

RT-MAE 2007-14

**TEMPO ÓTIMO DE BURN-IN E DE
GARANTIA SOB UM MODELO
GERAL DE FALHA**

Nelfi Gertrudis González Alvarez

Palavras-Chave: Modelo geral de falha, burn – in, reparo mínimo, função de taxa de falha com forma de banheira, política de garantia FRW com renovação.

Classificação: AMS 60F05, 60F15, 60G42, 60J65

- Novembro de 2007 -

Tempo ótimo de burn-in e de garantia sob um modelo geral de falha

Nelfi Gertrudis González Alvarez

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

22 de novembro de 2007

Resumo

Neste trabalho abordamos o problema da determinação dos tempos ótimos de burn-in e de garantia (com a política FRW com renovação) que minimizam o custo de garantia esperado por unidade de tempo assintótico, sob um modelo geral de falha-reparo, no qual um produto pode experimentar dois tipos de falhas no instante t : Falha do tipo I com probabilidade $q(t) = 1 - p(t)$, a qual é reparada minimamente, ou falha do tipo II com probabilidade $p(t)$, a qual não é reparável e conduz a substituição do produto. São consideradas algumas condições suaves para a função de taxa de falha do produto, $r(t)$ e para a função $p(t)$.

Palavras chaves: Modelo geral de falha, burn-in, reparo mínimo, função de taxa de falha com forma de banheira, política de garantia FRW com renovação.

1 Introdução

O burn-in é um procedimento usado na manufatura de alguns produtos afim de eliminar itens defeituosos com tempos de vida menores do que o tempo desejado, e assegurar que

somente produtos com confiabilidade e qualidade desejada sejam colocados no mercado. Com este objetivo o fabricante submete, por um período de tempo (período de burn-in), os itens manufaturados a testes que simulam situações de uso típicas ou até mais severas. O fabricante também pode fornecer seus produtos com algum tipo de garantia para proteger os consumidores de falhas imprevisíveis e como uma estratégia de marketing. Tanto os procedimentos de burn-in como os de garantias estão relacionados aos custos de manufatura dos quais representam uma porção importante. Uma confiabilidade alta ao início do ciclo de vida de um produto contribui na redução dos custos relacionados com as garantias, junto com os períodos de garantia oferecidos.

Na literatura da confiabilidade achamos alguns trabalhos que otimizam o tempo de burn-in para reduzir o custo total de manufatura de produtos oferecidos sob alguma política de garantia, por exemplo, Nguyen e Murthy (1982), Kar e Nachlas (1997), Mi (1997), Yun et. al. (2002), Sheu e Chien (2005), entre outros. Neste trabalho determinamos o tempo ótimo de burn-in e de garantia, usando a política FRW com renovação, minimizando o custo de garantia esperado por unidade de tempo assintótico, quando o processo de falha do produto apresenta dois possíveis tipos de falha: falhas do tipo I minimamente reparáveis, e falhas do tipo II catastróficas e portanto não reparáveis, segundo o modelo em Block, et. al. (1985).

A estrutura deste trabalho é como segue: na seção 2 apresentamos o modelo geral de falha, na seção 3 discutimos a estrutura dos custos devidos ao burn-in e à política de garantia e na seção 4 apresentamos o problema de otimização e consideramos sua solução no caso em que a função de taxa de falha e da probabilidade de falha do tipo II apresentam forma de banheira.

2 Modelo geral de falha

Consideramos o modelo de Block, et. al., (1985), no qual o produto pode ter dois tipos de falha no instante t :

- **Falha do tipo I:** Acontece com probabilidade $q(t) = 1 - p(t)$. Neste tipo de falha o produto é reparado através de reparos mínimos, isto é, reconstitui-se a sua taxa de falha e o produto é devolvido à sua condição imediatamente anterior à falha.
- **Falha do tipo II:** Acontece com probabilidade $p(t) \in (0, 1)$. Este tipo de falha é catastrófico e o produto deve ser substituído por um novo.

Seja $\{(S_k, Z_k), k \geq 1\}$ um processo pontual marcado, onde S_k corresponde ao k -ésimo tempo de falha, e $Z_k = 0$ ou 1 , indica reparo mínimo ou substituição, respectivamente, no tempo S_{k-1} . Como uma substituição regenera o processo de falha, é suficiente modelar até o primeiro ponto de renovação e portanto, só consideramos este processo até o tempo aleatório $S_{\nu-1}$ onde $\nu = \inf\{k \geq 1 : Z_k = 1\}$. Considere a sequência $\{Z_k, k \geq 1\}$ de ensaios de Bernoulli condicionalmente independentes (sobre $S_1, \dots, S_k$), tais que $P\{Z_k = 1\} = p(S_{k-1}), \forall k \geq 1$, com $S_0 = 0$ e $Z_1 = 0$. As falhas são observadas e os reparos mínimos são realizados sucessivamente até o instante no qual o primeiro “sucesso” (falha do tipo II) é observado (o primeiro instante t em que $Z_k = 1$), onde se realiza uma substituição completa recomençando um novo ciclo, de forma que os tempos das substituições sucessivas formam um processo de renovação.

