

**Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**  
**Deptº. de Engenharia de Estruturas e Fundações**

**BT/PEF/9110**

---

**Materiais Compatíveis com as  
Barras cujas Secções Normais  
Permanecem Planas**

---

**Nelson Achcar**



**Escola Politécnica - EPBC**



**31200053438**

82.5665

**São Paulo - 1992**

Achcar, Nelson

Materiais compatíveis com as barras cujas seções normais permanecem planas / N. Achcar. -- São Paulo : EPUSP, 1991.

13p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9110)

1. Elasticidade - Teoria I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. Título III. Série

CDU 539.31

# MATERIAIS COMPATÍVEIS COM AS BARRAS CUJAS SECÇÕES NORMAIS PERMANECEM PLANAS

Nelson Achcar

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

## Introdução.

As hipóteses clássicas sobre os movimentos das barras estipulam, além de pequenas deformações, que cada secção normal ao eixo na configuração de referência permanece plana e não deformada na configuração atual. Excetuada a hipótese de pequenas deformações, este mesmo modelo é utilizado por J. C. Simo em [3] para desenvolver uma teoria das barras no contexto da Elasticidade Finita (Sobre este artigo há o BT/PEF 9104, [7]).

Um aspecto não abordado por Simo é que as barras devem se constituir de *materiais elásticos com vínculo interno* já que, por hipótese, elas só são capazes de realizar deformações prescritas num determinado conjunto, aqui chamado *vínculo das barras*. Isso repercute nas equações constitutivas. A tensão de Cauchy se decompõe em duas parcelas

$$T = T_R + T_A \quad (1)$$

onde  $T_A$ , chamada *tensão ativa*, é função do gradiente  $F$  da deformação e  $T_R$ , chamada *tensão reativa*, não é função de  $F$  e é o que garante à barra manter-se na classe dos movimentos admissíveis, independentemente das ações externas impostas a ela. (Admitindo-se que  $T_R$  realiza trabalho nulo nesta classe de movimentos consegue-se determinar todas as  $T_R$  possíveis para um dado gradiente  $F$ ) Além disso, as transformações de simetria associadas à tensão ativa devem ser compatíveis com as simetrias do vínculo (por exemplo, não

se pode esperar que um material isotrópico seja compatível com as barras já que a barra é inextensível nas direções normais ao eixo e extensível na direção do eixo).

No presente artigo damos uma caracterização local do vínculo das barras. Apoiados nessa caracterização, calculamos seu grupo de simetria e mostramos que os únicos sólidos compatíveis com ele e que são encontráveis na realidade ([4], p. 85) são os transversalmente isotrópicos e alguns tipos das classes cristalográficas. Calculamos a tensão reativa determinada pelo vínculo das barras e determinamos a equação constitutiva de um tipo de material hiperelástico compatível com esse vínculo.

### Caracterização local do vínculo das barras

Consideremos uma barra prismática base  $A$  e eixo sobre o eixo-3 dada por

$$\mathcal{B} = \{(X_1 X_2 X_3) | (X_1 X_2 0) \in A \text{ e } 0 \leq X_3 \leq L\}$$

Cada deformação de  $\mathcal{B}$  é dada por duas curvas lisas,

$$\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad Q : [0, L] \rightarrow \text{Orth}^+$$

onde  $\text{Orth}^+$  é o conjunto das rotações de  $\mathbb{R}^3$ .  $\phi$  determina a posição do eixo de  $\mathcal{B}$  na configuração deformada e  $Q(S)$  a rotação que a secção  $X_3 = S$  de  $\mathcal{B}$  será submetida até alcançar sua posição na configuração atual.

Desse modo, as deformações admissíveis para  $\mathcal{B}$  são as  $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$f(X_1 X_2 X_3) = \phi(X_3) + Q(X_3)(X_1 e_1 + X_2 e_2) \quad (2)$$

onde  $(e_1 e_2 e_3)$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

O gradiente de  $f$  no ponto  $X = (X_1 X_2 X_3)$ ,  $F(X) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(X) \otimes e_i$ , fica:

$$F(X) = Q(X_3)(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + (\phi'(X_3) + Q'(X_3)(X_1 e_1 + X_2 e_2)) \otimes e_3 \quad (3)$$

Portanto, valem as igualdades

$$F(X)e_1 \cdot F(X)e_1 = 1, \quad F(X)e_2 \cdot F(X)e_2 = 1 \quad \text{e} \quad F(X)e_1 \cdot F(X)e_2 = 0 \quad (4)$$

para todo  $X \in \mathcal{B}$ . As igualdades acima informam que há inextensibilidade nas direções de  $e_1$  e de  $e_2$  e que não há distorção no ângulo reto formado por  $e_1$  e  $e_2$ . Isto em todo ponto  $X \in \mathcal{B}$ .

