UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN 0103-2585

GEOMETRIAS

ANTONIO CONDE

Nº 88

NOTAS DIDÁTICAS

São Carlos – SP

Fev./2018

GEOMETRIAS

A. CONDE

Estas notas apresentam geometrias planas e usam para tal, o plano identificado com o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Tomamos a extenção do plano $\mathbb{C}$ juntando o ponto no infinito e valorizamos as transformações de Moebius. A abordagem adotada não é axiomática como a de Euclides e sim a de Felix Klein segundo a do programa de Erlangen.

1. Números Complexos

1.1. Lembremos as propriedades que caracterizam o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. (A) Adição:

A1. Associativa : $x+(y+z)=(x+y)+z$
A2. Elemento Neutro 0 : $x+0=0+x=x$
A3. Comutativa : $x+y=y+x$
A4. Elemento Oposto : $x+(-x)=(-x)+x=0$

(M) Multiplicação:

M1. Associativa : $x(yz)=(xy)z$
M2. Elemento Neutro 1 : $1.x=x.1=x$
M3. Comutativa : $xy=yx$
M4. Elemento inverso x^{-1} : $x.x^{-1}=x^{-1}.x=1$, pra $x\neq 0$

(D) Distributiva: $x(y+z)=xy+xz$

Um conjunto com duas operações $+$ e . que satisfazem as propriedades acima recebe o nome de corpo. Os números reais formam então um corpo $\mathbb{R}$. Estes tem entretanto propriedades extras envolvendo a noção de ordem.

(O) Ordem: $\mathbb{R}$ tem uma relação de ordem total que verifica

O1. $x\leq y$ e $x'\leqslant y' \Rightarrow x+x'\leq y+y'$
O2. $x\leq y$ e $0<z \Rightarrow xz\leq yz$

(C) Completitude

C. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente admite supremo.

O corpo ordenado dos reais $\mathbb{R}$ é caracterizado pelas propriedades acima, isto é, qualquer corpo ordenado completo é ordenadamente isomorfo a $\mathbb{R}$.

Exercicio: Prove que o corpo ordenado dos reais admite um único automorfismo que é portanto a identidade.

1.2. A equação $x^2+1=0$ não tem solução real, assim como outras equações do segundo grau. A tentativa de se ampliar o corpo dos reais a um sistema "numérico" onde tais equações tenham soluções, levou à criação dos números complexos. Cardano, no século XVI, já havia notado esta possibilidade, introduzindo o "número imaginário" $\sqrt{-1}$ que se costuma denotar por: i. O nome dado a tal número mostra a estranheza com que tal descoberta foi sentida. O desenvolvimento dos números complexos teve um impulso no século $XVIII$ com os trabalhos de Euler, mas só no séc

XIX se atingiu a conceituação adequada atravéz de Gauss, Hamilton e outros. Daí então ficou claro que os números complexos são tão concretos quanto quaisquer outros; tratando-se apenas de uma questão de interpretação no "corpo da matemática". Os nomes de imaginários ou complexos são mantidos por uma razão histórica, mas são impróprios.

1.3. **Os Complexos $\mathbb{C}$.** O conjunto dos números complexos que denotamos por $\mathbb{C}$, deve contituir um corpo que contém os reais $\mathbb{R}$, permitir que a equação $x^2 + 1 = 0$ tenha solução em $\mathbb{C}$ e que seja o mínimo necessário para tal.

1.4. $\mathbb{M}$**(2).** Denotamos por $\mathbb{M}(2)$ o conjunto das matrizes reais 2×2, onde temos as operações de adição e multiplicação de matrizes $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Sabemos que $\mathbb{M}(2)$, com tais operações, tem propriedades semelhantes as dos números reais. No caso da adição (A) tem as mesmas. Para a multiplicação falham a comutativa M3. e a existência de inverso M4.. Vale também a distributiva (D).

A correspondência h que leva o número real x na matriz diagonal, como abaixo:

$$h : x \rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

preserva as operações de adição e multiplicação

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$
$$h(xy) = h(x)h(y)$$

e é biunívoca. Isto nos permite identificar o número real x com a matriz $h(x)$ e temos então: $\mathbb{R} \subset \mathbb{M}(2)$.

Como observamos, $\mathbb{M}(2)$ não satisfaz todas as propriedades de corpo (A), (M) e (D) como queríamos; porém contem os reais e tem solução para a equação $x^2 + 1 = 0$, isto é, interpretando tal equação em $\mathbb{M}(2)$, 1 é a matriz identidade, 0 é a matriz nula e podemos tomar para a solução a matriz:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que satisfaz a equação, pois

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e portanto $x^2 + 1 = 0$.

Temos parte do que queríamos pois $\mathbb{M}(2)$ não é corpo. Podemos ver entretanto o que ocorre se nos restringirmos ao mínimo necessário, isto é, podemos considerar um subconjunto de $\mathbb{M}(2)$ que comtenha $\mathbb{R}$, a solução acima da equação $x^2 + 1 = 0$ e onde possamos operar com a adição e multiplicação. Tomemos então todas as combinações lineares reais dos elementos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Designemos tal conjunto por

$\mathbb{C} = \{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \}$

Observemos que $\mathbb{C}$ contem os reais que são representados pelas matrizes com $y = 0$ e contem a matriz solução da equação $x^2 + 1 = 0$.

Exercício: Verifique que $\mathbb{C}$, com tais operações é um corpo, isto é, a soma e o produto de dois elementos de $\mathbb{C}$ estão em $\mathbb{C}$, e valem as propriedades (A), (M) e (D) anteriores, sendo que

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.

Definição 1. *O conjunto apresentado acima $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos.*

Uma matriz $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}$ fica determinada pelos números reais x e y. Podemos então estabelecer a correspondência:

$$c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$c \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = (x, y)$$

onde o $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados de números reais, com a soma vetorial conhecida:

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

A correspondência c é evidentemente biunívoca, sobre e preserva a adição. Como existe uma multiplicação em $\mathbb{C}$, podemos transportá-la a $\mathbb{R}^2$ via c. Vejamos como fica

$$c \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = (x, y)$$

$$c \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = (x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -xy' - yx' \\ yx' + xy' & -yy' + xx' \end{pmatrix}$$

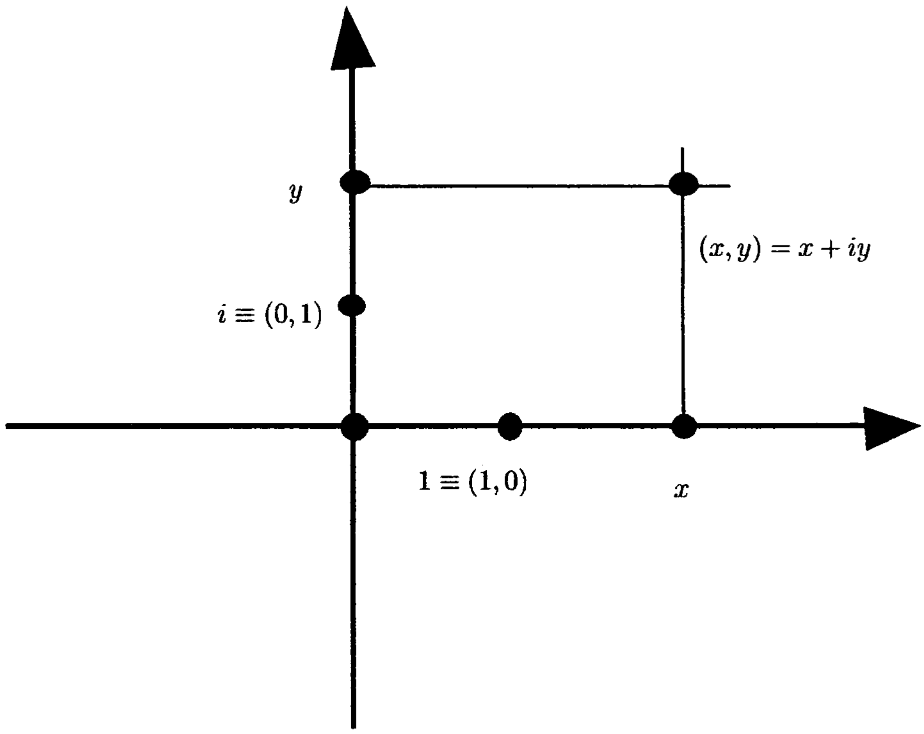
$$c(\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}) = (xx' - yy', yx' + xy')$$

Portanto a operação de multiplicação tranportada para $\mathbb{R}^2$ fica assim:

$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', y'x + xy')$

Com as operaçòes de adição e multiplicação acima em $\mathbb{R}^2$, a correspondência c passa a ser um isomorfismo de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e consequentemente, todas as propriedades verificadas em $\mathbb{C}$ relativas à adição e multiplicação valem também em $\mathbb{R}^2$. Em outras palavras, temos $\mathbb{R}^2$ como uma outra representação dos números complexos. O zero é representado pela origem $(0, 0)$, a unidade multiplicativa é representada por $(1, 0)$ e a solução que esolhemos para a equação $x^2 + 1 = 0$ é dada por $(0, 1)$. Usaremos para esta notação: $(0, 1) = i$.

O número real x passa a corresponder a $(x, 0)$



Podemos escrever um ponto genérico (x, y) assim:
$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, com $(1,0) = 1$ e $(0,1) = i$. Temos
$(x,y) = x + yi$ e com a multiplicação introduzida temos
$i^2 = -1$ e
$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$

Como $(-i)^2 = i^2 = -1$ temos que as duas soluçòes de $x^2 + 1 = 0$ são exatamente i e $-i$.

Vamos fixar para o corpo dos números complexos esta última representação, ou seja temos outra definição para o corpo dos números complexos, isomorfo ao anterior.

1.6.

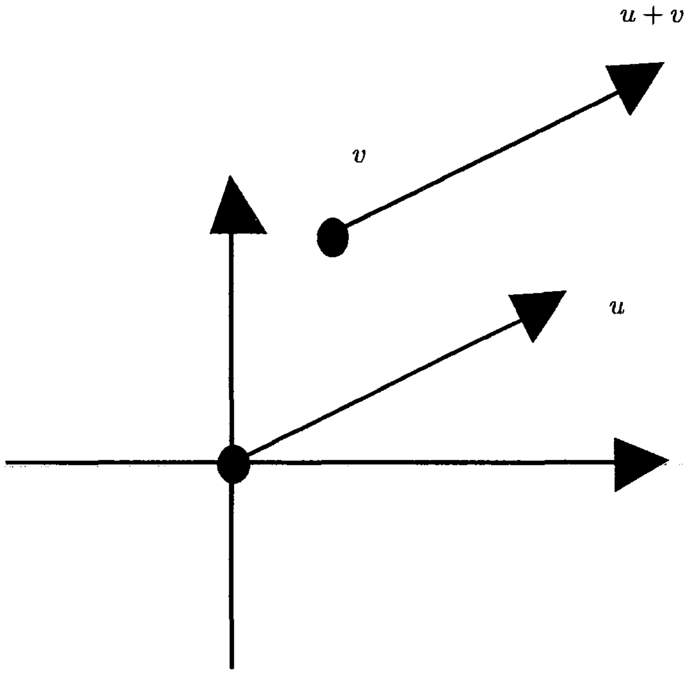
Definição 2. *O corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ tem para conjunto o plano real $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ e para operações, a soma vetorial e a multiplicação dada por*
$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$
onde $i = (0,1)$ e $1 = (1,0)$ é a unidade multiplicativa.

1.7.

Observação 1. *Embora trabalhemos com esta definição preferencialmetne, sempre que útil usaremos o modelo matricial. Portanto o leitor deve se familiarizar com ambos.*

1.8. Vamos dar uma interpretação geométrica às operações de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

A soma é feita pela regra do paralelogramo e corresponde as translações:
$t_u(v) = v + u$
é a translação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ pelo vetor u



Vamos olhar a multiplicação da mesma forma, isto é, fixemos um número complexo: $u = a + bi$ e examinaremos a transformação

$$L_u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$L_u(v) = u.v$$
$$v = x + yi$$

L_u é linear sobre os reais, pois preserva a soma e permite por escalares em evidência, ou seja:

$L_u(v + v') = u(v + v') = uv + uv' = L_u(v) + L_u(v')$

$L_u(\lambda v) = u(\lambda v) = \lambda(uv) = \lambda L_u(v)$

Portanto L_u é representada por uma matriz em relação à base canonica de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ que é

$1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$

Dai temos

$L_u(1) = u1 = u = a + bi$

$L_u(i) = ui = (a + bi)i = -b + ai$

e sua matriz é então

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Observe que a matriz da multiplicação por u, L_u é exatamente a matriz que representa $u = a + bi$ quando interpretamos $\mathbb{C} \subset \mathbb{M}(2)$ **(1.5)**

Portanto multiplicar $v = x + yi$ por $u = a + bi$ é o mesmo que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

Como de fato ocorre na forma:
$(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (bx + ay)i$

1.9. A transformação de $\mathbb{C}$ dada pela multiplicação por u, L_u, se decompõe no produto de uma rotação por uma homotetia. De fato, seja a matriz de L_u

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

se $a = b = 0$ então a rotação pode ser qualquer e a homotetia nula;
se a ou b não se anula então $a^2 + b^2 \neq 0$ e podemos escrever

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a/\lambda & -b/\lambda \\ b/\lambda & a/\lambda \end{pmatrix}$$

com $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $(a/\lambda)^2 + (b/\lambda)^2 = (a^2 + b^2)/(\lambda)^2 = 1$, temos que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\theta = a/\lambda$ e $\sin\theta = b/\lambda$ e aí temos a decomposição desejada

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dada pela rotação de ângulo θ e a homotetia de razão $\sqrt{a^2 + b^2}$

Da maneira como foi definido, o θ que aí está pode ser tomado como o ângulo que o vetor (a, b) faz com $(1, 0)$

Da igualdade acima tiramos que
$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + i \sin\theta)$

1.10. O segundo membro é chamado de representação polar do número $a + bi$

1.11.

Definição 3. *O argumento do número complexo $z = a + bi \neq 0$ é o ângulo θque permite a representação polar acima.*
$\theta = arg(z)$

Observe que se θ é argumento, então $2k\pi + \theta$ também é para $k \in \mathbb{Z}$ e portanto a igualdade $arg(z) = arg(w)$é sempre $mod(2\pi)$

1.12.

Definição 4. *O conjugado de um número complexo $z = x + yi$ é $\bar{z} = x - yi$*

1.13. A conjugação como uma aplicação

$$\begin{aligned} - : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

é um automorfismo de corpo, isto é:
$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
$\bar{1} = 1$

Ela é a sua prórpria inversa, pois $\bar{\bar{z}} = z$, vale ainda que $z\bar{z} \geq 0$ e que z é real se e só se $\bar{z} = z$.

Exercício: Verifique as propriedades acima.

1.14.

Definição 5. *O valor absoluto do número complexo z é :* $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Exercício: Verifique as seguintes propriedades para o valor absoluto:
1) $|zw| = |z||w|$
2) $|z+w| \leq |z| + |w|$
3) $||z| - |w|| \leq |z-w|$
4) Se $z = \lambda(\cos\theta + i\sin\theta)$ com λ real não negativo, então $\lambda = |z|$

1.15.

