

Antonio Helio Guerra Vieira

MECANISMO DE RADIAÇÃO DAS ESTRUTURAS LOG-PERIÓDICAS COLINEARES

Tese apresentada em concurso para provimento da Cátedra n.º 45
Comunicações Elétricas da Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.



São Paulo, 1967

FT-359

Aos meus pais

Julia Guerra Vieira

Nilo Santos Vieira

e à minha esposa.

MECANISMO DA RADIAÇÃO DAS ESTRUTURAS LOG-PERÍÓ-

DICAS COLINEARES

I_n_d_i_c_e

	pg.
0 - Introdução	4
1 - Um modelo para a antena log-periódica colinear.	11
2 - Equações das ondas associadas a uma estrutura bicônica infinita, com ranhura circunferencial.	20
3 - Determinação das amplitudes das ondas associadas à estrutura bicônica infinita, com ranhura circunferencial. Formulação exata.	45
4 - Determinação das amplitudes das ondas associadas à estrutura bicônica infinita com ranhura circunferencial. Formulação aproximada.	49
5 - Aplicação à justificativa de um mecanismo de radiação das estruturas log-periódicas colineares. Observações, comentários e conclusões.	62
6 - Bibliografia.	71

MECANISMO DE RADIAÇÃO DAS ESTRUTURAS LOG-PERIÓDICAS COLINEARES

0 - INTRODUÇÃO

O conceito de estrutura log-periódica firmou-se definitivamente nos últimos dez anos, (1) (2) (3) , sendo agora aceito como evidente que suas características de radiação e impedância sejam funções log-periódicas (funções do logarítmo) da frequência de excitação.

Guiados por êsse conceito muito geral, muitos autores (p.ex.refs: 1,4,5,6,7,8,9,10) propuzeram diferentes formas geomòtricamente log-periódicas, e mediram suas características.

Daí resultou praticamente a "descoberta" de novas antenas cuja propriedade principal é a log-periodicidade de suas características elétricas e em alguns casos, a independência dessas características em relação à frequência (antenas de "banda larga", ou "independentes da frequência").

A log-periodicidade geométrica justifica a log-periodicidade das características, mas não implica em limita--

ções para a variação dessas características no domínio da frequência. A log-periodicidade das características não é em geral uma propriedade procurada, mas sim a impedância em relação à frequência.

É nesse ponto que tem entrado em jogo a intuição dos diferentes autores na escolha das infinitas formas geométricas log-periódicas disponíveis, mais do que qualquer outro critério ou método científico. Como escreveram recentemente Mittra e Jones (11), "the LP design has largely been an art, an application of empiricism based on intuition, and not really a science".

O tratamento teórico das estruturas log-periódicas se encontra nos estágios iniciais. Distinguem-se entretanto alguns trabalhos importantes. Carrel (12) é responsável por uma exaustiva análise da rede log-periódica de dipolos de comprimentos crescentes em progressão geométrica distribuídos ao longo de uma linha de transmissão, a distâncias também em progressão geométrica, de mesma razão.

Explorando essa idéia, Mittra e Jones (13,14) examinaram o caso um pouco mais geral do sistema constituído por uma

linha de transmissão carregada por uma distribuição log-periódica de elementos irradiantes, por sua vez log-periódicamente relacionados.

Note-se que a linha de transmissão em si, foi, nessas análises, suposta uniforme, o que limita a aplicação dos resultados obtidos, não permitindo sua extensão a um maior número de famílias de estruturas log-periódicas.

Aproximando-se mais do mecanismo eletromagnético envolvido no problema, Mayes, Deschamps e Patton (15) consideraram as ondas de superfície suportadas por estruturas com grande número de descontinuidades iguais e a radiação associada, aplicando os resultados ao caso dos sistemas lenta e linearmente variáveis na direção de um apex.

Propuseram em seguida um critério aproximado mas bastante óbvio para projeto de antenas independentes da frequência do tipo log-periódico : estudado teórica ou experimentalmente, numa frequência determinada, uma estrutura periódica de elementos iguais, aplicam-se os resultados para a estrutura obtida da anterior por redução gradual e linear das suas dimensões, na direção de um apex.

Daí resulta uma estrutura log-periódica e uma antena de funcionamento aproximadamente independente da frequência. Em cada frequência uma região da estrutura poderá ser considerada uniformemente periódica ("localmente periódica") e será responsável pela radiação ("região ativa").

Com o aumento da frequência, a região ativa se deslocará na direção do apex .

Para êste tipo de encaminhamento, Mayes, Deschamps e Patton⁽¹⁵⁾ , Olmer⁽¹⁶⁾ , Mittra e Jones^(11,17) exploraram com vantagem as propriedades dos diagramas k-B de Brioullin⁽¹⁸⁾ . Dessa maneira se analisa um número maior de tipos de estruturas, não abrangidas pelos métodos descritos anteriormente.

.....

Neste trabalho a estrutura log-periódica será considerada basicamente como uma linha de transmissão bicônica com distribuição de descontinuidades semelhantes mas com dimensões reduzidas em progressão geométrica, na direção do apex, e instaladas em pontos cujas distâncias ao apex também respeitam uma progressão geométrica de mesma razão.

O tratamento que segue não sofrerá a limitação da teoria de Mayes, Deschamps e Patton⁽¹⁵⁾ que exige uma distribuição lentamente variável de um grande número de descontinuidades, mas se aplicará a um modelo particular de estrutura log-periódica colinear, descrita e experimentalmente estudada em⁽¹⁾ .

O estudo será encaminhado como um problema de contorno: caracterizada a estrutura, a ela serão aplicadas as equações de Maxwell e analisadas suas soluções decompostas em modos.

Será mostrado que existem "descontinuidades ativas" cujo desempenho no mecanismo da radiação é a conversão do modo dominante, em modos compatíveis com o campo eletromagnético no espaço livre, e que essa conversão tem implicações imediatas nas características de radiação e impedância do sistema .

Dessa maneira se poderá analisar teoricamente a antena log-periódica colinear examinada em ⁽¹⁾, e se farão inúmeras observações que contribuem para a melhor compreensão do mecanismo eletromagnético do funcionamento das antenas

log-periódicas em geral .

Será inicialmente descrito um modelo conveniente, - do tipo linha de transmissão bicônica com ranhuras, para a antena log-periódica colinear descrita e estudada em (1) .

Em seguida, serão construídas equações que descrevem os campos associados ao modelo utilizado, para um caso particular do modelo (uma única ranhura, e cones infinitos) e respeitadas as equações de Maxwell.

As expressões obtidas contêm constantes que devem ser determinadas, relacionadas com os parâmetros do modelo e com a tensão de excitação. Para êsse fim, um sistema de equações será montado.

A solução do sistema e a determinação das constantes serão obtidas para um caso particular do modelo (ranhura muito estreita) sem maiores inconvenientes, pois essa particularização aproxima mais o modelo adotado da antena log-periódica colinear de (1) .

Finalmente, os resultados obtidos serão analisados e utilizados para justificar o mecanismo de radiação da antena log-periódica colinear.

Serão feitas várias observações e ficará evidenciada um processo de conversão de modos , associado a descontinuidas (ranhuras) da estrutura que poderá servir para explicar a radiação de outros tipos de antenas log-periódicas.

.....

1. UM MODELO PARA A ANTENA LOG-PERIÓDICA COLINEAR.

Na referência⁽¹⁾ são propostos e descritos três tipos de antenas, de uma família de estruturas log-periódicas colineares.

Caracterizam-se por serem constituídas de um fio, ou barra de reduzidas dimensões transversais, ao longo do qual são instaladas descontinuidades crescentes em progressão geométrica (razão ℓ) em pontos situados em abscissas também crescentes, a partir do ponto de alimentação, em progressão geométrica de mesma razão.

Os três tipos apresentados nas figuras 1.4, 1.5, e 1.6 obedecem ao princípio enunciado e melhor o esclarecem.

As descontinuidades referidas ("cargas") são, em cada caso, linhas paralelas terminadas por curto-circuito (fig. 1.4), linhas coaxiais embutidas, terminadas em curto-circuito (fig. 1.5) e impedâncias constituídas de parâmetros concentrados (fig. 1.6). Em qualquer caso a carga deve apresentar um primeiro polo na frequência definida por

$$f = \frac{c}{4} (L_i L_{i+1})^{-1/2} = \frac{c}{4d_i}$$

onde $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ e os L_i e d_i estão indicados nas figuras.

Como foi detalhado em⁽¹⁾, essas estruturas se assemelham à da antena tipo Marconi-Franklin⁽²⁰⁾ dela diferindo pelo fato dos sucessivos L_i constituírem uma progressão geométrica, assim como os sucessivos d_i , característica fundamental das estruturas log-periódicas.

A antena Marconi-Franklin tem L_i constante e d_i constante, e iguais a meio e um quarto do comprimento de onda, respectivamente.

A diretividade da Marconi-Franklin é tão mais elevada no plano equatorial quanto maior o número de elementos L_i , ao mesmo tempo que, devido à acumulação de energia nos elementos d_i ⁽²⁶⁾, sua banda é mais estreita e a parcela reativa da sua impedância de entrada é maior.

Descrição de um modelo para a estrutura log-periódica colinear.

Para efeito de cálculo dos campos eletromagnéticos associados à antena log-periódica colinear será utilizado um modelo que se aproxima fisicamente da estrutura em questão, e ao mesmo tempo constitui um contorno favorável para a pesquisa das soluções das equações de Maxwell .

Consta basicamente de dois cones opostos pelo vértice (figura 1.1), iguais, condutores perfeitos, com ranhuras. No restante do espaço é suposto o ar ou o vácuo. A forma das ranhuras está melhor representada no corte da figura 1.2.

Esse modelo é facilmente descrito se referido a um sistema de coordenadas polares esféricas cujo centro coincide com o vértice dos cones conforme está também indicado na fig. 1.1.

A superfície externa dos cones tem por equação

$$\theta = \theta_1 \text{ (cte.)}$$

Uma ranhura genérica de ordem i dista R_i do vértice, sendo limitada pelas superfícies esféricas de equações:

$$R = \ell_i \text{ (cte)}$$

$$R = \ell_i \cdot \delta \text{ (cte)}$$

e pela superfície cônica interna de equação

$$\theta = \theta_2 \text{ (cte)}$$

A estrutura é log-periódica, e portanto as relações são obedecidas:

$$\frac{\ell_i}{\ell_{i+1}} = \tau \text{ (}<1\text{)}$$

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} = \tau$$

.....

