não vazio de $\{v_0, v_1, \dots v_k\}$. Então $\tau = w_0 w_1 \dots w_\ell$ é chamado uma face ℓ-dimensional de σ.

Notação: $\tau < \sigma$.

9.6 Observações

(1) Como um sub-conjunto de um conjunto de pontos linearmente independentes é formado por pontos linearmente independentes τ é um ℓ-simplexo.

(2) Pela definição de k-simplexo, todo ponto $w \in \sigma^k$ pode ser representado univocamente por:

$$w = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i v_i \quad \text{com} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda^i = 1 \quad , \quad \lambda^i \geq 0, \ i = 0, 1, \dots k.$$

9.7 Definição

Um ponto $w = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i v_i$ é um ponto interno do simplexo $\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$ se $\lambda^i > 0$, $i = 0, 1, \dots k$.

Notação: $\text{int}\,\sigma$ = conjunto dos pontos internos.

9.8 Propriedades

(1) Seja $k \geq 1$.

Todo ponto interno de um k-simplexo σ é ponto médio de um segmento contido no $\text{int}\,\sigma$.

(2) Um vértice de um simplexo σ não pode ser ponto medio de um segmento contido em σ.

(3) Se $v_0 v_1 \dots v_k = v_0' v_1' \dots v_\ell'$, então $k = \ell$ e podemos renumerar os vertices de forma que $v_i = v_i'$, $i = 0, 1, \dots k$.

9.9 Definição.

Um complexo simplicial K é uma coleção finita de simplexos em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

i) Se $\sigma \in K$ então as faces de σ pertencem a K.

ii) Se $\sigma, \tau \in K$ então ou $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ou $\sigma \cap \tau$ é uma face comum de σ e τ.

9.10 Definição

Seja K um complexo simplicial.

O subconjunto $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ de $\mathbb{R}^n$ é chamado o espaço subjacente de K.

9.11 Definição

Seja K um complexo simplicial.

Definimos $\dim K$ por:

$$\dim K = \begin{cases} -1 & \text{se } K = \emptyset \\ \max_{\sigma \in K} \dim \sigma & \text{se } K \neq \emptyset. \end{cases}$$

Obs: daqui por diante escreveremos simplesmente complexo em lugar de complexo simplicial

9.12 Definição

Seja K um complexo. Um subcomplexo de K é um complexo L tal que $L \subset K$.

19.13 Definição

Seja K um complexo.

Definimos bordo de K por:

$$\partial K = \{ \tau \in K : \tau \text{ é face de um simplexo } \sigma^k \in K, \text{ face esta que pertence a um único } (k+1)\text{-simplexo de } K \}.$$

19.14 Definição

Seja σ um simplexo.

Então $\overline{\sigma}$ é o complexo $\overline{\sigma} = \{ \tau : \tau < \sigma \}$.

9.15 Definição

Sejam K e L complexos.

Uma aplicação simplicial $f : K \to L$ é uma aplicação dos vértices de K nos vértices de L tal que se $v_0, v_1, \dots v_q$ são vértices de um simplexo de K então $f(v_0), f(v_1), \dots f(v_q)$ são vértices de um simplexo de L.

Se f é bijetora dizemos que é um isomorfismo entre K e L.

9.16 <u>Definição</u>

Sejam K e L dois complexos.

Dizemos que $g : |K| \longrightarrow |L|$ é <u>simplicial relativamente a K e L</u> se:

i) g restrita aos vertices de K é aplicação simplicial de K em L.

ii) Se $x \in v_0 v_1 \dots v_q \in K$ e $x = \sum_{i=0}^{q} \lambda^i v_i$ onde $\lambda^0, \lambda^1, \dots \lambda^q$ são as coordenadas baricêntricas de x então $g(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda^i g(v_i)$.

9.17 <u>Observações</u>

(1) $g : |K| \longrightarrow |L|$ fica determinada pelos seus valores sobre os vertices de K.
É uma aplicação contínua.

