

## Funções que preservam a métrica

Luis Flávio Soares Nunes

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Roseli Fernandez

Curso: Licenciatura em Matemática – IME-USP

O objetivo deste trabalho é estudar algumas propriedades e apresentar uma caracterização das funções  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , com  $f^{-1}(0) = \{0\}$ , e que satisfazem a seguinte propriedade:

- para todo espaço métrico  $(X, d)$ , tem-se que  $(X, f \circ d)$  é um espaço métrico.

$(X, d)$  é um espaço métrico se, e só se,  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  satisfaz:

$$M1: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2: d(x, y) = d(y, x), \text{ para todo } x, y \in X$$

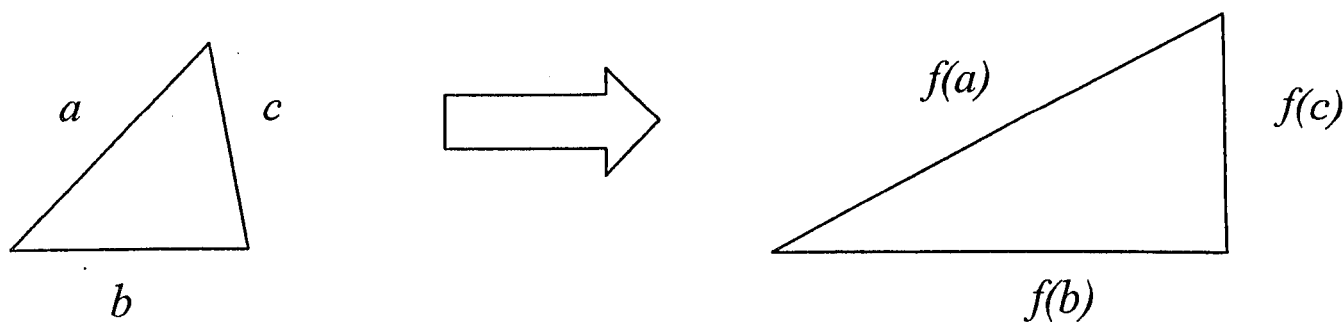
$$M3: d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \text{ para todo } x, y, z \in X$$

**Definição:** Seja  $A = \{ f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid f^{-1}(0) = \{0\} \}$ . Dizemos que uma função  $f \in A$  preserva a métrica se, e só se, para todo espaço métrico  $(X, d)$ , tem-se que  $(X, f \circ d)$  é um espaço métrico. Se as métricas  $f$  e  $f \circ d$  são métricas equivalentes, para toda métrica  $d$ , dizemos que  $f$  preserva fortemente a métrica.

### Exemplos:

- $f(x) = x$  preserva a métrica;
- $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$  preserva a métrica;
- $f(x) = x^2$  não preserva a métrica (de fato, se  $d$  é a métrica usual de  $\mathbb{R}$ , então  $9 = f \circ d(-1, 2) > 1 + 4 = f \circ d(-1, 0) + f \circ d(0, 2)$ ).

Notemos que, se  $f$  preserva a métrica e  $d$  é a métrica usual de  $\mathbb{R}^2$ , então dado um triângulo de lados  $a, b, c$  tem-se que  $f(a), f(b)$  e  $f(c)$  formam um triângulo de lados  $f(a), f(b)$  e  $f(c)$  não-degenerado,



assim, é natural procurar um resultado como o do Teorema 1. Antes porém apresentamos a seguinte definição.

**Definição:** Sejam  $a, b, c \geq 0$ . Dizemos que  $(a, b, c)$  é uma terna triangular se, e só se,  $a \leq b+c$ ,  $b \leq a+c$  e  $c \leq a+b$ .

É fácil verificar que,  $(a, b, c)$  é uma terna triangular se, e só se,  $|a-b| \leq c \leq a+b$ .

**Teorema 1:** Seja  $f \in A$ . São equivalentes:

- 1)  $f$  preserva a métrica;
- 2) se  $(a, b, c)$  é uma terna triangular, então  $(f(a), f(b), f(c))$  é uma terna triangular.