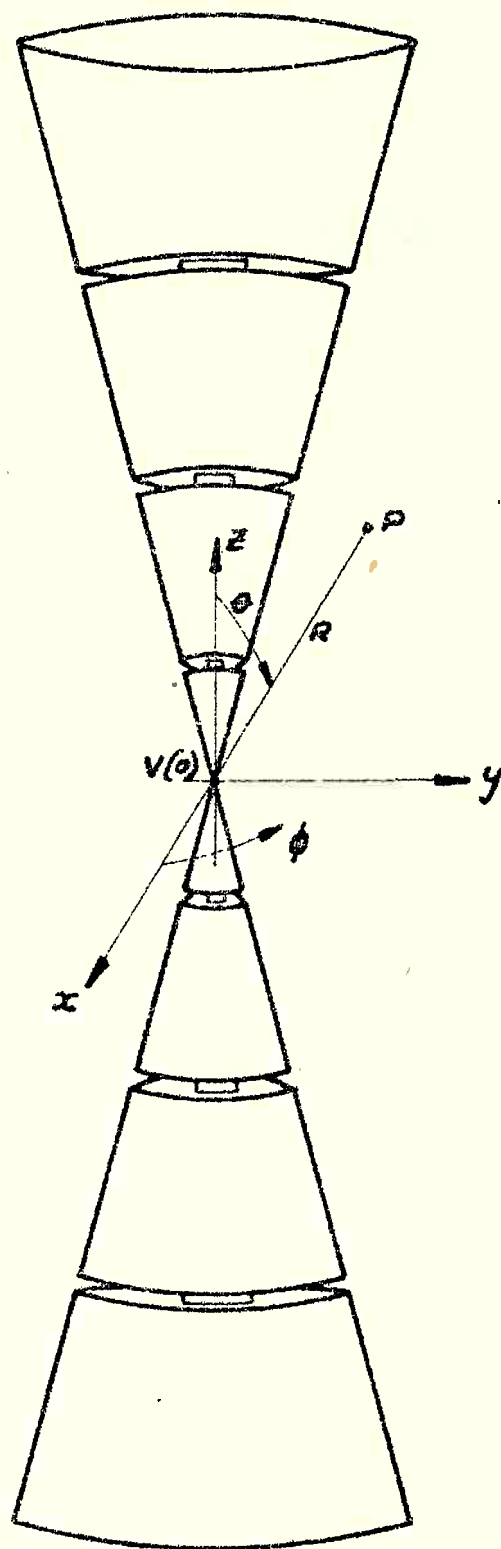


fig. 1.1

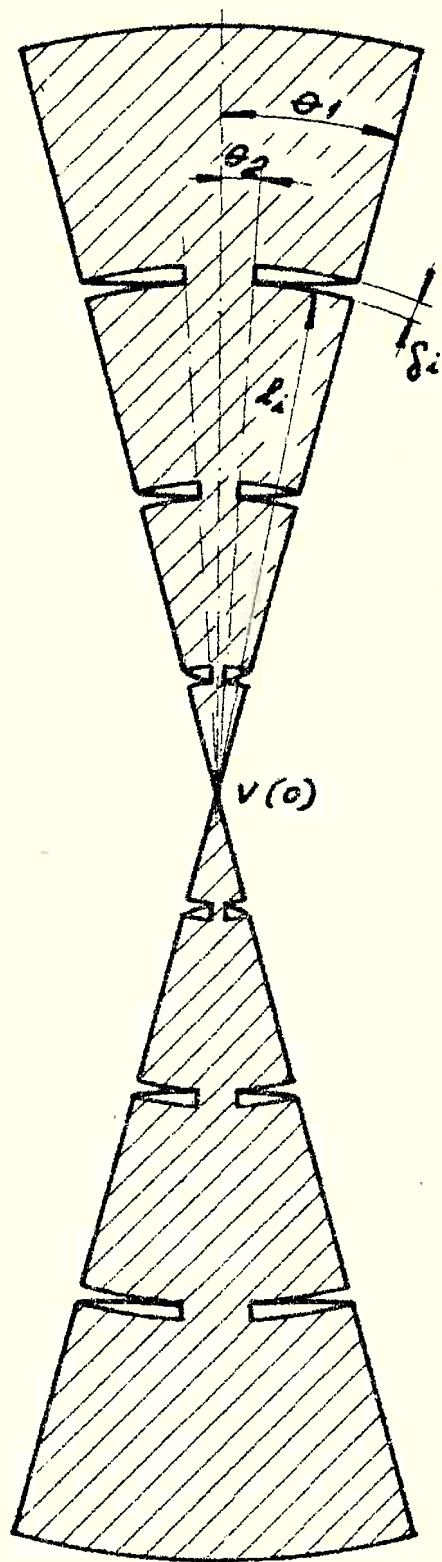


fig. 1.2

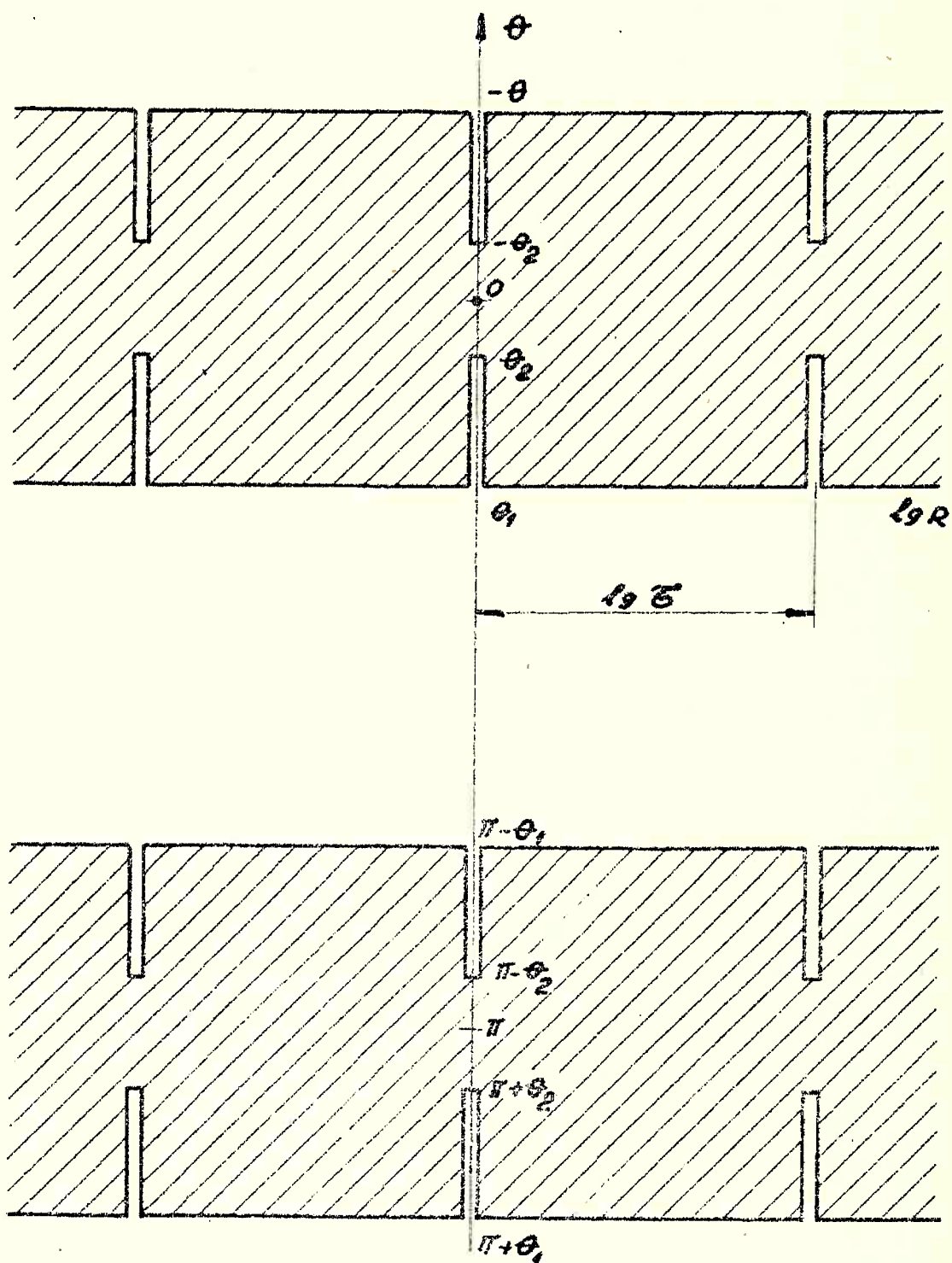


fig. 1.3

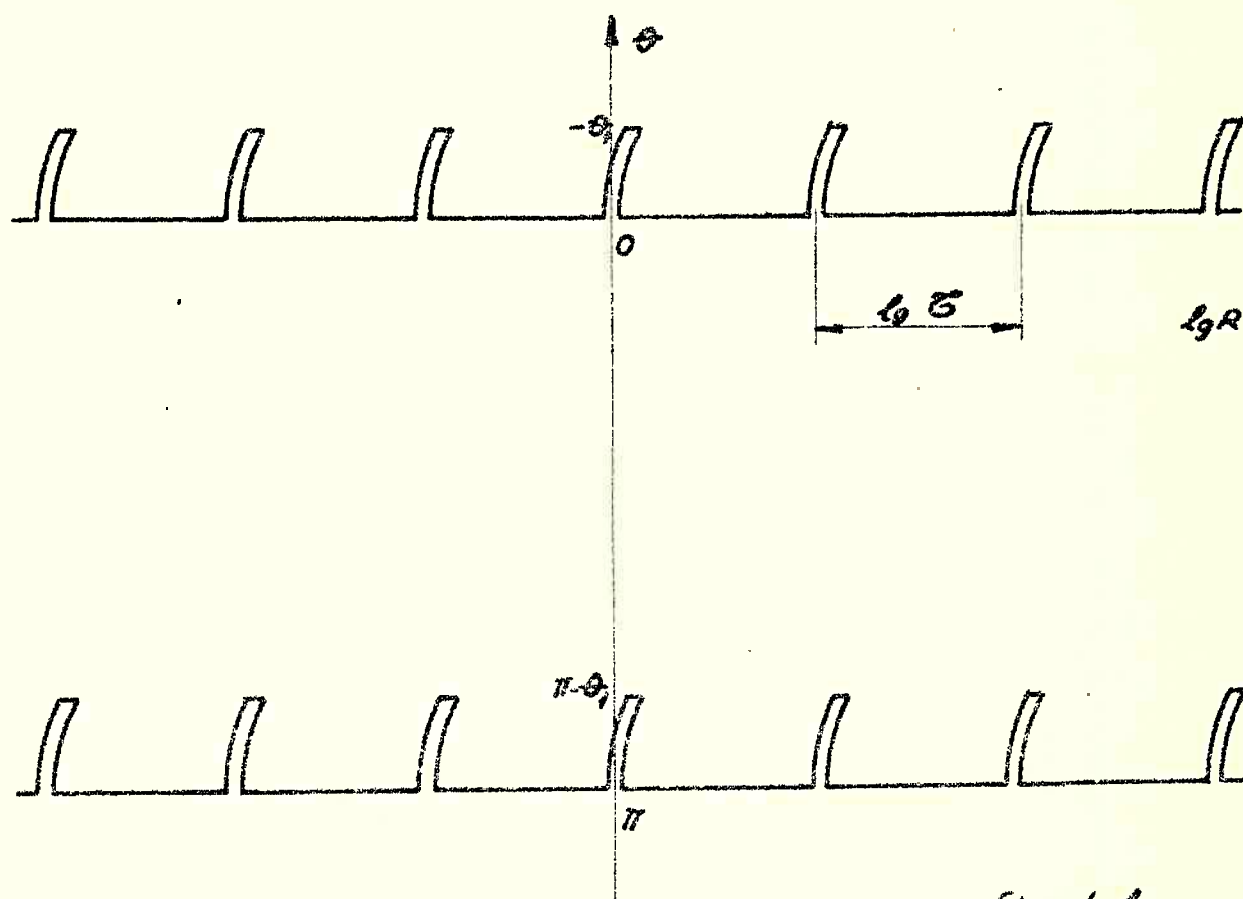
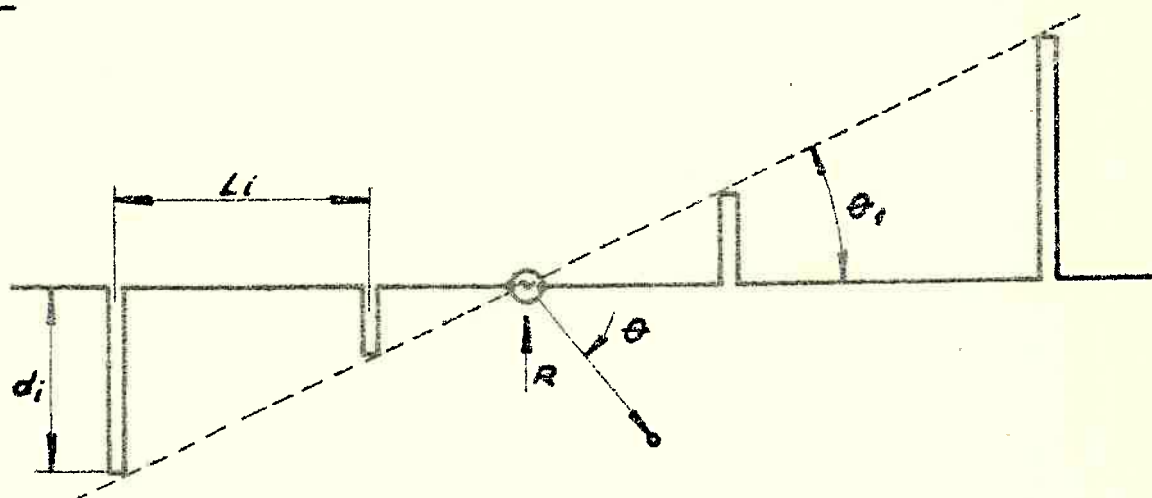


fig. 1.4

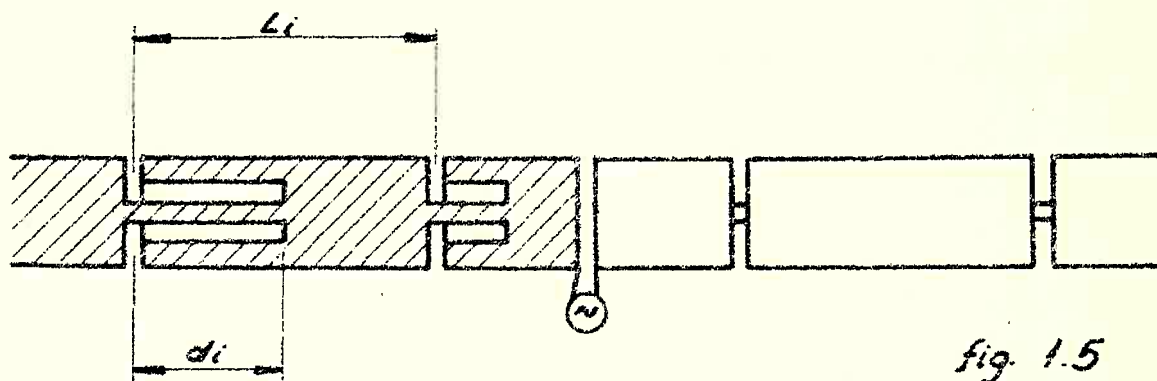


fig. 1.5

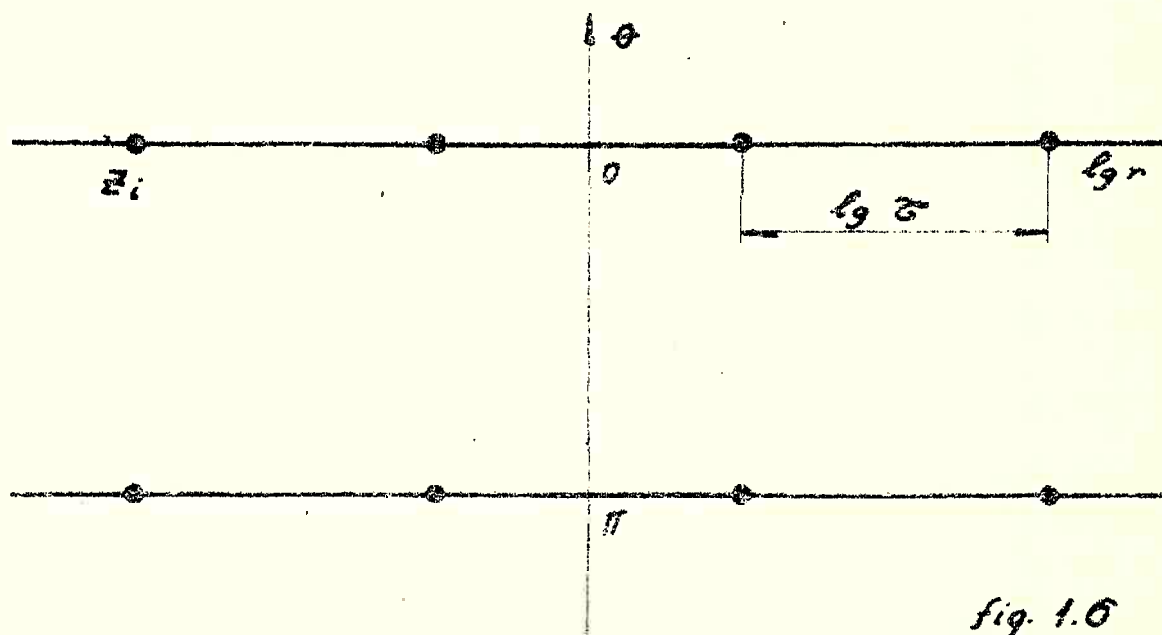
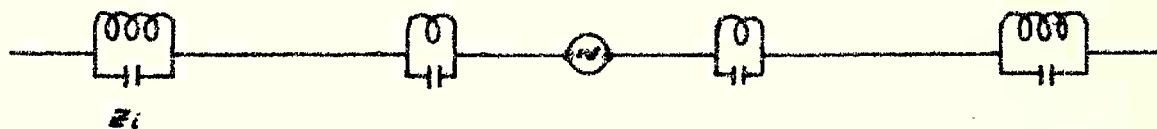


fig. 1.6

2. EQUAÇÕES DAS ONDAS ASSOCIADAS A UMA ESTRUTURA BICONICA INFINITA, COM RANHURA CIRCUNFERENCIAL

A estrutura que será considerada a seguir, como etapa intermediária para a solução do problema geral proposto, consta de dois cones de mesmo ângulo, infinitos, opostos pelo vértice, constituídos por um condutor perfeito, cada cone com uma ranhura conforme as figuras 2.1 e 2.2 (corte). O sistema será suposto isolado no espaço livre e alimentado por um gerador balanceado que aplica uma tensão $V(0)$ entre os dois vértices.