Proposição 1. *Dado $z \in \mathbb{C}$ e n natural positivo, existe a raiz n-ésima de z, que denotamos por $\sqrt[n]{z}$*

Dem: Tomamos z na forma polar $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Por exercícios anteriores temos que $a = \sqrt[n]{|z|}(\cos\theta/n + i\sin\theta/n)$ é uma raiz n-ésima de z pois $a^n = (\sqrt[n]{|z|})^n(\cos n\theta/n + i\sin n\theta/n) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = z$. (C.Q.D)

1.16. Existem n raízes n-ésimas de um número complexo $z \neq 0$ e estas formam os n-vértices de um polígono regular de n-lados. Tais vértices estão sobre o círculo de centro zero e raio $\sqrt[n]{|z|}$. De fato, temos $z_0 = \lambda(\cos\theta/n + i\sin\theta/n)$ com $\lambda = \sqrt[n]{|z|}$ uma raiz n-ésima de z, onde θ é um dos argumentos de z, digamos $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Acontece que para qualquer k inteiro, $\theta + 2k\pi$ também é argumento de z e daí o conjunto das raízes n-ésimas de z depende de k e tem a forma polar:

$$z_k = \lambda(\cos(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}))$$

Para $k = 0$ temos a raiz de argumento θ/n tomada inicialmente. Basta examinarmos o que se passa com o $arg(z_k)$

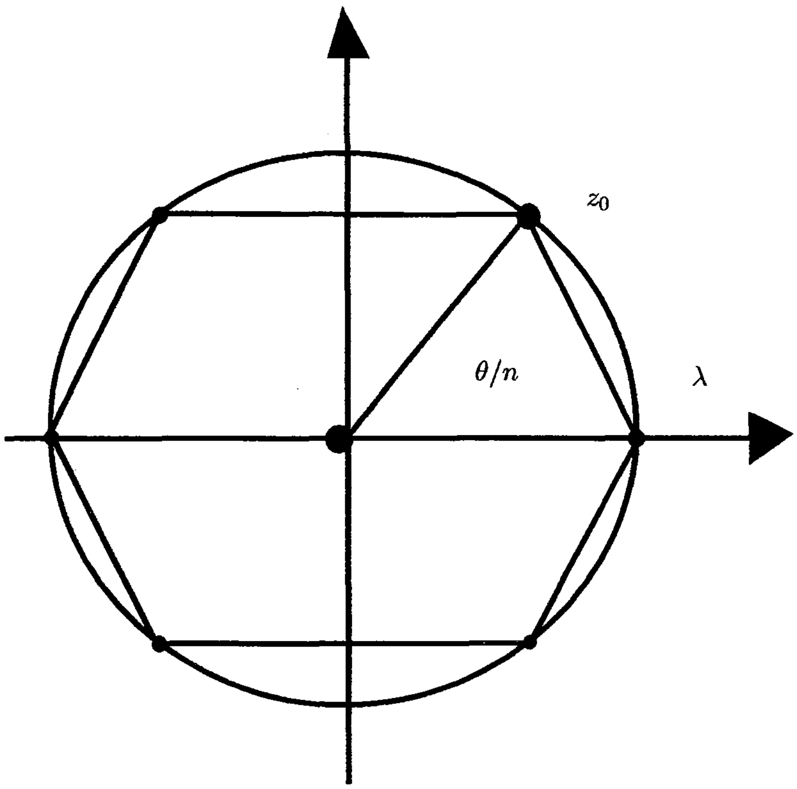
$$\begin{aligned} arg(z_0) &= \tfrac{\theta}{n} \\ arg(z_1) &= \tfrac{\theta}{n} + \tfrac{2\pi}{n} \\ &\vdots \\ arg(z_k) &= \tfrac{\theta}{n} + k\tfrac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

Estes argumentos são de números distintos para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, para $k = n$ temos $arg(z_n) = \frac{\theta}{n} + 2\pi = arg(z_0)$e daí por diante haverá repetição por exemplo, $arg(z_{n+1}) = arg(z_1)$. Para $k < 0$ ocorre o mesmo pois: $-k\frac{2\pi}{n} + (n+k)\frac{2\pi}{n} = 2\pi$

O ângulo entre z_k e z_{k+1} é $2\pi/n$ e $|z_k| = \lambda$daí $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ formarem os vértices de um polígono regular de n lados sobre o círculo de raio $\lambda = \sqrt[n]{|z|}$

1.17. O círculo unitário S^1 é fechado pela multiplicação complexa, pois $|zw| = |z||w| = 1$, contem a unidade 1 e os inversos, pois $|z^{-1}| = |z|^{-1} = 1$. Portanto S^1 é um grupo. As raízes n-ésimas da unidade 1 estão em S^1, (dentre elas está a propria unidade) formam um conjunto fechado pela multiplicação pois $(z_iz_j)^n = z_i^n z_j^n = 1.1 = 1$ e contém os inversos, $(z_i^{-1})^n = (z_i^n)^{-1} = 1$. Assim sendo elas formam um grupo finito com n elementos, digamos I_n: $I_n \subset S^1$.

Seja $w = \cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n$. Então w é um gerador do grupo I_n, isto é, todo elemento de I_n é uma potência de w. Em outras palavras as raízes n-ésimas da unidade são:



$1 = w^0 = w^n, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$

Exercícios:

1) Determine todos os geradores do grupo das raízes n-ésimas da unidade I_n. O que acontece se n é primo?

2) Para w o gerador acima, mostre que: $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$, e generalize para $1 + w^k + w^{2k} + \cdots + w^{(n-1)k} = 0$ onde n não divide k.

1.18. Temos dado atenção a aspectos algébricos dos números complexos com alguma interpretação geométrica até agora. A definição de valor absoluto ou norma de um número complexo z: $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$ é o elemento de ligação dos números complexos, ou seu lado algebrico, com a topologia do plano de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Observemos que a métrica euclideana de $\mathbb{R}^2$, ou seja, a distância usual entre dois pontos $z = x + iy$ e $z' = x' + iy'$ é exatamente, $|z - z'| = ((x - x')^2 + (y - y')^2)^{1/2}$.

Uma vez que temos as operações + e . em $\mathbb{C}$ que definem $\mathbb{C}$ e temos a topologia de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ usual, devemos olhar para a compatibilidade das operações de adição, multiplicação e inversão, isto é, as funções

$$\alpha : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(z, z') \mapsto z + z'$$

$$\mu : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$(z, z') \mapsto zz'$$
$$j : \mathbb{C} - \{0\}\times \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z^{-1}$$

são contínuas. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ é considerado com a topologia produto. Tal continuidade decorre respectivamente das seguintes desigualdades:

$(\alpha)|z + z' - z_0 - z_0'| \leq |z - z_0| + |z' - z_0'|$
$(\mu)|zz' - z_0z_0'| \leq |z_0||z' - z_0'| + |z_0'||z - z_0| + |z - z_0||z' - z_0'|$
$(i)|z^{-1} - z_0^{-1}| \leq |z|^{-1}|z - z_0||z_0|^{-1}$

1.19. Decorre daí que toda função obtida efetuando-se suscessivas operações de adição, multiplicação e inversão são contínuas e, seu domínio de validade. Como por exemplo as polinômiais:

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, a_i \in \mathbb{C}$$

ou as racionais:

$$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

onde p e q são polinômios, $q \neq 0$ e U é o complementar dos zeros de q.

Nas construção dos complexos, pedimos que existisse solução para a equação $x^2+1 = 0$. Na realidade obtivemos muito mais.

1.20. **O teorema fundamental da algebra.** Todo polinômio de grau positivo com coeficientes em $\mathbb{C}$ tem uma raiz em $\mathbb{C}$.

Dem: Seja $p(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^i$ polinômio de grau $n \geq 1$, donde $a_n \neq 0$. Queremos $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$. Vamos conseguir um tal z_0 examinando o mínimo para $|p(z)|$. Vamos mostrar que $|p(z)|$ tem que assumir mínimo em $\mathbb{C}$ e depois provar que tal mínimo tem de ser 0.

$|p(z)| = |z|^n|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n|$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|z| > r$ nos dá cada $|\frac{a_i}{z^{n-i}}| < \varepsilon/n$. Portanto

$|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n| \geq |a_n| - \varepsilon$

Dai vem que para $|z| = 2r > r$

$|p(z)| > (2r)^n(|a_n| - \varepsilon)$

Consequentemente, dado $k > 0$ qualquer, podemos escolher um $\varepsilon > 0$ tão pequeno e um r tão grande que teremos $|p(z)| > k$ para fora de um certo disco. como os discos são fechados e limitados, isto é, compactos, concluimos que $|p(z)|$deve assumir mínimo num ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

$|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Basta concluirmos agora que $|p(z_0)| = 0$. Vamos concluir por absurdo.

Suponhamos que $|p(z_0)| = c > 0$.

Vamos mostrar que, neste caso, existe $z_1 \in \mathbb{C}$ com $|p(z_1)| < |p(z_0)|$; daí o absurdo. Tomemos uma situação mais específica e sem perda de generalidade normalizemos o polinômio $p(z)$ para $g(z) = c^{-1}p(z + z_0)$.

Assim z_0 é mínimo com $|p(z_0)| = c$ se e somente se, $|g(z)|$ assume mínimo em 0 com $|g(0)| = 1$. Então g é da forma:

$g(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n$ tal que $b_k \neq 0, b_n \neq 0$.

Queremos agora em $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|g(z_1)| < 1$. Temos que

$|g(z)| \leq |1 + b_k z^k| + |b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n|$

Como existe raiz k-ésima de qualquer complexo, temos solução u para $b_k z^k = -|b_k|$ e claro que $|u| = 1$. Para $r > 0$ temos então que $b_k (ru)^k = -|b_k| r^k$.

Para o segundo termo vale:

$|b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n| \leq r^{k+1} |b_{k+1} + \cdots + b_n z^{n-k-1}| < r^{k+1}(|b_{k+1}| + \cdots + |b_n|)$
para $|z| = r < 1$

Tomando agora $r < |b_k|^{-k}$ temos $r|b_k|^k < 1$ e se $r < |b_k|(|b_{k+1}| + \cdots + |b_n|)^{-1}$ temos $|b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n| < r^k |b_k|$

Daí concluimos que

$|g(ru)| < 1 - |b_k| r^k + r^k |b_k| = 1$

Portanto com r como acima e u temos $z_1 = ru$ satisfazendo $|g(z_1)| < 1$ (C.Q.D)

1.21.

Teorema 1. *Seja $p(z)$ polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ de grau $n \geq 1$. Então existem $z_1, z_2, \ldots, z_n$ em $\mathbb{C}$ tai que*

$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$

Dem: Seja $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, a_n \neq 0, n \geq 1$
pelo teorema fundamental da álgebra, existe uma raiz z_1 para $p(z)$, isto é , $p(z_1) = 0$. Consideremos a divisão de $p(z)$ por $(z - z_1)$

$p(z) = (z - z_1) p_1(z) + r_1(z)$

com grau de $r_1(z)$ menor que grau de $(z - z_1)$ que é 1. Logo $r_1(z)$ é constante. Mas substituindo z por z_1 acima temos $0 = r_1(z_1)$ donde $r_1(z)$ é a constante nula.

Conseguimos assim fatorar p em $p(z) = (z - z_1) p_1(z)$, temos que grau de $p_1 = n - 1$. O mesmo raciocínio se aplica a p_1 e chegamos assim a um z_2 tal que $p(z) = (z - z_1)(z - z_2) p_2(z)$. Repetindo o processo chegamos a

$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) p_n(z)$

Como grau de p é n temos $p_n(z)$ constante e pela multiplicação indicada é o coeficiente de z^n, isto é, a_n. (C.Q.D)

Observação 2. *É claro que estas n raízes de p não precisam ser distintas duas a duas. O número de fatores em que uma mesma raiz aparece é chamado de multiplicidade da raiz. Assim podemos escrever*

$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_k)^{m_k}$

com $z_i \neq z_j$ e m_i a multiplicidade de z_i.

1.22. **Compactificação de $\mathbb{C}$.** A introdução do ponto ∞ (infinito) torna o espaço mais apropriado ao estudo das funções complexas. Como veremos adiante, por exemplo, funções do tipo p/q quociente de dois polinômios, que em $\mathbb{C}$ tem problema com os zeros de q, estarão definidas no espaço todo. Por outro lado, o nosso espaço tem uma interpretação geométrica simples, será a esfera de dimensão dois S^2.

O espaço métrico $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ não é compacto mas todo ponto tem uma vizinhança compacta, por exemplo, um disco, isto é, ele é localmente compacto. Neste caso existe um processo para se "compactificar" o espaço introduzindo-se um novo ponto, ∞ que se costuma chamar de infinito.

1.23.

Definição 6. *Seja* ∞ *um elemento não pertencente a* $\mathbb{C}$ *e* τ *a topologia de* $\mathbb{C}$

$$\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

e uma topologia $\widetilde{\tau}$ *em* $\widetilde{\mathbb{C}}$

$A \in \widetilde{\tau} \Leftrightarrow A \in \tau$ ou A^c (complementar de A em $\widetilde{\mathbb{C}}$) está em $\mathbb{C}$ e é compacto aí.
$(\widetilde{\mathbb{C}}, \widetilde{\tau})$ é o compactificado de $\mathbb{C}$

Exercícios:

1) Verifique que de fato, $\widetilde{\tau}$ é uma topologia em $\widetilde{\mathbb{C}}$ e que induz τ em $\mathbb{C}$.

2) Se D_n é o disco de centro 0 e raio $n > 0$ inteiro, de $\mathbb{C}$; mostre que a família $(D_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\widetilde{\mathbb{C}}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do infinito ∞.

O espaço $\widetilde{\mathbb{C}}$ foi uma ampliação de $\mathbb{C}$ onde levamos em conta apenas a estrutura topologica. Queremos agora considerar a estrutura algébrica de $\mathbb{C}$ e ver como a mesma poderia ser ampliada a $\widetilde{\mathbb{C}}$ mantendo-se sua compatibilidade com a topologia, isto é, de modo as nossas operações permanecerem contínuas segundo a topologia de $\widetilde{\mathbb{C}}$.

1.24. Definições:

Adição: $a \in \mathbb{C}$, $\quad a + \infty = \infty + a = \infty$

Multiplicação: $a \in \widetilde{\mathbb{C}}$, $\quad a \neq 0$, $\quad a\infty = \infty a = \infty$, $\quad \infty^0 = 1$

Divisão: $a \in \mathbb{C}$ $\quad a/\infty = 0$ $\quad$ e $\quad a \neq 0$ $\quad a/0 = \infty$

É de facil verificação, usando sequencias e a topologia dada a $\widetilde{\mathbb{C}}$ que :

A adição assim extendida é continua

$+ : \widetilde{\mathbb{C}} \times \widetilde{\mathbb{C}} - \{(\infty, \infty)\} \to \widetilde{\mathbb{C}}$

A multiplicação também

$. : \widetilde{\mathbb{C}} \times \widetilde{\mathbb{C}} - \{(0, \infty), (\infty, 0)\} \to \widetilde{\mathbb{C}}$

Assim como a divisão

$:: \widetilde{\mathbb{C}} \times \widetilde{\mathbb{C}} - \{(\infty, \infty), (0, 0)\} \to \widetilde{\mathbb{C}}$

Observação 3. *Não é possivel se extender continuamente a adição a* $\infty + \infty$ *pois dado* $a \in \widetilde{\mathbb{C}}$ *qualquer, existem sequencias* (z_n) *e* (z'_n) *convergindo para* ∞ *cuja soma converge para* a. *Basta tomar* $z_n = n$ *e* $z'_n = a - n$ *temos que* $z_n + z'_n = n + a - n = a$.

Portanto não podemos especificar a de modo a preservar a continuidade.

Verifique que o mesmo ocorre para os demais casos omitidos

$$0\infty = ? \qquad \infty/\infty = ? \qquad 0/0 = ?$$

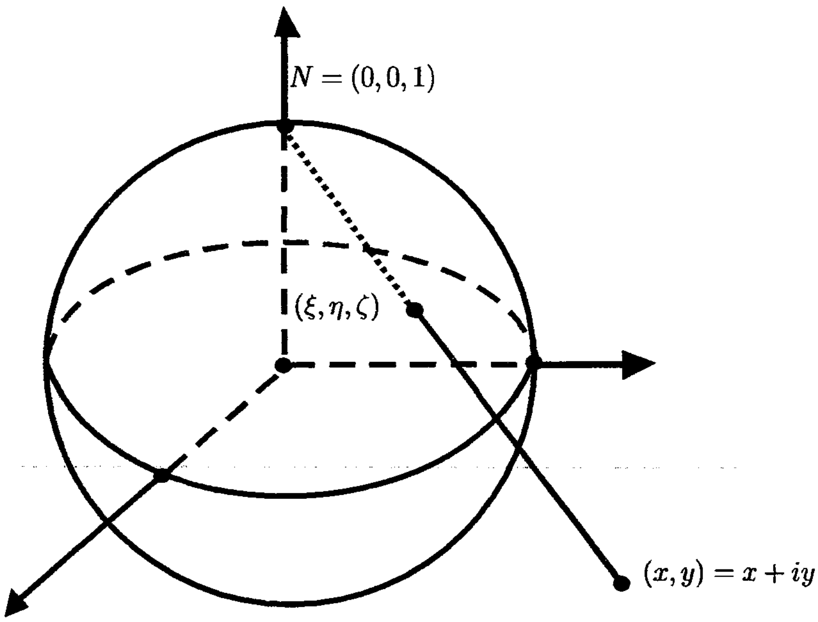
Observe ainda que:

∞ *não tem oposto pois* $\infty + a = \infty$ *no entanto existe* $-\infty = (-1)\infty = \infty$

∞ *não tem inverso pois* $\infty a = \infty$ *no entanto existe* $\infty^{-1} = 1/\infty = 0$

Assim sendo, com excessão dos quatro casos $\infty + \infty$, $\infty 0$, ∞/∞ *e* $0/0$ *as operações estão bem definidas e são continuas.*

Do ponto de vista algébrico a nova situação ficou um pouco estranha, isto é, demanda um certo cuidado, mas do ponto vista topológico ficou ótima, como veremos a seguir.



1.25. Um homeomorfismo de $\widetilde{\mathbb{C}}$ com a esfera S^2, a projeção estereográfica. Seja $S^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) in \mathbb{R}^3 / \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$ a esfera unitária do $\mathbb{R}^3$

Vamos identificar o plano complexo $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$com o plano dos eixos de ξ, η. Portanto $1 = (1,0) = (1,0,0)$ e $i = (0,1) = (0,1,0)$. O círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$ passa então a ser o equador de S^2.

Sejam $N = (0,0,1)$ o "polo norte"e $S = (0,0,-1)$ o "polo sul".

Definamos agora a projeção estereográfica:

$$\pi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{C}$$
$$\pi(\xi, \eta, \zeta) = (x, y)$$

onde (x, y) e (ξ, η, ζ) estão alinhados com o polo norte N, como na figura acima.

Calculemos uma expressão analítica para π.

Queremos determinar λ tal que
$\lambda((\xi, \eta, \zeta) - (0,0,1)) + (0,0,1) = (x, y, 0)$ ou
$(\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda(\zeta - 1) + 1) = (x, y, 0)$, donde
$x = \lambda\xi$, $y = \lambda\eta$, $\lambda(\zeta - 1) + 1 = 0$ donde
$\lambda = \frac{1}{1-\zeta}$, $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$.

Portanto

$$\pi(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta}\right)$$

Como tiramos o polo norte, $\zeta < 1$ e temos acima uma função contínua.

Vemos pela geometria que π tem inversa. Calculemos então a mesma.

Temos que $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ e $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.

Seja $(x, y) = x + iy$. Temos que
$z\overline{z} = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1-\zeta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$

Donde $1 + z\overline{z} = \frac{2}{1-\zeta}$ e $\zeta = \frac{z\overline{z}-1}{1+z\overline{z}}$

Substituindo temos $\xi = \frac{2x}{1+z\bar{z}}$ e $\eta = \frac{2y}{1+z\bar{z}}$ ou $\xi = \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}$, $\eta = \frac{i(\bar{z}-z)}{1+z\bar{z}}$.