Afirmamos que se vale (4) para todo  $X \in \mathcal{B}$ , então  $f$  é dada por (2).

De fato, a condição (4) significa que em cada ponto  $X \in \mathcal{B}$ ,  $(F(X)e_1, F(X)e_2)$  é uma base ortonormal do sub-espaço gerado por  $F(X)e_1$  e  $F(X)e_2$ . Logo, a restrição de  $F(X)$  ao sub-espaço gerado por  $e_1$  e  $e_2$ ,  $F(X)|_{[e_1, e_2]}$ <sup>(\*)</sup>, é ortogonal.

Consideremos uma curva  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{B}$  cuja imagem esteja no plano  $X_3 = \text{constante} = K$ . Como  $\dot{c}(t)$  está no plano  $[e_1, e_2]$ , então

$$\|F(c(t))\dot{c}(t)\| = \|F(c(t))|_{[e_1, e_2]}\dot{c}(t)\| = \|\dot{c}(t)\|$$

Então, o comprimento da curva deformada, indicado por  $l(f \circ c)$ , é

$$l(f \circ c) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} f \circ c(t) \right\| dt = \int_a^b \|F(c(t))\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = l(c)$$

Ou seja, a restrição de  $f$  ao plano  $X_3 = \text{constante} = k$  é uma deformação rígida. Logo,  $f|_{X_3=k}$  é restrição de alguma deformação rígida  $\tilde{f}_{X_3}$  definida em todo  $\mathcal{B}$  ( $\tilde{f}_{X_3} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) que, como toda deformação rígida, pode ser escrita na forma

$$\tilde{f}_{X_3}(X) = \tilde{f}_{X_3}(\bar{X}) + Q_{X_3}(X - \bar{X})$$

onde  $\bar{X}$  é o centróide da secção  $X_3 = k$  considerada. Restringida  $\tilde{f}_{X_3}$  ao plano  $X_3 = k$  temos

$$f(X) = \tilde{f}_{X_3}(\bar{X}) + Q_{X_3}(X - \bar{X}).$$

---

(\*)  $\varphi|_D$  indica a restrição de  $\varphi$  a  $D$ , e dados  $v_1, \dots, v_n$  num espaço vetorial  $V$ ,  $[v_1, \dots, v_n]$  indica o subespaço de  $V$  gerado por  $v_1, \dots, v_n$ .

Portanto, sendo  $\phi(X_3) = \tilde{f}_{X_3}(\bar{X})$  e  $Q(X_3) = Q_{X_3}$ , temos (2). ■

Chamaremos de *vínculo das barras* o conjunto

$$Vb = \{F \in \text{Lin}^+ | Fe_i \cdot Fe_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2\} \quad (5)$$

onde  $\text{Lin}^+$  é o conjunto das transformações lineares de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$  (*tensores* de segunda ordem) de determinante estritamente positivo.

A condição que define  $Vb$  é equivalente a  $F^T Fe_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ . Por isso, definimos o *vínculo de Cauchy-Green das barras* por

$$Cb = \{C \in \text{Psym} | Ce_i \cdot e_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2\} \quad (6)$$

onde  $\text{Psym}$  é o conjunto dos tensores simétricos positivos definidos.

Da equivalência entre (2) e (4) decorre que

$f$  é uma deformação da barra  $B$ ,  
se, e somente se,

$$F(X) \in Vb \quad \forall X \in B,$$

se, e somente se,

$$C(X) \in Cb \quad \forall X \in B$$

onde  $F(X)$  é o gradiente de  $f$  em  $X$  e  $C(X) = F^T(X)F(X)$ .