Todo o sistema, e os campos associados, serão referidos a um sistema de coordenadas polares esféricas, ou a um sistema triortogonal, ambos indicados na figura.

A simetria do contorno em relação a ϕ e a alimentação imposta permitem simplificações imediatas nas equações - que regem os campos associados à estrutura descrita. Não devem ser consideradas variações em relação a ϕ ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$), bem como não devem existir soluções do tipo transverso-elétrico em relação a R.

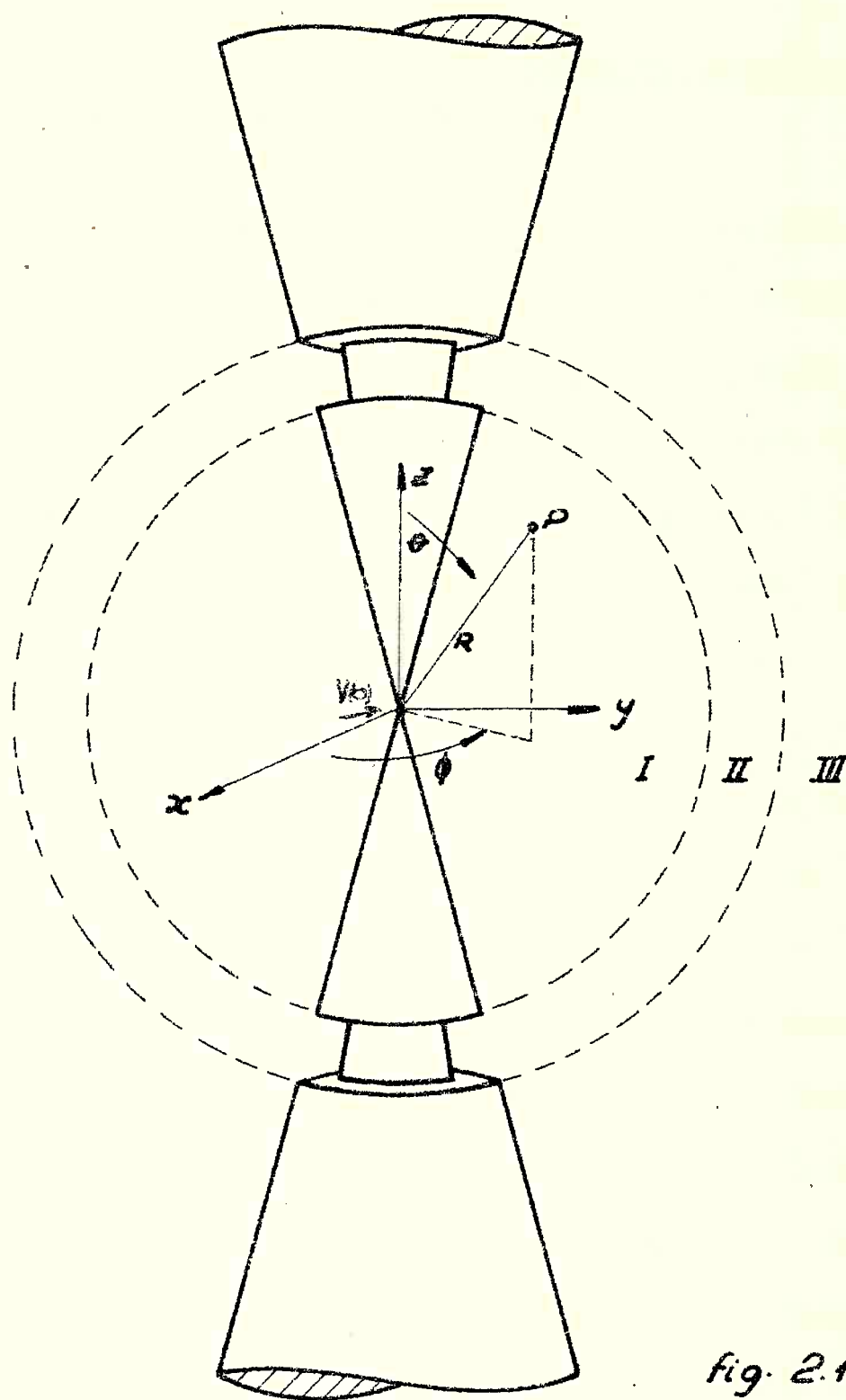


fig. 2.1

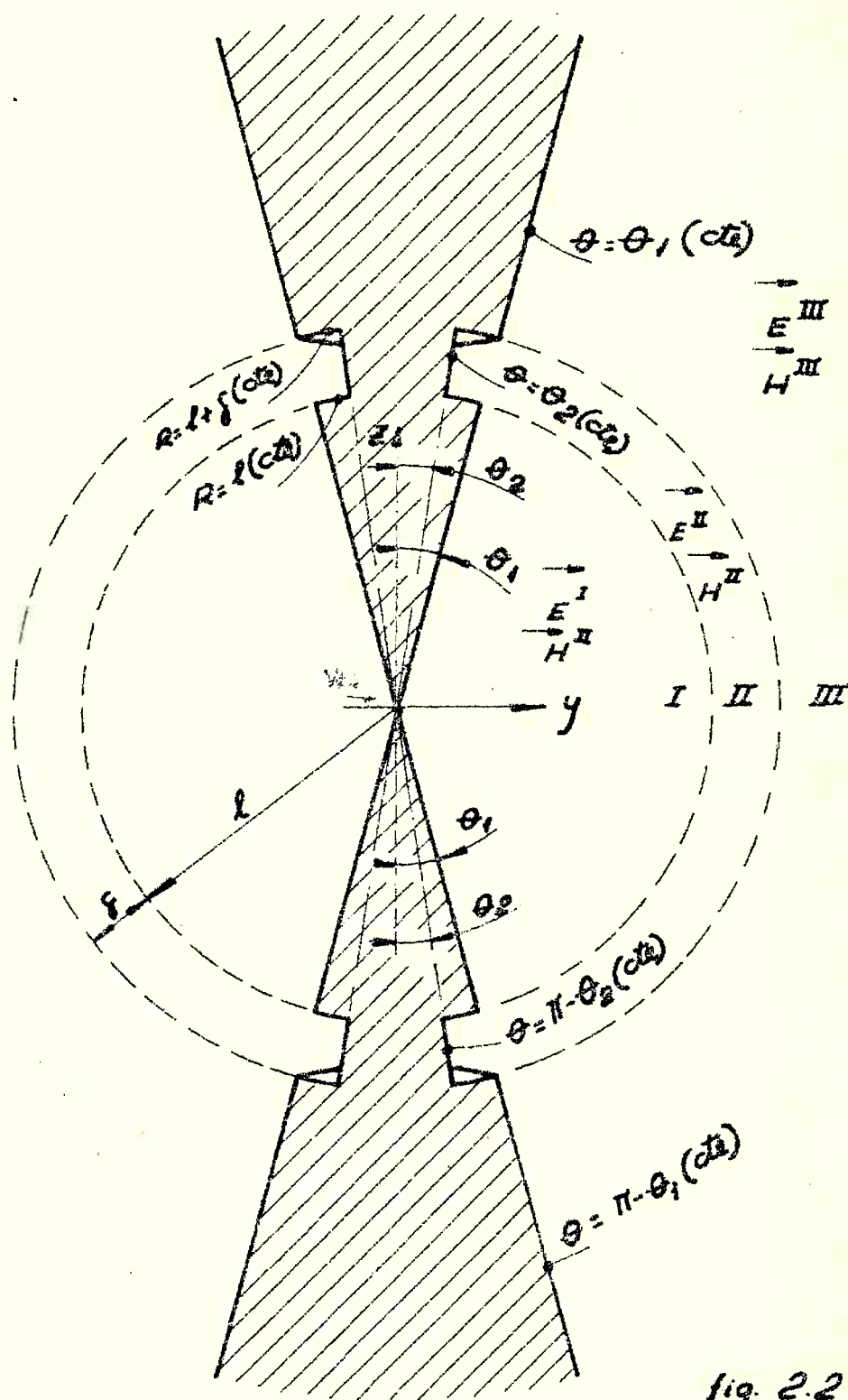


fig. 2.2

Serão examinados portanto os campos do tipo transverso-magnético (TM) que nessas condições podem ser derivados potencial de Hertz π_R (19) (20) solução da equação seguinte:

$$\frac{\partial^2 \pi_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \pi_R}{\partial \theta} \right) + \beta_o^2 \pi_R = 0 \quad \text{eq. 2.1}$$

Nessa equação β_o é uma constante que depende do meio, no caso o ar, em que os cones estão mergulhados e da frequência ω de excitação:

$$\beta^2 = \omega^2 \epsilon_o \mu_o$$

$$\epsilon_o = 8,854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ farad/m}$$

$$\mu_o = 7,95 \times 10^5 \approx \frac{1}{4\pi} \times 10^7 \text{ m/henry}$$

As componentes dos campos \vec{E} e \vec{H} transverso magnéticos procurados podem ser derivados de π_R pelas relações seguintes:

$$E_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \pi_R}{\partial \theta \partial R} \quad \text{eq. 2.2}$$

$$E_\phi = 0 \quad \text{eq. 2.3}$$

$$E_R = \frac{\partial^2 \pi_R}{\partial R^2} + \beta_o^2 \pi_R \quad \text{eq. 2.4}$$

$$H_\theta = 0 \quad \text{eq. 2.5}$$

$$H_\phi = \frac{-j \omega \epsilon_o}{R} \frac{\partial \pi_R}{\partial \theta} \quad \text{eq. 2.6}$$

$$H_R = 0$$

eq. 2.7

A pesquisa das soluções da equação 2.1 pode ser en caminhada por separação de variáveis. Impondo que π_R seja o produto de uma função só de R por uma função só de θ resulta que essas duas funções, \hat{R} e $\hat{\theta}$, deverão satisfazer às seguintes equações clássicas, onde n é uma constante que resul tou da separação:

$$\frac{d^2 \hat{R}}{dR^2} + \left[\beta_o^2 - \frac{n(n+1)}{R^2} \right] \hat{R} = 0 \quad \text{eq. 2.8}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \right) + n(n+1) \hat{\theta} = 0 \quad \text{eq. 2.9}$$

A equação 2.8 admite por solução

$$\hat{R} = z_n(\beta_o R) \quad \text{eq.2.10}$$

onde $z_n(\beta_o R)$ pode se apresentar sob duas formas alternativas:

$$z_n(\beta_o R) = \beta_o R \left[a_n j_n(\beta_o R) + b_n n_n(\beta_o R) \right] \quad \text{eq.2.11}$$

$$z_n(\beta_o R) = \beta_o R \left[a'_n h_n^{(1)}(\beta_o R) + b'_n h_n^{(2)}(\beta_o R) \right] \quad \text{eq.2.12}$$

Nessas expressões a_n , b_n ou a'_n , b'_n são constantes.

As funções $j_n(\beta_o R)$, $n_n(\beta_o R)$, $h_n^{(1)}(\beta_o R)$ e $h_n^{(2)}(\beta_o R)$ são

funções de Bessel esféricas, definidas por exemplo por Stratton (20). Relacionam-se com as funções de Bessel de 1ª espécie, funções de Neuman e de Henkel de 1ª e 2ª espécie segundo as seguintes expressões:

$$j_n(\beta_0 R) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0 R}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(\beta_0 R) \quad \text{eq. 2.13}$$

$$n_n(\beta_0 R) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0 R}} \cdot N_{n+\frac{1}{2}}(\beta_0 R) \quad \text{eq. 2.14}$$

$$h_n^{(1)}(\beta_0 R) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0 R}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta_0 R) \quad \text{eq. 2.15}$$

$$h_n^{(2)}(\beta_0 R) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0 R}} \cdot H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\beta_0 R) \quad \text{eq. 2.16}$$

A equação 2.9 admite por solução geral

$$\hat{\theta} = T_n(\theta) \quad \text{eq. 2.17}$$

onde $T_n(\theta)$ se apresenta também sob duas formas alternativas, neste caso conforme n seja ou não um número inteiro:

$$T_n(\theta) = C_n P_n(\cos \theta) + D_n Q_n(\cos \theta) \quad \text{eq. 2.18}$$

$$T_n(\theta) = C'_n P_n(\cos \theta) + D'_n P_n(-\cos \theta) \quad \text{eq. 2.19}$$

onde $P_n(\cos \theta)$ e $Q_n(\cos \theta)$ são funções de Legendre respectivamente de 1ª e 2ª espécie, e C_n , D_n ou C'_n , D'_n são constantes,

O potencial de Hertz, no caso π_R , vale portanto

$$\pi_{Rn} = Z_n(\beta_0 R) \cdot T_n(0) \quad \text{eq. 2.20}$$

e aplicando as relações 2.2 a 2.7 podem ser derivadas as componentes do campo.