A inversa de π tem então a expressão

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \frac{i(\bar{z}-z)}{1+z\bar{z}}, \frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}}\right)$$

que é também contínua, π é portanto um homeomorfismo de $S^2 - \{N\}$ em $\mathbb{C}$

Temos $\mathbb{C} \subset \widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. π^{-1} se estende continuamente a $\widetilde{\mathbb{C}}$ pondo $\pi^{-1}(\infty) = N$ e portanto o mesmo ocorre com π , $\pi(N) = \infty$.

É fácil perceber a continuidade geometricamente pois $(z_n) \to \infty$ se e somente se, $(\pi^{-1}(z_n)) \to N$. Podemos ve-las também das expressões analíticas.

Assim sendo temos a extensão

$$\pi : S^2 \to \widetilde{\mathbb{C}}$$

como um homeomorfismo. Topologicamente, $\widetilde{\mathbb{C}}$ nada mais é do que a esfera S^2 onde $\mathbb{C}$ corresponde o complementar de $\{N\}$.

Assim sendo, ao trabalharmos com $\mathbb{C}$ podemos pensar no plano $\mathbb{R}^2$ assim como em $S^2 - \{N\}$ e ao considerarmos o ponto ∞ podemos pensar em S^2. (O espaço natural para desenvolvermos a teoria das funções complexas é de fato S^2)

Podemos transportar a estrutura algébrica de $\widetilde{\mathbb{C}}$ para S^2 pela projeção estereográfica assim:

$$\begin{aligned} \pi : S^2 &\to \widetilde{\mathbb{C}} \\ p &\mapsto \pi(p) = z \\ p+q &= \pi^{-1}(\pi(p) + \pi(q)) \\ p.q &= \pi^{-1}(\pi(p).\pi(q)) \\ p/q &= \pi^{-1}(\pi(p)/\pi(q)) \end{aligned}$$

Observe que o ponto infinito, que na esfera é o polo norte N, não se distingui dos demais pontos de S^2, do ponto de vista topologico. A diferença ocorre apenas no aspecto algebrico e neste sentido o zero e a unidade também são especiais.

Como π é um homeomorfismo, a estrutura topológica (os abertos) do plano $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ corresponde, por π à estrutura topologica (os abertos) da esfera S^2. O mesmo não ocorre com as métricas usuais de $\mathbb{C}$ e S^2.

Vamos identificar $S^2 = \widetilde{\mathbb{C}}$. Assim a métrica usual de S^2 como subespaço de $\mathbb{R}^3$ tem a seguinte expressão para z e z' "finitos".

$$d(z, z') = 2\frac{|z-z'|}{[(1+z\bar{z})(1+z'\bar{z}')]^{1/2}}$$

Dividindo ambos os termos da fração por $|z'|$ e agora tomando $z' = \infty$ temos

$$d(z, \infty) = \frac{2}{(1+z\bar{z})^{1/2}}$$

1.26.

Definição 7. *Chamamos de esfera de Riemann a esfera S^2 com a estrutura complexa proveniente da identificação de S^2 com $\widetilde{\mathbb{C}}$*

A projeção estereográfica,

$$\pi : S^2 \to \widetilde{\mathbb{C}},$$

além de preservar as topologias, preserva círculos e ângulos, como veremos a seguir.

Vamos expressar a equação de um círculo com variável complexa.

O círculo de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto

$$S_r(a) = \{z \in \mathbb{C}/|z-a| = r\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

A equação então de um círculo no plano $\mathbb{C}$

$$|z-a| = r \text{ ou}$$
$$|z-a|^2 = r^2 \text{ ou}$$
$$(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = r^2$$

1.27. $z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + a\overline{a} - r^2 = 0$. Um círculo S na esfera S^2 está também num plano P do $\mathbb{R}^3$

$$C = S^2 \cap P$$

Portanto a equação de um círculo S na esfera S^2 pode sr escrita como a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$ com as variáveis restritas aos pontos da esfera, isto é

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$
$$P : A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

com A, B, C e D reais.

Observe que para que exista o círculo é preciso que a distância da origem do $\mathbb{R}^3$ ao plano P seja no máximo igual a 1. Nesta situação limite o círculo se reduz a um ponto, o de tangencia de P com S^2

Vamos expressar ξ, η, ζ em função de $z \in \mathbb{C}$ via projeção estereográfica. Vimos então que

$$\xi = \frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}} \quad \eta = \frac{i(\overline{z}-z)}{1+z\overline{z}} \quad \zeta = \frac{z\overline{z}-1}{1+z\overline{z}}$$

Pondo na equação de P temos:

$$A\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}} + B\frac{i(\overline{z}-z)}{1+z\overline{z}} + C\frac{z\overline{z}-1}{1+z\overline{z}} + D = 0$$

donde

$$A(z+\overline{z}) + iB(z-\overline{z}) + C(z\overline{z}-1) + D(1+z\overline{z}) = 0$$

donde

$$(A-iB)z + (A+iB)\overline{z} + (C+D)z\overline{z} + D - C = 0 \text{ ou}$$
$$(C+D)z\overline{z} + (\overline{A+iB})z + (A+iB)\overline{z} + D - C = 0$$

Esta equação em z e $\overline{z}$ é semelhante à equação do círculo no plano $\mathbb{C}$ em (1.27).

Examinaremos inicialmente o caso em que o coeficiente de $z\overline{z}$ é nulo, isto é,

$$C + D = 0$$

Ficamos com

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\overline{z} + D - C = 0$$

Para $z = x + iy$ temos

$$(A - Bi)(x + iy) + (A + Bi)(x - iy) + D - C = 0$$
$$2Ax + 2By + D - C = 0$$

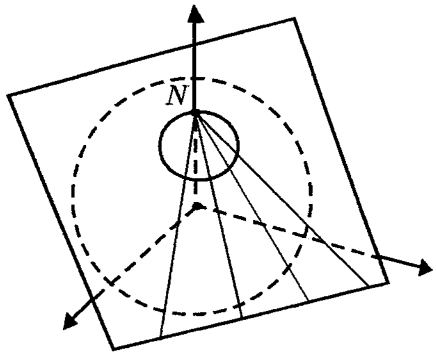
Esta é a equação de uma reta r no plano $\mathbb{C}$, se A ou B não nulo.

Chegamos a esta equação com condição de $C + D = 0$ e portanto o plano

$$P : A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

passa pelo polo norte $N = (0, 0, 1)$, como se nota também facilmente geometricamente pois a projeção π leva o círculo S de S^2 numa reta de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ e portanto o plano do círculo deve conter N.

Só os círculos de S^2 por N é que vão em retas de $\mathbb{C}$ com $\pi(N) = \infty$.



Suponhamos agora $C + D \neq 0$. Estamos assim com uma equação do tipo

1.28. $\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$. $\alpha = C + D \quad \beta = A + Bi \quad \gamma = D - C$
com α e γ reais, $\alpha \neq 0$ que podemos supor $\alpha > 0$

Na equação de (1.27) temos um fator r^2 que determina o raio do círculo. Vamos introduzi-lo na equação acima, assim

$$z\overline{z} + \frac{\overline{\beta}}{\alpha} z + \frac{\beta}{\alpha}\overline{z} + \frac{\gamma}{\alpha} + r^2 = r^2 \text{ ou}$$
$$\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta\overline{z} + \gamma + \alpha r^2 = \alpha r^2 \qquad \alpha > 0$$

Para chegarmos na equação do círculo devemos ter então

$$\alpha\gamma - \beta\overline{\beta} = -\alpha^2 r^2 \text{ isto é,}$$
$$\alpha\gamma - \beta\overline{\beta} \leq 0 \text{ pois}$$
$$r^2 = z\overline{z} + \frac{\overline{\beta}}{\alpha} z + \frac{\beta}{\alpha}\overline{z} + \frac{\beta\overline{\beta}}{\alpha^2} = (z + \frac{\beta}{\alpha})(\overline{z} + \frac{\overline{\beta}}{\alpha})$$

e a equação em (1.28) é de um círculo se e só se

$$\alpha\gamma - \beta\overline{\beta} \leq 0$$

pois assim tomamos $r^2 = \frac{\beta\overline{\beta} - \alpha\gamma}{\alpha^2}$ e temos o raio do círculo como sendo r e o centro $-\frac{\beta}{\alpha}$

Se associarmos a equação (1.28) a matriz $\begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ a condição para que represente um círculo é det(M) ≤ 0. Acabamos de verificar o seguinte

1.29.

Proposição 2. *A projeção estereográfica $\pi : S^2 \to \widetilde{\mathbb{C}}$ leva circulo em circulo. Aqueles que passam por N=(0,0,1) são levados em retas de $\widetilde{\mathbb{C}}$. (uma reta de $\widetilde{\mathbb{C}}$ é uma reta de $\mathbb{C}$ união com $\{\infty\}$).*

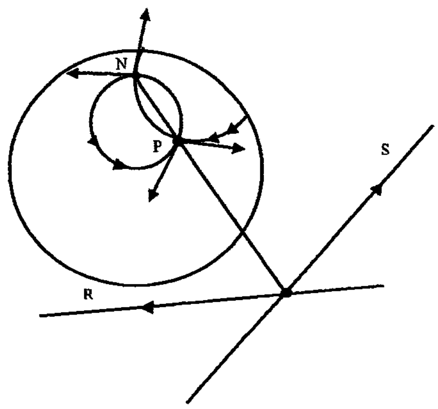
Chamaremos também as retas de $\widetilde{\mathbb{C}}$ de círculos infinitos, ou pelo infinito ∞.

Queremos verificar agora que a projeção estereográfica preserva ângulos entre círculos.

1.30. Na figura acima, a reta r_N tangencia $\pi^{-1}(r)$ em N e portanto tangencia S^2 em N. O mesmo vale para a reta r'_N. O círculo $\pi^{-1}(r)$ e r estão no mesmo plano e portanto r_N também, já que tangencia $\pi^{-1}(r)$. Como r e $r_N$são ainda paralelas ao plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ são então paralelas entre sí.

$$r_N // r$$

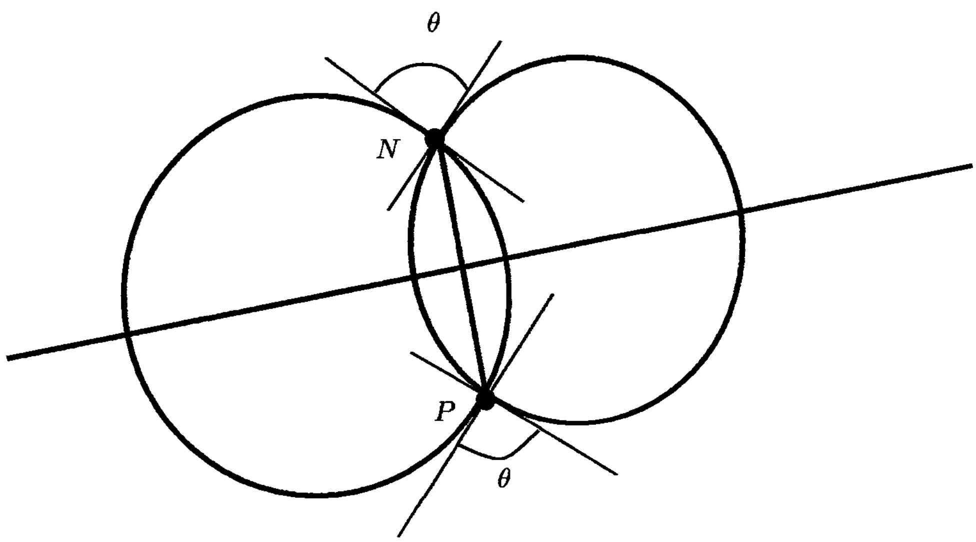
O mesmo vale para r' e r'_N



$$r'_N // r'$$

Assim sendo, os ângulos determinados por (r, r') e (r_N, r'_N) e que se correspondem, são iguais

Seja $\{z\} = r \cap r'$ e $p = \pi^{-1}(z)$. Queremos analisar o ângulo formado por $\pi^{-1}(r)$ e $\pi^{-1}(r')$ em p e as retas tomadas r_N e r'_N se cortam em N. Ocorre porem que há uma simetria na configuração $\pi^{-1}(r) \cup \pi^{-1}(r')$ em relação a um plano perpendicular do segmento que une N a p, passando pelo ponto médio.



Esta simetria diz que os ângulos indicados na figura acima entre r_N e r'_N e r_p e r'_p são iguais. Ao girarmos r para r' no sentido anti-horário o mesmo ocorre de r_N pra r'_N (observando-se de fora de S^2) e o oposto ocorre com o giro de r_p para r'_p. Portanto se quisermos que π^{-1} (e portanto π) preserve, além dos ângulos o seus sentidos também devemos tomar a orientação de S^2 com a normal para dentro, ou seja, o sentido positivo de giro é o de entrada do "saca rolhas".

Provamos acima então a seguinte proposição:

1.31.

Proposição 3. *Orientando-se os ângulos do plano $\mathbb{C}$ no sentido anti-horário e os de S^2 no sentido horário (visto de fora), a projeção estereográfica π preserva ângulos entre círculos inclusive a orientação.*

2. As transformações de Moebius

2.1.

Definição 8. *Uma transformação de Moebius é uma função do tipo*

$$\sigma : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$$
$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

onde a, b, c, d são elementos de $\mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

Observação 4. *a. Tomemos $z \neq 0$ e dividamos ambos os termos da fração*

$$\sigma(z) = \frac{a + b/z}{c + d/z}$$

Para $z = \infty$ as operações fazem sentido e temos

$$\sigma(\infty) = a/c$$

b. A solução $cz + d = 0$; $z = -d/c$ nos dá o ponto que vai para o ∞ pois

$$\sigma(-d/c) = \frac{-ad/c + b}{0} = \frac{-ad + bc}{0c} = \frac{bc - ad}{0} = \infty$$

já que $bc - ad \neq 0$

c. No caso (2) acima aparece já uma boa razão para se pedir na definição, que $ad - bc \neq 0$, mas a razão é mais forte ainda. Esta condição nos garante que a transformação σ seja inversível.

$$\sigma(z) = w = \frac{az+b}{cz+d} \text{ nos dá, para } cz + d \neq 0$$
$$w(cz + d) = -dw + b$$
$$z(cw - a) = -dw + b$$

Para tirar o valor de z precisamos de $cw - a \neq 0$, ou seja, $w \neq a/c$ mas para z finito $w = a/c$ não ocorre pois deveríamos ter

$$a/c = \frac{az+b}{cz+d}$$
$$acz + ad = acz + bc$$
$$ad = bc$$
$$ad - bc = 0$$

contra a hipótese.

Logo para $cw - a \neq 0$ para z finito e podemos escrever

$$\sigma^{-1}(w) = z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

e temos a inversa de σ, com $da - bc \neq 0$.

As transformação de Moebius são portanto homeomorfismos de $\widetilde{\mathbb{C}}$ em $\widetilde{\mathbb{C}}$

2.2.

Proposição 4. *O conjunto de todoas as transformações de Moebius* $\mathbb{M}$*, com a operação de composição formam um grupo.*

Dem: A identidade $i : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ tal que $i(z) = z$ é evidentemente de Moebius. Já vimos que todo $\sigma \in \mathbb{M}$ tem inversa $\sigma^{-1} \in \mathbb{M}$. Falta apenas verificar que para σ e σ' em $\mathbb{M}$ a composta $\sigma\sigma^{-1} \in \mathbb{M}$.

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \sigma'(z) = \frac{a'z+b}{c'z+d'}$$

tal que $ad - bc \neq 0$ e $a'd' - b'c' \neq 0$.

$$\sigma\sigma' = \sigma(\sigma') = \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')z + (ab'+bd')}{(a'c+c'd)z + (b'c+dd')}$$

Tem o formato certo, devemos verificar a condição:

$$(aa'+bc')(b'c+dd') + (ab'+bd')(a'c+c'd) \neq 0$$

Mas desenvolvendo chegamos a:

$$(ad-bc)(a'd'-b'c') \neq 0$$

Portanto a composta é de Moebius e $\mathbb{M}$ é um grupo. (C.Q.D).

2.3.

Observação 5. *(a) Se associarmos a matriz complexa* 2×2*:* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *à transformação de Moebius* $\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$*, a condição* $ad - bc \neq 0$ *é exatamente o det* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

(b) Olhando a expressão composta $\sigma\sigma'$ *acima vemos que a matriz que dá* $\sigma\sigma'$ *é exatamente o produto das matrizes:* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+c'd & b'c+dd' \end{pmatrix}$

(c) O conjunto das matrizes complexas 2×2 *com determinante não nulo,* $GL(2,\mathbb{C})$ *forma um grupo com a operação de multiplicação. O que vimos acima diz que a correspondência*

$$h : GL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{M}$$

$$h(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

é um homomorfismo de grupo.É claro que é sobre. Ela não é entretanto biunívoca pois

$$h(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = h(k(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})); \quad k \neq 0$$

Por exemplo, as matrizes que vão na identidade são exatamente as diagonais

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad a \neq 0$$

2.4. Observemos que uma transformação de Moebius genérica

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

pode ser obtida pela composição das seguintes:

(a) translação: $\tau(z) = z + e$

(b) multiplicação: $\mu(z) = fz$

(c) inversão: $i(z) = \frac{1}{z}$

De fato:

se $c = 0$ temos $\sigma(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ que vem da composição $z \mapsto \frac{a}{d}z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$.

para $c \neq 0$ pomos $\sigma(z) = \frac{r}{cz+d} + s$ e calculamos r e s obtendo $r = \frac{cb-ad}{c}$ e $s = \frac{a}{c}$. A composição é então $z \mapsto cz \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz+d} \mapsto \frac{r}{cz+d} \mapsto \frac{r}{cz+d} + s$

Representando a composição na forma matricial, isto é, considerando-se as matrizes como em (2.3), temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{d} & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Façamos agora uma análise geométrica dos três tipos de transformações que geram os demais

2.5. **A translação $\sigma(z) = z + b$.** Em $\widetilde{\mathbb{C}}$

Se b=0 temos identidade. Se $b \neq 0$ este determina um feixe de retas paralelas (com o ∞ em comum) e a tranlação move os pontos ao longo destas retas, isto é, o feixe fica invariante pela translação e $\sigma(\infty) = \infty$.