*Demonstração:* Provaremos, em primeiro lugar, que (1) implica (2). Para isto basta observar que, se  $(a, b, c)$  é uma terna triangular, e  $d$  a métrica usual do  $\mathbb{R}^2$ , então existem pontos  $u, v$  e  $w$  do  $\mathbb{R}^2$  tais que  $d(u, v) = a$ ,  $d(v, w) = b$ , e  $d(u, w) = c$ .

Para provarmos que (2) implica (1), basta notar que, se  $(X, d)$  é um espaço métrico, então, para todo  $x, y, z \in X$ , tem-se que  $(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$  é sempre uma terna triangular. ■

**Teorema 2:** Sejam  $f$  e  $g$  funções que preservam a métrica. Então:

- a)  $f \circ g$  preserva a métrica;
- b)  $a_1.f + a_2.g$ , com  $a_1 \geq 0$ ,  $a_2 \geq 0$  e  $a_1.a_2 > 0$ , preserva a métrica;
- c)  $\max \{f, g\}$  preserva a métrica.

*Demonstração:* Para obter (a) basta observar que, se  $f$  e  $g$  preservam a métrica, então  $g \circ d$  é uma métrica e  $(f \circ g) \circ d = f \circ (g \circ d)$  é uma métrica, para toda métrica  $d$ .

Para obter (b) e (c) basta usar o Teorema 1 e notar que

$$(a, b, c) \text{ terna triangular} \Rightarrow \begin{cases} f(a) \leq f(b) + f(c) \leq \max \{f, g\}(b) + \max \{f, g\}(c) \\ g(a) \leq g(b) + g(c) \leq \max \{f, g\}(b) + \max \{f, g\}(c) \end{cases}$$

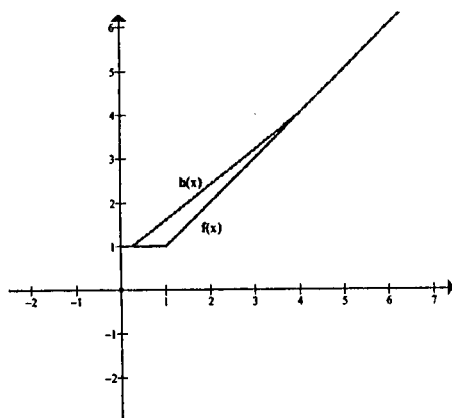
O Teorema 2 é facilmente generalizado para um número finito de funções.

**Exemplos:**

$$\text{Se } g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}, \text{ então as funções}$$

$$f(x) = \max\{x, g(x)\} = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases} ; \quad h(x) = \max\{f(x), 0.8x + 0.8g(x)\} = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 0.25 \\ 0.8 + 0.8x, & \text{se } 0.25 < x \leq 4 \\ x, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

preservam a métrica.



**Teorema 3:** Se  $f$  preserva a métrica, então  $f$  é subaditiva.

*Demonstração:* Como  $(a, b, a+b)$  é uma terna triangular, temos, pelo Teorema 1, que  $(f(a), f(b), f(a+b))$  é terna triangular, e assim  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ . ■

Não vale a recíproca do Teorema 3. De fato, a função  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  é subaditiva, mas não preserva a métrica, pois  $(10, 10, 1)$  é uma terna triangular e  $f(1) = \frac{1}{2} > f(10) + f(10) = \frac{10}{101} + \frac{10}{101}$ .

**Teorema 4:** Seja  $f \in A$ , subaditiva e não-decrescente. Então  $f$  preserva a métrica.

*Demonstração:* É suficiente usar o Teorema 1 e observar que, se  $(a, b, c)$  é uma terna triangular, então  $a \leq b+c$ , e assim, por  $f$  ser não-decrescente e subaditiva, temos que  $f(a) \leq f(b+c) \leq f(b) + f(c)$ . ■

Não vale a recíproca do Teorema 4. De fato, a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \text{ e } x \in \mathbb{Q} \\ 2, & \text{se } x > 0 \text{ e } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

preserva a métrica (Teorema 1) e não é não-decrescente.