Assume-se que a função de taxa de falha de um produto novo (sem burn-in) $r(t)$ é contínua, positiva para $t \geq 0$, e que os reparos mínimos e as substituições são instantâneos. Seja Y o tempo de espera até a primeira falha do tipo II de um produto novo. Block, et. al., (1985) demonstra que a função de sobrevivência de Y é dada por

$$\bar{G}(t) = P(Y > t) = \exp \left\{ - \int_0^t p(u)r(u)du \right\}, \quad (1)$$

sendo Y finito com probabilidade um se, e somente se,

$$\int_0^{\infty} p(u)r(u)du = +\infty \quad (2)$$

Segundo Block, et. al., (1985), se $\bar{F}(t)$ é a função de sobrevivência de um produto novo, contínua e tal que $\bar{F}(t) \geq 0 \forall t \geq 0$, e se este é submetido a um reparo mínimo no instante $t \geq 0$, a sua função de sobrevivência atualiza-se para:

$$\bar{F}(x|t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} \quad (3)$$

Considere de novo a sequência $\{(S_k, Z_k), k \geq 1\}$, em termos da qual o processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$, correspondente ao processo pontual $\{S_k, k \geq 1\}$, definido por $N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I\{S_i \leq t\}$ é um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $A(t) = E[N(t)] = -\log \bar{F}(t) \forall t \geq 0$, onde $F(t)$ tem taxa de falha $r(t)$. Seja V_i a variável indicadora da falha do tipo II. Então, para a sequência $\{Y_i, i \geq 1\}$ de variáveis aleatórias iid com função de distribuição $G(t)$, o processo de contagem correspondente, $\{N_{II}(t), t \geq 0\}$, também é um processo de Poisson não homogêneo definido por $N_{II}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} I\{V_i = 1\}$, com função intensidade $A_{II}(t) = E[N_{II}(t)] = -\log \bar{G}(t) = \int_0^t p(u)r(u)du \forall t \geq 0$. Similarmente, o processo de contagem $\{N_I(t), t \geq 0\}$, correspondente ao processo pontual dos tempos de reparo mínimo, com $N_I(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} I\{V_i = 0\}$, é um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $A_I(t) = E[N_I(t)] = \int_0^t q(u)r(u)du$.

3 Estrutura de custo

3.1 Custo de manufatura devido ao burn-in

O processo de burn-in inicia-se com uma unidade nova que é reparada minimamente nas falhas do tipo I, até exceder o tempo b de burn-in. Se uma falha do tipo II ocorre, a unidade é substituída por uma nova e o procedimento é reiniciado. Portanto, o processo termina quando nenhuma falha do tipo II é observada durante o intervalo fixo de burn-in $(0, b]$.

A estrutura de custo considerada é a proposta por Sheu e Chien (2005), que é aditiva e inclui as seguintes quantidades:

C_0 Custo fixo de manufatura por unidade

C_1 Custo fixo de burn-in por unidade

C_2 Custo por unidade de tempo de burn-in, por unidade

C_3 Custo do reparo mínimo por falha do tipo I durante o período de burn-in

Assume-se que $C_0 + C_1 > C_3$.

Seja $\eta - 1$ o número de substituições antes da primeira sobrevivência ao processo de burn-in de período b , sem experimentar falha do tipo II. Então, a variável aleatória η tem distribuição geométrica com probabilidade de sucesso $\bar{G}(b)$,

$$P(\eta = k) = [G(b)]^{k-1} \bar{G}(b), \quad k \geq 1. \quad (4)$$

Considere a sequência $\{Y_i, i \geq 1\}$ de variáveis aleatórias iid com função de sobrevivência $\bar{G}(t)$ dada em (1). Note que a variável aleatória Y_η tem a distribuição de $Y|Y > b$, ou seja, sua função de distribuição é:

$$G_{Y_\eta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq b, \\ \frac{\bar{G}(b) - \bar{G}(t)}{\bar{G}(b)} & \text{se } t > b. \end{cases} \quad (5)$$

O custo de manufatura por unidade no processo de burn-in, sob o modelo geral de falha-reparo, é a variável aleatória $v(b)$ dada por:

$$v(b) = \sum_{i=1}^{\eta-1} \left[C_0 + C_1 + C_2 Y_i + C_3 \int_0^{Y_i} q(u) r(u) du \right] + \left[C_0 + C_1 + C_2 b + C_3 \int_0^b q(u) r(u) du \right]. \quad (6)$$

Por convenção assume-se $\sum_{i=1}^0 \equiv 0$ quando $\eta = 1$. Como $\{\eta = k\} \iff \{Y_i \leq b, i = 1, \dots, k-1, Y_k \geq b\}$, então $\{\eta = k\}$ é independente de $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots$, e a variável η é

um tempo de parada com respeito à sequência $\{Y_i, i \geq 1\}$. Logo, pela equação de Wald, o custo esperado de manufatura por unidade para produtos com tempo de burn-in b , é dado por:

$$\begin{aligned}
B(b) &= E[v(b)] = E \left\{ \sum_{i=1}^{\eta-1} \left[C_0 + C_1 + C_2 Y_i + C_3 \int_0^{Y_i} q(u)r(u)du \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[C_0 + C_1 + C_2 b + C_3 \int_0^b q(u)r(u)du \right] \right\} \\
&= E \left\{ \sum_{i=1}^{\eta} \left[C_0 + C_1 + C_2 Y_i + C_3 \int_0^{Y_i} q(u)r(u)du \right] \right\} \\
&\quad - E \left[C_0 + C_1 + C_2 Y_{\eta} + C_3 \int_0^{Y_{\eta}} q(u)r(u)du \right] \\
&\quad + \left[C_0 + C_1 + C_2 b + C_3 \int_0^b q(u)r(u)du \right] \\
&= E(\eta) \cdot \left[C_0 + C_1 + C_2 E\{Y\} + C_3 E \left\{ \int_0^Y q(u)r(u)du \right\} \right] \\
&\quad + \left[C_2 b + C_3 \int_0^b q(u)r(u)du - C_2 E\{Y_{\eta}\} - C_3 E \left\{ \int_0^{Y_{\eta}} q(u)r(u)du \right\} \right] \\
&= \left[\frac{C_0 + C_1 + C_2 \int_0^{\infty} \bar{G}(u)du + C_3 \int_0^{\infty} q(u)r(u)\bar{G}(u)du}{\bar{G}(b)} \right] \\
&\quad - \left[\frac{C_2 \int_b^{\infty} \bar{G}(u)du + C_3 \int_b^{\infty} q(u)r(u)\bar{G}(u)du}{\bar{G}(b)} \right] \\
&= \frac{C_0 + C_1 + C_2 \int_0^b \bar{G}(u)du + C_3 \int_0^b q(u)r(u)\bar{G}(u)du}{\bar{G}(b)} \tag{7}
\end{aligned}$$

De (1), a densidade de Y é $g(t) = p(t)r(t)\bar{G}(t)$, logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^b q(u)r(u)\bar{G}(u)du &= \int_0^b r(u)\bar{G}(u)du - \int_0^b g(u)du \\
&= \int_0^b r(u)\bar{G}(u)du + \bar{G}(b) - 1
\end{aligned}$$

Portanto, (7) pode-se escrever como,

$$B(b) = \frac{(C_0 + C_1 - C_3) + C_2 \int_0^b \bar{G}(u) du + C_3 \int_0^b r(u) \bar{G}(u) du + C_3 \bar{G}(b)}{\bar{G}(b)}. \quad (8)$$

Derivando (8) com respeito a b , obtemos

$$B'(b) = \frac{[C_2 + C_3 r(b)] \bar{G}(b) + [(C_0 + C_1 - C_3) + C_2 \int_0^b \bar{G}(u) du + C_3 \int_0^b r(u) \bar{G}(u) du] p(b) r(b)}{\bar{G}(b)}. \quad (9)$$

Dos resultados anteriores é claro que $B(0) = (C_0 + C_1)$ e que $B'(b) > 0 \forall b \geq 0$; logo, $B(b)$ é uma função estritamente crescente em b .

3.2 Custo de garantia sob a política FRW com renovação, para produtos com burn-in

Sob a política FRW com renovação um produto com burn-in é fornecido ao consumidor com um período de garantia w . Se neste período o produto experimenta uma falha do tipo I é minimamente reparado e se experimenta uma falha do tipo II é substituído por outro com burn-in e a garantia é reiniciada. Tanto as substituições como os reparos são realizados sem custo para o comprador.

Usando argumentos similares aos da seção 3.1, obtemos o custo de garantia por unidade e seu valor esperado. Considere a variável aleatória $Z = Y - b | Y > b$, que representa o tempo de operação até a primeira falha do tipo II de um produto com burn-in. Então, a função de distribuição de Z é,

$$G_b(t) = \frac{\bar{G}(b) - \bar{G}(b+t)}{\bar{G}(b)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (10)$$

Considere a sequência de variáveis aleatórias iid $\{Z_i, i \geq 1\}$. Seja $\delta - 1$ o número de substituições de um produto com burn-in, antes de sobreviver ao período de garantia sem experimentar falha do tipo II. Então, a variável aleatória δ tem distribuição geométrica

com probabilidade de sucesso $\bar{G}_b(w)$. Seja C_4 o valor adicional sobre o custo por unidade, por reparo mínimo ou por substituição, durante o período de garantia. Então a variável aleatória $C(b, w)$, que corresponde ao custo de garantia segundo a política FRW com renovação, é dada por,

$$C(b, w) = \sum_{i=1}^{\delta-1} \left[(C_3 + C_4) \int_0^{Z_i} q(b+u)r(b+u)du + B(b) + C_4 \right] + (C_3 + C_4) \int_0^w q(b+u)r(b+u)du \quad (11)$$

onde, $\int_0^t q(b+u)r(b+u)du$ representa o número esperado de reparos mínimos após o burn-in em $[0, t]$. Portanto, o custo esperado de garantia por unidade é

$$\begin{aligned} E[C(b, w)] = & E \left\{ \sum_{i=1}^{\delta} \left[(C_3 + C_4) \int_0^{Z_i} q(b+u)r(b+u)du + B(b) + C_4 \right] \right\} \\ & + (C_3 + C_4) \int_0^w q(b+u)r(b+u)du \\ & - (C_3 + C_4) E \left\{ \int_0^{Z_{\delta}} q(b+u)r(b+u)du \right\} - (B(b) + C_4). \end{aligned} \quad (12)$$

Onde $Z_{\delta} = Z | Z > w$ tem a função de distribuição,

$$G_{Z_{\delta}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq w, \\ \frac{\bar{G}_b(w) - \bar{G}_b(t)}{\bar{G}_b(w)} & \text{se } t > w \end{cases} \quad (13)$$

ou,

$$G_{Z_{\delta}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq w, \\ \frac{\bar{G}(b+w) - \bar{G}(b+t)}{\bar{G}(b+w)} & \text{se } t > w. \end{cases} \quad (14)$$

Logo, (12) corresponde a,

$$E[C(b, w)] = \frac{(C_3 + C_4) \int_0^w q(b+u)r(b+u)\bar{G}(b+u)du + [\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)](B(b) + C_4)}{\bar{G}(b+w)}. \quad (15)$$

Derivando (15) com respeito a w , para b fixo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[C(b, w)]}{\partial w} = & [(C_3 + C_4)q(b+w) + (B(b) + C_4)p(b+w)]r(b+w) + E[C(b, w)]p(b+w)r(b+w). \end{aligned} \quad (16)$$

Dos resultados anteriores é claro que $\forall b \geq 0$, $E[C(b, w)]$ é uma função positiva e crescente em w .