Em S^2

A projeção estereográfica relaciona aquele feixe de retas paralelas (pelo infinito) com um feixe de círculos tangentes entre sí no ponto $N = \infty$. Portanto a translação interpretada em S^2 deixa tal feixe de círculos invariantes e desloca os pontos ao longo dos mesmos. O ponto N fica fixo pela tranlação.

2.6. **A multiplicação $\sigma(z) = az$.** Em $\widetilde{\mathbb{C}}$ e com a real

Neste caso, o feixe de retas pela origem é que fica invariante. Trata-se aqui de uma homotetia se $a > 0$ ou o negativo de uma tal se $a < 0$. Temos dois pontos fixos $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(\infty) = \infty$ e estes são os únicos se $a \neq 1$.

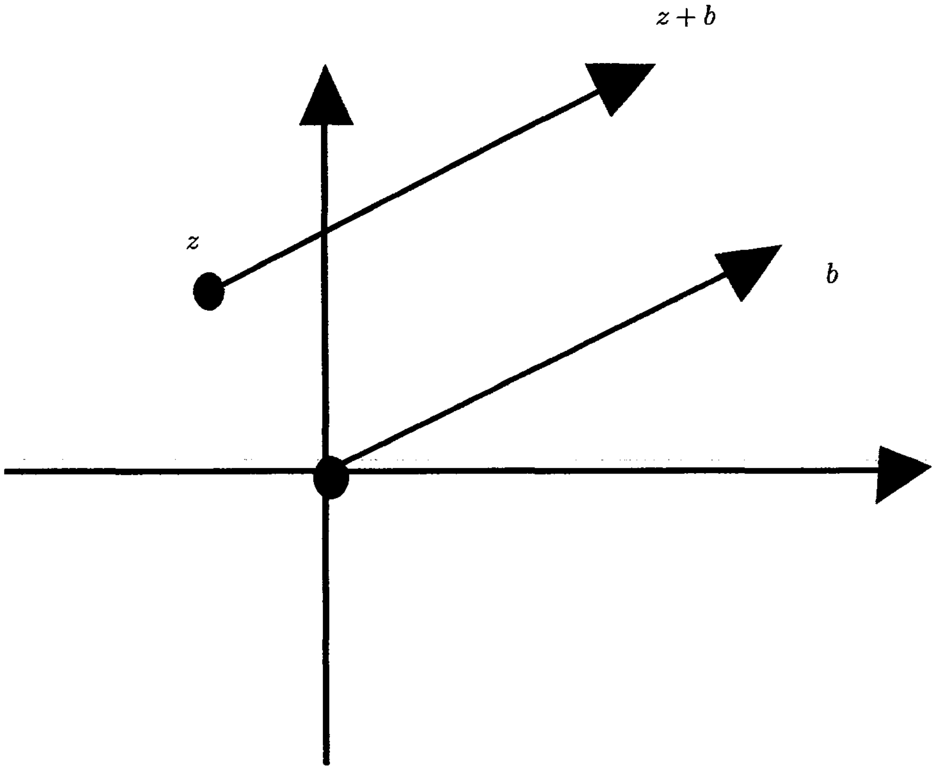
Para a não real e $|a| = 1$ temos

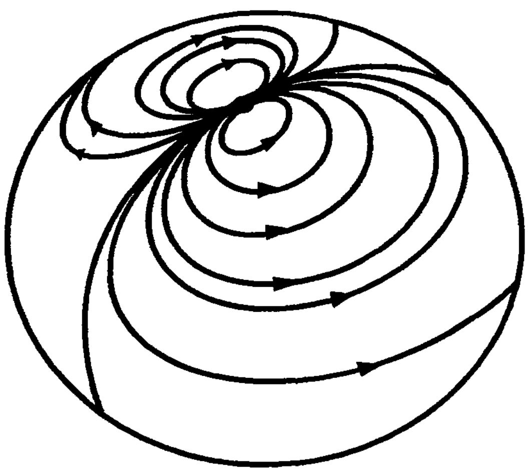
o feixe de círculos cocentricos, com centro na origem deixado invariante por σ, pois esta é exatamente a rotação de ângulo $\theta = arg(a)$. σ tem dois pontos fixos $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(\infty) = \infty$.

No caso em que a não é real e $|a| \neq 1$, σ não deixa nenhum feixe de círculos ou retas invariantes. σ continua deixando 0 e ∞ fixos. Há um feixe de curvas entretanto que são invariantes. São as espirais:

$$z = e^x(\cos(\tfrac{\theta}{ln|a|}x + k) + i\sin(\tfrac{\theta}{ln|a|}x + k))$$

com k constante real (para cada espiral) e x o parametro real da mesma. Verifique que az está na espiral.



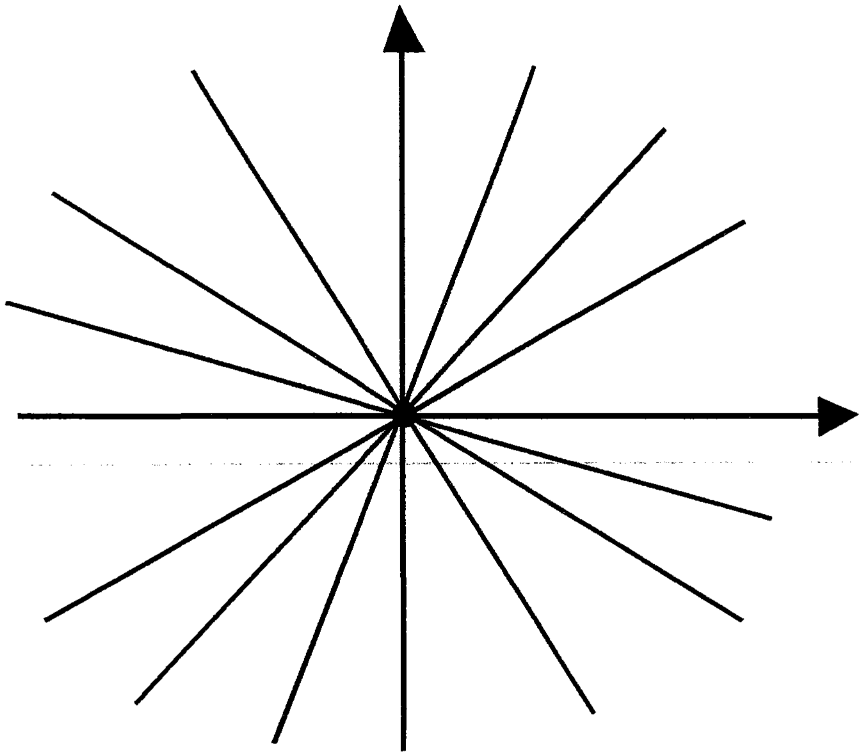


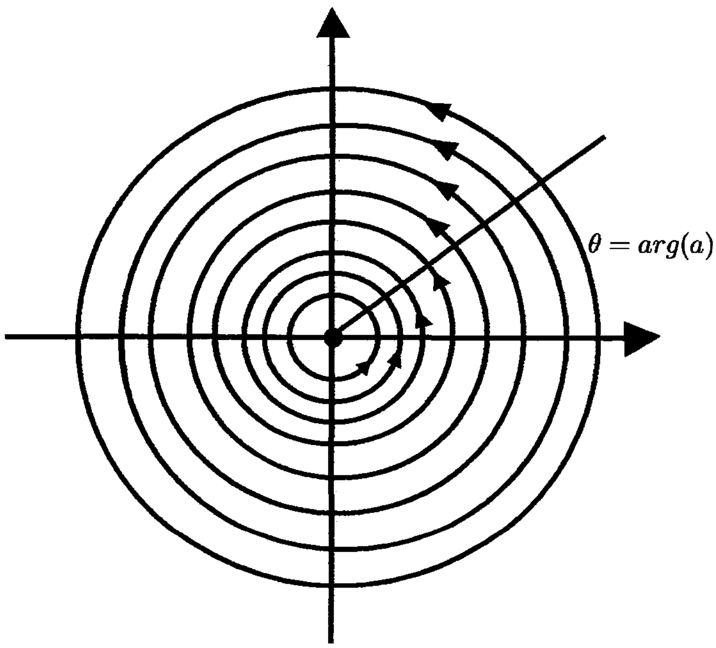
os pontos se movem ao longo destas espirais deslocando-se do ângulo $\theta = arg(a)$, $0 < \theta < 2\pi$. A figura acima representa o caso $|a| > 1$.

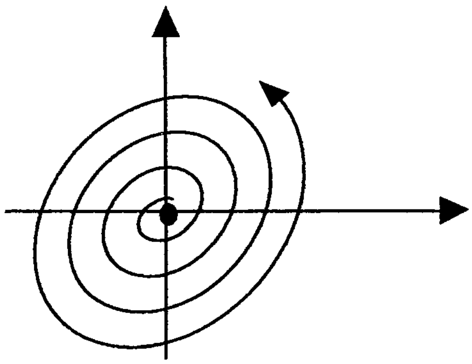
Vejamos agora como fica a representação geometrica da multiplicação em S^2.

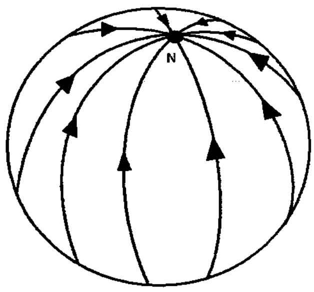
$\sigma(z) = az, \quad a$ real

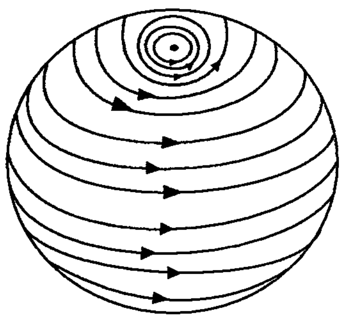
$\sigma(z) = az, \quad |a| = 1 \quad$ e a não real



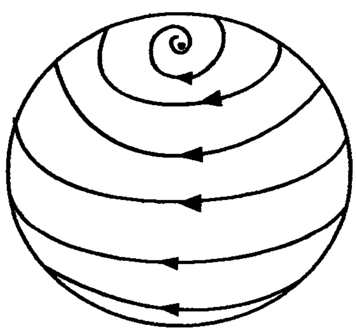

$\theta = arg(a)$







$\sigma(z) = az$, $\quad a$ não real e $\quad |a| \neq 1$



2.7. **A inversão** $\sigma(z) = \dfrac{1}{z}$. Em $\widetilde{\mathbb{C}}$:

Temos os pontos fixos $\sigma(1) = 1$, $\sigma(-1) = -1$ e $\sigma(0) = \infty$, $\sigma(\infty) = 0$.

Uma transformação de $\widetilde{\mathbb{C}}$, relacionada com esta e que admite uma análise simples e a conjugada de σ

$$\overline{\sigma} : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$$
$$\overline{\sigma}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$$

observe que $\overline{z}$ não é de Moebius.

se $|z| = 1$ temos $z\overline{z} = 1$, donde

$$\overline{\sigma}(z) = \frac{1}{\overline{z}} = z$$

e portanto $\overline{\sigma}$ é identidade quando restrita ao círculo unitário S^1.

$$\overline{\sigma}(0) = \infty \text{ e}$$
$$\overline{\sigma}(\infty) = 0$$

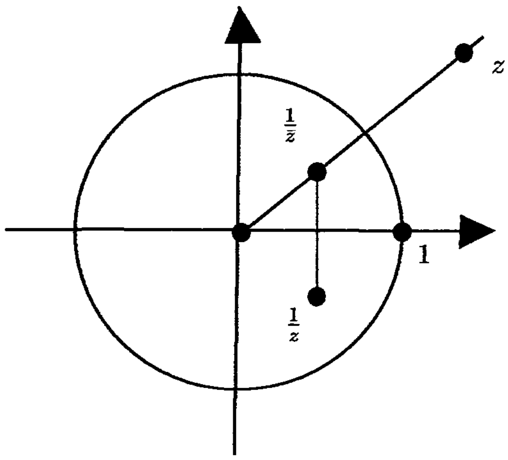
se $z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0$ temos

$$arg\overline{\sigma}(z) = -arg(\overline{z}) = arg(z)$$

e portanto z e $\overline{\sigma}(z)$ estão na mesma semi-reta e

$$|\overline{\sigma}(z)||z| = |\frac{z}{\overline{z}}| = 1$$

Então a transformação $\overline{\sigma}$ em $\widetilde{\mathbb{C}}$ é a inversão segundo o círculo unitário

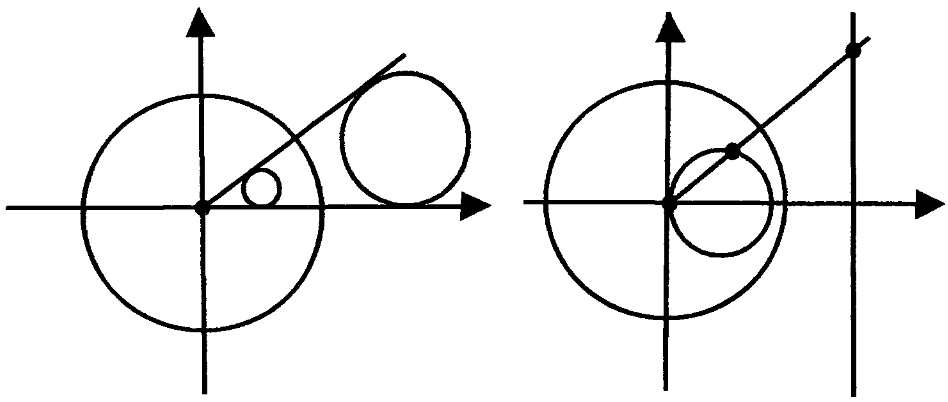


Sabemos da geometria elementar que a inversão no plano leva retas em círculos pela origem e vice-versa, que preserva ângulos e inverte orientação.

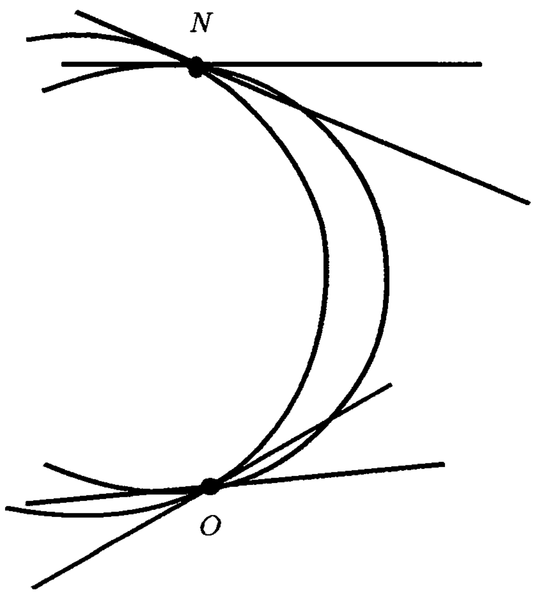
Como a conjugação em $\widetilde{\mathbb{C}}$ leva círculos em círculos e retas em retas, preserva ângulos e inverte a orientação concluimos que:

$$\sigma : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

que é a composição de $\overline{\sigma}$ com a conjugação, leva círculos em círculos, retas (que são círculos infinitos) em círculos pela origem, preserva ângulos e orientação.



Duas retas tem o ∞ em comum. Escolhidas as orientações para as mesmas, definimos o ângulo no ∞ como o ângulo num ponto finito com orientação oposta. Observe que assim, σ preserva ângulo e orientação mesmo no ∞

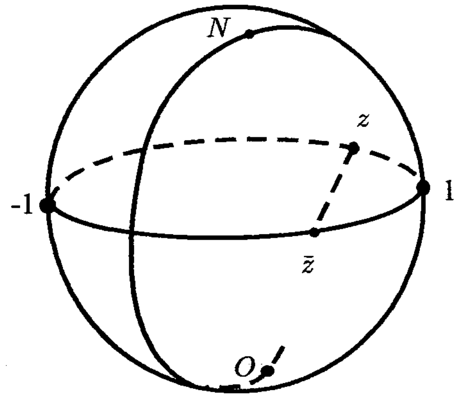


Na figura acima representamos $\overline{\sigma}$. Observe que o ângulo em z que corresponde ao ângulo em 0 é o mesmo inclusive em orientação. Quando compomos com a conjugação para obter σ este se inverte. Assim, com a definição que demos para o ângulo no ∞ seu valor e orientação são preservados.

Analisemos a inversão agora na esfera S^2. Nesta ela tem uma descrição bastante simples pois é a rotação de ângulo π que deixa 1 e -1 fixos.

