UMA LISTA DE PROBLEMAS DE E.D.O.

Jorge SOTOMAYOR *

- *RESUMO: Relato memorialístico evocando a origem do interesse por Sistemas Dinâmicos no Brasil, testemunhada pelo autor durante sua iniciação à pesquisa nos anos 62-64.*

- *PALAVRAS-CHAVE: estabilidade estrutural, bifurcação, história dos sistemas dinâmicos no Brasil.*

1 O diário de uma viagem

Encontrar um velho caderno de anotações matemáticas, protegido da degradação total por um invólucro plástico, foi como deparar-me com o diário de uma viagem longínqua. O contato com suas páginas desencadeou uma avalanche de recordações da época em que fui estudante de doutorado nos anos 62-64. Sua estrutura seqüencial ajudou-me a reconstruir a cronologia de minha iniciação à pesquisa. Estavam aí latentes os marcos de referência essenciais, as estações de um percurso matemático —uma viagem— transpondo o espaço existente entre a passiva Matemática dos Livros e a Matemática Viva, a dos artigos em jornais e dos problemas por escolher e, se possível, resolver. Faltam algumas páginas; outras esmaeceram.

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. Rua do Matão 110, Cidade Universitária, 05389-970 São Paulo - S.P., Brasil. e-mail: sotp@ime.usp.br.

2 Numa tarde de outubro de 1962

Numa tarde do início de Outubro de 1962 na sala de Seminários do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), então localizado no bairro carioca de Botafogo, reuniu-se um grupo de menos de uma dezena de matemáticos, professores e estagiários, aspirantes a tornarem-se matemáticos. O motivo do encontro era o Seminário de Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias (TQEDO), orientado por Mauricio M. Peixoto. Esta atividade havia sido interrompida por quase todo o mês de setembro, e retomava o seu curso normal, depois do retorno de Mauricio, que tinha assistido ao Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Estocolmo.

Além do reencontro, a reunião dessa tarde tinha algo a mais de especial: o próprio Mauricio falaria sobre "Problemas em Aberto na Teoria Qualitativa das E.D.O." Conhecíamos seu ponto de vista sobre o aprendizado da Matemática ao nível de pós-graduação: "Esta ciência aprende-se resolvendo problemas e pensando", já havia dito mais de uma vez, respondendo a insinuações que enfatizavam o conhecimento preponderantemente livresco ou o excesso de cursos neste nível. Tratava-se de uma postura francamente antagônica à ingênua (e confortável) visão que eu trazia de minha iniciação matemática na graduação.

Havia empolgação e uma tensa expectativa na audiência. Para os participantes mais maduros do Seminário, a hora da verdade havia chegado.

3 Flashes do ambiente matemático no IMPA em 1962

Em 1962, ano de minha chegada ao IMPA, conheci estagiários e freqüentadores de cursos de níveis diversos, do Rio e de outros estados do Brasil. Também havia professores universitários e matemáticos já formados.

Entre os pesquisadores, além de Mauricio, que permaneceu aí o tempo todo, de 62 a agosto de 64, passaram pelo IMPA durante meu estágio Elon Lima, Djairo G. de Figueiredo e Otto Endler. Djairo ficou poucos meses e Elon todo o primeiro semestre de 1962. O saudoso Otto ficou o ano de 1963 e parte de 1964. Havia poucos visitantes e palestrantes, entre eles deixaram lembranças matemáticas as visitas curtas de Charles Pugh (Closing Lemma), Gilberto Loibel (Conjuntos Estratificados) e Wilhelm Klingenberg (Geodésicas Fechadas).

Entre os estagiários, aponto os seguintes: Maria Lúcia Alvarenga, Augusto Vanderlei, Pedro Nowosad, Jacob Palis, Hilton Machado, Lindolpho C. Dias, Alciléa Augusto, Jorge Alberto Barroso, Aristides Barreto e Roberto Baldino, entre outros. Também chegaram nessa época alguns estagiários estrangeiros tais como Ivan Kupka, Emilio Isla e eu mesmo.