4 Modelo de otimização

Nosso objetivo é determinar o tempo de burn-in e o período de garantia ótimos, que minimizem a função de custo de garantia esperado por unidade de tempo, ou seja, a função,

$$K(b, w) = \frac{E[C(b, w)]}{E[TO]} \quad (17)$$

onde a variável TO é o tempo de operação sob garantia de um produto com burn-in. Analiticamente, temos que,

$$TO = \sum_{i=1}^{\delta-1} Z_i + w = \sum_{i=1}^{\delta} Z_i + w - Z_{\delta} \quad (18)$$

com as variáveis δ , Z_i e Z_{δ} definidas em 3.2. Logo, o valor esperado de TO é,

$$\begin{aligned} E[TO] &= E\left\{\sum_{i=1}^{\delta} Z_i\right\} + w - E[Z_{\delta}] \\ &= E[\delta] \cdot E[Z_1] + w - E[Z_{\delta}] \\ &= \frac{\int_0^w \bar{G}(b+u) du}{\bar{G}(b+w)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Portanto, combinando (15) e (19), em (17) temos,

$$K(b, w) = \frac{(C_3 + C_4) \int_0^w q(b+u)r(b+u)\bar{G}(b+u)du + [\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)](B(b) + C_4)}{\int_0^w \bar{G}(b+u)du} \quad (20)$$

Sejam b^* e w^* o tempo ótimo de burn-in e o período ótimo de garantia, respectivamente, satisfazendo,

$$K(b^*, w^*) = \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w)$$

Como em Mi (1994), Cha (2001) e Cha (2003), para b fixado, procuramos $w^*(b)$, obtendo $(b^*, w^*) = (b^*, w^*(b^*))$.

Sejam,

$$A(b, w) = (C_3 + C_4) \int_0^w q(b+u)r(b+u)\bar{G}(b+u)du + [\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)] [B(b) + C_4] \quad (21)$$

e

$$B(b, w) = \int_0^w \bar{G}(b+u)du. \quad (22)$$

Se

$$A'(b, w) = \frac{\partial A(b, w)}{\partial w}, \quad B'(b, w) = \frac{\partial B(b, w)}{\partial w}$$

são suas derivadas com respeito a w , por (20) temos

$$K'(b, w) = \frac{\partial K(b, w)}{\partial w} = \frac{B(b, w)A'(b, w) - A(b, w)B'(b, w)}{[B(b, w)]^2}.$$

De (21) e (22), obtemos,

$$A'(b, w) = [(C_3 + C_4)q(b+w) + (B(b) + C_4)p(b+w)]r(b+w)\bar{G}(b+w)$$

e

$$B'(b, w) = \bar{G}(b+w).$$

Portanto

$$K'(b, w) = \frac{\bar{G}(b+w)}{\left[\int_b^{b+w} \bar{G}(u)du \right]^2} \times \psi(b, w) \quad (23)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi(b, w) &= B(b, w)r(b+w) [(C_3 + C_4)q(b+w) + (B(b) + C_4)p(b+w)] - A(b, w) \\ &= (C_3 + C_4) \left[q(b+w)r(b+w) \int_0^w \bar{G}(b+u)du - \int_0^w q(b+u)r(b+u)\bar{G}(b+u)du \right] \\ &\quad - (B(b) + C_4) \left[(\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)) - p(b+w)r(b+w) \int_0^w \bar{G}(b+u)du \right]. \end{aligned}$$

Contudo de (1) temos que,

$$\int_0^w d\bar{G}(b+u) = \int_0^w p(b+u)r(b+u)\bar{G}(b+u)du = \bar{G}(b) - \bar{G}(b+w).$$

Como $q(b+w) = 1 - p(b+w)$, e $q(b+u) = 1 - p(b+u)$ então

$$\begin{aligned}
\psi(b, w) &= (C_3 + C_4) \left\{ \int_0^w [r(b+w) - r(b+u)] \bar{G}(b+u) du \right\} \\
&\quad - (B(b) - C_3) \left\{ \int_0^w [p(b+u)r(b+u) - p(b+w)r(b+w)] \bar{G}(b+u) du \right\} \\
&= (C_3 + C_4) \left\{ \int_b^{b+w} [r(b+w) - r(u)] \bar{G}(u) du \right\} \\
&\quad - (B(b) - C_3) \left\{ \int_b^{b+w} [p(u)r(u) - p(b+w)r(b+w)] \bar{G}(u) du \right\}. \quad (24)
\end{aligned}$$

De (23) e (24), podemos concluir que o sinal de $K'(b, w)$ é igual ao sinal de $\psi(b, w)$. assim,

$$K'(b, w) = 0 \iff \psi(b, w) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
&\iff (C_3 + C_4) \left\{ \int_b^{b+w} [r(b+w) - r(u)] \bar{G}(u) du \right\} \\
&\quad - (B(b) - C_3) \left\{ \int_b^{b+w} [p(u)r(u) - p(b+w)r(b+w)] \bar{G}(u) du \right\} = 0. \quad (26)
\end{aligned}$$