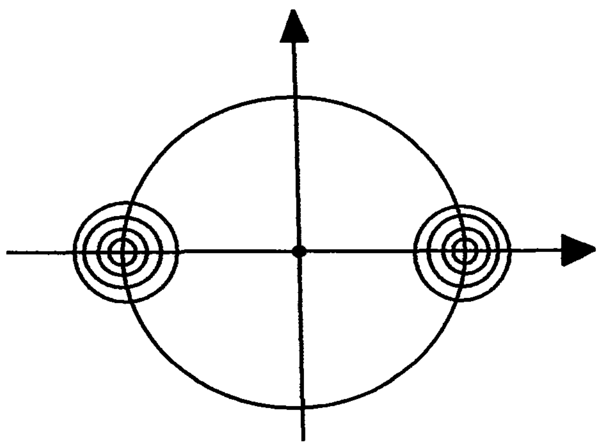
De fato $\sigma(1) = 1$, $\sigma(-1) = -1$, $\sigma(0) = \infty$, $\sigma(\infty) = 0$ e $\sigma(z) = \overline{z}$, se $|z| = 1$ e portanto não pode ser a reflexão em relação ao plano equatorial. Para concluir, basta verificar que $\sigma(z) = \dfrac{1}{z}$ preserva a distância na esfera.

$$d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{((1+z\overline{z})(1+z'\overline{z'}))^{1/2}} = d(\frac{1}{z},\frac{1}{z'}) \text{ (verifique)}$$



2.8. As transformações de Moebius preservam círculos, ângulos e orientação. Esta conclusão vem do fato de translações, multiplicações e inversão terem tais propriedades e geram por composição aquelas.

A inversão $\sigma(z) = \frac{1}{z}$ sendo uma rotação na esfera, deixa invariante o feixe de círculos "paralelos"com centro em 1 (ou -1). Este feixe interpretado no plano, é o feixe com centro no eixo real e ortogonal ao círculo S^1



O eixo de $(0,1)$ pertence ao feixe e é o círculo pelo ∞.

2.9. Os exemplos que temos analisado tem um ou dois pontos fixos; a não ser que seja a identidade, com todos fixos. Tal fato é geral:

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z \text{ nos dá}$$

$$az+b = z(cz+d) \text{ donde}$$

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

que é uma equação do segundo grau em z se $c \neq 0$. Portanto teremos uma solução se $(d-a)^2+4bc=0$ e duas caso contrário. Se $c=0$ temos: $(d-a)z-b=0$, se $d-a \neq 0$ temos uma solução $z_0 = \frac{b}{d-a}$, $c=0$ e $d=0$ nos dá $b=0$ e

$$\sigma(z) = z$$

é a identidade. Então se σ tiver três pontos fixos é a identidade.

2.10.

Proposição 5. *Dados z_1, z_2, z_3 distintos em $\widetilde{\mathbb{C}}$ e w_1, w_2, w_3 distintos em $\mathbb{C}$, existe uma única transformação de Moebius σ tal que:*

$$\sigma(z_1) = w_1$$
$$\sigma(z_2) = w_2$$
$$\sigma(z_3) = w_3$$

Dem: Vejamos inicialmente a unicidade. Sejam σ e τ de Moebius com

$$\sigma(z_i) = \tau(z_i) \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Então $\sigma \circ \tau^{-1}(z_i) = z_i$ como $\sigma \circ \tau^{-1}$ é de Moebius e tem três pontos fixos, temos $\sigma \circ \tau^{-1} = I$. Portanto

$$\sigma = \tau$$

Para construir σ vamos supor inicialmente que $z_i \neq \infty$para $i = 1, 2, 3.$ e $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ e $w_3 = \infty$.

Daí podemos escrever diretamente

$$\sigma(z) = \tfrac{z-z_2}{z-z_3} / \tfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$
$$z_1 = \infty \text{ pomos } \sigma(z) = \tfrac{z-z_2}{z-z_3}$$
$$z_2 = \infty \text{ pomos } \sigma(z) = \tfrac{z_1-z_3}{z-z_3}$$
$$z_3 = \infty \text{ pomos } \sigma(z) = \tfrac{z-z_2}{z_1-z_2}$$

Podemos agora produzir o caso geral a partir destes. Dados z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3

$$\tau(z_1) = 0 = \eta(w_1)$$
$$\tau(z_2) = 1 = \eta(w_2)$$
$$\tau(z_3) = 0 = \eta(w_3)$$

Então $\sigma = \eta^{-1} \circ \tau$ é a solução. (C.Q.D)

2.11. Dizemos que duas transformações de Moebius σ e τ são equivalentes quando existe uma transformação de Moebius η tal que

$$\sigma = \eta\tau\eta^{-1}$$

Neste sentido podemos enunciar

2.12.

Proposição 6. *Toda transformação de Moebius σ é equivalente a uma translação τ ou a uma multiplicação μ.*

$$\tau(z) = z + b \qquad \mu(z) = az$$

$\sigma \neq I$ verifica o primeiro caso se e só se σ tem um único ponto fixo. Portanto o segundo se verifica em caso contrário.

Dem: Suponhamos σ com um único ponto fixo z_0

$$\sigma(z_0) = z_0$$

Consideremos $\eta(z) = \frac{1}{z-z_0}$, portanto $\eta(z_0) = \infty$. Daí temos que $\eta\sigma\eta^{-1}(\infty) = \infty$ e este é o único ponto fixo de $\eta\sigma\eta^{-1}$ pois

$$\eta\sigma\eta^{-1}(z_1) = z_1 \Rightarrow \sigma(\eta^{-1}(z_1)) = \eta^1(z_1)$$

e $\eta^{-1}(z_1)$ é ponto fixo de σ, logo $\eta^1(z_1) = z_0$ e $z_1 = \eta(z_0) = \infty$.

Se $\xi = \eta\sigma\eta^{-1}$ tem apenas o ∞ fixo então ξ é uma translação pois se

$$\xi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

temos que $\xi(\infty) = \frac{a}{c} = \infty$, donde $c = 0$. A equação de determinação dos pontos fixos é

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

donde $(d-a)z - b = 0$ e $z = \frac{b}{d-a}$ e $z = \infty$ se para $a = d$ e a expressão de ξ fica

$$\xi(z) = z + \frac{b}{d}$$

Suponhamos agora σ com dois pontos fixos $\sigma(z_0) = z_0 \neq z_1 = \sigma(z_1)$.

Consideremos $\eta(z) = \dfrac{z-z_0}{z-z_1}$, $\eta(z_0) = 0$ e $\eta(z_1) = \infty$.

Seja $\xi = \eta\sigma\eta^{-1}$, então $\xi(\infty) = \infty$e $\xi(0) = 0$.

$$\xi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\xi(\infty) = \frac{a}{c} = \infty \text{ nos dá } c = 0$$

$$\xi(0) = \frac{b}{d} = 0 \text{ nos dá } b = 0, \text{ donde}$$

$$\xi = \frac{a}{d}z$$

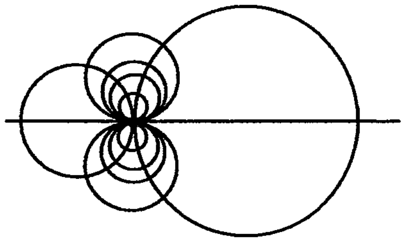
(C.Q.D)

Observação 6. *$\xi = \eta\sigma\eta^{-1}$ é chamado também de conjugada de σ por η. Passar de σ para ξ é uma espécie de mudar de referencial ou observar de modo diferente o "mesmo"fenômeno topológico. ξ e σ tem as mesmas propriedades geométricas. Sabemos que as transformações de Moebius preservam círculos, ângulos e orientação. Se σ deixa um círculo C invariante então ξ deixa invariante o círculo $\eta(C)$. Assim feixes invariantes por σ vão em feixes invariantes por ξ.*

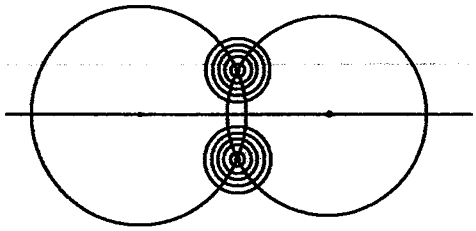
2.13. Dados dois círculos C_1 e C_2, em $\widetilde{\mathbb{C}}$ o conjunto dos círculos S ortogonais a ambos C_1 e C_2 é chamado de um feixe de círculos. Se C_1 e C_2 tem um só ponto em comum, então o feixe de círculos que C_1 e C_2 determinam é chamado de feixe **parabólico**. Se C_1 e C_2 tem dois pontos em comum então o feixe é **hiperbólico**. Se C_1 e C_2 não tem ponto em comum o feixe que eles determinam é chamado **elítico**.

Exemplos em $\widetilde{\mathbb{C}}$

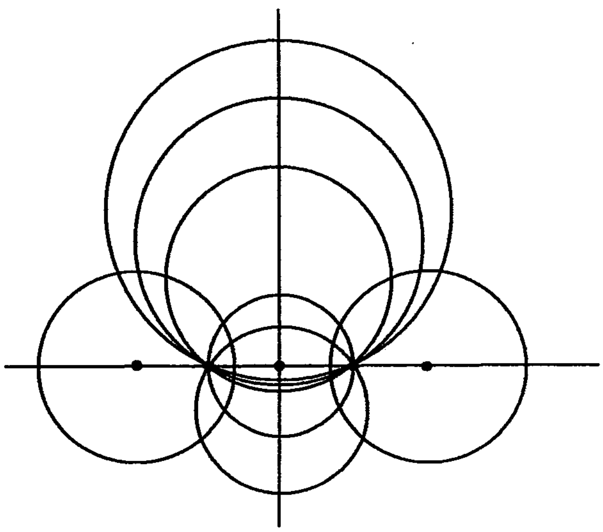
Parabólicas



Hiperbólicas



Elíticas



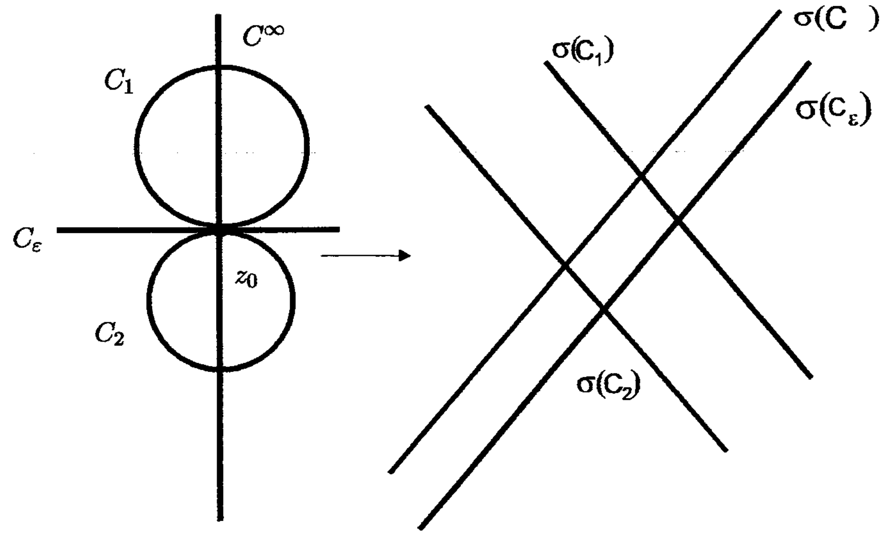
Se $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ é o feixe determinado pelos círculos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ de $\widetilde{\mathbb{C}}$ observe que se S_1 e S_2 são círculos de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ então $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ estão no feixe determinado por S_1 e S_2, ou seja, os feixes $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ e $\mathcal{F}(S_1, S_2)$ são mutuamente ortogonais. Para ver isso basta levarmos, por uma transformação de Moebius, os exemplos da esquerda acima nos da direita, pois fica óbvia a ortogonalidade dos feixes $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ e $\mathcal{F}(S_1, S_2)$.

Caso parabólico:

Se $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{z_0\}$ o feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ é formado por circulos que se tangenciam em $\{z_0\}$. Tomemos σ de Moebius com

$$\sigma(z_0) = \infty$$

Assim, o feixe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ vai no feixe $\mathcal{F}(\sigma(\mathcal{C}_1), \sigma(\mathcal{C}_2))$. Mas $\sigma(\mathcal{C}_\infty)$, $\sigma(\mathcal{C}_\in)$ são retas paralelas e portanto o feixe correspondente é o de retas paralelas, todas ortogonais a $\sigma(\mathcal{C}_\infty)$ e $\sigma(\mathcal{C}_\in)$. Consequentemente o feixe que contem $\sigma(\mathcal{C}_\infty)$ e $\sigma(\mathcal{C}_\in)$ também é de retas paralelas e temos a ortogonalidade mutua, o memso então valendo para suas imagens inversas por σ

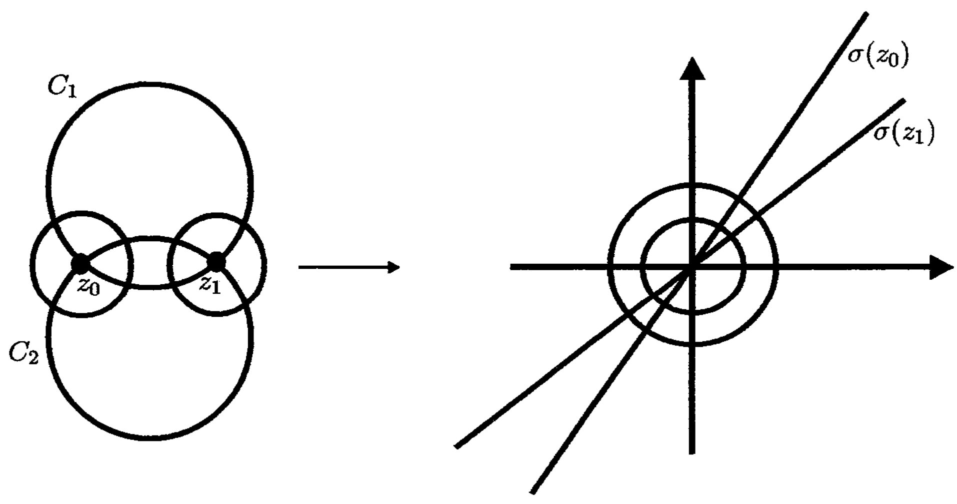


Caso hiperbólico

$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{z_0, z_1\}$. Neste caso tomamos σ de Moebius com

$$\sigma(z_0) = 0 \text{ e } \sigma(z_1) = \infty$$

e aplicando o mesmo argumento acima.



Caso elítico

Dados $\mathcal{C}_\infty$ e $\mathcal{C}_\in$ que não tem ponto em comum, tomamos dois círculos S_1 e S_2 ortogonais a ambos $\mathcal{C}_\infty$ e $\mathcal{C}_\in$ e estes tem dois pontos em comum z_0 e z_1. Daí procedemos como no caso hiperbólico. Obtemos a mesma configuração.

Se $\mathcal{F}$ é um feixe de círculos, denotamos por $\mathcal{F}^\perp$ o feixe perpendicular a $\mathcal{F}$. Então temos

$$\mathcal{F} \text{ parabólico} \Leftrightarrow \mathcal{F}^\perp \text{ parabólico}$$
$$\mathcal{F} \text{ hiperbólico} \Leftrightarrow \mathcal{F}^\perp \text{ elítico}$$

Chamamos também $\mathcal{F}^\perp$ de dual ou conjugado de $\mathcal{F}$.

Temos então uma geometria que envolve pontos, círculos, ângulos e orientação. O conjunto das transformações de Moebius $\mathbb{M}$ é um grupo de transformações que preservam tais elementos. Portanto raciocinarmos numa configuração é equivalente a fazermos o mesmo com sua imagem por qualquer transformação de Moebius. Se estamos trabalhando em $\widetilde{\mathbb{C}}$, procuramos sempre envolver o zero ou o infinito para termos retas, feixe de círculos cocentricos, etc. Quando usamos a esfera de Riemann já não faz muita diferença.

As transformações de Moebius não preservam em geral a distância euclideana de $\mathbb{C}$. Mais precisamente as únicas que preservam são as rotações, translações e suas composições.

2.14. Observe que a inversão segundo um círculo C em $\widetilde{\mathbb{C}}$ ou a reflexão segundo uma reta R (que chamaremos também de inversão) pode ser dada em termos de círculos e ortogonalidade.

Exercício:

1) Prove que se σ é transformação de Moebius e (z, z') são inversos segundo C então $(\sigma(z), \sigma(z'))$ são inversos segundo $\sigma(C)$.

2) Usando o exercício (1) e a noção de equivalênica (2.11), mostre que a composição de duas inversões segundo círculos C_1 e C_2 de $\widetilde{\mathbb{C}}$ é uma transformação de Moebius.

3) Seja $X \subset \widetilde{\mathbb{C}}$. Verifique que o conjunto das transformações de Moebius σ deixam X invariantes, isto é, $\sigma(X) = X$ formam um subgrupo de $\mathbb{M}$.

4) Se $X \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ é um círculo ou uma reta ele divide $\widetilde{\mathbb{C}}$ em duas regiões A e B. Verifique para σ em $\mathbb{M}$ com $\sigma(X) = X$

i) se $z_0 \in A$ e $\sigma(z_0) \in A$ então $\sigma(A) \subset A$

ii) se $z_0 \in A$ e $\sigma(z_0) \in B$ então $\sigma(A) \subset B$ e $\sigma(B) \subset A$ (Dê um exemplo deste caso)

5) Mostre que se σ é uma transformação (homeomorfismo) de $\widetilde{\mathbb{C}}$ que preserva círculos, ângulos e orientação então ela é de Moebius.

2.15.