**Teorema 5:** Seja  $f \in A$  e  $f$  côncava, isto é,  $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Então  $f$  preserva a métrica.

*Demonstração:* Provaremos que  $f$  é subaditiva e não-decrescente, e assim, pelo Teorema 4, teremos que  $f$  preserva a métrica.

Sejam  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Se  $x=y$  temos que  $f(x) = f\left(\frac{2x}{2} + \frac{0}{2}\right) \geq \frac{f(2x)}{2} + \frac{f(0)}{2} = \frac{f(x+x)}{2}$ , e assim  $f(x+x) \leq f(x) + f(x)$ .

Suponhamos  $x \neq y$  e, sem perda de generalidade, que  $\frac{x}{y} \in [0, 1]$ .

Notemos que

$$f(x) = f\left(y \frac{x}{y} + 0 \left(1 - \frac{x}{y}\right)\right) \geq \frac{x}{y} f(y) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) f(0) = \frac{x}{y} f(y)$$

isto é,

$$yf(x) - xf(y) \geq 0,$$

e que

$$f(y) = f\left(x \frac{x}{y} + (x+y) \left(1 - \frac{x}{y}\right)\right) \geq \frac{x}{y} f(x) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) f(x+y),$$

e assim

$$f(x+y) \leq \frac{yf(y) - xf(x)}{y-x} = f(x) + f(y) - \frac{yf(x) - xf(y)}{y-x} \leq f(x) + f(y),$$

o que prova que  $f$  é subaditiva.

Provaremos, a seguir, que  $f$  é não-decrescente.

Suponhamos, por absurdo, que existam  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,  $x < y$ , e que  $f(x) > f(y)$ .

Seja  $z = \frac{yf(x) - xf(y)}{f(x) - f(y)}$ . Então  $z > 0$  e,

$$f(y) = f\left(\frac{f(y)}{f(x)}x + \frac{f(x) - f(y)}{f(x)}z\right) \geq \frac{f(y)}{f(x)}f(x) + \frac{f(x) - f(y)}{f(x)}f(z) = f(y) + \frac{f(x) - f(y)}{f(x)}f(z)$$

e assim  $f(z) \leq 0$ , o que é um absurdo.

### Exemplos:

- $f(x) = x^r$ , com  $0 < r < 1$ , preserva a métrica;
- $f(x) = \log_a(1+x)$ , com  $a > 1$ , preserva a métrica.

Não vale a recíproca do Teorema 5. De fato,  $f(x)=\max\{x,\sqrt{x}\}$  preserva a métrica (Teorema 2) e não é côncava.

**Teorema 6:** Se  $f \in A$  e  $f$  preserva a métrica e é contínua em 0, então  $f$  é contínua em todo ponto.

*Demonstração:* Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  é contínua em 0, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x)-f(0)|=f(x)<\varepsilon$ , para todo  $0 \leq x < \delta$ . Seja  $u > 0$ . Se  $|v-u| < \delta$ , então  $f(|v-u|) < \varepsilon$ , e como  $f$  preserva a métrica, e  $(u, v, |v-u|)$  é terna triangular, temos, pelo Teorema 1, que  $(f(u), f(v), f(|v-u|))$  é uma terna triangular e portanto  $|f(v)-f(u)| \leq f(|v-u|) < \varepsilon$ . ■

**Teorema 7:** Se  $f \in A$  e existe  $r > 0$  tal que  $f(x) \in [r, 2r]$ , para todo  $x > 0$ , então  $f$  preserva a métrica.

*Demonstração:* É suficiente usar o Teorema 1 e notar que  $f(a) \leq 2r = r+r \leq f(b)+f(c)$ , para todo  $a, b, c > 0$ . ■

**Corolário 8:** Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se  $|g(x)| \leq M$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ g(x) + 3M, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

preserva a métrica.