Como a densidade de Y é $p(t)r(t)\bar{G}(t)$, a equação (20) é igual a,

$$K(b, w) = \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r(u)\bar{G}(u) du + [\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du}$$

e portanto em (26)

$$\begin{aligned}
K'(b, w) &= 0 \\
&\iff (C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r(u)\bar{G}(u) du + (B(b) - C_3) \int_b^{b+w} p(u)r(u)\bar{G}(u) du \\
&= [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b+w)] r(b+w) \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du \\
&\iff (C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r(u)\bar{G}(u) du + [\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)] (B(b) - C_3) \\
&= [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b+w)] r(b+w) \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du \\
&\iff K(b, w) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b+w)] r(b+w). \quad (27)
\end{aligned}$$

O processo de burn-in é efectivo só para a classe de tempos de vida que apresentam taxas de falha altas ao início do ciclo de vida, mas logo são decrescentes com o tempo. A classe de tempos de vida na forma de banheira tem esta propriedade. No teorema 4.1 a seguir, é provado que se a taxa de falha geral do produto $r(t)$, e a probabilidade de falha do tipo II $p(t)$, tem forma de banheira, o tempo ótimo de burn-in b^* é inferior o igual ao máximo dos primeiros pontos de mudança das funções $r(t)$ e $p(t)$. Além disso, o teorema fornece condições suficientes para um período ótimo de garantia w^* , finito.

Teorema 4.1. Suponha que as funções $r(t)$, e $p(t) \in (0, 1)$, tem forma de banheira com pontos de mudança $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$, e $0 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$, respectivamente, e que são diferenciáveis. Sejam $t_1 = \max\{u_1, s_1\}$ e $t_2 = \min\{u_2, s_2\}$, e suponha, $t_1 \leq t_2$. Então,

i. Se $b > t_1$, $w^*(b) = \{w > 0 : b + w \leq t_2\}$.

ii. Se $b \leq t_1$, e

$$\begin{aligned} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r(\infty) \int_b^\infty \bar{G}(u) du \\ > (C_3 + C_4) \int_b^\infty r(u) \bar{G}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{G}(b) \end{aligned}$$

então, $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$; se

$$\begin{aligned} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r(\infty) \int_b^\infty \bar{G}(u) du \\ \leq (C_3 + C_4) \int_b^\infty r(u) \bar{G}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{G}(b) \end{aligned}$$

então $w^*(b) = +\infty$.

iii. Se $b \leq t_1$, $r(0) < r(\infty)$ e $p(0)r(0) < p(\infty)r(\infty)$, então $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$.

iv. $b^* \leq t_1$, e

$$\begin{aligned} \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) &= \min_{0 \leq b \leq t_1} K(b, w^*(b)) \\ &= \min_{0 \leq b \leq t_1} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r(b + w^*(b)) \end{aligned}$$

Prova. Como $r(t)$ tem forma de banheira com pontos de mudança $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$, então,

$$r(t) \text{ é } \begin{cases} \text{estritamente decrescente, se} & 0 \leq t \leq u_1 \\ r > 0, \text{ uma constante, se} & u_1 \leq t \leq u_2 \\ \text{estritamente crescente, se} & t \geq u_2 \end{cases}$$

Similarmente, para $p(t)$ temos que,

$$p(t) \text{ é } \begin{cases} \text{estritamente decrescente, se} & 0 \leq t \leq s_1 \\ p \in (0, 1), \text{ uma constante, se} & s_1 \leq t \leq s_2 \\ \text{estritamente crescente, se} & t \geq s_2 \end{cases}$$

Assim, se $t_1 = \max\{u_1, s_1\}$ e $t_2 = \min\{u_2, s_2\}$, então,

$$p(t)r(t) \text{ é } \begin{cases} \text{decrescente, se} & 0 \leq t \leq t_1 \\ p \cdot r > 0, \text{ uma constante, se} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \text{crescente, se} & t \geq t_2 \end{cases}$$

portanto, considerando (24), temos o seguintes casos:

i. $b > t_1$: Neste caso temos que:

$$\psi(b, w) \text{ é } \begin{cases} = 0, & \text{se } b + w \leq t_2 \\ > 0, & \text{se } b + w > t_2 \end{cases}$$

e a condição para $\psi(b, w) = 0$ é satisfeita para qualquer $w > 0$ tal que $t_1 < b < b + w \leq t_2$, ou seja, $w^*(b) = \{w > 0 : b + w \leq t_2\}$.

ii. $b \leq t_1$: Neste caso temos que:

(a) Se $b + w \leq t_1 \implies b < b + w \leq t_1 \implies \forall u \in [b, b + w], r(u) > r(b + w)$ e $p(u)r(u) > p(b + w)r(b + w)$, logo $\psi(b, w) < 0$.

(b) Se $t_1 < b + w \leq t_2 \implies \forall u \in [b, b + w], r(u) \geq r(b + w)$ e $p(u)r(u) \geq p(b + w)r(b + w)$,

logo $\psi(b, w) < 0$.

Por (a) e (b), temos que para $b \leq t_1$, e $b + w \leq t_2$, $\psi(b, w) < 0$.