Depois de receberem um reforço no IMPA, que servia para nivelar os não muito uniformes currículos das universidades brasileiras e para avançar na direção da almejada "maturidade matemática", os estagiários brasileiros mais promissores iam fazer o doutorado nos Estados Unidos. Os candidatos às bolsas para o exterior do CNPq (Conselho Nacional de Pesquisas), originários dos centros menos tradicionais, deviam cumprir este ritual, ditado pela precaução, antes de embarcar para o exterior. Pelo que me consta, o IMPA, como Instituto de Pesquisa, não tinha ainda um programa mínimo de oferta periódica de cursos e atividades anuais. Esta dependia dos visitantes, estagiários e dos pesquisadores presentes, num sistema que parecia ser de alta rotatividade.

Houve, entretanto, uma base permanente que deu ao Instituto uma estabilidade científica nesses anos. Em 1963, por um convênio com a Universidade do Brasil, precursora da UFRJ, iniciou-se um programa de doutorado no IMPA. Foi o primeiro esforço sistemático de treinamento nacional, orientado a formar pesquisadores. Eu tive o privilégio de fazer parte da primeira turma de doutorandos, junto com Kupka e Aristides, sob a orientação de Mauricio M. Peixoto.

Este projeto pioneiro, liderado por Mauricio, constitui um marco de referência fundamental que assinala o início do interesse por Sistemas Dinâmicos (SD) no Brasil. A partir dos trabalhos do matemático americano S. Smale (anos 60 e 70), o nome SD passou a abranger boa parte da TQEDO, não sendo bem delineada a fronteira entre ambos Smale (1977); esse também é o título de um livro famoso de George Birkhoff, de 1927. Evoco a seguir os cursos e seminários do IMPA em 1962. Eles serviram de alicerce para minha iniciação à pesquisa. Em ordem de preponderância, pelo peso que lhes atribuo na minha formação, os listo e descrevo sucintamente a seguir:

1. Seminário de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais;
2. Seminário de Variedades Diferenciáveis, sobre as notas do curso de Porto Alegre de Elon (1960);
3. Curso de Topologia Algébrica, baseado no livro de Cairns e depois no de Hocking Young;
4. Seminário baseado na leitura do livro de J. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis;
5. Curso de Álgebra Multilinear e Cálculo Exterior, baseado em Bourbaki e Flanders;
6. Seminário de Equações Diferenciais Ordinárias, sobre o livro de W. Hurewicz "Lectures on Ordinary Differential Equations";
7. Cálculo Avançado, baseado no livro de Courant, volume II;
8. Seminário de Teoria da Integração: Lebesgue e Haar, inicialmente sobre o livro de Williamson e depois sobre as notas de Recife do Prof. Leopoldo Nachbin;
9. Álgebra Linear, baseado nos livros de Halmos e Gelfand.

O fato de haver estagiários e ouvintes para toda esta gama de níveis matemáticos dá uma idéia da diversidade do ambiente. Concentrei-me em 1 a 4, pois eles eram realmente novos para mim. Participei descompromissadamente e com espírito crítico das atividades 5 a 7, com as quais tinha maior familiaridade. Ao seminário 8, assisti sem o empenho suficiente. As exposições eram muito animadas pelo diálogo e a discussão, num estilo mais maduro ao que eu, de formação livresca, estava habituado.

4 O Seminário de EDO, 1962

Em retrospecto, considero que foi crucial para minha iniciação à pesquisa ter feito o grande esforço que fiz para acompanhar o Seminário de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, a mais marcante de todas as atividades matemáticas que desenvolvi durante aquele meu estágio no IMPA.

Se bem que não supusesse volumosos pré-requisitos, o Seminário exigia um grau de maturidade e uma atitude inquisitiva especiais, as quais eu ainda não tinha me visto expôsto.