*Demonstração.* Basta usar o Teorema 7 para  $r = 2M$ . ■

**Exemplos:**

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 3 + \cos(x), & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{preserva a métrica (Corolário 8 para } M = 1 \text{)};$$

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 1 + \frac{1}{1+x}, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{preserva a métrica (Teorema 7 para } r = 1 \text{)}.$$

**Teorema 9:** Seja  $f$  uma função que preserva a métrica. São verdadeiras as afirmações:

- 1) Para todo  $x_0 > 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \geq \varepsilon$ , para todo  $x \geq x_0$ .
- 2) Se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x > 0$  tal que  $f(x) < \varepsilon$ , então  $f$  é contínua no ponto 0.

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que (1) seja falso. Então é possível construir uma sequência  $(x_n)$  tal que, para todo  $n$ ,  $x_n \geq x_0$ , e a sequência  $(f(x_n))$  converge para 0.

Seja  $n$  tal que  $f(x_n) < f(x_0)/2$ . Então  $(x_n, x_n, x_0)$  é uma terna triangular, mas a terna  $(f(x_n), f(x_n), f(x_0))$  não o é, pois  $f(x_0) > f(x_n) + f(x_n)$ , o que é um absurdo (Teorema 1).

Provaremos, a seguir (2).

Seja  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $a > 0$  tal que  $f(a) < \varepsilon/2$ . Como  $(x, a, a)$  é uma terna triangular, para  $0 \leq x \leq 2a$ , temos que  $f(x) \leq f(a) + f(a) = 2f(a) < \varepsilon$ , para  $0 \leq x \leq 2a$ . Portanto, se  $\delta = 2a$  temos que,  $f(x) = |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ , para todo  $0 \leq x < \delta$ . Logo,  $f$  é contínua em 0. ■

**Corolário 10:** Seja  $f$  uma função que preserva a métrica e é descontínua em algum ponto. Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \geq \varepsilon$ , para todo  $x > 0$ .

*Demonstração:* Segue do item 2 do Teorema anterior e do fato que, se  $f$  preserva a métrica, e é descontínua em algum ponto, então pelo Teorema 6,  $f$  é descontínua em 0. ■

**Proposição 11:** Seja  $f$  uma função que preserva a métrica. São equivalentes:

- a)  $f$  é descontínua em 0;
- b)  $f \circ d$  é a métrica discreta, para toda métrica  $d$ .

*Demonstração.* Para provar que (a) implica (b) basta observar que existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para cada  $x \in X$  tem-se  $\{y \in X: f \circ d(x, y) < \varepsilon\} = \{x\}$  (Corolário 10).

Para concluir que (b) implica (a) é suficiente notar que, se  $d$  é métrica usual de  $\mathbb{R}$ , então o conjunto  $\{y \in \mathbb{R}: f \circ d(y, 0) < \frac{1}{2}\} = \{0\}$ , e assim,  $f(1/n) = f(d(1/n, 0)) > \frac{1}{2}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . ■

**Teorema 12:** Seja  $f$  uma função que preserva a métrica. São equivalentes:

- a)  $f$  preserva fortemente a métrica;
- b)  $f$  é contínua em 0.

*Demonstração.* Para obter que (a) implica (b) basta observar que a métrica usual de  $\mathbb{R}$  não é equivalente a métrica discreta, e usar a Proposição 11.

Para provar que (b) implica (a) é suficiente notar que, se  $r > 0$ , então, pelo Teorema 9, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\{y \in X: f \circ d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq \{y \in X: d(x, y) < r\}$ , e que, se  $s > 0$ , da continuidade de  $f$  em 0, existe  $\delta > 0$  tal que  $\{y \in X: d(x, y) < \delta\} \subseteq \{y \in X: f \circ d(x, y) < s\}$ . ■

## Bibliografia:

- [1] Corazza, P., Introduction to metric-preserving functions, *American Mathematical Monthly*, Vol 104, No. 4, April 1999, pp 309-23.
- [2] Dobos, J., Borsik, J., Functions whose composition with every metric is a metric, *Math. Slovaca* 31 (1981), pp 3-12.