(2) Das definições 9.15 e 9.16 e da observação 9.17(1) resulta que a cada aplicação simplicial $f : K \longrightarrow L$ podemos associar naturalmente uma aplicação $|f| : |K| \longrightarrow |L|$ simplicial relativamente a K e L e reciprocamente.

(3) Se $f : K \longrightarrow L$ é um isomorfismo entre K e L então $|f| : |K| \longrightarrow |L|$ é um homeomorfismo.

(4) Se $f : K \rightarrow L$ e $g : L \rightarrow M$ são simpliciais então $g \circ f : K \longrightarrow M$ é simplicial e $|g \circ f| = |g| \circ |f|$.

9.18 Definição

Seja X um espaço topológico.

Uma triangulação de X é um par (K, φ) onde K é um complexo simplicial e $\varphi : |K| \to X$ é um homeomorfismo.

Dizemos que o complexo K triangula X.

Um poliedro é qualquer espaço topológico X que admite uma triangulação.

9.19 Definição

Seja X um poliedro e (K, φ) uma triangulação de X.

Definimos bordo ∂X de X por

$$\partial X = \varphi(|\partial K|).$$

9.20 Teorema (Invariança do bordo)

Se K e L são complexos simpliciais e $h : |K| \to |L|$ é um homeomorfismo então

$$h(|\partial K|) = |\partial L|.$$

Como consequência o bordo de um poliedro independe da triangulação usada para defini-lo.

9.21 Definição

Um complexo simplicial abstrato $\mathcal{K}$ é um conjunto de subconjuntos não vazios de um conjunto finito V tal que:

i) $\{v\} \in \mathcal{K}$, $\forall v \in V$.

ii) Se $S \in \mathcal{K}$ então todo subconjunto não vazio de S pertence a $\mathcal{K}$.

Os elementos de $\mathcal{K}$ são chamados simplexos. Se $S \in \mathcal{K}$ e S tem $q+1$ elementos, S é chamado um q-simplexo abstrato.

Os elementos de V são os vertices de $\mathcal{K}$ e identificamos $v \in V$ com o 0-simplexo $\{v\} \in \mathcal{K}$.

9.22 <u>Definição</u>

Seja $\mathcal{K}$ um complexo simplicial abstrato. Uma <u>realização geométrica</u> de $\mathcal{K}$ é um par (φ, K) onde K é um complexo simplicial e φ uma bijeção dos vértices de $\mathcal{K}$ nos vértices de K tal que $\{v_0, v_1, \dots v_q\}$ é um q-simplexo abstrato de $\mathcal{K}$ se e só se $\varphi(v_0)\varphi(v_1)\dots\varphi(v_q)$ é um q-simplexo de K.

9.23 <u>Teorema</u>

Todo complexo simplicial abstrato $\mathcal{K}$ <u>admite</u> a menos de isomorfismos uma <u>unica</u> realização geometrica.

Prova [1]

Seja V o conjunto dos vértices de $\mathcal{K}$ e suponhamos que V tem $n+1$ pontos.

Seja φ qualquer bijeção entre os pontos de V e vértices de um qualquer n-simplexo σ no $\mathbb{R}^n$.

Definamos um subcomplexo K de $\overline{\sigma}$ por

$$K = \{ \varphi(v_0)\varphi(v_1)\dots\varphi(v_q) : \{v_0, v_1, \dots v_q\} \in \mathcal{K} \}$$

É fácil verificarmos que (φ, K) é uma realização geométrica de $\mathcal{K}$.

Se (φ', K') é outra realização geométrica de $\mathcal{K}$ então $\varphi' \circ \varphi^{-1} : K \to K'$ é um isomorfismo. ∎

9.24 Teorema (Invariança do Domínio)

Se U e V são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ homeomorfos e U é aberto, então V é aberto.