Os conceitos apresentados acima são casos particulares das seguintes definições:

**Definição.** Uma variedade conexa  $Vb \subset \text{Lin}^+$  é um *vínculo* se:

a)  $1 \in V$

b)  $F \in V$  e  $Q \in \text{Orth}^+ \Rightarrow QF \in V$

(A cláusula a) significa que a configuração de referência é uma configuração admissível

e b) expressa a objetividade do vínculo) [1]

**Definição.** O vínculo de Cauchy-Green associado a  $V$  é a variedade de  $\text{Psym}$  dada por

$$C = \{C \in \text{Psym} \mid C = F^T F, F \in V\}$$

Diz-se que  $V$  é um vínculo para um corpo numa configuração  $B$  no ponto  $X \in B$  se  $f$  é uma deformação de  $B \Leftrightarrow F(X) \in V$ .

### O grupo de simetria vincular de $V_b$

Dado um vínculo  $V$  chama-se *transformação de simetria de  $V$*  a toda  $H \in V$  que verifica

$$F \in V \Rightarrow FH \in V \quad (7)$$

ou, equivalentemente,

$$C \in C \Rightarrow H^T C H \in C \quad (8)$$

Dizer que  $H$  é uma transformação de simetria significa, portanto, que  $H$  preserva o vínculo  $V$ .

O conjunto das  $H$  que verificam (7) (ou (8)) é um grupo e é chamado *grupo de simetria do vínculo  $V$* , e é indicado por  $G_V$ .

**Proposição.**

$$G_{V_b} = \{H \in \text{Lin}^+ \mid H e_1 = a e_1 + b e_2, H e_2 = x e_1 + y e_2, \\ a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 1, ax + by = 0\} \quad (9)$$

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{H}$  o conjunto do lado direito da igualdade (9) e sejam  $C \in C_b$  e  $H \in \mathcal{H}$ . Então

$$\begin{aligned} H^T C H e_1 \cdot e_1 &= C H e_1 \cdot H e_1 = (a C e_1 + b C e_2) \cdot (a e_1 + b e_2) = \\ &= a^2 C e_1 \cdot e_1 + b^2 C e_2 \cdot e_2 + 2ab C e_1 \cdot e_2 = \\ &= a^2 + b^2 = 1. \end{aligned}$$

De modo análogo se verifica que  $H^T C H e_2 \cdot e_2 = 1$  e que  $H^T C H e_1 \cdot e_2 = 0$  o que permite concluir que  $H^T C H \in Cb$ . Portanto,

$$\mathcal{H} \subset G_{Vb} . \quad (\alpha)$$

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  em  $Cb$  dadas por

$$C_1 = 1 \quad \text{e} \quad C_2 = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + 2e_3 \otimes e_3 .$$

Seja  $H \in G_{Vb}$  tal que

$$\begin{aligned} H e_1 &= a e_1 + b e_2 + c e_3 \\ H e_2 &= x e_1 + y e_2 + z e_3 \end{aligned} \quad (\beta)$$

De  $H^T C_1 H \in Cb$  e  $H^T C_2 H \in Cb$  decorre que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 + 2c^2 = 1$$

Logo,

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{e} \quad c = 0 \quad (\gamma)$$

De modo análogo,

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = 0 \quad (\delta)$$

De  $H^T C_1 H e_1 \cdot e_2 = 0$  concluímos que

$$a x + b y = 0 \quad (\epsilon)$$

De  $(\beta), (\gamma), (\delta), (\epsilon)$ , concluímos que

$$G_{Vb} \subset \mathcal{H} \quad (\eta)$$

De  $(\alpha)$  e  $(\eta)$  segue-se  $(9)^{(*)}$ . ■

---

  
 $(*)$  Procedimentos mais rápidos e elegantes para calcular grupos de simetria vincular serão apresentados num próximo artigo de Boulos, P. e Achcar, N. sobre aspectos geométricos da teoria dos vínculos.

