

# Hélices Esféricas

Célia Mendes Carvalho Lopes

Orientadores: Plínio Amarante Quirino Simões

Sérgio Alves

Vera Lúcia Carrara Zanetic

Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

## Resumo:

Hélices são curvas de grande interesse no estudo de Geometria Diferencial. Elas são curvas cujas tangentes formam um ângulo constante  $\alpha$  com uma reta  $m$  fixa do espaço (seu eixo). Se  $\mathbf{a}$  for um vetor unitário na direção de  $m$ , então a hélice é definida por

$$(1) \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = \cos \alpha = \text{constante},$$

onde  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$  é o vetor tangente à hélice que vamos supor parametrizada pelo comprimento de arco.

Pode-se provar *uma condição necessária e suficiente para que uma curva, de curvatura e torção não nulas, seja uma hélice é que a razão entre elas seja constante.*

Outro ponto a se observar é que: *sendo  $k$  a curvatura de uma hélice e  $k_1$  a curvatura de sua projeção sobre um plano perpendicular a seu eixo, temos*

$$(2) \quad k_1 = k \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Outras curvas de nosso interesse são aquelas contidas em uma esfera, que são caracterizadas como sendo as curvas, de curvatura e torção não nulas, que satisfazem à equação diferencial

$$(3) \quad R^2 + (TR')^2 = r^2,$$

onde  $r$  indica o raio da esfera,  $R$  o inverso da curvatura e  $T$  o inverso da torção.

Como consequência dos resultados acima temos que as hélices esféricas satisfazem à equação  $r^2 = R^2 [1 + R'^2 \operatorname{tg}^2 \alpha]$ , que se transforma em

$$(4) \quad r^2 = R^2 + s^2 \cot^2 \alpha$$

mediante uma integração.

A projeção da hélice esférica sobre o plano do "equador" da esfera, que é um plano perpendicular a seu eixo, é uma curva plana cuja equação intrínseca é dada por

$$(5) R_1^2 + s_1^2 \cos^2 \alpha = r^2 \operatorname{sen}^4 \alpha,$$

onde  $s_1$  é o comprimento de arco da projeção e  $R_1$  é o inverso de sua curvatura  $k_1$ .

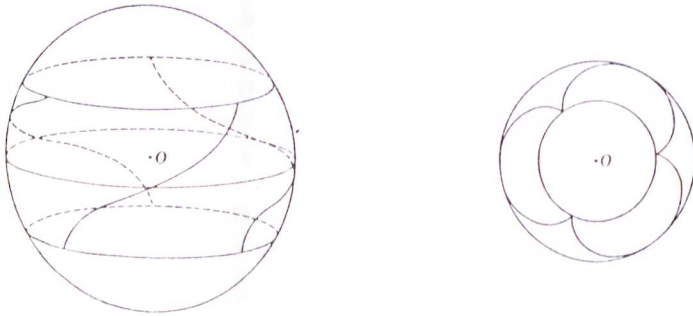
Uma epiciclóide é a curva plana descrita por um ponto de uma circunferência de raio  $b$  que rola externamente, sem deslizamento, sobre outra circunferência fixa de raio  $a$ . Ela é caracterizada pela equação

$$(6) \frac{s^2}{A^2} + \frac{R^2}{B^2} = 1,$$

onde  $A = \frac{4b(a+b)}{a}$ ,  $B = \frac{4b(a+b)}{a+2b}$ , e  $R, s$  têm o mesmo significado que em (4).

Comparando as equações (5) e (6) obtemos finalmente o seguinte resultado:

**Teorema** *A projeção de uma hélice esférica sobre um plano perpendicular a seu eixo é um arco de epiciclóide.*



#### Bibliografia:

- [1] Gray, A.—Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRC Press, Inc., 1993.
- [2] Struik, D.J. —Geometría Diferencial Clásica, Aguilar, 1973.