As componentes não nulas procuradas são:

$$E_\theta = \frac{\beta_0}{R} \sum_n Z'_n(\beta_0 R) \cdot T'_n(\theta) \quad \text{eq. 2.21}$$

$$E_R = \frac{1}{R^2} \sum_n n(n+1) Z_n(\beta_0 R) \cdot T_n(\theta) \quad \text{eq. 2.22}$$

$$H_\phi = \frac{-j\omega\epsilon_0}{R} \sum_n Z_n(\beta_0 R) \cdot T'_n(\theta) \quad \text{eq. 2.23}$$

Nessas expressões • em outras posteriormente utilizadas, as linhas (') indicam derivadas em relação aos respectivos argumentos, no caso $\beta_0 R$ ou θ .

Note-se que os campos totais procurados apresenta-
dos de 2.21 a 2.23 são somatórias estendidas a todos os va-
lores possíveis de n , que serão determinados quando aplicadas
as condições de contorno, cada conjunto de parcelas de E_θ, E_R
e H_ϕ correspondente a um valor de n possível constituindo
um modo TM particular. Até este ponto as únicas restrições
impostas foram a simetria de rotação ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$) e a consideraa
ção sôbre o carater TM da solução.

Também da aplicação das condições de contôrnio resulta
tarão as formas adequadas das funções $Z_n(\beta_0 R)$ e $T_n(\theta)$, e os

valores das constantes a_n , b_n ou a'_n , b'_n e C_n , D_n ou C'_n , D'_n .

Escolha das funções $Z_n(\beta_0 R)$ e $T_n(\theta)$

Para a escolha das funções $Z_n(\beta_0 R)$ e $T_n(\theta)$ é conveniente considerar separadamente três regiões do espaço externo aos cones indicados na figura 2.2 e correspondendo a pontos tais que

região I	_____	$R < \ell$
região II	_____	$\ell < R < \ell + \delta$
região III	_____	$\ell + \delta < R$

As regiões são limitadas pelas superfícies esféricas $R = \ell$ e $R = \ell + \delta$. As funções $Z_n(\beta_0 R)$ e $T_n(\theta)$ assumirão formas específicas, condicionadas pelas características de cada uma das três regiões.

A região I inclui a origem ($R = 0$) e não se estende até $R = \infty$. Assim sendo é necessário que $Z_n(0)$ seja finita (21) e ao mesmo tempo não há exigências quanto ao seu comportamento assintótico (22). Das alternativas indicadas em 2.11 e 2.12 deve ser escolhida:

$$Z_n^I(\beta_0 R) = a_n \beta_0 R j_n(\beta_0 R) \quad \text{eq. 2.24}$$

A região II não inclui a origem nem se estende até $R = \infty$. Qualquer das duas formas indicadas em 2.11 e 2.12 serve para $Z_n^{II}(\beta_o R)$:

$$Z_n^{II}(\beta_o R) = \beta_o R \left[a_n j_n(\beta_o R) + b_n n_n(\beta_o R) \right] \quad \text{eq. 2.25}$$

$$Z_n^{II}(\beta_o R) = \beta_o R \left[a_n' h_n^{(1)}(\beta_o R) + b_n' h_n^{(2)}(\beta_o R) \right] \quad \text{eq. 2.26}$$

As duas parcelas de 2.26 têm o significado físico-de ondas caminhantes se propagando respectivamente no sentido dos R decrescentes e dos R crescentes, supondo que os campos variam no tempo segundo $e^{+j\omega t}$.

A região III não inclui a origem e se estende até $R = \infty$. A função $Z_n^{III}(\beta_o R)$ não sofre restrições quanto ao valor de $Z_n^{III}(0)$, mas seu comportamento assintótico deve ser tal que possa representar uma onda caminhante afastando-se da origem. Ou seja, só pode ser da forma

$$Z_n^{III}(\beta_o R) = \beta_o R b_n' h_n^{(2)}(\beta_o R) \quad \text{eq. 2.27}$$

As três regiões não incluem os eixos definidos por $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ e, tendo em geral n não inteiro, deve ser $T_n(\theta)$ da forma indicada em 2.19:

$$T_n(\theta) = C_n' P_n(\cos \theta) + D_n' P_n(\cos \theta) \quad \text{eq. 2.28}$$

Será mostrado posteriormente que $T_n(\theta)$ assume nas três regiões uma forma ainda mais particular (eq. 2.44).

Determinação dos valores permitidos para n

Nas três regiões a componente do campo elétrico se exprime por 2.22 e deve se anular quando tangencia as superfícies perfeitamente condutoras $\theta = c^{te}$ dos cones.

Nas regiões I e III:

$$E_R(\beta_0 R, \theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.29}$$

$$E_R(\beta_0 R, \pi - \theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.30}$$

Na região II

$$E_R(\beta_0 R, \theta_2) = 0 \quad \text{eq. 2.31}$$

$$E_R(\beta_0 R, \pi - \theta_2) = 0 \quad \text{eq. 2.32}$$

De 2.29 e 2.30, juntamente com 2.22, decorrem

$$T_n(\theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.33}$$

$$T_n(\pi - \theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.34}$$

De 2.31 e 2.32, com 2.22, decorrem

$$T_m(\theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.35}$$

$$T_m(\pi - \theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.36}$$

onde se distinguem agora os valores próprios m válidos pa-

ra a região II, diferentes dos valores próprios \underline{n} válidos para as regiões I e III.

Reescrevendo as igualdades 2.33 e 2.34, válidas - para a região I e III, com $T_n(\theta)$ na forma adequada 2.28 vem:

$$C'_n P_n(\cos \theta_1) + D'_n P_n(-\cos \theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.37}$$

$$C'_n P_n(-\cos \theta_1) + D'_n P_n(\cos \theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.38}$$

A simultaneidade dds igualdades 2.37 e 2.38 exige que

$$C'_n = \pm D'_n \quad \text{eq. 2.39}$$

A simetria do sistema e sua alimentação pelo vértice permitem afirmar que todos os campos externos aos cones em particular E_R , são antissimétricos em relação ao plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja

$$E_R(\beta_{oR}, \theta) = - E_R(\beta_{oR}, \pi - \theta) \quad \text{eq. 2.40}$$

Portanto 2.39 se reduza

$$C'_n = - D'_n \quad \text{eq. 2.41}$$

Considerando as funções de Legendre iguais a

$$L_n(\theta) = \frac{1}{2} [P_n(\cos \theta) - P_n(-\cos \theta)] \quad \text{eq. 2.42}$$

e satisfazendo à equação diferencial

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dL_n(\theta)}{d\theta} \right] + n(n+1) L_n(\theta) = 0 \quad \text{eq. 2.43}$$

Vem

$$T_n(\theta) = 2 C_n' L_n(\theta) \quad \text{eq. 2.44}$$

e os valores permitidos para n são os determinados pela igualdade

$$L_n(\theta_1) = L_n(\pi - \theta_1) = 0 \quad \text{eq. 2.45}$$

Para efeito de cálculo numérico, para valores baixos de θ_1 , os valores de n que satisfazem 2.45 podem ser tomados (18) iguais a

$$n \approx k + \frac{1}{\ln \frac{2}{\theta_1}} \quad \text{eq. 2.46}$$

$$k = 1, 3, 5 \dots$$

Na região II, pelo mesmo raciocínio,

$$T_m(\theta) = 2 C_m' L_m(\theta) \quad \text{eq. 2.47}$$

e os valores permitidos para m são determinados pela igualdade

$$L_m(\theta_2) = L_m(\pi - \theta_2) = 0 \quad \text{eq. 2.48}$$

valendo aproximadamente, para θ_2 pequeno:

$$m \approx k + \frac{1}{\ln \frac{2}{\theta_2}} \quad \text{eq. 2.49}$$

$$k = 1, 3, 5 \dots$$

O modo transverso eletro-magnético (TEM)

Além das soluções para o campo até este ponto pesquisadas, existe ainda a solução TEM, encontrada por outra via, e que deve ser somada a aquelas.

Obtem-se de particularização $n = 0$ nas equações anteriores, o que implica em $E_R = 0$ e também é uma solução possível.

Para as três regiões $Z_n(\beta_o R)$ na sua forma mais geral (2.11 ou 2.12) se torna $Z_o(\beta_o R)$, onde as restrições a que deve se submeter em $R = 0$ e $R \rightarrow \infty$ são respeitadas.

$$Z_o(\beta_o R) = a_o \sin \beta_o R - b_o \cos \beta_o R \quad \text{eq. 2.50}$$

$$Z_o(\beta_o R) = -j(a_o' e^{-j\beta_o R} - b_o' e^{-j\beta_o R}) \quad \text{eq. 2.51}$$

Por outro lado, a forma adequada para $T_n(\theta)$ é a da equação 2.18 que quando $n = 0$ se torna

$$T_o(\theta) = C_o + D_o \ln \cot \frac{\theta}{2} \quad \text{eq. 2.52}$$

As componentes do campo são calculadas pelas equações 2.21 a 2.23, onde $Z_n(\beta_o R)$ e $T_n(\theta)$ são substituídos por $Z_o(\beta_o R)$ de 2.50 ou 2.51 e $T_o(\theta)$ de 2.52. Resultam não-nulas apenas as componentes seguintes:

$$(E_\theta)_{\text{TEM}} = \frac{\beta_o}{R} (a_o \cos \beta_o R + b_o \sin \beta_o R) \frac{D_o}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.53}$$

ou

$$(E_{\theta})_{TEM} = \frac{\beta_o}{R} (a'_o e^{j\beta_o R} + b'_o e^{-j\beta_o R}) \frac{D_o}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.54}$$

$$(H_{\phi})_{TEM} = \frac{-j\omega \epsilon_o}{R} (a_o \sin \beta_o R - b_o \cos \beta_o R) \frac{D_o}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.55}$$

ou

$$(H_{\phi})_{TEM} = \frac{-j\omega \epsilon_o}{R} \left[-j(a'_o e^{j\beta_o R} - b'_o e^{-j\beta_o R}) \right] \frac{D_o}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.56}$$

Essas expressões valem para as regiões I e II. Para a região III, onde só existem ondas caminhando no sentido dos R crescentes, já se pode particularizar

$$b_o^{III} = -j a_o^{III} \quad \text{eq. 2.57}$$

ou

$$a_o^{III} = 0 \quad \text{eq. 2.58}$$

Na região III os campos ficam

$$(E_{\theta}^{III})_{TEM} = \frac{\beta_o}{R} a_o^{III} (\cos \beta_o R - j \sin \beta_o R) \frac{D_o^{III}}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.59}$$

ou

$$(E_{\theta}^{III})_{TEM} = \frac{\beta_o}{R} b_o^{III} e^{-j\beta_o R} \frac{D_o^{III}}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.60}$$

$$(H_{\phi}^{III})_{TEM} = \frac{\omega \epsilon_o}{R} a_o^{III} (\cos \beta_o R - j \sin \beta_o R) \frac{D_o^{III}}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.61}$$

ou

$$(H_{\phi}^{III})_{TEM} = \frac{\omega \epsilon_o}{R} b_o^{III} e^{-j\beta_o R} \frac{D_o^{III}}{\sin \theta} \quad \text{eq. 2.62}$$

Campos Totais

Em cada uma das três regiões, os campos totais são a soma dos campos TEM e TM. Nos três casos as únicas componentes não nulas são E_θ , E_R e H_ϕ .

Na região I essas componentes serão indicadas por E_θ^I , E_R^I e H_ϕ^I :

$$E_\theta^I = (E_\theta^I)_{\text{TEM}} + (E_\theta^I)_{\text{TM}} \quad \text{eq. 2.63}$$

$$E_R^I = (E_R^I)_{\text{TM}} \quad \text{eq. 2.64}$$

$$H_\phi^I = (H_\phi^I)_{\text{TEM}} + (H_\phi^I)_{\text{TM}} \quad \text{eq. 2.65}$$

O campo TEM na região I já está explicitado nas equações 2.53 a 2.56, onde as constantes devem ser particularizadas para essa região. A notação usada é evidente nas expressões seguintes: $(E_\theta^I)_{\text{TEM}} = \frac{P_o D_o}{R \sin \theta} (a_o^I \cos \beta_o R + b_o^I \sin \beta_o R)$ 2.66
ou $(E_\theta^I)_{\text{TEM}} = \frac{\beta_o D_o^I}{R \sin \theta} (a_o^I \cos \beta_o R + b_o^I - e^{-j \beta_o R})$ eq. 2.67

$$(H_\phi^I)_{\text{TEM}} = \frac{-j \omega \epsilon_o D_o^I}{R \sin \theta} (a_o^I \sin \beta_o R - b_o^I \cos \beta_o R) \quad \text{eq. 2.68}$$

$$\text{ou} \quad (H_\phi^I)_{\text{TEM}} = \frac{-\omega \epsilon_o D_o^I}{R \sin \theta} (a_o^I e^{j \beta_o R} - b_o^I e^{-j \beta_o R}) \quad \text{eq. 2.69}$$

O campo TM na região I resulta da introdução de -
2.24 e 2.44 em 2.21 a 2.23 . Suas componentes são:

$$(E_{\theta}^I)_{TM} = \frac{\beta_o}{R} \sum_n \frac{d}{d(\beta_o R)} \left[\beta_o R a_n^I j_n(\beta_o R) \right] 2C_n^I L_n'(\theta) \quad \text{eq.2.70}$$

$$(E_R^I)_{TM} = \frac{1}{R^2} \sum_n n(n+1) \beta_o R a_n^I j_n(\beta_o R) 2C_n^I L_n(\theta) \quad \text{eq.2.71}$$

$$(H_{\phi}^I)_{TM} = \frac{-j\omega \epsilon_o}{R} \sum_n \beta_o R a_n^I j_n(\beta_o R) 2C_n^I L_n'(\theta) \quad \text{eq.2.72}$$

As somatórias se estendem a todos os valores de n
obtidos da igualdade 2.45.