Definição 9. *Se uma transformação de Moebius deixa um feixe parabólico ou hiperbólico ou elítico invariante (cada círculo) ela recebe respectivamente o nome do feixe de círculos conjugado. Caso ela não deixe nenhum feixe invariante é chamada Loxodrômica.*

6) Verifique que uma transformação de Moebius:

parabólica é equivalente a uma translação;

hiperbólica é equivalente a uma homotetia;
elítica é equivalente a uma rotação.

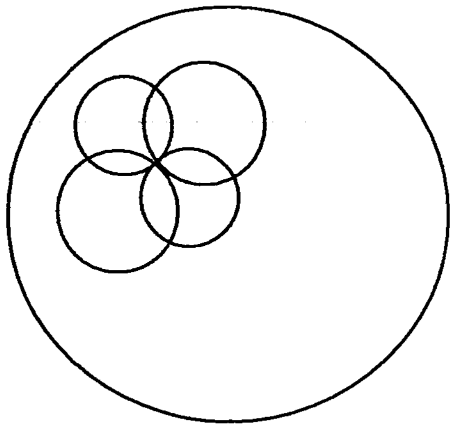
7) Escreva uma homotetia de razão λ como composição de duas inversões em círculos C_1 e C_2 de $\widetilde{\mathbb{C}}$

8) Se σ é parabólica, hiperbólica ou elítica toda equivalente a ela o será respectivamente.

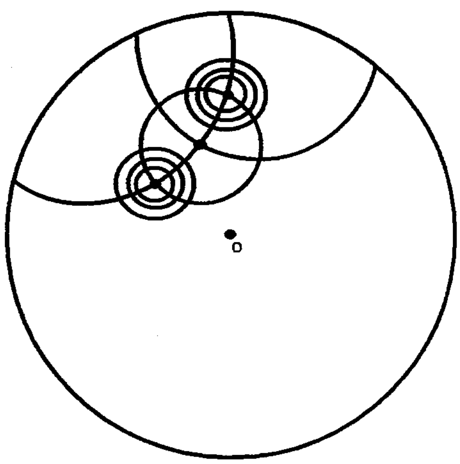
9) Se σ deixa um círculo de $\widetilde{\mathbb{C}}$ invariante σ não é loxodrômica.

Na esfera, os feixes de círculos acima descritos correspondem aos das figuras abaixo, com as mesmas definições, pois a projeção estereográfica preserva círculos e ângulos.

Parabólico e seu conjugado, também parabólico, por um ponto genérico da esfera.



Elítico e seu conjugado, hiperbólico por dois pontos genéricos da esfera.



2.16. Existem alguns subgrupos do grupo das transformações de Moebius que queremos destacar:

1) O semiplano de Poincaré.

Seja P o semiplano superior de $\widetilde{\mathbb{C}}$

$$P = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} \;\; / \;\; Im(z) \geq 0 \quad ou \quad z = \infty\}$$

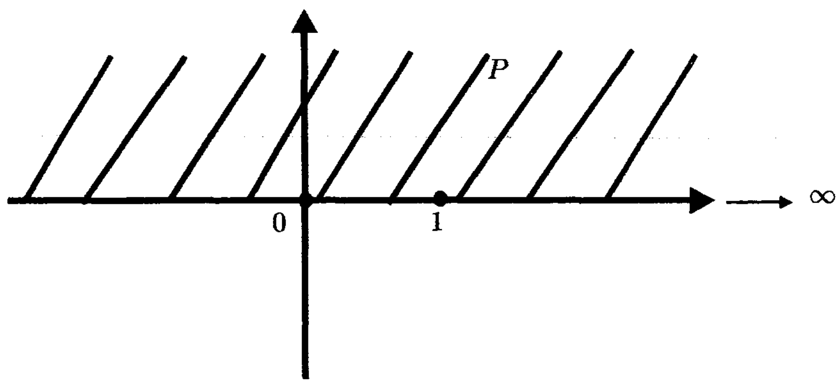
Seja $\mathbb{M}_P \subset \mathbb{M}$ o subgrupo das transformações de Moebius que deixa P invariante

$$\sigma \in \mathbb{M}_P \Leftrightarrow \sigma \in \mathbb{M} \quad \text{e} \quad \sigma(P) = P$$

Vamos descreve-las por suas expressões analíticas

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}; \qquad ad - bc \neq 0$$

Como $\sigma(P) = P$ e σ tem inversa então σ leva os reais nos reais incluindo ∞, assim como sua inversa.



Sejam $\sigma(z_1) = 1$, $\sigma(z_2) = 0$ e $\sigma(z_3) = \infty$. Então z_1, z_2, z_3 são reais (ou ∞). Como os pontos e respectivas imagens determinam σ podemos esrcevê-la com coeficientes reais.

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}; \qquad ad - bc \neq 0$$

a, b, c e d reais.

Para saber se σ preserva o semiplano superior basta examinar σ num ponto de P, digamos i.(2.14 exercício 4)

$$\sigma(i) = \frac{ai+b}{ci+d}$$

e devemos pedir $Im\sigma(i) > 0$. Vejamos

$$\frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(d-ci)}{c^2+d^2} = \frac{bd+ac+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

Portanto a condição $Im\sigma(i) > 0$ é equivalente a $ad - bc > 0$.

P juntamente com o grupo de transformações $\mathbb{M}_P$ é chamado de semiplano de Poincaré.

2) O disco unitário

Sejam D o disco unitário de $\widetilde{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{M}_D$ o subgrupo das transformações de Moebius que deixam D invariante.

$$\sigma \in \mathbb{M}_D \Leftrightarrow \sigma \in \mathbb{M} \;\; e \;\; \sigma(D) = D$$

Como σ tem inversa temos que o círculo unitário é também invariante

$$\sigma(S^1) = S^1$$

Vamos determinar as transformações de $\mathbb{M}_D$ usando o conhecimento que temos das transformações de semiplano de Poincaré. Para isto tomamos uma $\xi \in \mathbb{M}$ tal que

$$\xi(D) = P$$

por exemplo, podemos tomar ξ assim

$$\xi(1) = 1$$
$$\xi(-i) = 0$$
$$\xi(i) = \infty \text{ donde}$$
$$\xi(z) = \tfrac{z+i}{z-i}/\tfrac{1+i}{1-i} \text{ ou}$$
$$\xi(z) = \frac{z+i}{iz+1}$$

Como ξ preserva círculos temos que S^1 vai em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Para saber se o disco D vai um P basta ver onde vai o zero.

$$\xi(0) = i \in P$$

Observe agora que $\sigma \in \mathbb{M}_P$ se e somente se $\xi^{-1}\sigma\xi \in \mathbb{M}_D$. Calculemos tomando as matrizes que representam estas transformações

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

onde a, b, c e d são reais quaisquer que satisfazem $ad - bc > 0$. Então temos apenas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ com det } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc > 0$$

$$\xi(z) = \frac{z+i}{iz+1} \text{ com matriz } \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Uma transformação genérica de $\mathbb{M}_D$ é então do tipo

$$\xi^{-1}\sigma\xi$$

portanto tem para matriz de coeficientes

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+d)+(b-c)i & (b+c)+(a-d)i \\ (b+c)-(a-d)i & (a+d)-(b-c)i \end{pmatrix}$$

Como a, b, c, d são reais quaisquer, apenas com $ad - bc > 0$, os números complexos que aparecem na primeira linha são quaisquer. A divisão por 2 é irrelevante e temos que a matriz de uma transformação genérica de $\mathbb{M}_D$ é do tipo

$$\begin{pmatrix} e & f \\ \overline{f} & \overline{e} \end{pmatrix}$$

Como esta tem o mesmo determinante que o de σ a transformação de M_D é do tipo

$$\tau(z) = \frac{ez+f}{\overline{f}z+\overline{e}} \text{ com } e\overline{e} - f\overline{f} > 0$$

Daí temos $e \neq 0$ e podemos expressá-la de outra maneira.

$$\tau(z) = \frac{\frac{e}{\overline{e}}z + \frac{f}{\overline{e}}}{\frac{\overline{f}}{\overline{e}}z+1} = \frac{e}{\overline{e}}\,\frac{z+\frac{f}{e}}{\frac{\overline{f}}{\overline{e}}z+1}$$

Como $\dfrac{e}{\overline{e}}$ tem norma 1 este é do tipo $e^{i\theta}$. Finalmete podemos escrever então

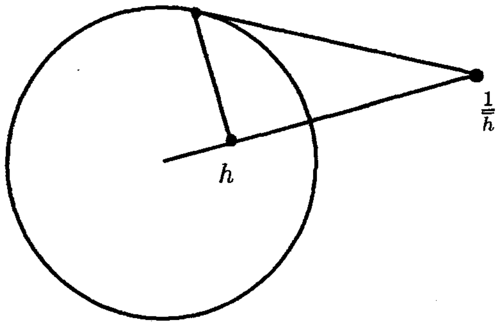
$$\tau(z) = e^{i\theta}\frac{z-h}{-\overline{h}z+1}$$

Portanto, $\tau \in M_D$ é uma composição de uma transformação do tipo

$$\frac{z-h}{-\overline{h}z+1}$$

com uma rotação de ângulo θ. Como a rotação está em M_D temos τ também em M_D.

Observe que $h = \frac{f}{e}$, logo $|h| < 1$ e que $\tau(h) = 0$ e $\tau(\frac{1}{\overline{h}}) = \infty$ e que h e $\frac{1}{\overline{h}}$ são inversos um do outro segundo o círculo S^1.



Vejamos que os pontos fixos de τ também são inversos um do outro segundo S^1, se não estão em S^1, isto é, $\tau(z_0) = z_0$ e $z_0\overline{z_0} \neq 1$.

De fato, seja

$$\tau(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}, \quad \text{então}$$

$$\tau(\frac{1}{\overline{z_0}}) = \frac{\frac{a}{\overline{z_0}}+b}{\frac{\overline{b}}{\overline{z_0}}+\overline{a}} \quad \text{ou}$$

$$\tau(\frac{1}{\overline{z_0}}) = \frac{a+b\overline{z_0}}{\overline{b}+\overline{a}\overline{z_0}} =$$

$$= (\frac{\overline{a}\overline{z_0}+\overline{b}}{b\overline{z_0}+a})^{-1} = \overline{\tau(z_0)}^{-1} = \overline{z_0}^{-1} = \frac{1}{\overline{z_0}}$$

Se z_0 está em S^1 então $z_0 = \frac{1}{\overline{z_0}}$ e pode haver um outro ponto fixo z_1 em S^1 independente.

Exercícios:

a) Seja $\sigma \in \mathbb{M}$ hiperbólica. Mostre que seus pontos fixos são inversos um do outro segundo algum círculo invariante por σ.

b) Se um ponto fixo $z_0 \in D$ de $\sigma \in \mathbb{M}_D$, é interior a D, então σ é hiperbólica e existe $\tau \in \mathbb{M}_D$ tal que $\tau\sigma\tau^{-1}$ é uma rotação.

c) Se $\sigma \in \mathbb{M}_D$ tem um único ponto fixo z_0, este está em S^1, σ é parabólico e portanto equivalente a uma translação.

d) Se $\sigma \in \mathbb{M}_D$ tem dois pontos fixos z_0 e z_1 com z_0 em S^1 então z_1 deve estar também em S^1, σ é elítica e portanto equivalente a uma homotetia.

3. Rotações da Esfera

As rotações da esfera S^2 correspondem em $\widetilde{\mathbb{C}}$, via projeção estereográfica, a transformções de Moebius particulares.

Pelo exercício (5) de (2.14) e pelo fato da projeção estereográfica preservar círculos, ângulos e orientação temos que as rotações da esfera produzem em $\widetilde{\mathbb{C}}$ transformações de Moebius. Vamos determinar suas expressões analíticas.

Uma rotação σ tem dois pontos fixos na esfera p e $-p$, se π é projeção estereográfica e $\pi(p) = z_0$ então $\pi(-p) = -\frac{1}{\overline{z_0}}$ (Verifique).

Seja $\tau(z) = \frac{z-z_0}{\overline{z_0}z+1}$, isto é, $\tau(z_0) = 0$ e $\tau(-\frac{1}{\overline{z_0}}) = \infty$.

O feixe hiperbólico de círculos determinado pelos pontos z_0 e $-\frac{1}{\overline{z_0}}$ é levado por τ no feixe de círculos centrado na origem. Portanto a transformação

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \rho$$

é de Moebius, tem 0 e ∞ fixos e deixa invariante o feixe de círculos de centro zero, sendo então uma rotação

$$\rho(z) = uz$$

com $|u| = 1$

$$\sigma = \tau^{-1}\rho\tau$$

Para obtermos uma matriz para σ basta multiplicarmos então

$$\begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ -\overline{z_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_0 \\ \overline{z_0} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u + z_0\overline{z_0} & -uz_0 + z_0 \\ -u\overline{z_0} + \overline{z_0} & uz_0\overline{z_0} + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \overline{u}z_0\overline{z_0} & -z_0 + \overline{u}z_0 \\ -u\overline{z_0} + \overline{z_0} & uz_0\overline{z_0} + 1 \end{pmatrix}$$

Temos então uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\sigma(z) = u\frac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}} \qquad \text{com } |u| = 1$$

a e b quaisquer.

Podemos expressa-la de forma mais simples assim,

Se $a = 0$

$$\sigma(z) = u\frac{b}{-\overline{b}}\frac{1}{z} \qquad \text{ou}$$

$$\sigma(z) = v\frac{1}{z} \ ; \ |v| = 1.$$

Se $a \neq 0$

$$\sigma(z) = u\frac{a}{\overline{a}}\frac{z+\frac{b}{a}}{\frac{-\overline{b}}{\overline{a}}z+1} \qquad \text{ou}$$

$$\sigma(z) = v\frac{z-c}{-\bar{c}z+1} \text{ ; } |v| = 1$$

Como a identidade é deste tipo (c=0, v=1) e a composição de duas rotações é uma rotação temos que a composição de duas dos tipos acima é do mesmo tipo. Temos então um subgrupo $\mathbb{M}_{S^2}$ de $\mathbb{M}$, que corresponde ao grupo das rotaçòes de S^2. Observe que I usada acima é também rotação. As do tipo

$$\tau(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z+1}$$

correspondem a rotações de S^2 cujo eixo de rotação passa pelo equador, isto é, seus pontos fixos estão em S^1.

4. Rotações e translações em $\mathbb{D}$

Já vimos que uma transformação σ de $\mathbb{M}$ que deixa $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1\}$ invariante é da forma:

$$\sigma(z) = \tfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \text{ com } |a| > |b| \qquad (1)$$

Operando com a expressão sem alterar σ podemos chegar a:

$$\sigma(z) = \tfrac{a}{\bar{a}}\tfrac{z-z_1}{-\bar{z}_1z+1} \qquad (2)$$

onde $z_1 = -\frac{b}{a}$ e $\sigma(z_1) = 0$ com $|z_1| < 1$. Como $\frac{a}{\bar{a}}$ tem norma 1 temos que $\frac{a}{\bar{a}} = e^{i\theta}$, donde

$$\sigma(z) = e^{i\theta}\tfrac{z-z_1}{-\bar{z}_1z+1}$$

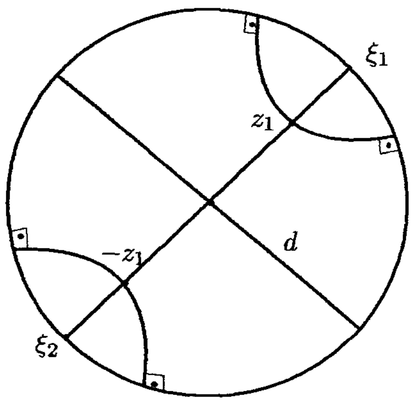
Se ρ_θ é a rotação de centro zero e ângulo θ de $\mathbb{D}$ e

$$h_{z_1}(z) = \tfrac{z-z_1}{-\bar{z}_1z+1}$$

temos σ decomposta em:

$$\sigma = \rho_\theta \circ h_{z_1}$$

Observe que h_{z_1} é uma transformação hiperbólica de $\mathbb{D}$ com dois pontos fixos.
Se $z_1 = re^{i\varphi}$ então os pontos fixos são $\xi_1 = e^{i\varphi}$ e $\xi_2 = -e^{i\varphi}$



$$h_{z_1}(z) = \tfrac{z-z_1}{-\bar{z}_1z+1}$$
$$h_{z_1}(z_1) = 0 \quad h_{z_1}(0) = -z_1 \qquad (3)$$
$$h_{z_1}(c) = d \quad h_{z_1}(d) = c'$$

Vamos analisar algumas consequencias da decomposição dada em (2), isto é

$$\sigma = \rho_\theta \circ h_{z_1}$$

i) σ fixa o centro de $\mathbb{D}$ se e só se σ é uma rotação euclideana. Se σ fixa $z_0 \neq 0$ temos que σ é conjugada $(\eta\sigma\eta^{-1})$ a uma rotação euclideana ρ_α. Como ρ_α roda um diametro de $\mathbb{D}$ de um ângulo α, σ "roda" um ortocírculo por z_0 de um ângulo α também. Chamamos σ de rotação de $\mathbb{D}$.

ii) Suponhamos z_0 e z_1 pontos distintos de $\mathbb{D}$. Então h fixa z_1 e z_0 se e so se h é a função identidade (isto decorre de (i)), logo duas transformações de $\mathbb{D}$ são iguais se e so se coincidem em dois pontos distintos aí.

iii) Seja então $\sigma = \rho_\theta \circ h_{z_1}$ como em (2). Se ρ_π é a rotação euclideana com centro 0 e ângulo razo temos $\sigma = \rho_\theta \circ \rho_\pi \circ \rho_\pi \circ h_{z_1} = \rho_{(\theta+\pi)} \circ (\rho_\pi \circ h_{z_1})$ (4).