REFERÊNCIAS

[1] AGOSTON, M.K - Algebraic Topology
Marcel Dekker, Inc - 1976

[2] LIMA, E.L. - Introdução as Variedades Diferenciáveis
Porto Alegre - 1960

[3] NICKERSON, H.K., SPENCER, D.C., STEENROD, N.E.
Advanced Calculus
D. Van Nostrand Company, Inc. - 1959

[4] SIKORSKI, R. Advanced Calculus
Polish Scientific Publishers - 1969

TÍTULOS PUBLICADOS

P-8101 - Luzia Kazuko Yoshida e Gabriel Richard Bitran
Um algoritmo para Problemas de Programação Vetorial com Variáveis Zero-Um - Fevereiro 1981

P-8102 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. III - Medidas em Espaços Topológicos - Março 1981

P-8103 - V.W. Setzer, R. Lapyda
Design of Data Models for the ADABAS System using the Entity-Relationship Approach - Abril 1981

P-8104 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. IV - Medida e Integração Vetoriais - Abril 1981

P-8105 - U.S.R. Murty
Projective Geometries and Their Truncations - Maio 1981

AP-8106 - V.W. Setzer, R. Lapyda
Projeto de Bancos de Dados, Usando Modelos Conceituais
Este relatorio Técnico complementa o RT-MAP-8103. Ambos substituem o RT-MAP-8004 ampliando os conceitos ali expostos. - Junho 1981

AP-8107 - Maria Angela Gurgel, Yoshiko Wakabayashi
Embedding of Trees - August 1981

AP-8108 - Ivan de Queiroz Barros
Mecânica Analítica Clássica - Outubro 1981

MAP-8109 - Ivan de Queiroz Barros
Equações Integrais de Fredholm no Espaço das Funções A-Uniformemente Contínuas - Novembro 1981

MAP-8110 - Ivan de Queiroz Barros
Dois Teoremas sobre Equações Integrais de Fredholm - Novembro 1981

MAP-8201 - Siang Wun Song
On a High-Performance VLSI Solution to Database Problems - Janeiro 1982

MAP-8202 - Maria Angela Gurgel, Yoshiko Wakabayashi
A Result on Hamilton-Connected Graphs - Junho 1982

MAP-8203 - Jörg Blatter, Larry Schumaker
The Set of Continuous Selections of a Metric Projection in C(X) - Outubro 1981

-MAP-8204 - Jörg Blatter, Larry Schumaker
Continuous Selections and Maximal Alternators for Spline Approximation - Dezembro 1981

-MAP-8205 - Arnaldo Mandel
Topology of Oriented Matroids - Junho 1982

-MAP-8206 - Erich J. Neuhold
Database Management Systems; A General Introduction - Novembro 1982

-MAP-8207 - Béla Bollobás
The Evolution of Random Graphs - Novembro 1982

TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-8208 - V.W. Setzer
Um Grafo Sintático para a Linguagem PL/M-80 - Novembro 1982

RT-MAP-8209 - Jayme Luiz Szwarcfiter
A Sufficient Condition for Hamilton Cycles - Novembro 1982

RT-MAP-8301 - W.M. Oliva
Stability of Morse-Smale Maps - Janeiro 1983

RT-MAP-8302 - Belá Bollobás, Istvan Simon
Repeated Random Insertion into a Priority Queue - Fevereiro 1983

RT-MAP-8303 - V.W. Setzer, P.C.D. Freitas e B.C.A. Cunha
Um Banco de Dados de Medicamentos - Julho 1983

RT-MAP-8304 - Ivan de Queiroz Barros
O Teorema de Stokes em Variedades Celuláveis - Julho 1983

RT-MAP-8305 - Arnaldo Mandel
The 1-Skeleton of Polytopes, oriented Matroids and some other lattices - - Julho 1983

RT-MAP-8306 - Arnaldo Mandel
Alguns Problemas de Enumeração em Geometria - Agosto 1983

RT-MAP-8307 - Siang Wun Song
Complexidade de E/S e Projetos Optimais de Dispositivos para Ordenação - - Agosto 1983

RT-MAP-8401-A - Dirceu Douglas Salvetti
Procedimentos para Cálculos com Splines
Parte A - Resumos Teoricos - Janeiro 1984
RT-MAP-8401-B
Parte B - Descrição de Procedimentos - Janeiro 1984
RT-MAP-8401-C
Parte C - Listagem de Testes - Janeiro 1984