Analogamente, as componentes dos campos totais na
região II são:

$$E_{\theta}^{II} = (E_{\theta}^{II})_{TEM} + (E_{\theta}^{II})_{TM} \quad \text{eq.2.73}$$

$$E_R^{II} = (E_R^{II})_{TM} \quad \text{eq.2.74}$$

$$H_{\phi}^{II} = (H_{\phi}^{II})_{TEM} + (H_{\phi}^{II})_{TM} \quad \text{eq.2.75}$$

Particularizando 2.53 a 2.56 se obtém as componen-
tes TEM :

$$(E_{\theta}^{II})_{TEM} = \frac{\beta_o D_o^{II}}{R \sin \theta} (a_o^{II} \cos \beta_o R + b_o^{II} \sin \beta_o R) \quad \text{eq.2.76}$$

ou

$$(E_{\theta}^{II})_{TEM} = \frac{\beta_o D_o^{II}}{R \sin \theta} (a_o^{II} e^{j\beta_o R} + b_o^{II} e^{-j\beta_o R}) \quad \text{eq.2.77}$$

$$(H_{\phi}^{II})_{TEM} = \frac{-j \omega \epsilon_o D_o^{II}}{R \sin \theta} (a_o^{II} \sin \beta_o R - b_o^{II} \cos \beta_o R) \quad \text{eq.2.78}$$

ou

$$(H_{\phi}^{II})_{TEM} = \frac{-j \omega \epsilon_o D_o^{II}}{R \sin \theta} (a_o^{II} e^{j\beta_o R} - b_o^{II} e^{-j\beta_o R}) \quad \text{eq.2.79}$$

O campo TM na região II resulta da introdução de - 2.25 ou 2.26 e 2.44 em 2.21 a 2.23. Suas componentes são:

$$(E_{\theta}^{II})_{TM} = \frac{\beta_o}{R} \sum_m \frac{d}{d(\beta_o R)} \left\{ \beta_o R \left[a_m^{II} j_m(\beta_o R) + b_m^{II} n_m(\beta_o R) \right] \right\} 2C_m^{II} L'_m(\theta) \quad \text{eq.2.80}$$

ou

$$(E_{\theta}^{II})_{TM} = \frac{\beta_o}{R} \sum_m \frac{d}{d(\beta_o R)} \left\{ \beta_o R \left[a_m^{II} h_m^{(1)}(\beta_o R) + b_m^{II} b_m^{(2)}(\beta_o R) \right] \right\} 2C_m^{II} L'_m(\theta) \quad \text{eq.2.81}$$

$$(E_R^{II})_{TM} = \frac{1}{R^2} \sum_m m(m+1) \beta_o R \left[a_m^{II} j_m(\beta_o R) + b_m^{II} n_m(\beta_o R) \right] 2C_m^{II} L_m(\theta)$$

eq.2.82

ou

$$(E_R^{II})_{TM} = \frac{1}{R^2} \sum_m m(m+1) \beta_o R \left[a_m^{II} h_m^{(1)}(\beta_o R) + b_m^{II} h_m^{(2)}(\beta_o R) \right] 2C_m^{II} L_m(\theta)$$

eq.2.83

$$(H_\phi^{II})_{TM} = \frac{-j\omega\epsilon_o}{R} \sum_m \beta_o R \left[a_m^{II} j_m(\beta_o R) + b_m^{II} n_m(\beta_o R) \right] 2C_m^{II} L_m(\theta)$$

eq.2.84

$$\text{ou } (H_\phi^{II})_{TM} = \frac{-j\omega\epsilon_o}{R} \sum_m \beta_o R \left[a_m^{II} h_m^{(1)}(\beta_o R) + b_m^{II} h_m^{(2)}(\beta_o R) \right] 2C_m^{II} L_m(\theta)$$

eq.2.85

As somatórias se estendem a todos os valores de m obtidos da igualdade 2.48.

Finalmente, na região III os campos totais são:

$$E_\theta^{III} = (E_\theta^{III})_{TEM} + (E_\theta^{III})_{TM}$$

eq.2.86

$$E_R^{III} + (E_R^{III})_{TM}$$

$$H_\phi^{III} = (H_\phi^{III})_{TEM} + (H_\phi^{III})_{TM}$$

eq.2.87

As componentes $(E_\theta^{III})_{TEM}$ e $(H_\phi^{III})_{TEM}$ já foram obtidas, e estão apresentadas nas equações 2.59 a 2.62.

As componentes TM resultam da introdução de 2.27 e 2.44 em 2.21 a 2.23 .

$$(E_{\theta}^{III})_{TM} = \frac{\beta_o}{R} \sum_n \frac{d}{d(\beta_o R)} \left[\beta_o R b_n^{III} h_n^{(2)}(\beta_o R) \right] 2C_n^{III} L_n'(\theta) \quad \text{eq.2.88}$$

$$(E_R^{III})_{TM} = \frac{1}{R^2} \sum_n n(n+1) \beta_o R b_n^{III} h_n^{(2)}(\beta_o R) 2C_n^{III} L_n(\theta) \quad \text{eq.2.89}$$

$$(H_{\phi}^{III})_{TM} = \frac{-j\omega\epsilon_o}{R} \sum_n \beta_o R b_n^{III} h_n^{(2)}(\beta_o R) 2C_n^{III} L_n'(\theta) \quad \text{eq.2.90}$$

Também na região III as somatórias se estendem a todos os valores possíveis de \underline{n} , obtidos da igualdade 2.45.

Correntes e Cargas nas Superfícies dos Cones

Das expressões encontradas para os campos totais - nas regiões I, II e III se obtêm as distribuições de correntes e cargas nas superfícies dos cones .

Sendo as superfícies perfeitamente condutoras, e - chamando \vec{n} a normal a um ponto qualquer sobre os cones, onde são conhecidos os campos \vec{E} e \vec{H} , as relações seguintes devem ser obedecidas (20) :

$$\rho = \vec{n} \cdot (\epsilon_o \vec{E}) \quad \text{eq.2.91}$$

$$\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H} \quad \text{eq.2.92}$$

Nessas expressões ρ é a densidade superficial de cargas, e \vec{J} a densidade superficial de corrente.

No caso, considerando apenas as superfícies cônicas $\theta = \text{cte.}$ envolvidas, \vec{n} se reduz a \vec{a}_θ . Lembrando também que nas três regiões as únicas componentes não nulas são E_θ , E_R e H_ϕ , as equações 2.91 e 2.92 dão:

$$\rho = \epsilon_0 E_\theta \left| \begin{array}{l} \theta = \theta_1 \text{ ou } \theta_2 \\ \pi - \theta_1 \text{ ou } \pi - \theta_2 \end{array} \right. \quad \text{eq.2.93}$$

$$J_R = H_\phi \left| \begin{array}{l} \theta = \theta_1 \text{ ou } \theta_2 \\ \pi - \theta_1 \text{ ou } \pi - \theta_2 \end{array} \right. \quad \text{eq.2.94}$$

A corrente total $I(R)$ que flue radialmente pela secção do cone $\theta = \theta_1$ por uma superfície $R = \text{cte.}$ vale

$$I(R) = 2 \pi R \sin \theta_1 \cdot J_R \quad \text{eq.2.95}$$

$$I(R) = 2 \pi R \sin \theta_1 H_\phi(\theta_1) \quad \text{eq.2.96}$$

Analogamente, para o cone $\theta = \theta_2$

$$I(R) = 2 \pi R \sin \theta_2 H_\phi(\theta_2) \quad \text{eq.2.97}$$

Particularizando detalhadamente essas relações - para as três regiões, utilizando as expressões das componentes do campo já calculadas e chamando ρ^I , ρ^{II} e ρ^{III} , $I(R)^I$, $I(R)^{II}$ e $I(R)^{III}$ as distribuições de cargas e correntes nas regiões I, II e III, vem

$$\rho^I = \epsilon_0 E_{\theta}^I(R, \theta_1) \quad \text{eq.2.98}$$

onde E_{θ}^I vem de 2.63 com 2.66 ou 2.67 e 2.70 fazendo $\theta = \theta_1$;

$$\rho^{II} = \epsilon_0 E_{\theta}^{II}(R, \theta_2) \quad \text{eq.2.99}$$

onde E_{θ}^{II} vem de 2.73 com 2.76 ou 2.77 e 2.80 ou 2.81 fazendo $\theta = \theta_2$;

$$\rho^{III} = \epsilon_0 E_{\theta}^{III}(R, \theta_1). \quad \text{eq.2.100}$$

onde E_{θ}^{III} vem de 2.86 com 2.59 ou 2.60 e 2.88 fazendo $\theta = \theta_1$.

$$I(R)^I = H_{\phi}^I(R, \theta_1). 2 \pi R \sin \theta_1 \quad \text{eq. 2.101}$$

onde H_{ϕ}^I vem de 2.65 com 2.68 ou 2.69 e 2.72 fazendo $\theta = \theta_1$

$$I(R)^{II} = H_{\phi}^{II}(R, \theta_2). 2 \pi R \sin \theta_2 \quad \text{eq. 2.102}$$

onde H_{ϕ}^{II} vem de 2.75 com 2.78 ou 2.79 e 2.84 ou 2.85 fazendo - $\theta = \theta_2$.

$$I(R)^{III} = H_{\phi}^{III}(R, \theta_1). 2 \pi R \sin \theta_1 \quad \text{eq. 2.103}$$

onde H_{ϕ}^{III} vem de 2.87 com 2.61 ou 2.62 e 2.90 fazendo $\theta = \theta_1$.

É de particular importância a corrente na região I;
expandindo 2.101:

$$I(R)^I = \left[\frac{-j \omega \epsilon_o D_o^I}{R \sin \theta_1} (a_o^I \sin \beta_o R - b_o^I \cos \beta_o R) + \right. \\ \left. + \frac{-j \omega \epsilon_o}{R} \sum_n \beta_o R a_n^I j_n(\beta_o R) 2C'_n L'_n(\theta_1) \right] 2 \pi R \sin \theta_1 \quad \text{eq.2.104}$$

No ponto de alimentação, vértice dos cones:

$$I(0) = j 2 \pi \omega \epsilon_o D_o^I b_o^I \quad \text{eq.2.105}$$

Tensão entre pontos correspondentes dos cones e impedância na alimentação.

A tensão entre dois pontos correspondentes dos cones superior e inferior, caracterizados por coordenadas (R, ϕ, θ_1) e $(R, \phi, \pi - \theta_1)$ para as regiões I e III pode ser definida por

$$V(R) = \int_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} E_\theta \cdot R \cdot d\theta = \int_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} \left[(E_\theta)_{\text{TEM}} + (E_\theta)_{\text{TM}} \right] R d\theta \quad \text{eq.2.106}$$

É evidente que, em qualquer caso, devido a 2.45

$$\int_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} (E_\theta)_{\text{TM}} \cdot R d\theta = 0 \quad \text{eq.2.107}$$

e portanto $V(R)$ fica apenas

$$V(R) = \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} (E_{\theta})_{\text{TEM}} \cdot R d\theta \quad \text{eq.2.108}$$

Anàlogamente para a região II.

Para as três regiões as tensões valem

$$V(R)^{\text{I}} = \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} (E_{\theta}^{\text{I}})_{\text{TEM}} \cdot R d\theta \quad \text{eq.2.109}$$

$$V(R)^{\text{II}} = \int_{\theta_2}^{\pi-\theta_2} (E_{\theta}^{\text{II}})_{\text{TEM}} \cdot R d\theta \quad \text{eq.2.110}$$

$$V(R)^{\text{III}} = \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} (E_{\theta}^{\text{III}})_{\text{TEM}} \cdot R d\theta \quad \text{eq.2.111}$$

É particularmente importante o caso da região I; -
expandindo 2.109 :

$$V(R)^{\text{I}} = \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{\beta_o D_o^{\text{I}}}{R \sin \theta} (a_o^{\text{I}} \cos \beta_o R + b_o^{\text{I}} \sin \beta_o R) R d\theta \quad \text{eq.2.112}$$

$$V(R)^{\text{I}} = \beta_o D_o^{\text{I}} (a_o^{\text{I}} \cos \beta_o R + b_o^{\text{I}} \sin \beta_o R) 2 \ln \cot \frac{\theta_1}{2} \quad \text{eq.2.113}$$

No vértice dos cones ($R=0$) essa tensão se iguala à do gerador de tensão que alimenta o sistema:

$$V(0) = \beta_o D_o^I a_o^I 2 \ln \cot \frac{\theta_1}{2} \quad \text{eq.2.114}$$

A impedância do sistema no ponto de alimentação -
vale

$$Z = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{\eta_o}{\pi} \ln \cot \frac{\theta_1}{2} \cdot \frac{a_o^I}{jb_o^I} = Z_c \frac{a_o^I}{jb_o^I} \quad \text{eq.2.115}$$

onde

$$\eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 376,7 \, \Omega \approx 120 \, \pi \Omega$$

e Z_c , muitas vezes chamada impedância característica da linha -
bicônica (24), vale

$$Z_c = \frac{\eta_o}{\pi} \ln \cot \frac{\theta_1}{2} = 120 \ln \cot \frac{\theta_1}{2} \quad \text{eq.2.116}$$

Campo TM de radiação na região externa (III)

Para R muito grande $h_n^{(2)}(\beta_o R)$ pode ser substituída
pela sua expressão assintótica

$$h_n^{(2)}(\beta_o R) \longrightarrow \frac{1}{\beta_o R} e^{-j(\beta_o R - \frac{n+1}{2} \pi)} \quad \text{eq.2.117}$$

Nessas condições, os campos TM da região III - -
(2.88 a 2.90) ficam reduzidas a E_θ e H_ϕ , que dependem de R^{-1}
enquanto E_R depende de R^{-2} .

$$E_\theta = \frac{-j 2 \beta_o}{R} e^{-j \beta_o R} \sum_n \left[b_n^{III} C_n^{III} L_n'(\theta) e^{j \frac{n+1}{2} \pi} \right] \quad \text{eq.2.118}$$

$$H_\phi = \frac{-j \omega \epsilon_o}{R} e^{-j \beta_c R} \sum_n \left[b_n^{III} C_n^{III} L_n'(\theta) e^{j \frac{n+1}{2} \pi} \right] \quad \text{eq.2.119}$$

.....