(c) Se $b + w > t_2$, é preciso ter alguma condição adicional para determinar se existe $w > 0$ tal que $\psi(b, w) \geq 0$. Para isto consideramos o seguinte: Sejam $\alpha(b, w)$ e $\gamma(b, w)$, as funções definidas por,

$$\alpha(b, w) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w)]r(b + w) \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du$$

$$\gamma(b, w) = (C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r(u) \bar{G}(u) du + (B(b) - C_3) \int_b^{b+w} p(u) r(u) \bar{G} du$$

De (b), $\psi(b, w) < 0$ para $b \leq t_1$, e $b + w \leq t_2$, então, como $\psi(b, w) = \alpha(b, w) - \gamma(b, w)$, o anterior implica que para $b \leq t_1$, e $b + w \leq t_2$, $\alpha(b, w) < \gamma(b, w)$. Temos também que,

$$\frac{\partial \gamma(b, w)}{\partial w} = (C_3 + C_4)r(b + w)\bar{G}(b + w) + (B(b) - C_3)p(b + w)r(b + w)\bar{G}(b + w) > 0, \forall w > 0$$

e para $b + w > t_2$, pela forma de banheira das funções $r(\cdot)$ e $p(\cdot)r(\cdot)$ temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(b, w)}{\partial w} = & \frac{\bar{G}(b + w)}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du} \alpha(b, w) + \left\{ [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w)] r'(b + w) \right. \\ & \left. + (B(b) - C_3)p'(b + w)r(b + w) \right\} \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du \end{aligned}$$

> 0 .

Logo, $\alpha(b, w)$ e $\gamma(b, w)$, são funções contínuas estritamente crescentes para $\forall b + w > t_2$, assim, se $\alpha(b, \infty) > \gamma(b, \infty) \implies \exists t_2 < b + w < \infty : \alpha(b, w) \geq \gamma(b, w)$ e portanto $w^*(b) = \inf \{w > 0 : b + w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$. Como

$$\alpha(b, \infty) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r(\infty) \int_b^{\infty} \bar{G}(u) du$$

e

$$\gamma(b, \infty) = (C_3 + C_4) \int_b^{\infty} r(u) \bar{G}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{G}(b)$$

a condição em ii é satisfeita. No caso em que $\alpha(b, \infty) \leq \gamma(b, \infty) \implies \nexists t_2 < b + w < \infty : \alpha(b, w) \geq \gamma(b, w)$, e assim $w^*(b) = +\infty$.

iii. Seja $b \leq t_1$, $r(0) < r(\infty)$ e $p(0)r(0) < p(\infty)r(\infty)$. Observe que pela forma de banheira, $r(b) < r(0)$ e $p(b)r(b) < p(0)r(0)$. Como as funções $r(\cdot)$ e $p(\cdot)r(\cdot)$ são estritamente crescentes para $t > t_2$, logo sob estas condições, para $b + w > t_2$, $\exists w > 0$, tal que $\forall u \in [b, b + w]$, $r(u) \leq r(b + w)$ e $p(u)r(u) \leq p(b + w)r(b + w)$. Logo

$$\int_b^{b+w} r(u)\bar{G}(u)du \leq r(b+w) \int_b^{b+w} \bar{G}(u)du$$

e

$$\int_b^{b+w} p(u)r(u)\bar{G}(u)du \leq p(b+w)r(b+w) \int_b^{b+w} \bar{G}(u)du.$$

Como consequência, para tal $w > 0$, $\psi(b, w) \geq 0$ e então,

$$w^*(b) = \inf \{w > 0 : b + w > t_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty.$$

iv. Seja $w^*(b)$ o $w > 0$ tal que $\psi(b, w) = 0$, então, por (27) temos que,

$$K(b, w^*(b)) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r(b + w^*(b)). \quad (28)$$

Em adição, $\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) = K(b^*, w^*(b^*)) = \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b))$.

Então se $b > t_1$, por i. a condição em (28), corresponde a

$$K(b, w^*(b)) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p] \times r, \forall b > t_1, b + w \leq t_2.$$

No entanto, como $B(b)$ é contínua e estritamente crescente em b , o mínimo de $K(b, w^*(b))$ é atingido em $b = t_1$ e assim, b^* não está definido. Pelo contrario, se $0 \leq b \leq t_1$, a condição em (28) corresponde a

$$K(b, w^*(b)) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r(b + w^*(b)), \forall 0 \leq b \leq t_1.$$

Portanto, $\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) = K(b^*, w^*(b^*)) = \min_{0 \leq b \leq t_1} K(b, w^*(b))$, e assim, $b^* \leq t_1$ e

$$\begin{aligned} \min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) &= \min_{0 \leq b \leq t_1} K(b, w^*(b)) \\ &= \min_{0 \leq b \leq t_1} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r(b + w^*(b)). \end{aligned}$$

■

O teorema 4.2 a seguir, considera o caso especial no qual a taxa de falha geral do produto tem a forma de banheira mas a taxa de falha do tipo II é decrescente, e prova que neste caso o tempo ótimo de burn-in é finito mas não é necessariamente menor que o primeiro ponto de mudança da função $r(t)$. Uma condição suficiente para um período ótimo de garantia finito é obtida.