A transformação $\sigma' = \rho_\pi \circ h_{z_1}$ é dada por

$$\sigma'(z) = \frac{z_1 - z}{1 - \bar{z}_1 z} \qquad (5)$$

e mais $\sigma'(0) = z_1$ e $\sigma'(z_1) = 0$. Como σ' tem um ponto fixo em $\mathbb{D}$ da forma λz_1 $(0 < \lambda < 1)$ segue que σ é uma rotação em $\mathbb{D}$ em torno do seu ponto fixo e de ângulo razo (por (ii)). Concluindo:

Cada transformação de $\mathbb{M}$ que deixa $\mathbb{D}$ invariante é produto de duas rotações em $\mathbb{D}$ uma sempre euclidiana. Ainda σ é também produto de uma "translação" em $\mathbb{D}$ por uma rotação euclideana em $\mathbb{D}$.

Exercicios

1) Considere $\sigma = \rho_\theta \circ h_{z_1}$ como em (2). É possível a decomposição $\sigma = \rho_\xi \circ h_{z_2}$ com $z_2 \neq z_1$? Justifique a resposta. Ainda, responda e justifique a mesma questão quando σ é a composta de duas rotações.

2) Considere $G = \{h_{z_1} : z_1 \in \mathbb{D}\}$, h_{z_1} como em (3). G é um grupo para a composição de transformações? Justifique a resposta.

3) Seja $z_1 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq 0$. Considere $I = \{tz_1 : t \in [0,1]\}$. Seja S um círculo cujo diâmetro seja I. Construa um ortocírculo T em D que seja ortogonal a S e também a seu diâmetro I. Conclua que $T \cap I$ é o ponto fixo de $\rho_\pi \circ h_{z_1}$.

4.1. **Métricas em $\mathbb{D}$.** Afim de entendermos melhor as transformações de $\mathbb{M}$ que deixam $\mathbb{D}$ invariante vamos procurar propriedades de pares de pontos de $\mathbb{D}$ que não se alteram quando transformados por tais funções de $\mathbb{D}$. Na verdade estamos interessados em metrizar $\mathbb{D}$ de sorte que suas transformações de Moebius sejam isometrias. Vamos então imitar um procedimento euclideano para esse fim.

Consideramos no plano euclideano uma lista de quatro pontos, P_1, P_2, P_3, P_4

Uma condição necessária e suficiente para que exista uma isomeria euclideana levando $\{P_1, P_2\}$ sobre $\{P_3, P_4\}$ é que as translações $P_1 - P_2$ e $P_3 - P_4$ tenham o mesmo módulo. Na nossa situação vale o seguinte:

Lema 1. *Seja z_1, z_2, w_1, w_2 uma lista de elementos de $\mathbb{D}$. Existe então uma transformação σ de $\mathbb{D}$ com $\sigma(z_i) = w_i$ $(i = 1, 2)$ se e so se os números $h_{z_2}(z_1)$ e $h_{w_2}(w_1)$ tem o mesmo módulo.*

Dem.: Admitimos σ em $\mathbb{D}$ tal que $\sigma(z_i) = w_i$. A transformação $h = h_{w_2} \circ \sigma \circ h_{z_2}^{-1}$ é de $\mathbb{D}$, fixa zero e $h(h_{z_2}(z_1)) = h_{w_2}(w_1)$. Por (i), h é uma rotação euclideana e com isto

$$|h_{z_2}(z_1)| = |h_{w_2}(w_1)| \qquad (6)$$

Suponhamos que valha (6). Logo existe $\theta \in S^1$ tal que $e^{i\theta}h_{z_2}(z_1) = h_{w_2}(w_1)$. É imediato então que $\sigma = h_{w_2}^{-1} \circ \rho_\theta \circ h_{z_2}$ leva z_i em w_i, $(i = 1, 2)$. ∎

Em vista desse resultado definamos para os pares de pontos de $\mathbb{D}$

$$D_0(z_1, z_2) = |h_{z_2}(z_1)| = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} \qquad (7)$$

Vale então:

Proposição 7. *D_0 é uma métrica em $\mathbb{D}$.*

Dem.: É claro que $D_0(z_1, z_2) = D_0(z_2, z_1)$ e este número não é negativo, é zero se e só se $z_1 = z_2$. Resta estabelecer que se z_1, z_2, z_3 são pontos de $\mathbb{D}$ então $D_0(z_1, z_2) + D_0(z_2, z_3) \geq D_0(z_1, z_3)$. Pelo lema anterior não há perda de generalidade supormos $z_1 = x > 0, z_2 = 0$ e $z_3 = z$. Temos então que mostrar que $D_0(x, 0) + D_0(0, z) \geq D_0(x, z)$, ou seja, $x + |z| \geq \frac{|z-x|}{|1-xz|}$.

É suficiente para isto provar que

$$\frac{x+|z|}{1+x|z|} \geq \frac{|z-x|}{|1-xz|} \text{ para } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < |z| < 1 \qquad (8)$$

Temos

$$\left(\frac{x+|z|}{1+x|z|}\right)^2 = \frac{1+2x|z|+x^2|z|^2-1+x^2+|z|^2-x^2|z|^2}{1+2x|z|+x^2|z|2} = 1 - \frac{(1-x^2)(1-|z|^2)}{(1+x|z|)^2} \qquad (9)$$

$$(|\tfrac{x-z}{1-xz}|)^2 = 1 - \frac{(1-x^2)(1-|z|^2)}{(1-xz)^2} \qquad (10)$$

Subtraindo (10) de (9) temos

$$(1-x^2)(1-z^2)\left(\frac{1}{|1-xz|^2} - \frac{1}{1-x|z|^2}\right) = (1-x^2)(1-|z|^2)\left(\frac{2x(|z|+R(z))}{|1-xz|^2|1+x|z||^2}\right) \geq 0 \qquad (11)$$

∎

Corolário 1. *A igualdade (11) é satisfeita se e só se $R(z) = -|z|$, isto é, se e só se $z, 0, x$ são colineares. Mas isto equivale a dizer que z_1, z_2, z_3 estão nesta ordem em um ortocírculo de $\mathbb{D}$.*

A proposição a seguir engloba o lema (1) e a proposição (7) no contexto do semiplano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ e pode ser facilmente provada.

Proposição 8. *Seja z_1, z_2, w_1, w_2 uma lista de elementos de $\mathbb{H}$. Existe então uma transformação σ desse espaço tal que $\sigma(z_i) = w_i$ (i=1,2) se e só se $|J(h_{z_2}(z_1))| = |J(h_{w_2}(w_1))|$.*

Aqui, h_{z_0} é definida por $h_{z_0}(z) = \frac{z-x_0}{y_0}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}$. Mais, $D_0'(z_1, z_2) = |J(h_{z_2}(z_1))|$ é métrica em $\mathbb{H}$.

Pela boa definição de D_0', através de um cálculo direto, obtemos

Proposição 9. *A transformação $J : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ satisfaz para z_1, z_2 em $\mathbb{H}$*

$$D_0(J(z_1), J(z_2)) = D_0'(z_1, z_2)$$

Estas últimas proposições podem ser entendidas da seguinte forma: $D_0(D_0')$ é função distância entre os pontos de $\mathbb{D}(\mathbb{H})$. As transformações de $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ são $D_0(D_0')$-isometrias. Por fim, J é uma isometria entre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$.

Vamos retificar as métricas D_0 e D_0' pois são limitadas e ainda, não satisfazem a propriedade de aditividade nos segmentos de ortocírculos, ou seja, z_2 é do segmento $[z_1, z_3]$ se e só se $D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) = D(z_1, z_3)$.

A métrica que procuramos é da forma $D = f \circ D_0$ onde $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ é estritamente crescente e ilimitada. Escolhendo $g = tanh^{-1}$ (inversa da tangente hiperbólica) ou uma sua múltipla cg $(c > 0)$ resolvemos a questão. Tomaremos $f = 2tanh^{-1}$. Formalmente temos

Proposição 10. *Existe uma métrica D em $\mathbb{D}$ tal que*
(i) $D = f \circ D_0$
(ii) $D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) = D(z_1, z_3)$ se e só se $z_2 \in [z_1, z_3]$ e $[z_1, z_3]$ é segmento de um ortocírculo de $\mathbb{D}$.

Dem.: Sejam z_1 e z_2 pontos distintos de $\mathbb{D}$. Estes determinam ξ_1 e ξ_2 (em S^1) que são os extremos do ortocírculo de $\mathbb{D}$ determinado por z_1 e z_2. Podemos supor que a ordem no arco é a de ξ_2 para ξ_1 e a disposição da quadra é $\xi_2 z_2 z_1 \xi_1$. Seja σ uma transformação de $\mathbb{D}$ tal que $\sigma(\xi_2) = -1, \sigma(z_2) = 0, \sigma(z_1) = x > 0$ e $\sigma(\xi_1) = 1$. Definimos então

$$D(z_1, z_2) = 2tanh^{-1}(x) = ln\tfrac{1+x}{1-x}, x = D_0(z_1, z_2)$$

Por construção $D = f \circ D_0$ onde $f = 2tanh^{-1}$. Ainda $D(z_1, z_2) = D(z_2, z_1)$ e este número não negativo é zero se e só se $z_1 = z_2$. Vamos então estabelecer (ii).

Suponhamos um terceiro ponto z_3 e seja $z = \sigma(z_3)$. Temos $D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) = D(x, 0) + D(0, z) = 2(tanh^{-1}(x) + tanh^{-1}(|z|)) = 2tanh^{-1}\frac{x+|z|}{1+x|z|} = a \quad (12)$ e também $D(x, z) = 2tanh^{-1}|\frac{x-z}{1-xz}| = b \quad (13)$.

Como $tanh^{-1}$ é estritamente crescente, $a \geq b$ se e só se $\frac{x+|z|}{1+x|z|} \geq |\frac{x-z}{1-xz}|$. O corolário da proposição (1) garante que esta última relação é correta e mais, vale a igualdade se e só se $z_2 \in [z_1, z_3]$ e $[z_1, z_3]$ está contido em um ortocírculo de $\mathbb{D}$. ■

Podemos transportar a métrica D para $\mathbb{H}$ definindo aí

$$D'(z_1, z_2) = D(J(z_1), J(z_2))$$

Desta maneira J é isometria relativamente às métricas retificadas. Reforçamos mais uma vez que as transformações de $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ continuam isometrias relativamente às métricas novas. Não esqueçamos que essas isometrias preservam ângulos orientados.

Uma isometria de $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ que reverte a orientação dos ângulos é a inversão por um ortocírculo.

Proposição 11. *Seja L um ortocírculo de $\mathbb{D}$ e σ_L a inversão por ele definida. Então σ_L é uma isometria de $\mathbb{D}$ que reverte a orientação de ângulos aí.*

Dem.: Podemos supor, sem perda de generalidade, que σ_L é a inversão pelo diâmetro real de $\mathbb{D}$. Assim $\sigma_L(z) = \bar{z}$. É a restrição de uma reflexão euclideana ao disco $\mathbb{D}$. Por isso reverte a orientação dos ângulos. Por fim, $D(\sigma_L(z_1), \sigma_L(z_2)) = 2tanh^{-1}|\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{-\bar{z}_2\bar{z}_1+1}| = D(z_1, z_2)$ e então σ_L é isometria de $\mathbb{D}$. ■

Uma inversão por L é também chamada de reflexão por L ou simplesmente reflexão de $\mathbb{D}$ ($L \subset \mathbb{D}$).

Exercícios

1) Defina reflexão por um ortocírculo de $\mathbb{H}$.
2) Demonstre as proposições 2) e 3)
3) D_0 não é aditiva em um diâmetro de $\mathbb{D}$. Mostre esse fato.
4) Considere z_0 em um ortocírculo C. Mostre que a equação $D(z_0, z) = y > 0$ tem exatamente duas soluções em C para cada y.

4.2. **Caracterização das isometrias de $\mathbb{D}(\mathbb{H})$.** Como uma reflexão não é uma transformação de Moebius mas é também uma isometria a questão natural a saber é se existem outras isometrias que não são funções de Moebius. A resposta é a seguinte:

Proposição 12. *Seja σ uma isometria de $\mathbb{D}$. Então ou σ é de Moebius ou existe uma reflexão σ_L tal que $\sigma \circ \sigma_L$ seja de Moebius.*

Dem.: Seja σ uma isometria e admitamos que σ tenha dois pontos fixos distintos. Apoiados na aditividade de $\mathbb{D}$ em ortocírculos concluimos que σ fixa aquele C determinado pelos dois pontos. Se $\sigma = \sigma_C$ temos $\sigma \circ \sigma_C = id$ e então é de Moebius. Se $\sigma \neq \sigma_C$ existe P_0 fora de C tal que $\sigma(P_0) \neq \sigma_C(P_0)(*)$. Seja $C^{\perp}$ o ortocírculo por P_0 que é ortogonal a C.

Como σ preserva $C^{\perp}$ e $D(P_0, Q_0) = D(\sigma(P_0), \sigma(Q_0))$ segue $\sigma(P_0) = P_0$ pelo exercício (4) da secção anterior. Assim, σ fixa $C^{\perp}$.

Seja então P tal que esteja fora de $C \cup C^{\perp}$. P é dos ortocírculos ortogonais a C e C' por P. Como $\sigma(P)$ é dos mesmos, segue $\sigma(P) = P$ e aí $\sigma = id$.

Admitamos agora que σ tem apenas um ponto fixo F. Para $P \neq F$ consideremos a rotação de $\mathbb{D}$ em torno de F que traz $\sigma(P)$ de volta a P. Segue disto que $\rho \circ \sigma$ tem dois pontos fixos distintos. Aí então pelo caso anterior $\sigma = \rho^{-1}$ (é de Moebius) ou $\sigma_L \circ \sigma = \rho^{-1}$.

Finalmente se σ não tiver pontos fixos em $\mathbb{D}$ seja $\sigma' = \sigma \circ h_a^{-1}$ onde $a = \sigma^{-1}(0)$. Com isto 0 é ponto fixo de σ'. Se σ' tiver dois pontos fixos concluímos ou $\sigma = h_a$ ou existe L tal que $\sigma_L \circ \sigma = h_a$. Se σ' tiver apenas um ponto fixo neste caso usamos o mesmo racioncínio do caso anterior para concluir nossa tese. ■

Corolário 2. *Seja σ uma isometria em $\mathbb{D}$. Se σ preserva ângulos orientados então σ é de Moebius. Caso contrário, reverte-os e existe L tal que $\sigma_L \circ \sigma$ é de Moebius.*

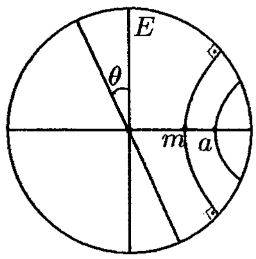
Corolário 3. *Duas isometrias de $\mathbb{D}$ são iguais se e só se coincidem em três pontos que não são de um mesmo ortocírculo. Se ambas preservam (revertem) a orientação então são iguais se e só se coincidem em dois pontos distintos.*

Dem.: Suponhamos σ e σ' isometrias que revertem a orientação (dos ângulos orientados) e coincidem em dois pontos distintos. Logo $\sigma_L \circ \sigma$ e $\sigma_L \circ \sigma'$ coincidem nos mesmos pontos se L for o ortocírculo determinados pelos tais. Disto $\sigma_L \circ \sigma = \sigma_L \circ \sigma'$ em $\mathbb{D}$ pois são de Moebius. Assim $\sigma = \sigma'$. As demais teses são consequências imediatas da proposição 12 e corolário 2. ■

Destacaremos a seguir a família dos ortocírculos de $\mathbb{D}$ através da seguinte

Proposição 13. *Se σ é uma transformação de Moebius de $\mathbb{D}$ então σ é produto (composição) de duas reflexões por ortocírculos aí. Senão, supondo σ isometria de $\mathbb{D}$, ou é uma reflexão ou é produto de três, ainda por ortocírculos de $\mathbb{D}$.*

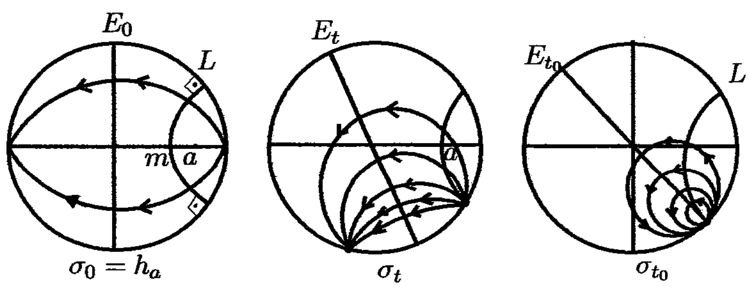
Dem.: Seja $\sigma = \rho_{2\theta} \circ h_a$ onde $a = \sigma^{-1}(0)$. Seja $L(E)$ o ortocírculo ortogonal ao diâmetro de $\mathbb{D}$, que contem a, pelo ponto médio $m(0)$ do segmento $[0, a]$ ($[-a, a]$). Seja $L' = \rho_\theta(E)$. Temos então $h_a = \sigma_E \circ \sigma_L$ e $\rho_{2\theta} = \sigma_{L'} \circ \sigma_E$ pelo corolário 2.