Seguindo a orientação epistolar de Mauricio, desde dezembro do ano anterior até março, ainda no Perú, havia começado a preparar-me. Assim, estudei o clássico Coddington & Levinson (1955), considerado duro por sua concisão, e o mais acessível e breve de autoria de Hurewicz (1958), já citado acima. Estas leituras marcam a minha iniciação à Teoria das EDO. Lá estavam expôstos, com maestria e rigor, os Fundamentos da Teoria Geral (existência, unicidade continuidade e diferenciabilidade, sistemas lineares) e os primeiros passos da Teoria Qualitativa (Teorema de Poincaré-Bendixson, e retrato de fase local dos pontos singulares simples no plano: selas, nós, focos, centros). Também (por orientação de Mauricio) havia lido parte do super-clássico "Lecciones de Topología" de Seifert-Therlfall e paralelamente (e bem mais a fundo) o pequeno livro de Pontrjagin "Foundations of Combinatorial Topology".

A primeira apresentação do Seminário TQEDO, datada de início de abril, foi do próprio Mauricio, que falou sobre "O Teorema de Kneser". Este teorema estabelece que "Todo campo de vetores desprovido de pontos singulares (equilíbrios) na Garrafa de Klein possui uma órbita periódica". Depois, em duas apresentações, Mauricio continuou expondo as propriedades básicas do Número de Rotação, seguindo o roteiro do Coddington-Levinson. Esta teoria se remonta a Poincaré e carateriza os campos de vetores de classe C^2 sem pontos singulares no Toro, que possuem órbitas densas (Número irracional) e aqueles que possuem órbitas periódicas (Número racional). A segunda exposição de Mauricio também incluía uma construção geométrica do exemplo de Denjoy, no qual se constrói um campo de classe C^1 para o qual todas as órbitas se acumulam num conjunto fechado invariante (de fato perfeito e transversamente de tipo Cantor), que não possui subconjunto próprio com estas propriedades. Tal conjunto é denominado de "minimal não-trivial". Sendo que os conjuntos "minimais triviais" são os pontos singulares, as órbitas periódicas e o Toro.

Nessa época havia para mim uma distância considerável entre a Garrafa de Klein e o Toro dos livros que eu conhecia e as plásticas superfícies que Mauricio, com uma segurança incrível, cortava com tesoura e, depois de colocar EDOs em cada pedaço, colava novamente.

Também havia um grande passo entre os clássicos conjuntos limites de Poincaré- Bendixson e o conjunto Minimal não-trivial de Denjoy. Como bom leitor, era para mim um alívio encontrar no Coddington-Levinson a teoria do Número de Rotação. A única referência sobre o Teorema de Kneser estava em alemão.

Depois disto, Mauricio só falou novamente sobre a "Lista" e o Teorema de Denjoy Schwartz (1963), em outubro e novembro, respectivamente.

Dando continuação ao Seminário, houve uma apresentação da Teoria de Variedades Invariantes exposta no Capítulo 13 de Coddington & Levinson (1955), um dos assuntos mais duros do livro. Trata-se da generalização das "selas" para singularidades e órbitas periódicas em dimensões superiores. Estes objetos dinâmicos são chamados atualmente de "hiperbólicos", nome cunhado por Smale. A exposição foi encurtada por decisão do próprio expositor. Ele havia previsto (mas não amadurecido) uma inovação estética, usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, em lugar das "aproximações sucessivas" do livro. Sua transformação entre espaços de funções, entretanto, produzia integrais improprias divergentes. Não resistindo às objeções de Kupka, deu-se por encerrada a participação *.