Teorema 4.2. Seja $r(t)$ contínua e diferenciável, com forma de banheira e com pontos de mudança em $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$, e $p(t) \in (0, 1)$, uma função decrescente $\forall t \geq 0$, tal que $p(t)r(t)$ é também decrescente $\forall t \geq 0$. Suponha também que $\int_0^\infty r(u)\bar{G}(u)du < \infty$, e $\mu = \int_0^\infty \bar{G}(u)du < \infty$. Então,

i. $b^* < +\infty$

ii. $\forall b \geq 0$, se

$$\begin{aligned} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r(\infty) \int_b^\infty \bar{G}(u)du \\ > (C_3 + C_4) \int_b^\infty r(u)\bar{G}(u)du + (B(b) - C_3)\bar{G}(b), \end{aligned}$$

então, $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > u_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$; se

$$\begin{aligned} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r(\infty) \int_b^\infty \bar{G}(u)du \\ \leq (C_3 + C_4) \int_b^\infty r(u)\bar{G}(u)du + (B(b) - C_3)\bar{G}(b), \end{aligned}$$

então $w^*(b) = +\infty$.

iii. Sob ii. (b^*, w^*) é tal que,

$$\begin{aligned}\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) &= \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b)) \\ &= \min_{b \geq 0} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r(b + w^*(b)).\end{aligned}$$

Prova. i. Para provar que $b^* < \infty$, é suficiente mostrar que $K(\infty, w) = +\infty$, $\forall w > 0$.

Então, com $w > 0$ fixo, calculamos $\lim_{b \rightarrow +\infty} K(b, w)$, com $0 \cdot \infty = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow +\infty} K(b, w) &= \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r(u) \bar{G}(u) du + [\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du} &= \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r(u) \bar{G}(u) du}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{[\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du}\end{aligned}$$

Note que:

1. $\forall b \geq 0$

$$\frac{[\bar{G}(b) - \bar{G}(b+w)] (B(b) - C_3)}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du} \geq 0$$

2. Pela monotonicidade e continuidade da função $r(t)$, para b suficientemente grande, temos que $\forall u \in [b, b+w]$, $r(u) \geq r(b)$, logo

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(C_3 + C_4) \int_b^{b+w} r(u) \bar{G}(u) du}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du} &> \frac{(C_3 + C_4)r(b) \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du}{\int_b^{b+w} \bar{G}(u) du} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (C_3 + C_4)r(b) = +\infty\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{b \rightarrow +\infty} K(b, w) = +\infty$. Logo $b^* < +\infty$.

ii. Sejam $\eta(b, w)$ e $\zeta(b, w)$ como segue:

$$\begin{aligned}\eta(b, w) &= (C_3 + C_4) \int_b^{b+w} [r(b+w) - r(u)] \bar{G}(u) du \\ \zeta(b, w) &= (B(b) - C_3) \int_b^{b+w} [p(u)r(u) - p(b+w)r(b+w)] \bar{G}(u) du\end{aligned}$$

Portanto, $\psi(b, w) = \eta(b, w) - \zeta(b, w)$, com

$$\frac{\partial \eta(b, w)}{\partial w} = (C_3 + C_4)r'(b + w) \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du \quad (29)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta(b, w)}{\partial w} &= -(B(b) - C_3) \cdot [p'(b + w)r(b + w) + p(b + w)r'(b + w)] \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du \\ &= (B(b) - C_3) \cdot \left\{ - \frac{\partial(p(t)r(t))}{\partial t} \Big|_{t=b+w} \right\} \times \int_b^{b+w} \bar{G}(u) du > 0, \quad \forall w > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Considere os seguintes casos:

(a) $b > u_1$: Como $r(t)$ tem forma de banheira com pontos de mudança $0 \leq u_1 \leq u_2 < \infty$ e por hipótese, $p(t)r(t)$ é decrescente $\forall t \geq 0$, então,

1. Se $b + w \leq u_2 \implies u_1 < b < b + w \leq u_2$, portanto $\forall u \in [b, b + w]$, $r(u) = r(b + w) = r$, e $\eta(b, w) = 0$. Como $\zeta(b, w) > 0$, temos $\psi(b, w) < 0$.
2. Se $b + w > u_2$, $\forall u \in [b, b + w]$, $r(u) \leq r(b + w)$, então $\eta(b, w) > 0$ e por (29), também é crescente. $\zeta(b, w) > 0$ e por (30), crescente.

O anterior implica que para $b > u_1$, $b + w^*(b) > u_2$. Então, como $\eta(b, w)$ e $\zeta(b, w)$ são crescentes em $b + w > u_2$, neste intervalo estas funções se cruzam ou não. $\eta(b, \infty) > \zeta(b, \infty)$ garante que existe $w > 0$ tal que para $b + w > u_2$, $\eta(b, w) \geq \zeta(b, w)$, ou seja, que $w^*(b) = \inf\{w > 0 : b + w > u_2, \psi(b, w) \geq 0\} < \infty$. Sob a condição dada no item ii. do teorema, temos,

$$\begin{aligned} &[(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(\infty)] \times r(\infty) \int_b^{\infty} \bar{G}(u) du \\ &> (C_3 + C_4) \int_b^{\infty} r(u) \bar{G}(u) du + (B(b) - C_3) \bar{G}(b) \end{aligned}$$

Como $\bar{G}(b) = \int_b^\infty p(u)r(u)\bar{G}(u)du$, então

$$(C_3 + C_4) \int_b^\infty [r(\infty) - r(u)] \bar{G}(u)du \\ > (B(b) - C_3) \int_b^\infty [p(u)r(u) - p(\infty)r(\infty)] \bar{G}(u)du$$

logo,

$$\eta(b, \infty) > \zeta(b, \infty)$$

assim, obtemos a conclusão dada em ii. para $b > u_1$.