Da proposição anterior concluímos que  $H \in \text{Lin}^+$  é uma transformação de simetria de  $Vb$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} [He_1, He_2] &= [e_1, e_2] \quad \text{e} \\ H|_{[e_1, e_2]} &\text{é ortogonal} \end{aligned} \quad (10)$$

### Sólidos compatíveis com o vínculo $Vb$

Seja  $V$  um vínculo e  $\hat{T}_A$  a função resposta para a tensão ativa  $T_A$ , ou seja,  $T_A = \hat{T}_A(F)$ .  $\hat{T}_A$  tem domínio  $V$  e contradomínio o espaço dos tensores simétricos  $\text{Sym}$ . O grupo de simetria associado a  $\hat{T}_A$  é o conjunto das  $H \in V \cap \text{Unim}$  ( $\text{Unim}$  = conjunto dos tensores de determinante 1) tais que

$$\hat{T}_A(FH) = \hat{T}_A(F) \quad \forall F \in V \quad (11)$$

Designaremos este grupo por  $G_{\hat{T}_A}$ . Seguindo as definições de Noll e Truesdell [4] diremos que o corpo é sólido se

$$G_{\hat{T}_A} \subset \text{Orth}^+ \quad (12)$$

Diz-se que a função resposta  $\hat{T}_A$  é compatível com o vínculo  $V$  se

$$G_{\hat{T}_A} \subset G_V, \quad (13)$$

ou seja, se as simetrias de  $\hat{T}_A$  preservarem o vínculo  $V$ . [1]

Se valer (13), também diremos que o material cuja equação constitutiva é dada por (1), onde  $T_A = \hat{T}_A(F)$ , é um material compatível com o vínculo  $V$ , ou ainda, que é um material adequado ao vínculo  $V$ .

Pretendemos encontrar os materiais sólidos compatíveis com o vínculo  $Vb$ . De acordo com (13), (12), e (10) é preciso que  $G_{\hat{T}_A}$  seja constituído por rotações  $Q$  tais que

$$Qe_3 = \pm e_3 \quad (14)$$

Portanto, entre os materiais sólidos encontráveis na realidade somente os seguintes são compatíveis com o vínculo das barras (obtidos por inspeção da tabela da p. 83 de [4])

*Os transversalmente isotrópicos  
e todos os sistemas cristalográficos,  
exceto três classes do sistema cúbico.*

### A tensão reativa para o vínculo $V_b$

Admitindo-se que a tensão reativa  $T_R$  é simétrica e que realiza trabalho nulo nos movimentos compatíveis com um vínculo  $V$ , pode-se provar que, para cada  $F \in V$ , o conjunto das possíveis  $T_R$ , chamado espaço das reações em  $F$ , é o seguinte,

$$\mathcal{R}(F) = F(\mathcal{J}_C \mathcal{C})^\perp F^\top \quad (15)$$

onde  $C = F^\top F$ .  $\mathcal{J}_C \mathcal{C}$  é o espaço tangente a  $\mathcal{C}$  em  $C$  e  $(\mathcal{J}_C \mathcal{C})^\perp$  é o espaço ortogonal a  $\mathcal{J}_C \mathcal{C}$  em  $\text{Sym}^{(*)}$ .

Voltando às barras, sejam

$$\mathcal{C}_1 = \{C \in \text{Psym} | C e_1 \cdot e_1 = 1\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{C \in \text{Psym} | C e_2 \cdot e_2 = 1\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{C \in \text{Psym} | C e_1 \cdot e_2 = 0\}$$

Decorre de (6) que

$$\mathcal{C}_b = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \quad (16)$$

Logo, como  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  são duas a duas transversais

$$\mathcal{J}_C \mathcal{C}_b = \mathcal{J}_C \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{J}_C \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{J}_C \mathcal{C}_3 \quad (17)$$

(\*) A fórmula (15), conquanto original, é equivalente à fórmula 3.8 de [2]. Uma demonstração de (15) aparecerá no já citado futuro artigo de Boulos, P. e Achcar, N.

Portanto,

$$(\mathcal{J}_C \mathcal{C}b)^\perp = (\mathcal{J}_C \mathcal{C}_1)^\perp + (\mathcal{J}_C \mathcal{C}_2)^\perp + (\mathcal{J}_C \mathcal{C}_3)^\perp \quad (18)$$

Vamos calcular os espaços ortogonais acima. Seja  $t \mapsto C(t)$  uma curva em  $\mathcal{C}_1$  passando por  $C$ . Então

$$C(t)e_1 \cdot e_1 = 1$$

ou, usando a identidade  $Cu \cdot v = \text{tr}(Cu \otimes v) = C : u \otimes v$ ,

$$C(t) : e_1 \otimes e_1 = 1$$

Derivando em relação a  $t$  chegamos a

$$\dot{C}(t) : e_1 \otimes e_1 = 0$$

Portanto,

$$(\mathcal{J}_C \mathcal{C}_1)^\perp = [e_1 \otimes e_2] \quad (19)$$

De modo análogo verifica-se que

$$(\mathcal{J}_C \mathcal{C}_2)^\perp = [e_2 \otimes e_2] \quad \text{e} \quad (20)$$

$$(\mathcal{J}_C \mathcal{C}_3)^\perp = [e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1]$$