Anos mais tarde em Hirsh & Pugh (1970) os matemáticos americanos C. Pugh, de quem falarei novamente mais adiante, e M. Hirsh levaram a bom termo estenderam substancialmente esta idéia, a qual também tem antecedentes nos trabalhos de J. Hadamard. Esta versão das variedades invariantes é a que melhor entendi, e incluí no meu livro Sotomayor (1979). Antes disso, em Sotomayor (1973), ela me havia servido de inspiração para dar uma prova conceitual, "didática", da diferenciabilidade das soluções de EDOs com respeito a condições iniciais e parâmetros. O enfoque de Coddington-Levinson para as variedades invariantes, que segue idéias de O. Perron, foi conceitualizado (e tornado mais didático) por C. Irwin, a partir do Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach. Esta versão é a que aparece em Melo & Palis (1978).

* A identidade do expositor perdeu-se no limbo das páginas esmaecidas do meu caderno–diário.

Não detalharei aqui a sensação de desamparo e insignificância, que a enxurrada de resultados novos me causaram. De fato, este não é o relato de minhas frustrações ou alegrias, mas da "Lista de Problemas" proposta por Mauricio na já citada tarde de outubro de 1962.

Depois do fiasco das Variedades Invariantes, veio uma série de apresentações de Alciléa, expondo no Seminário os trabalhos de Mauricio sobre a Estabilidade Estrutural. Sobre isto passo agora a digressionar.

O conceito de Estabilidade Estrutural surgiu da interação da experiência do físico e matemático aplicado A.A. Andronov com o poderoso talento matemático de L.S. Pontrjagin. Andronov era o líder e fundador da chamada Escola de Gorki (atualmente Nizhny Novgorod) autor, junto com Khaikin e Vitt, do clássico tratado "Theory of Oscillators". Andronov e sua equipe eram depositários de uma herança cultural adquirida das aplicações da Teoria Qualitativa de Poincaré ao estudo de modelos de fenômenos mecânicos e elétricos. Pontrjagin, é o mesmo das contribuições famosas à Topologia Combinatória e Diferencial, Homotopía, Grupos Topológicos e a Teoria do Controle.

O nonagésimo aniversário do nascimento de Pontrjagin foi comemorado com um grande colóquio em Moscou em setembro de 1998.

Para que um modelo dinâmico (ou seja uma equação diferencial tal como $\dot{x} = f(x)$) represente com fidelidade um fenômeno do mundo físico, a equação deve possuir um certo grau de estabilidade. Pequenas perturbações não devem afetar suas caraterísticas essenciais. As propriedades físicas, para serem observáveis devem persistir às pequenas mudanças inevitáveis no registro de dados e na experimentação. As propriedades essenciais do fenômeno físico são representadas no modelo pelo retrato de fase, o qual deve ser preservado topologicamente por pequenas perturbações — $f + \Delta f$ — das funções — f — que o definem. Isto é, que os retratos de fase dos dois sistemas devem ser transformados um no outro por um homeomorfismo da forma $I + \Delta I$, com $\|\Delta I\| \leq \epsilon$ e I a identidade. Um homeomorfismo nestas condições, que desloca os pontos uma distância menor do que ϵ, chama-se um ϵ - homeomorfismo.

Esta é a motivação que permeia a Estabilidade Estrutural, para a qual Andronov e Pontrjagin formularam uma caracterização para sistemas no plano, publicando um resumo dos enunciados em Dokl. Acad. Nauk., 14, 1937. Este conceito unifica uma série numerosa de exemplos concretos divulgados em "Theory of Oscillators". Ao mesmo tempo que servem de motivação estes exemplos também justificam o conceito e os resultados obtidos por Andronov e Pontrjagin.

O matemático americano S. Lefschetz resgatou o conceito, o qual recebia o nome de "Robustez", rebatizou-o com o nome mais descritivo de Estabilidade Estrutural. Também divulgou o Teorema Principal de Andronov e Pontrjagin, traduzindo-o da primeira edição russa de "Theory of Oscillators" e estimulou seu estudante H.F. DeBaggis a fornecer uma demonstração do Teorema de Andronov-Pontrjagin, que não era conhecida no ocidente. Mauricio, no Rio de Janeiro, leu o trabalho de DeBaggis, apresentando-o no seu Seminário de EDO realizado no Gabinete de Mecânica Racional da Escola de Engenharia onde, circa 1955, lecionava.