(b) $b \leq u_1$: Observamos que

1. Pela forma banheira de $r(t)$, e por (29), $\eta(b, w)$ é decrescente e negativa para $b + w \leq u_2$, enquanto por (30) e $p(t)r(t)$ decrescente, $\zeta(b, w)$ é crescente e positiva. Logo, $\psi(b, w) < 0$, $\forall b + w \leq u_2$.
2. Se $b + w > u_2$, por (29), $\eta(b, w)$ é crescente, logo para algum $b + w > u_2$, $\eta(b, w) > 0$. Neste mesmo intervalo $\zeta(b, w)$ é crescente e positiva.

Então, temos que para $b \leq u_1$, $b + w > u_2$, as funções $\eta(b, w)$, e $\zeta(b, w)$, se cruzam ou não.

Usando a mesma análise feita em (a), a conclusão dada em ii é verdadeira. para $b \leq u_1$.

Por (a) e (b), fica provado o item ii. do teorema, para $b \geq 0$.

iii. Sob ii., para cada $b \geq 0$, w^* é o $w > 0$ tal que $\psi(b, w) = 0$, então, como em (28),

$$K(b, w^*(b)) = [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r(b + w^*(b))$$

e $\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) = K(b^*, w^*(b^*)) = \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b))$, portanto,

$$\min_{b \geq 0, w > 0} K(b, w) = \min_{b \geq 0} K(b, w^*(b)) \\ = \min_{b \geq 0} [(C_3 + C_4) + (B(b) - C_3)p(b + w^*(b))] \times r(b + w^*(b))$$

Referências

- [1] Block, H.W., Borges, W.S. and Savits, T.H. *Age-dependent minimal repair*. Journal of Applied Probability, 22 (1985), 370-385.
- [2] Cha, J.H. *Burn-in procedures for a generalized model*. Journal of Applied Probability, 38, (2001), 542-553.
- [3] Cha, J.H. *A further extension of the generalized burn-in model*. Journal of Applied Probability, 40 (2003), 264-270.
- [4] Kar, T.R. and Nachlas, J.A. *Coordinated warranty & burn-in strategies*. IEEE Transactions on Reliability, 46(4) (1997), 512-518.
- [5] Mi, J. *Burn-in and maintenance policies*. Advanced Applied Probability, 26 (1994), 207-221.
- [6] Mi, J. *Warranty policies and burn-in*. Naval Research Logistics, 44 (1997), 199-209.
- [7] Nguyen, D.G. and Murthy, D.N.P. *Optimal burn-in time to minimize cost for products sold under warranty*. IIE Transactions, 14(3)(1982), 167-174.
- [8] Sheu, S.H. and Chien, Y.H. *Optimal burn-in time to minimize the cost for general repairable products sold under warranty*. European Journal of Operational Research, 163 (2005), 445-461.
- [9] Yun, W.H. Lee, Y.W. and Ferreira, L. *Optimal burn-in time under accumulative free replacement warranty*. Reliability Engineering & System Safety, 78 (2002), 93-100.

ÚLTIMOS RELATÓRIOS TÉCNICOS PUBLICADOS

2007-01 - POLPO, A., PEREIRA, C.A.B. Reliability nonparametric bayesian estimation in parallel systems 2007. 12p. (RT-MAE 2007-01)

2007-02 - GONÇALVES, M., Kolev, N. V., Fabris. A. E. Bounds for quantile-based measures of dependent risks' functions. 2007. 16p. (RT-MAE 2007-02)

2007-03 - MIMBELA, J. A. L, Kolev, N.V. Occupation measure of Markov - modulated risk processes 2007. 12p. (RT-MAE 2007-03)

2007-04 - GONÇALVES, M., Kolev, N. V., Fabris, A. E. Bounds for distorted risk measures. 2007. 11p. (RT-MAE 2007-04)

2007-05 - BUENO, V.C., A series representation of a parallel systems. 2007. 10p. (RT-MAE 2007-05)

2007-06 - KOLEV, N.V., PAIVA, D. Copula-Based Regression Models. 2007. 27p. (RT-MAE 2007-06)

2007-07 - POLETO, F. Z., SINGER, J.M., PAULINO, C.D., A product-multinomial framework for categorical data analysis with missing responses. 2007. 27p (RT-MAE 2007-07)

2007-08 - KOLEV, N.V., GONCALVES, M. DIMITROV, B. Probabilistic Properties of Sibuya's Dependence Function. 2007. 13p. (RT-MAE-2007-08)

2007-09 - AZEVEDO, C.L.N., ANDRADE, D.F. Latent Trait Estimation in Nominal Response Model: Latent Trait Asymmetry and Hierarchical and Empirical Framework. 2007.20p. (RT-MAE-2007-09)

2007-10 - AZEVEDO N.C.L., ANDRADE, D.F. Latent Trait Estimation Through Nominal Response and Dichotomous models: a case Study in a Multiple choice test.2007. 17p. (RT-MAE-2007-10)

2007-11- FIGUEIREDO, C.C., SANDOVAL, M.C., BOLFARINE,H., LIMA, C.R.O.P., Skew-Normal Linear Calibration: A Bayesian Perspective. 2007.18p.(RT-MAE-2007-10)

2007-12 - BAYES, C.L., BRANCO, M.D., Robust Linear Mixed Model using the Skew-t Distribution. 2007.18p.(RT-MAE-2007-11.)

2007-13 - ISHIKAWA, N.I., ELIAN, S.N. Algumas medidas de diagnóstico no Modelo de Regressão Logística de Box-Cox. 2007.20p.(RT-MAE-2007-13)

The complete list of "Relatórios do Departamento de Estatística", IME-USP, will be sent upon request.

*Departamento de Estatística
IME-USP
Caixa Postal 66.281
05311-970 - São Paulo, Brasi*