3. DETERMINAÇÃO DAS AMPLITUDES DAS ONDAS ASSOCIADAS À ESTRUTURA BICÔNICA INFINITA, COM RANHURA CIRCUNFERENCIAL.
FORMULAÇÃO EXATA.

Para o conhecimento completo do campo estudado, tendo em vista as equações que descrevem na região I (2.63, 2.64 e 2.65) na região II (2.73, 2.74 e 2.75) e na região III (2.86, 2.87 e 2.89) resta relacionar entre si e com a tensão $V(o)$ do gerador que alimenta o sistema, os coeficientes:

$$\begin{array}{ccc}
 D_{o a o}^{I I} & \text{ou} & D_{o a' o}^{I I} \\
 D_{o b o}^{I I} & \text{ou} & D_{o b' o}^{I I} \\
 & & a_n^{I I} C_n^{I I} \\
 D_{o a o}^{II II} & \text{ou} & D_{o a' o}^{II II} \\
 D_{o b o}^{II II} & \text{ou} & D_{o b' o}^{II II} \\
 a_m^{II II} C_m^{II II} & \text{ou} & a_m^{II II} C_m^{II II} \\
 b_m^{II II} C_m^{II II} & \text{ou} & b_m^{II II} C_m^{II II} \\
 D_{o a o}^{III III} & \text{ou} & D_{o b' o}^{III III} \\
 & & b_n^{III III} C_n^{III III}
 \end{array}$$

Em todos os casos interessam os produtos do tipo $D a$, $D b$, $a C$, e $b C$, não sendo necessário separar as constantes D , C , a ou b .

Em todos casos em que há duas formas alternativas equivalentes para os campos, será escolhida a primeira forma.

As constantes a determinar se reduzem aos produtos:

$$\begin{aligned} D_o^I & a_o^I \\ D_o^I & b_o^I \\ a_n^I & c_n^I \\ D_o^{II} & a_o^{II} \\ D_o^{II} & b_o^{II} \\ a_m^{II} & c_m^{II} \\ b_m^{II} & c_m^{II} \\ D_o^{III} & a_o^{III} \\ b_n^{III} & c_n^{III} \end{aligned}$$

Um resultado anterior (eq.2.114) já permite escrever:

$$D_o^I a_o^I = \frac{V(o)}{2 \beta_o \ell_n \cot \frac{\theta_1}{2}} \quad \text{eq. 3.1}$$

Relações entre os produtos restantes são obtidas impondo-se a continuidade dos campos na superfície de separação dos meios I e II (esfera de equação $R = \ell$) e na superfície de separação dos meios II e III (esfera de equação $R = \ell + \delta$).

Além disso, no intervalo $\theta_2 \text{ --- } \theta_1$ e $\pi - \theta_1 \text{ --- } \pi - \theta_2$ e nas esferas de contorno, a componente E_{θ}^{II} deve ser anular, por tangenciar um condutor perfeito.

Quando $R = \ell$ e $\theta_1 < \theta < \pi - \theta_1$ então

$$E_{\theta}^I = E_{\theta}^{II} \quad \text{eq. 3.2}$$

$$H_{\phi}^I = H_{\phi}^{II} \quad \text{eq. 3.3}$$

Quando $R = \ell + \delta$ e $\theta_1 < \theta < \pi - \theta_1$ então

$$E_{\theta}^{II} = E_{\theta}^{III} \quad \text{eq. 3.4}$$

$$H_{\phi}^{II} = H_{\phi}^{III} \quad \text{eq. 3.5}$$

A continuidade de H_{ϕ} implica na de E_R , donde não ser necessário explicitá-la.

Quando $R = \ell$ e $\theta_2 < \theta < \theta_1$ ou $\pi - \theta_1 < \theta < \pi - \theta_2$

bem como quando $R = \ell + \delta$ e $\theta_2 < \theta < \theta_1$ ou $\pi - \theta_1 < \theta < \pi - \theta_2$, então

$$E_{\theta}^{II} = 0 \quad \text{eq. 3.6}$$

Nestas condições, as constantes do tipo D a, D b, aC e bC anteriormente referidas estão em princípio determinadas pelas igualdades 3.2 a 3.6, onde os campos que nelas figuram já foram explicitados pelas equações 2.63, 2.64, 2.65. 2.73, 2.74, 2.75, 2.86, 2.89 e 2.87 e por outras que as detalham -

melhor.

A menos de uma certa complexidade de computação, o problema da determinação das amplitudes das ondas associadas à estrutura bicônica infinita com ranhura circunferencial se encontra exata e completamente formulado.

4. DETERMINAÇÃO DAS AMPLITUDES DAS ONDAS ASSOCIADAS À ESTRUTURA BICÔNICA INFINITA COM RANHURA CIRCUNFERENCIAL.
FORMULAÇÃO APROXIMADA.

O modelo escolhido para a antena log-periódica - colinear apresenta uma particularidade que pode facilitar o estudo das amplitudes das ondas a ela associadas. As ranhuras, descritas distribuídas log-periódicamente ao longo dos cones, têm abertura muito pequena (fig. 1.2, $\delta_1 \approx 0$) .

Em particular no caso presente de estrutura bicônica infinita com ranhura circunferencial, isto significa ter (fig. 2.2, $\delta \approx 0$) o espaço dividido em apenas duas regiões:

$R < \ell$ - região I

$R > \ell$ - região III

Os campos da região I, internos à esfera $R = \ell$ e os campos da região III, externos à essa esfera são ainda, evidentemente, descritos pelas equações 2.63, 2.64, 2.65, 2.86, 2.89 e 2.87 , bem como por outras que as detalham .

O problema da determinação das constantes envolvidas, e que se reduzem a

$$\begin{aligned} D_o^I & a_o^I \\ D_o^I & b_o^I \\ a_n^I & c_n^I \\ D_o^{III} & a_o^{III} \\ b_n^{III} & c_n^{III} \end{aligned}$$

com $D_o^I a_o^I$ dado pela equação 2.114 pode ser encaminhado aproveitando-se alguns resultados obtidos por Bailin e Silver(21) ou Harrington(25) .

Êsses autores determinaram os campos transversos magnéticos (TM) externos a um cone infinito excitado por uma ranhura circunferencial de largura desprezível, nos terminais da qual era mantida uma tensão V constante (figura 4.1). As expressões a que chegaram devem ser modificadas para servir ao caso do sistema bicônico com uma ranhura em cada cone (figura 4.2) que resulta do caso da figura 2.2 quando se faz $\delta \approx 0$.

Nesse caso os campos são obtidos das equações 2.2 a 2.7, onde π_R é a única componente do potencial de Hertz, e seu valor total é:

$$\pi_R^I = \sum_n \frac{2jV}{\beta_o M_n} \cdot \beta_o \ell \cdot h_n^{(2)}(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L_n(\theta) \beta_o R j_n(\beta_o R)$$

eq.4.1



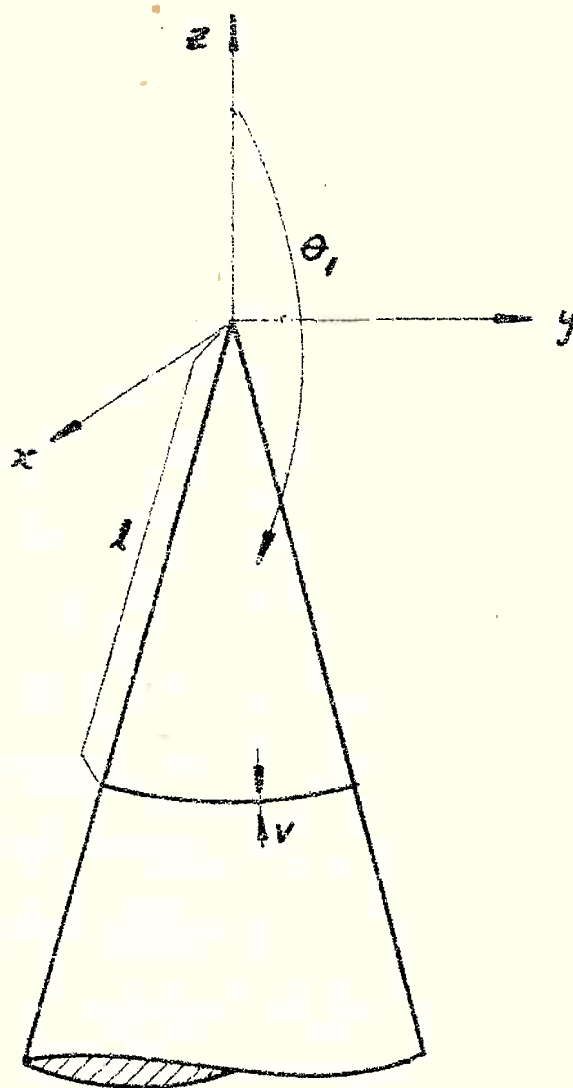


fig. 4.1

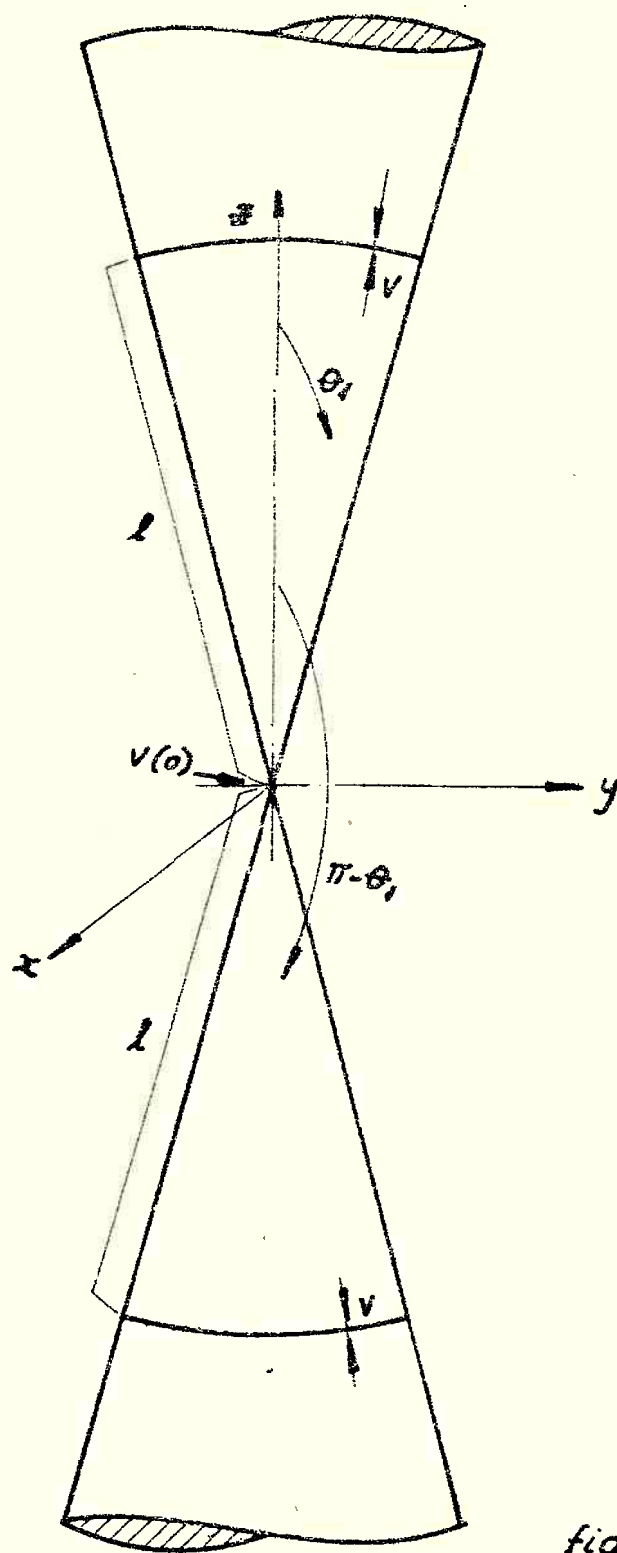


fig. 4.2

$$\pi_R^{III} = \sum_n \frac{2jV}{\beta_{oMn}} \cdot \beta_{o\ell} \cdot j_n(\beta_{o\ell}) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L_n(\theta) \beta_{oR} h_n^{(2)}(\beta_{oR})$$

eq.4.2

$$M_n = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \sin^2 \theta_1 \left| \frac{\partial L_n(\theta)}{\partial n} \cdot \frac{\partial L_n(\theta)}{\partial \cos \theta} \right|_{\theta=\theta_1}$$

eq.4.3

Levando 4.1 e 4.2 a 2.2 até 2.7 ou mais diretamente a 2.21 até 2.23 resultam os campos TM na região I e os campos TM na região III. Suas componentes não nulas são:

$$\begin{aligned} (E_\theta^I)_{TM} &= \\ &= \frac{1}{R} \sum_n \frac{2jV}{\beta_{oMn}} \cdot \beta_{o\ell} \cdot h_n^{(2)}(\beta_{o\ell}) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L'_n(\theta) \frac{d}{d\beta_R} \\ &\quad \left[\beta_{oR} j_n(\beta_{oR}) \right] \end{aligned}$$

eq.4.4

$$\begin{aligned} (E_R^I)_{TM} &= \\ &= \frac{1}{R^2} \sum_n n(n+1) \frac{2jV}{\beta_{oMn}} \beta_{o\ell} h_n^{(2)}(\beta_{o\ell}) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L_n(\theta) \cdot \\ &\quad \cdot \beta_{oR} j_n(\beta_{oR}) \end{aligned}$$

eq.4.5

$$\begin{aligned} (H_\phi^I)_{TM} &= \\ &= \frac{-j\omega\epsilon_0}{R} \sum_n \frac{2jV}{\beta_{oMn}} \beta_{o\ell} h_n^{(2)}(\beta_{o\ell}) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L'_n(\theta) \beta_{oR} j_n(\beta_{oR}) \end{aligned}$$

eq.4.6

$$\begin{aligned}
 (E_{\theta}^{III})_{TM} &= \\
 &= \frac{1}{R} \sum_n \frac{2jV}{\beta_{oM_n}} \beta_o \ell j_n(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L'_n(\theta) \frac{d}{d\beta_{oR}} \\
 &\quad \left[\beta_{oR} h_n^{(2)}(\beta_{oR}) \right] \quad \text{eq.4.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_R^{III})_{TM} &= \\
 &= \frac{1}{R^2} \sum_n n(n+1) \frac{2jV}{\beta_{oM_n}} \cdot \beta_o \ell j_n(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L'_n(\theta) \cdot \\
 &\quad \cdot \beta_{oR} h_n^{(2)}(\beta_{oR}) \quad \text{eq.4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (H_{\phi}^{III})_{TM} &= \\
 &= \frac{-j\omega\epsilon}{R} \sum_n \frac{2jV}{\beta_{oM_n}} \beta_o \ell j_n(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} L'_n(\theta) \cdot \\
 &\quad \cdot \beta_{oR} h_n^{(2)}(\beta_{oR}) \quad \text{eq.4.9}
 \end{aligned}$$

Em tôdas essas expressões é conservada a notação dos capítulos anteriores.