De (15), (18), (19) e (20) concluímos que

$$\mathcal{R}(F) = \{\alpha F e_1 \otimes F e_1 + \beta F e_2 \otimes F e_2 + \gamma(F e_1 \otimes F e_2 + F e_2 \otimes F e_1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \quad (21)$$

**Equações constitutivas de um tipo de material sólido hiperelástico compátivel com o vínculo das barras**

Diremos que um corpo sujeito a um vínculo  $V$  é hiperelástico se existir  $W : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada função densidade de energia de deformação tal que

$$\hat{T}_A(F) = \frac{2}{\det F} F \frac{\partial W}{\partial C} F^\perp \quad (22)$$

onde  $\frac{\partial W}{\partial C}$  é o gradiente da função  $W = W(C)$ , ou seja, é o tensor simétrico cujas componentes na base  $(e_1 e_2 e_3)$  são dadas por

$$\left(\frac{\partial W}{\partial C}\right)_{ii} = \frac{\partial W}{\partial C_{ii}} \quad (23)$$

e, para  $i \neq j$ ,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial C}\right)_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad [6]$$

A título de exemplo vamos determinar a equação constitutiva de um tipo de sólido hiperelástico da classe cristalográfica dos sistemas rômnicos adequado a constituir um barra.

Para os sólidos desse sistema, o grupo de simetria da função resposta  $\hat{T}_A$  é

$$G_{\hat{T}_A} = \{1, R_{e_1}^\pi, R_{e_2}^\pi, R_{e_3}^\pi\} \quad (24)$$

onde  $R_{e_i}^\pi$  é a rotação de eixo  $e_i$  e ângulo  $\pi$  ([4] p. 83). Supondo  $W = W(C)$  um função polinomial nas componentes de  $C$  em relação à base  $(e_1 e_2 e_3)$ , Smith e Riulin [5] provaram que  $W$  deve ser um polinômio nos seguintes invariantes sob o grupo (24)<sup>(\*)</sup>:

$$I_1 = C_{11}, \quad I_2 = C_{22}, \quad I_3 = C_{33}, \quad I_4 = C_{23}^2, \quad I_5 = C_{31}^2, \quad I_6 = C_{12}^2, \quad I_7 = C_{12}C_{13}C_{23}$$

cujas expressões intrínsecas são:

$$I_1 = C e_1 \cdot e_1, \quad I_2 = C e_2 \cdot e_2, \quad I_3 = C e_3 \cdot e_3, \quad I_4 = (C e_3 \cdot e_2)^2,$$

$$I_5 = (C e_1 \cdot e_3)^2, \quad I_6 = (C e_2 \cdot e_1)^2, \quad I_7 = C e_2 \cdot e_1 C e_3 \cdot e_1 C e_3 \cdot e_2$$

Como  $W(C) = \hat{W}(I_1, \dots, I_7)$ ,  $\hat{W}$  polinômio, então

$$\frac{\partial W}{\partial C} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C} \quad (25)$$

<sup>(\*)</sup>  $I : \text{Psym} \rightarrow \mathbb{R}$  é um invariante sob o grupo  $G \subset \text{Orth}^+$  se  $I(QCQ^T) = I(C)$  para todo  $C \in \text{Psym}$  e todo  $Q \in G$ .