Possuidor de uma cultura matemática mais apurada e um senso estético superior, Mauricio aprimorou o conceito em várias direções e demonstrou a densidade dos sistemas Estruturalmente Estáveis no plano e em variedades bidimensionais compactas orientáveis, estendendo de maneira substancial a caracterização formulada originalmente para o plano.

Anotemos os seguintes pontos essenciais da extensão de Mauricio, que estabeleceram o cenário no qual a minha iniciação à pesquisa viria a desenvolver-se:

A consideração explícita de um espaço topológico, no caso, de Banach, $\mathcal{X}^r$, para o universo das equações diferenciais de classe C^r. Este espaço permite formular e tratar com desenvoltura e propriedade as questões de abertura e densidade. A definição axiomática da classe Σ^r, chamada mais tarde de sistemas de Morse-Smale (nome cunhado pelo próprio Mauricio), especialmente quando adaptada à dimensão superior a 2. Obtém-se esta classe acrescentando a "Condição de Peixoto", às de Andronov-Pontrjagin. Esta condição impõe a ausência de trajetórias recorrentes e conjuntos minimais não triviais. Dito de outra forma, impõe um comportamento global simples, similar ao do plano onde vale o Teorema de do tipo Poincaré-Bendixson. Mauricio provou a abertura, estabilidade estrutural e densidade de Σ^r em $\mathcal{X}^r$, para todo $r \geq 1$. Também estabeleceu que a restrição de ϵ - proximidade da identidade para o homeomorfismo que transforma órbitas do sistema nas do perturbado, na definição de Estabilidade Estrutural, é supérflua.

A densidade inclui a eliminação, por pequenas perturbações, das recorrências não triviais imposta na definição de Σ^r. Esta é a parte mais difícil do trabalho, cuja problemática deu lugar ao denominado "Closing Lemma" Melo & Palis (1978).

Mas voltemos ao Seminário TQEDO. Alciléa proferiu uma série de palestras muito cuidadosas e detalhadas sobre os artigos de Mauricio, abrangendo aquele publicado no Annals of Mathematics, Peixoto (1959), e, mais demoradamente, aquele da Academia Brasileira de Ciências, Peixoto (1959). A estes trabalhos nos referíamos como "o amarelo" e "o cinza", pela cor das capas das separatas. Finalmente, ela abordou o "branco", publicado nesse ano em Topology, Peixoto (1961). Este último continha passagens difíceis, mesmo para Mauricio.

Empenhei-me em acompanhar as apresentações de Alciléa. Para isto tive discussões muito esclarecedoras com Maria Lúcia, que já tinha um ano de permanência no IMPA e, orientada por Mauricio, havia redigido notas sobre alguns aspectos da Teoria Qualitativa, ausentes no Livro de Hurewicz ou de localização difícil no Coddington-Levinson. Cito a Fórmula de Poincaré para a derivada da Transformação de Retorno de uma órbita periódica e o Fluxo Tubular, entre outros assuntos, Sotomayor (1981).

Neste ponto, o leitor que se inicia em equações diferenciais poderá achar proveitoso consultar tambem Sotomayor (1979).

Desde minha chegada ao IMPA, em fins de março desse ano, havia dado um grande salto na abrangência de meu imaginário matemático e também na profundidade de meus conhecimentos. Além dos cursos e seminários, fiz leituras correlatas substanciais. Estudei com grande interesse o Teorema de Sard. Primeiramente, no trabalho do Professor Edson Júdice, da U.F.M.G, presenteado a mim pelo autor, graças a uma recomendação de Aristides. Também li proveitosamente boa parte das notas Introdução à Topologia Diferencial, de Elon (1961). Depois abordei partes substanciais do formidável trabalho de L.S. Pontrjagin "Smooth Manifolds and its Applications to Homotopy Theory", fonte original para a utilização de métodos da Análise Diferencial em Topologia. Paralelamente, discutia assuntos matemáticos diversos com Aristides e, sobretudo, com Kupka.