Considerando apenas a ranhura, é possível vê-la - como uma linha de transmissão radial alimentada pela perife-

ria e curto-circuitada no centro (24). O fato de ser limitada por duas calotas ($R = \ell$ e $R = \ell + \delta$) e não por planos paralelos não lhe tira êsse caráter essencial.

Aliás, se θ_1 é pequeno, essas calotas podem se assimilar a planos paralelos. Como δ é suposto pequeno, é possível supor que nessa linha só se propaguem (radialmente) campos TEM - (no caso, para manter a coerência, em relação a θ) e portanto existe uma relação constante entre a corrente e a tensão V nas seus terminais de entrada (circunferência de entrada da ranhura, fig. 4.3)

$$V = Z \cdot I \quad \text{ou} \quad I = Y V \quad \text{eq.4.10}$$

A corrente I se identifica com as correntes associadas aos cones na região I e na região III, dadas pelas equações 2.101 e 2.103, e particularizadas para $R = \ell$

$$I = I(\ell)^I = I(\ell)^{III} \quad \text{eq.4.11}$$

Por outro lado, vale também a relação

$$\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} E_{\theta}^I R d\theta \bigg|_{R=\ell} + \int_{\pi-\theta_1}^{\theta_1} E_{\theta}^{III} R d\theta \bigg|_{R=\ell} = 2V \quad \text{eq.4.12}$$

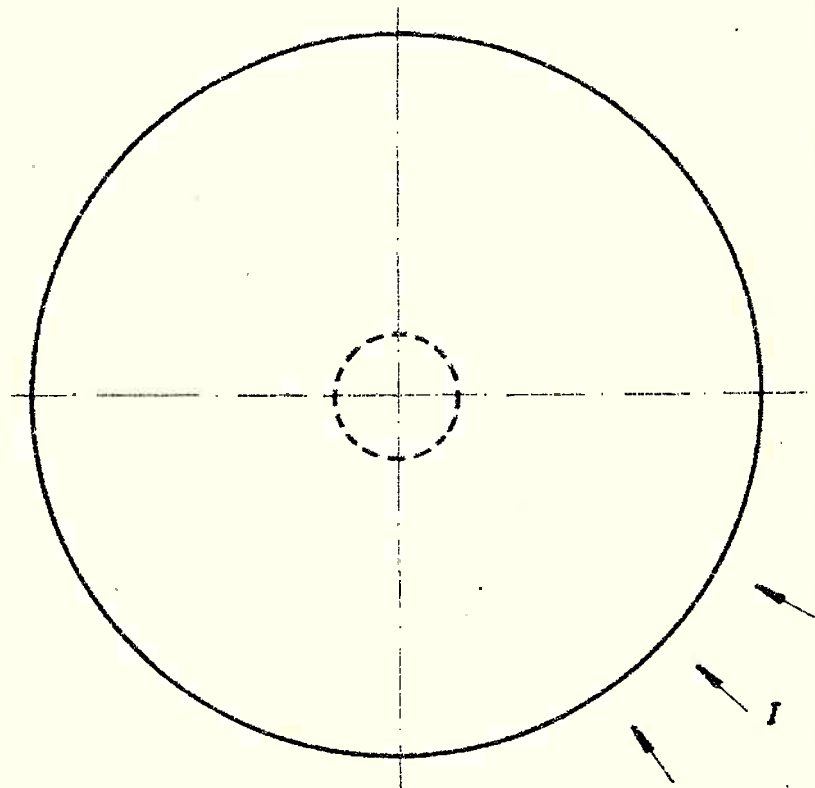
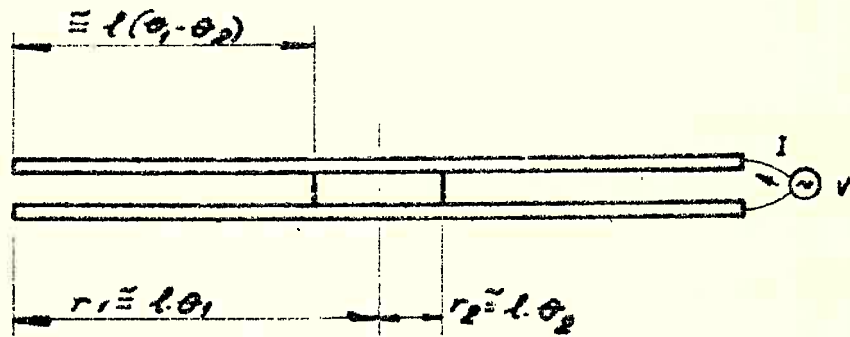


fig. 4.3

Reescrevendo 4.10, 4.11 e 4.12 em termos dos campos totais obtidos no capítulo 2 para as regiões I e III, e considerando que as componentes TM são agora dadas pelas equações 4.4 e 4.9 resultam respectivamente, as seguintes relações:

$$V = Z \left[\frac{-j \omega \epsilon_0}{\ell \sin \theta_1} D_o^{III} a_o^{III} (\sin \beta_o \ell + j \cos \beta_o \ell) + \right. \\ \left. + \frac{-j \omega \epsilon_0}{\ell} \sum_n \frac{2jV}{\beta_o M_n} \beta_o \ell j_n(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} \cdot \right. \\ \left. \cdot L'_n(\theta_1) \beta_o \ell h_n^{(2)}(\beta_o \ell) \right] 2\pi \ell \sin \theta_1 \quad \text{eq.4.13}$$

$$\left[\frac{-j \omega \epsilon_0 D_o^I}{\ell \sin \theta_1} (a_o^I \sin \beta_o \ell - b_o^I \cos \beta_o \ell) + \right. \\ \left. + \frac{-j \omega \epsilon_0}{\ell} \sum_n \frac{2jV}{\beta_o M_n} \beta_o \ell h_n^{(2)}(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} \cdot \right. \\ \left. \cdot L'_n(\theta_1) \beta_o \ell j_n(\beta_o \ell) \right] 2\pi \ell \sin \theta_1 = \left[\frac{-j \omega \epsilon_0}{\ell \sin \theta_1} D_o^{III} a_o^{III} \right. \\ \left. (\sin \beta_o \ell + j \cos \beta_o \ell) + \frac{-j \omega \epsilon_0}{\ell} \sum_n \frac{2jV}{\beta_o M_n} \beta_o \ell j_n(\beta_o \ell) \right. \\ \left. \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} \cdot L'_n(\theta_1) \beta_o \ell h_n^{(2)}(\beta_o \ell) \right] 2\pi \ell \sin \theta_1 \quad \text{eq.4.14}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \left\{ \frac{\beta_o D_o^I}{\ell \sin \theta} (a_o^I \cos \beta_o \ell + b_o^I \sin \beta_o \ell) + \frac{1}{\ell} \sum_n \frac{2 j V}{\beta_o M_n} \right. \\
 & \left. \beta_o \ell h_n^{(2)}(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} \cdot L'_n(\theta) \frac{d}{d \beta_o R} \left[\beta_o R j_n(\beta_o R) \right]_{R=\ell} \right\} \\
 & \ell d\theta + \int_{\pi-\theta_1}^{\theta_1} \left\{ \frac{\beta_o D_o^{III} a_o^{III}}{\ell \sin \theta} (\cos \beta_o \ell - j \sin \beta_o \ell) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\ell} \sum_n \frac{2 j V}{\beta_o M_n} \beta_o \ell j_n(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} \cdot L'_n(\theta) \frac{d}{d \beta_o R} \right. \\
 & \left. \left[\beta_o R h_n^{(2)}(\beta_o R) \right]_{R=\ell} \right\} \ell d\theta = 2V
 \end{aligned}
 \tag{eq.4.15}$$

Lembrando que

$$\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = 2 \ell n \cot \frac{\theta_1}{2}
 \tag{eq.4.16}$$

$$\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} L'_n(\theta) d\theta = \left| L_n(\theta) \right|_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} = 0
 \tag{eq.4.17}$$

e após simplificações, resulta

$$YV = A D_o^{III} a_o^{III} + BV \quad \text{ou} \quad V = \frac{A}{Y-B} D_o^{III} a_o^{III}
 \tag{eq.4.18}$$

$$A = -2\pi j\omega \epsilon_0 (\sin \beta_0 \ell + j \cos \beta_0 \ell) \quad \text{eq.4.19}$$

$$B = +4\pi \omega \epsilon_0 \sin^2 \theta_1 \sum_n \frac{(\beta_0 \ell)^2}{\beta_{0n}^3 M_n} j_n(\beta_0 \ell) h_n^{(2)}(\beta_0 \ell) L_n'^2(\theta_1) \quad \text{eq.4.20}$$

$$D_0^I a_0^I \sin \beta_0 \ell - D_0^I b_0^I \cos \beta_0 \ell = D_0^{III} a_0^{III} (\sin \beta_0 \ell + j \cos \beta_0 \ell) \quad \text{eq.4.21}$$

$$\begin{aligned} D_0^I a_0^I \cos \beta_0 \ell + D_0^I b_0^I \sin \beta_0 \ell + D_0^{III} a_0^{III} (\cos \beta_0 \ell - j \sin \beta_0 \ell) = \\ = \frac{V}{\beta_0 \ell_n \cot(\theta_1/2)} \end{aligned} \quad \text{eq.4.22}$$

Resolvendo o sistema constituido por 4.18, 4.21 e

4.22 vem

$$V = \frac{D_0^I a_0^I}{CY + D + \frac{\text{cps } \beta_0 \ell}{\beta_0 \ell_n \cot(\theta_1/2)}} \quad \text{eq.4.23}$$

$$C = \frac{1}{A} \quad \text{eq.4.24}$$

$$D = - \frac{B}{A} \quad \text{eq.4.25}$$

$$D_0^{III} a_0^{III} = \frac{CY + D}{CY + D + \frac{\cos \beta_0 \ell}{\beta_0 \ell_n \cot(\theta_1/2)}} D_0^I a_0^I \quad \text{eq.4.26}$$

$$D_o^I b_o^I = -j D_o^{III} a_o^{III} + \frac{\sin \beta_o \ell}{\beta_o \ell_n \cot(\theta_1/2)} V \quad \text{eq.4.27}$$

Identificando 2.71 com 4.5 resulta:

$$a_n^I c_n^I = \frac{jV\ell}{M_n} h_n^{(2)}(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} \quad \text{eq.4.28}$$

Identificando 2.89 com 4.8 resulta:

$$b_n^{III} c_n^{III} = \frac{jV\ell}{M_n} j_n(\beta_o \ell) \left| \sin \theta L'_n(\theta) \right|_{\theta=\theta_1} \quad \text{eq.4.29}$$

Considerando finalmente que $D_o^I a_o^I$ se relaciona com a tensão $V(o)$ da alimentação pela equação 2.114 é possível - explicitar tôdas as constantes procuradas, utilizando 4.23 a 4.29 .

$$D_o^I a_o^I = \frac{V(o)}{2 \beta_o \ell_n \cot(\theta_1/2)} \quad \text{eq.4.30}$$

$$D_o^I b_o^I = \left[\frac{-j(CY+D)}{(CY+D)+2 \cos \beta_o \ell} + \frac{\sin \beta_o \ell}{\beta_o^2 \ell_n^2 \cot(\theta_1/2)(CY+D)+2\beta_o \cos \beta_o \ell \ell_n \cot(\theta_1/2)} \right] \cdot V(o) \quad \text{eq.4.31}$$

$$a_n^I c_n^I = \frac{j \ell h_n^{(2)}(\beta_o \ell) |\sin \theta L'_n(\theta)|_{\theta=\theta_1}}{2M_n \left[(CY+D) \beta_o \ell_n \cot(\theta_1/2) + \cos \beta_o \ell \right]} V(o) \quad \text{eq.4.32}$$

$$D_o^{III} a_o^{III} = \frac{(CY+D)}{2 \left[(CY+D) \beta_o \ell_n \cot(\theta_1/2) + \cos \beta_o \ell \right]} V(o) \quad \text{eq.4.33}$$

$$b_n^{III} c_n^{III} = \frac{j \ell j_n(\beta_o \ell) |\sin \theta L'_n(\theta)|_{\theta=\theta_1}}{2M_n \left[(CY+D) \beta_o \ell_n \cot(\theta_1/2) + \cos \beta_o \ell \right]} V(o) \quad \text{eq.4.34}$$

Essas constantes inseridas nas equações 2.66, 2.68, 2.70, 2.71 e 2.72, por sua vez levadas às equações 2.63, 2.64, e 2.65, dão expressões que descrevem a variação dos campos - externos ao sistema considerado, na região I, e os relacionam com a tensão $V(o)$ da alimentação . Anàlogamente, inseridas nas equações 2.59 , 2.61, 2.88, 2.89 e 2.90 , por sua vez levadas às equações 2.86 a 2.87 , dão expressões que descrevem os campos na região III, e os relacionam com a alimentação.

.....

5. APLICAÇÃO À JUSTIFICATIVA DE UM MECANISMO DE RADIAÇÃO
DAS ESTRUTURAS LOG-PERIÓDICAS COLINEARES.
OBSERVAÇÕES, COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.