Calculando  $\frac{\partial I_i}{\partial C}$  para  $i = 1, \dots, 7$  temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_1}{\partial C} &= e_1 \otimes e_1, & \frac{\partial I_2}{\partial C} &= e_2 \otimes e_2, & \frac{\partial I_3}{\partial C} &= e_3 \otimes e_3, \\
 \frac{\partial I_4}{\partial C} &= (C e_2 \cdot e_3)(e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3) \\
 \frac{\partial I_5}{\partial C} &= (C e_3 \cdot e_1)(e_3 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_3) \\
 \frac{\partial I_6}{\partial C} &= (C e_2 \cdot e_1)(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \\
 \frac{\partial I_7}{\partial C} &= (C e_3 \cdot e_2)(C e_3 \cdot e_1) \frac{e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2}{2} + \\
 &\quad (C e_1 \cdot e_2)(C e_3 \cdot e_1) \frac{e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3}{2} + \\
 &\quad (C e_1 \cdot e_2)(C e_3 \cdot e_2) \frac{e_3 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_3}{2}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Retomando as deformações dadas em (2), temos

$$F = F(X) = Q(X_3)(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + v \otimes e_3$$

onde  $v = \phi'(X_3) + Q'(X_3)(X_1 e_1 + X_2 e_2)$ . Logo,

$$C = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + \|v\|^2 e_3 \otimes e_3 + (Q e_1 \cdot v)(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) + (Q e_2 \cdot v)(e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3) \tag{27}$$

onde usamos  $C$  no lugar de  $C(X)$  e  $Q$  no lugar de  $Q(X_3)$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 C e_2 \cdot e_3 &= Q e_2 \cdot v \\
 C e_3 \cdot e_1 &= Q e_1 \cdot v \\
 C e_2 \cdot e_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

Levando (28) em (26) e o resultado em (25), segue-se que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial C} &= W_1 e_1 \otimes e_1 + W_2 e_2 \otimes e_2 + W_3 e_3 \otimes e_3 + W_4 (Q e_2 \cdot v)(e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3) + \\
 &\quad + W_5 (Q e_1 \cdot v)(e_3 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_3) + W_7 (Q e_2 \cdot v)(Q e_1 \cdot v) \frac{e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2}{2}
 \end{aligned} \tag{29}$$

onde  $W_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$

Levando (29) em (22) vem:

$$\begin{aligned} \hat{T}_A(F) = & \frac{2}{\det F} (W_1 F e_1 \otimes F e_1 + W_2 F e_2 \otimes F e_2 + W_3 F e_3 \otimes F e_3 + \\ & W_4 Q e_2 \cdot v (F e_3 \otimes F e_2 + F e_2 \otimes F e_3) + \\ & W_5 Q e_1 \cdot v (F e_3 \otimes F e_1 + F e_1 \otimes F e_3) + \\ & W_7 (Q e_2 \cdot v) (Q e_1 \cdot v) \frac{(F e_2 \otimes F e_1 + F e_1 \otimes F e_2)}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

De (1), (30) e (21), concluímos que

$$\begin{aligned} T = & \alpha F e_1 \otimes F e_1 + \beta F e_2 \otimes F e_2 + \gamma (F e_1 \otimes F e_2 + F e_2 \otimes F e_1) + \\ & \frac{2}{\det F} (W_3 F e_3 \otimes F e_3 + W_4 Q e_2 \cdot v (F e_3 \otimes F e_2 + F e_2 \otimes F e_3) + \\ & W_5 Q e_1 \cdot v (F e_3 \otimes F e_1 + F e_1 \otimes F e_3)) \end{aligned} \quad (31)$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Em (31) usamos o fato de que as parcelas de  $T_R$  absorvem análogas de  $T_A$ .

## Referências

1. P. Podio - Guidugli e M. Vianello, Constraint Manifolds for Isotropic Solids. Arch. Rational Mech. Anal. 105, 1989.
2. H. Cohen e C.C. Wang, On the Response and Symmetry of Elastic Materials with Internal Constraints. Arch. Rational Mech. Anal. 99, 1987.
3. J.C. Simo, A Finite Strain Beam Formulation. The Three Dimensional Dynamic Problem. Part 1. Computer Methods in Applied Mech. and Eng. 49, 1985.
4. Truesdell, C. e Noll, W. The Non Linear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
5. G.F. Smith e R.S. Rivlin. The Strain-Energy Function for Anisotropic Elastic Materials. Trans. Amer. Math. Soc. 88, 1958.
6. N. Achcar, Corpos Transversalmente Isotrópicos Não Ortotrópicos, Tese de Doutorado, EPUSP, 1990.

7. P.M. Pimenta e T. Yogo, Análise não linear de Pórticos Espaciais. Parte I: Teoria e Método dos Elementos Finitos, BT/PEF - 9104, 1991.