Assim $\sigma = \sigma_{L'} \circ \sigma_E \circ \sigma_E \circ \sigma_L = \sigma_{L'} \circ \sigma_L$. Para finalizar, se σ não for reflexão e não for de Moebius $\sigma \circ \sigma_M$ é de Moebius e a tese segue, para $\mathbb{M}$ ortocírculo de $\mathbb{D}$ ■

Vamos conluir esta secção fazendo uma animação das transformações de Moebius sugerida pela proposição anterior. Especificamente vamos considerar o subgrupo das rotações euclideanas de $\mathbb{D}$, $S = \{\rho_t : t \in \mathbb{R}\}$, e uma translação h_a, de $\mathbb{D}$, fixada $(a > 0)$. Consideremos as transformações

$$\sigma_t = \rho_{2t} \circ h_a = \sigma_{E_t} \circ \sigma_L$$



Exercícios

1) Sejam P_0 e P_1 pontos de $\mathbb{D}$ e $S = \{P \in \mathbb{D} : D(P_0, P) = D(P_1, P)\}$. Então S é um ortocírculo de $\mathbb{D}$. Determine condições sobre o par $\{P_1, P_2\}$ para que S seja um diâmetro de $\mathbb{D}$.

2) Seja σ uma isometria cujo conjunto de pontos fixos é exatamente um ortocírculo. Então σ é uma reflexão através desse arco.

3) Exiba uma isometria que é produto de três reflexões e não é uma reflexão.

4) Faça uma animação de transformações de Moebius em $\mathbb{H}$ a partir de uma família de translações ($\sigma_t = \rho_\theta \circ h_t$)

4.3. **Geometria Hiperbólica.** O "programa de Erlanger"proposto por Felix Klein (1872) para o estudo de geometria era o seguinte:

Seja G um grupo de transformações de uma espaço Y (G é um subgrupo do grupo das bijeções de Y com a operação de composição destas aplicações). Consideremos X subconjunto de Y tal que para qualquer $h \in G$ temos $h(X) = X$ e ainda dados x_1 e x_2 em X existe sempre h em G com $h(x_1) = x_2$.

Os elementos de X são chamados de pontos e os de G de transformações de pontos ou movimentos em X. Se uma figura F' de X (F' é apenas um subconjunto de X) é imagem de outra F através de um movimento em X elas são ditas G-congruentes.

Figuras especiais são (como no caso de geometria euclideana plana) pontos, retas, segmentos de retas, círculos, cônicas e polígonos. Relações habituais entre essas figuras são incidência (entre ponto e reta ou círculo), paralelismo e perpendicularismo (entre retas), distância entre pontos, comprimento de curvas e áreas de polígonos. A G-geometria de X é então o estudo de propriedades (de figuras) que são invariantes pelas transformações de G. Isto é dito de forma um pouco vaga como "o estudo dos invariantes da ação de G sobre X". Vejamos então a noção de ação de G em X.

Definição 10. *A ação de um grupo G de transformações de X, sobre X, é a dinâmica provocada em X pelos movimentos de seus pontos. Mais formalmente a ação de G sobre X é a função $\alpha : G \times X \to X$ tal que $\alpha(h, x) = h(x)$*

No nosso caso, pelo que foi visto nas secções anteriores, tanto faz estudarmos a ação de $\mathbb{M}(\mathbb{D})$ = grupo das transformações de Moebius de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$, como estudar $\mathbb{M}(\mathbb{H})$ = grupo das transformações de Moebius de $\mathbb{H}$ agindo sobre $\mathbb{H}$ pois estes são isomorfos via conjugação por uma isometria de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{D}$. Mesma consideração pode ser feita a respeito das ações dos grupos de isometrias sobre $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}$.

Para o que segue seja $\mathbb{M}(X)$ o grupo das transformações de Moebius de X bem como $Iso(X)$ aquele das isometrias de X. ($X \in \{\mathbb{D}, \mathbb{H}\}$).

Definição 11. *Um movimento em X é qualquer elemento de $Iso(X)$. Ele é dito próprio se for de $\mathbb{M}(X)$*

Definição 12. *Um subgrupo S de $Iso(X)$ é dito a 1-parâmetro (real) se for imagem homomorfa do grupo $(\mathbb{R}, +)$*

A notação usual é $S = \{h^t : t \in \mathbb{R}\}$ ou simplesmente $S = \{h^t\}$. Ainda convencionamos que $h^1 = h$ é denominado de gerador de $\{h^t\} = S$.

Definição 13. *O S-ciclo por x em X ou o h-ciclo por x, onde h é gerador de S, é $\{h^t(x) : t \in \mathbb{R}\}$*

Vamos exibir subgrupos (a um parâmetro) de $\mathbb{M}(X)$ para cada tipo de transformação de X. Como imagem homomorfa de um subgrupo a um parâmetro é ainda um tal, vamos nos restringir às transformações sob formas normais:

$$\begin{array}{lll} h(z) = 1 + z & h^t(z) = t + z & \\ h(z) = \rho.z & h^t(z) = \rho^t.z & (\rho > 0) \\ h(z) = e^{i\theta}.z & h^t(z) = e^{it\theta}.z & (\theta \in \mathbb{R}) \end{array} \qquad (*)$$

Definição 14. *Um h-ciclo é um hiperciclo se h for hiperbólica, um horociclo se h for parabólica e ciclo elítico se h for elítica. Em todos esses casos* $h \neq id_X$

Definição 15. *X é denominado de plano hiperbólico. Cada elemento x de X é denominado ponto desse plano .*

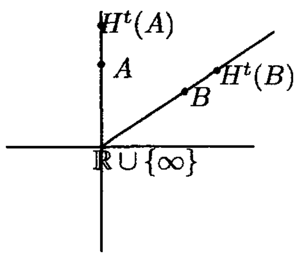
Definição 16. *Uma reta hiperbólica de X é um hiperciclo que é um ortocírculo.*

Definição 17. *Uma curva equidistante em X é um hiperciclo que não é ortocírculo.*

Definição 18. *Um círculo hiperbólico é qualquer ciclo elítico de X.*

Algumas consequências das definições são as seguintes:

R_1) Se h for hiperbólico então um único hiperciclo de h é uma reta hiperbólica. É a reta L invariante de h. Os demais hiperciclos são curvas equidistantes de L em X. Isto pode ser visto tomando-se h sob forma normal em $\mathbb{H}$.



$$\forall t \in \mathbb{R}\ D'(A, B) = D'(h^t(A), h^t(B))$$

R_2) Um círculo hiperbólico é qualquer círculo (euclideano) contido em X. Isto é justificado pelo exercício 3 pág 49.

R_3) Dados x_1 e x_2 pontos de X existe sempre um movimento (próprio) levando um no outro. Porém um par de pontos é imagem de outro par se e só se a distância dos primeiros é igual a dos últimos. Dessa forma $D_X \in \{D, D'\}$ gera um invariante para que dois pares de pontes sejam congruentes. Tal invariante é o número real "distância entre os elementos de cada par ". É pois um invariante da ação de $\mathbb{M}(X)$. Logo também o é da ação de $Iso(X)$ porque $\mathbb{M}(X)$ está contido em $Iso(X)$. Os invariantes para ternos, quadras e n-uplas de pontos em geral são dados em função destes mais alguma condição.

E invariantes para retas hiperbólicas? Comecemos com:

Definição 19. *Duas retas hiperbólicas L e M de X são paralelas se os extremos de seus arcos determinam exatamente três pontos no bordo de X. ($\partial\mathbb{D} = S^1$ e $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). São ultra paralelas em X se não têm ponto em comum e os extremos de seus arcos determinam quatro pontos no bordo desse espaço.*

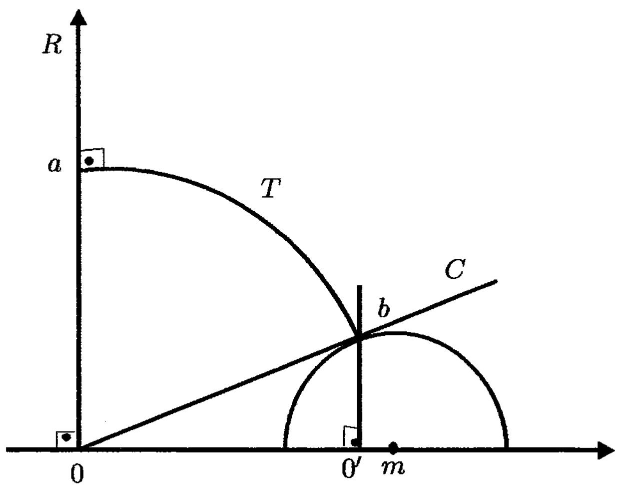
Fica evidente que as duas noções de paralelismo são relações simétricas porém não são transitivas. Este é um traço marcante que diferencia a geometria hiperbólica da geometria euclideana. Mais:

R_4) Dados um ponto z_0 de X e uma reta hiperbólica L aí, com z_0 não pertencente L, existem infinitas retas hiperbólicas M, $M \subset X$, por z_0 tal que L e M são ultra-paralelas. Ainda, existe um par L_1 e L_2 de retas hiperbólicas de X cada uma contendo z_0 e tal que L_1 e M e L_2 e M são paralelas.

Vamos introduzir um invariante para pares de retas hiperbólicas ultra-paralelas. Antes

Definição 20. *As retas hiperbólicas L e M são perpendiculares (entre sí) se cortam-se em ângulo reto pelo ponto comum z_0. Dizemos também que uma é perpendicular a outra por z_0.*

R_5) Sejam R e S ultra-paralelas em X. Então existe uma reta hiperbólica T de X tal que T é perpendicular a cada uma delas. Ademais, T é única. Para justificar o resultado, podemos supor que R emana de ∞. Senão, usamos um rotação de ângulo reto pelo ponto médio do arco que a define.



O ponto b em S é definido pela inversão de O segundo o círculo S. Desta maneira T é a reta hiperbólica por a e b.

Observemos que na construção de T fica claro que $D'(a,b)$ é o mínimo do conjunto $\{D'(z_1, z_2) : z_1 \in Sez_2 \in R\}$ tendo-se em conta que C é uma curva equidistante de R. Por isso definimos $D'(R,S) = D'(a,b)$ e este número é então o invariante de um par de ultraparalelas. Vale então:

R_6) Um movimento transforma um par de ultra paralelas em outro se e só se os invariantes são iguais.

Isto é claro pois se $D'(a,b) = D'(c,d)$ existe σ (em $\mathbb{M}(X)$) tal que $\sigma(a) = c$ e $\sigma(b) = d$ e assim $\sigma(T) = T'$ onde T e T' são as retas hiperbólicas perpendiculares a cada par. Logo um par é transformado no outro.

É oportuno aqui observar que se colocarmos orientação nos pares os invariantes são somente de $Iso(X)$. Especificamente, suponhamos cada par igualmente orientado. Vale então R_6 para $Iso(X)$, mas o exemplo abaixo mostra que a igualdade dos invariantes somente é insuficiente para $\mathbb{M}(X)$.

Exemplo: Sejam RS ultraparalelas igualmente orientadas e $R'S' = RS$ igualmente orientadas mas de forma reversa a original. Uma reflexão pela perpendicular comum valida R_6 mas não existe elemento de $\mathbb{M}(X)$ que transforme um par orientado em outro.

No caso de retas hiperbólicas concorrentes o invariante de $\mathbb{M}(X)$ é o ângulo orientado. No caso de $Iso(X)$ é a medida do ângulo (sem orientação) que é o invariante.

Continuemos explorando resultados envolvendo a métrica de X. Vamos falar de comprimento de curvas de X.

Sejam z_0 e w_0 pontos de X e C uma curva de X que os liga , isto é: existe função contínua $\xi : [0,1] \to X$ com $\xi[0,1] = C, \xi(0) = z_0$ e $\xi(1) = w_0$. Uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, $n \geq 1$, de $[0,1]$, determina uma lista de pontos $\xi_0 = \xi(t_0) = z_0, \xi_1 = \xi(t_1), \ldots, \xi_n = \xi(t_n) = w_0$ que podem ser ligados por segmentos de retas hiperbólicas, $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, gerando então um poligonal π inscrita em C. Definamos $l(\pi) = \sum_{i\geq 1} D_X(\xi_{i-1}, \xi_i)$.

Se acrescentarmos um novo ponto na partição anterior obtemos daí uma poligonal π' que, pela desigualdade triangular de D_X, satisfaz $l(\pi') \geq l(\pi)$. Definimos então:

Definição 21. $l(C) = sup_\pi\{l(\pi) : \pi$ *é poligonal inscrita em* $C\}$

R_7) Sejam z_1 e z_2 pontos de X e C uma curva de X que os liga. Então $l(C) \geq l([z_1, z_2]) = D_X(z_1, z_2)$.

De fato, $[z_1, z_2]$ é uma poligonal que liga z_1 a z_2 e assim $l(C) \geq l([z_1, z_2]) = D_X(z_1, z_2)$ pela aditividade de D_X em segmentos hiperbólicos.

Seja C uma curva contínua qualquer de X.

Definição 22. $l(C) = sup\{l(C_0) : C_0$ *é contínua,* $C_0 \subseteq C$ *e liga dois pontos de* $C\}$.

Definição 23. $l(C)$ *é denominado o comprimento de* C *em* X.

R_7) e R_8) nos dizem que a curva $[z_1, z_2]$ é a de menor comprimento em X ligando z_1 a z_2.

R_9) Os horociclos e os hipercíclos tem comprimento infinito.

Vamos especializar a fórmula para comprimento de curva dada na definição anterior. Para isto vamos assumir que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, seja retificável. Assim, se (t_i) é uma partição de $[0,1]$ seja (ξ_i) a lista de pontos em $\mathcal{C}$ onde $\xi_i = \xi(t_i)$, $0 \leq i \leq n$, $\xi : [0,1] \to \mathcal{C}$. Temos então:

$$D(\xi_{i-1}, \xi_i) = 2tgh^{-1} D_0(\xi_{i-1}, \xi_i)$$

Pelo teorema do Valor Médio

$$D(\xi_{i-1}, \xi_i) = 2/1 - v_i^2 D_0(\xi_{i-1}, \xi_i) \quad 0 < v_i < D_0(\xi_{i-1}, \xi_i)$$

e aí

$$l(\pi) = \sum_1^n \frac{2}{1 - v_i^2} D_0(\xi_{i-1}, \xi_i) = \sum_1^n \frac{2}{1 - v_n^2} D_0(\xi_{i-1}, \xi_i)$$

onde v_n é ajustado em função dos ξ_i's e $\mathcal{C}$. Por fim o processo limite usual nos dá

R_{10})

$$l(C) = \int_C \frac{2|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2}$$

Definição 24. *Para cada* z *em* $\mathbb{D}$ $dl = \frac{2}{1-|z|^2}|dz|$ *é denomindado o elemento de arco em* $(\mathbb{D}, D)$. *Ainda, o elemento de área aí é* $dl^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}dxdy$, $(|dz| = \sqrt{dx^2+dy^2}\ ,\ z = x+iy)$

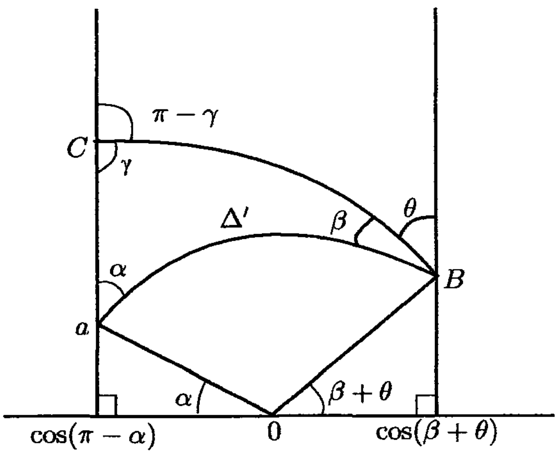
Definição 25. *A área de uma região em* $\mathbb{D}$ *é*

$$\int\int_R \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^2}$$

se a integral existir.

Exercícios:

(1) Usando $d\xi$, $\xi(z) = \frac{z+i}{iz+1}$ $(\xi = J^{-1})$, verifique que o elemento de arco em $(\mathbb{H}, D')$ no ponto w é $\frac{|dw|}{Im(w)}$. Por conseguinte o elemento de área é $\frac{dx'dy'}{Im(w)^2}$ $(w = x'+iy')$.
(2) Uma circunferência de raio r em $(\mathbb{D}, D)$ tem comprimento igual a $2\pi senhr$.
(3) Seja R um disco (circular) de raio r (segundo D) em $\mathbb{D}$ e R' o disco congruente a R com centro em O e com raio euclideano ρ_0. Então a área de R em $(\mathbb{D}, D)$ é $4\pi senh^2\frac{\pi}{2}$.
(4) Usando isometrias de $\mathbb{H}$ mostre que um triângulo Δ de ângulos α, β e γ é transformado em um outro Δ' como na figura abaixo.



Conclua que a área de Δ é igual à diferença das áreas das faixas, com lados paralelos em comum, subentendidas pelos lados AB e BC
(5) Mostre que a area da faixa de lados paralelos e arco AB é

$$\int_{x=cos(\pi-\alpha)}^{cos(\beta+\theta)}\left[\int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{dy}{y^2}\right]dx = \int_{x=cos(\pi-\alpha)}^{cos(\beta+\theta)}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi-\alpha}^{\beta+\theta}\frac{-sen(t)}{sen(t)}dt = \pi-(\alpha+\beta+\theta).$$

(6) Combinamos (4) e (5) e obtemos que a área de Δ é $\pi - (\alpha+\beta+\theta)$

Referências

[01] Complex Analysis; L. Ahlfors.
[02] Theory of analytic functions; H. Cartan.
[03] Theory of functions; C. Caratheodory.

SMA - ICMSC - USP Caixa Postal 668 São Carlos - SP 13560-970
E-mail address: conde@icmsc.sc.usp.br