Dos capítulos anteriores resultaram expressões completas para os campos eletromagnéticos externos a um sistema bicônico infinito, excitado pelo vértice por um gerador de tensão simétrico e com uma ranhura circunferencial de largura muito pequena em cada cone, situadas simetricamente em relação ao vértice.

Esses campos constituem funções da tensão de excitação ($V(o)$), da frequência de excitação (ω), da abertura dos cones (θ_1), da posição da ranhura (ϕ) e da admitância da ranhura (Y) entendida como uma linha de transmissão radial alimentada pela periferia e curto-circuitada no centro.

Os campos serão agora examinados, e para maior facilidade, serão relembradas as respectivas equações.

Em cada região cada componente do campo é a soma dos componentes do campo TEM e do campo TM:

Região I :

$$(E_{\theta}^I)_{\text{TEM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.66}$$

$$(H_{\phi}^I)_{\text{TEM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.68}$$

$$(E_{\theta}^I)_{\text{TM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.70}$$

$$(E_R^I)_{\text{TM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.71}$$

$$(H_{\phi}^I)_{\text{TM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.72}$$

Região III:

$$(E_{\theta}^{\text{III}})_{\text{TEM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.59}$$

$$(H_{\phi}^{\text{III}})_{\text{TEM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.61}$$

$$(E_{\theta}^{\text{III}})_{\text{TM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.88}$$

$$(E_R^{\text{III}})_{\text{TM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.89}$$

$$(H_{\phi}^{\text{III}})_{\text{TM}} \quad \text{_____} \quad \text{eq. 2.90}$$

Nessas equações comparecem constantes do tipo -
 D_a, D_b, aC' e $b'C'$, obtidos no capítulo anterior, especificamente dadas pelas equações seguintes,

$$D_o^I \quad a_o^I \quad \text{_____} \quad \text{eq. 4.30}$$

$$D_o^I \quad b_o^I \quad \text{_____} \quad \text{eq. 4.31}$$

$$a_n^I \quad C_n'^I \quad \text{_____} \quad \text{eq. 4.32}$$

$$D_o^{III} a_o^{III} \quad \text{eq. 4.33}$$

$$b_n^{III} C_n^{III} \quad \text{eq. 4.34}$$

Para facilitar a notação foram usadas nessas equações os símbolos C, D e M_n , dados por

$$C = 1/A \quad \text{eq. 4.19}$$

$$D = -B/A \quad \text{eq. 4.20}$$

$$M_n \quad \text{eq. 4.3}$$

A admitância de entrada (Y) da ranhura curto-circuitada pode variar de $-j \infty$ a $+j \infty$, dependendo apenas de ℓ , θ_1 e θ_2 . Quando $\theta_1 - \theta_2 \approx 0$ a admitância será muito elevada, e tenderá para $-j\infty$.

Aumentando a diferença $\theta_1 - \theta_2$, a admitância cairá, até que um valor adequado de $\theta_1 - \theta_2$ dará $Y=0$ (linha de "um quarto de comprimento de onda", em curto).

A condição $\theta_1 = \theta_2$ corresponde obviamente a um sistema bicônico sem renhuras. Procurando o limite das constantes $D_o^{I} b_o^{I}$, $a_n^{I} C_n^{I}$, $D_o^{III} a_o^{III}$ e $b_n^{III} C_n^{III}$ para Y tendendo a $-j \infty$ verifica-se que :

$$\lim_{Y \rightarrow -j\omega} D_{00}^{II I} = -j^{V(0)} \quad \text{eq.5.1}$$

$$\lim_{Y \rightarrow -j\alpha} a_n^{I C_n^I} = 0 \quad \text{eq.5.2}$$

$$\lim_{Y \rightarrow -j\omega} D_{00}^{III a_0^{III}} = \frac{V(0)}{2\beta_0 \epsilon_n \cot \theta_1/2} = D_{00}^{I a_0^I} \quad \text{eq.5.3}$$

$$\lim_{Y \rightarrow -j\omega} b_n^{III C_n^{III}} = 0 \quad \text{eq.5.4}$$

Esses valores particulares implicam, consideradas as equações dos campos, no desaparecimento de todos os componentes TM e na existência de uma onda única TEM, a mesma nas regiões I e III, propagando-se radialmente no sentido dos R crescentes. Ou seja, reencontra-se a solução da linha biconica infinita.

A observação mais importante põe-se em contraposição com a anterior: a existência dos modos TM depende da existência da ranhura, e sua amplitude depende das características (Y) desta conforme se vê nas equações dos campos. Os modos TM na região III sendo os modos 'irradiados', resulta que a ranhura ou combinações de ranhuras do tipo considerado são -

responsáveis pela radiação do sistema, e o mecanismo dessa radiação é um processo de conversão de modos, formalmente evidenciado pelas equações obtidas .

Um valor notável para Y tem-se quando

$$Y = - \operatorname{Im} (D/C) = \operatorname{Im} \left[4\pi\omega \varepsilon_o \sin^2 \theta_1 \sum_n \frac{(\beta_o \ell)^2}{\beta_{on}^M} j_n(\beta_o \ell) \cdot h_n^{(2)}(\beta_o \ell) L'_n(\theta_1) \right] \quad \text{eq.5.5}$$

Usando-se a definição anterior (eqs.2.13 a 2.14) - de funções de Bessel esféricas, e considerando que ⁽²⁷⁾ :

$$h_{n+1/2}^{(2)}(\beta_o \ell) = J_{n+1/2}(\beta_o \ell) - j N_{n+1/2}(\beta_o \ell) \quad \text{eq.5.6}$$

a equação 5.5 fica :

$$Y = j 4\pi\omega \varepsilon_o \sin^2 \theta_1 \sum_n \frac{(\beta_o \ell)^2}{\beta_{on}^M} j_n(\beta_o \ell) \cdot n_n(\beta_o \ell) L'_n(\theta_1) \quad \text{eq.5.7}$$

Esse valor de Y corresponde a um máximo de $b_n^{III} C_n^{III}$ (é de $a_n^I C_n^I$) e a um mínimo de $D_o^{III} a_o^{III}$. Ou seja, corresponde simultâneamente a campos TM máximos e campos TEM mínimos na região III .

Uma estrutura log-periódica colinear com muitas ramuras , conforme descrição anterior, pode ter seu mecanismo -

de radiação interpretado nestes termos: numa frequência dada a onda TEM originária do vértice continua sem modificações - apreciáveis ao passar pelas primeiras ranhuras devido à condutância muito elevada destas; as ranhuras seguintes, mais profundas e de admitância menor, dão origem a ondas TM importantes, ao mesmo tempo que reduzem a amplitude de onda TEM que continua. As ranhuras responsáveis por um acoplamento TM/TEM eficiente são as ranhuras ("região") ativas.

A amplitude menor da onda TEM que continua reduz a importância das ranhuras maiores que ainda vão ser encontradas.

Quando o cone for truncado, a amplitude do modo TEM estará bastante reduzida, de maneira que apenas os modos TM - internos deverão combinar com os modos TM externos, nos termos da formulação clássica de Schelkunoff ⁽²³⁾ e Chen To Tai ⁽²⁸⁾.

Esse método de ataque parece ser conveniente para o tratamento de outras estruturas log-periódicas, de geometria diferente da aqui tratada: em toda estrutura log-periódica se pode supor circunscrito um sistema bicônico que suporta uma onda TEM. Descontinuidades introduzidas no sistema forçam o aparecimento de modos TM e/ou TE. As descontinuidades podem -

ser tão violentas que a estrutura tem apenas pontos em comum com os cones idealizados. Descontinuidades ativas acoplarão - com mais eficiência a onda TEM às TM e/ou TE . As primeiras - descontinuidades não afetarão a onda TEM originária do vértice .

A impedância de entrada de uma antena bicônica pode ser calculada (23,28) em termos de uma linha de transmissão - bicônica terminada por uma impedância $R_a + jX_a$ devida ao truncamento dos cones. Essa impedância de entrada pode ser controlada pela introdução de ranhuras de admitância e posição - determinadas, num processo análogo ao da adaptação de impedâncias em linhas pela inserção de elementos reativos em pontos determinados.

O formalismo apresentado pode servir de base teórica para os cálculos necessários.

As expressões aqui obtidas, para aplicação à log - periódica colinear, são particularmente convenientes para processamento numérico pelo método de simulação .

Todos os resultados numéricos que venham a ser encontrados são passíveis de verificação experimental: impedâncias,

distribuições de cargas e correntes, campo de radiação, podem ser medidos pelos métodos apresentados em⁽¹⁾. Embora essas técnicas levem à determinação dos valores totais, a separação das diferentes parcelas correspondentes aos vários modos pode ser encaminhada por alguns processos recentemente descritos (29,30) .

.....

Além dos resultados objetivos alcançados, existe - ainda um grande número de problemas a explorar na linha seguida neste trabalho.

.....

-AGRADECIMENTOS-

Este trabalho se beneficiou de muitas discussões do autor com membros dos Departamentos de Eletricidade, Física e Matemática da Escola Politécnica.

A boa qualidade da datilografia se deve à Snrta. Idalva Vieira, que teve a colaboração da Snrta. Maria Helena Scarmagnani .

A impressão cuidadosa se deve ao Snr. Haroldo Armuda Rosa.

A todos, a gratidão do autor.

São Paulo, Março de 1967.

A.H.G.V.

6. BIBLIOGRAFIA

- (1) A.H. Guerra Vieira, Contribuição ao estudo das antenas log-periódicas colineares, Tese Liv-
Doc. - EPUSP, São Paulo, 1964.
- (2) G.A. Deschamps e R.H. DuHamel, Frequency independent -
antennas, in Antenna Engineering -
Handbook, H.Jasik Ed., McGraw-Hill,-
New York, 1961.
- (3) V.H. Rumsey, Frequency independent antennas, Academic -
Press, N.York, 1966.
- (4) G.A. Jackson , Log-periodic slotted cylinder antenna, -
IRE Trans on Antennas and Propagation
Vol AP-10, nº 3, Maio, 1962.
- (5) J.D. Dyson, The unidirectional equiangular spiral, IRE
Trans. on Antennas and Propagation,-
Vol. AP-7, outubro, 1959.
- (6) J.D. Dyson, The characteristics and Design of the conical log-spiral antenna, IRE Trans.on
Antennas and Propagation,-Vol.AP-13,
Nº 4, Julho, 1965.

- (7) R.H. Tuhamel e E.G.Berry, Logarithmically periodic antenna arrays, IRE Wescon Convention Record, part I, 1958.
- (8) D.G.Berry e F.R. Ore, Log-periodic monopole array, IRE International Convention Record, part I, 1961.
- (9) A.F. Wickersham, R.F. Franks e R.L.Bell , Further developments in tapered ladder antennas, Proc. IRE, Vol.49, Nº 1, - Janeiro, 1961.
- (10) J.Greiser, Research on log-periodic arrays of slots, - Tech.Rep. Nº 3, Antenna Lab. U. of Illinois.
- (11) R. Mittra e K.E. Jones, Theoretical Brioullin (k-B) - Diagrams for Monopole and Dipole Arrays and Their Application to Log-Periodic Antennas, Trans, IEEE on Antennas and Propagation, Vol:AP-12 , Nº 5, Setembro, 1964 pgs.533-540 .

- (12) R.L. Carrel, Analysis and Design of Log-Periodic Dipole Antenna, Antenna Lab., U. of Illinois, -
Urbana, Tech. Rep. N° 52, Outubro, 1961.
- (13) R. Mittra e K.E. Jones, A Study of Continuously Scaled and Log-Periodically Loaded Transmission Lines, Antenna Lab. U. of Illinois, Urbana, Tech. Rep. N° 73, Setembro, 1963.
- (14) R. Mittra, Theoretical Study of a Class of Logarithmically Periodic Circuits, Antenna Lab. U. of Illinois, Urbana, Tech. Rep. N° 59, -
Julho, 1962.
- (15) P.E. Mayes, G.A. Deschamps, E.T. Patton, Backward wave Radiation from Periodic Structures and -
Application to the Design of Frequency -
Independent Antennas, Proc. IRE, Vol. 49,
N° 5, Maio, 1961.
- (16) A.A. Oliver Leaky Waves in Electromagnetic Phenomena, -
em Electromagnetic Theory and Antennas, -
Pergamon Press, N.York, 1963.

- (17) R. Mittra, K.E. Jones, How to use k-B Diagrams in Log-Periodic Antenna Design, Micro-Waves, Vol. 4, Nº 6, Junho, 1965.

- (18) L. Bricoullin, Wave Propagation in Periodic Structures, McGraw-Hill, N.York, 1946.

- (19) R.W.P. King, The theory of Linear Antennas, Harvard U. Press, Cambridge, 1956.

- (20) J.A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, - N.York , 1941 .

- (21) L.L. Bailin e S. Silver, Exterior Electromagnetic Boundary value Problems for Spheres and Cones, IRE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP-4, Nº 1, Janeiro 1956, pgs. 5-15 .

- (22) S.Silver, Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill, N.York, 1949 .

- (23) S.A. Schelkunoff, Theory of Antennas of Arbitrary Size and Shape, Proc. IRE, Vol.34, - p. 23, 1941.

- (24) S.Ramo, J.R.Whinnery, T.Van Duzer, Fields and Waves in
Communication Electronics, Wiley
N.York, 1965.
- (25) R.F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields ,
McGraw-Hill, N.York, 1961.
- (26) R.B. Adler, L.J.Chu, R.M.Fano, Electromagnetic Energy -
Transmission and Radiation, Wiley
N.York, 1961.
- (27) A.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions,
Macmillan, N.Y. 1944 - 2^a ed.
- (28) Chen To Tai, On the theory of biconical antennas, J.Appl.
Phys., Vol.19,Nº 12,p.1155, -
Dezembro 1948.
- (20) R.Mittra e K.E. Jones, Resolution of multimode data in -
Periodic Structures and Waveguides,
IEEE Trans. on Antennas and Propa-
gation, Vol.AP-13,Nº2, p.325, -
Março 1965.

- (30) H. Kurss, Analysis of multimode experimental data, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. AP-14, N° 3, p.401, - Maio 1966.

.....