A competência e segurança com que Alciléa explicou os trabalhos de Mauricio, assim como a solidariedade de meus parceiros de discussões Kupka e Aristides, me transmitiram confiança e a sensação de insignificância foi diminuindo, pelo menos localmente.

Retrospectivamente reconheço em 1962 o ano mais importante de minha iniciação à pesquisa. Representou para mim o ano de transição para a Matemática Viva.

Não posso localizar o ponto preciso onde a transição para uma fase mais madura se deu; entretanto, posso dizer que ela foi catalisada ou precipitada pelos problemas de EDO formulados por Mauricio.

5 A Lista de problemas

Após um brevíssimo discurso sobre a importância e a necessidade de abordar problemas de pesquisa, Mauricio passou a enumerá-los e discuti-los na ordem a seguir:

1.- O problema do Arco:

Prove que toda curva contínua no espaço $\mathcal{X}^\nabla$ de campos vetoriais de classe C^r na esfera pode ser aproximada por uma curva com apenas um número finito de pontos fora de Σ^r, i.e. não estruturalmente estáveis. Esta é uma expressão da fé que Mauricio tinha na preponderância da Estabilidade sobre as Bifurcações, que são os pontos da curva onde o tipo qualitativo do campo de vetores muda ao abandonar Σ^r e cruzar $\mathcal{X}_1^r = \mathcal{X}^r \setminus \Sigma^r$.

Estimulada por Mauricio, Alciléa passou a estudar este problema.

2.- Os Minimais não Triviais:

Podem (ou não) existir conjuntos invariantes perfeitos, distintos das órbitas periódicas, pontos singulares e toros, para campos vetoriais de classe C^2, em variedades bidimensionais? Foi proposto para Maria Lúcia, sendo resolvido pela negativa por

A. J. Schwartz, no final de 1962. Mauricio apresentou esse trabalho no Seminário em novembro.

3.- A Classificação:

Classificar combinatoriamente as componentes conexas dos campos estruturalmente estáveis numa variedade bidimensional. Isto é, decidir quando dois campos podem estar relacionados por um homeomorfismo, isotópico à identidade, que transforma órbitas de um em órbitas do outro.

Mauricio achava que Lindolpho, que também comparecia ao Seminário, deveria interessar-se por este problema. Ele foi depois resolvido por Gutierrez & Melo (1977) e por Zschauer (1984). Mauricio classificou os campos estruturalmente estáveis em Peixoto (1971).

4.- A Estabilidade (ou Instabilidade) Estrutural de Primeira Ordem:

No complementar dos campos Estruturalmente Estáveis $\mathcal{X}_1^r = \mathcal{X}^r \setminus \Sigma^r$, considere o conjunto Σ_1^r dos que são estáveis por perturbações pequenas, restritas a $\mathcal{X}_1^r$, munido da topologia induzida pela topologia C^r. A.A. Andronov e E.A. Leontovich formularam uma caracterização para Σ_1^r no plano, numa nota em Dokl. Acad. Nauk. 21, 1938. Este trabalho é a primeira tentativa conceitual de estudar globalmente as bifurcações, que, como já dissemos acima, são as mudanças estruturais que ocorrem no retrato de fase de uma família de EDOs dependente de parâmetros.

O problema aqui consistia em estender, do plano para o caso de variedades bidimensionais, a caracterização proposta.

5.- A Estabilidade Estrutural das Equações de Segunda Ordem.

Estender ou adaptar ao caso de equações de segunda ordem (tais como $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ os resultados de Estabilidade Estrutural para EDO de primeira ordem (campos de vetores) em variedades bidimensionais.

Embora a "Lista" não fosse colocada para mim, já que (não sendo ainda formalmente "formado") era o menos titulado do grupo, considerei-me também indiretamente envolvido. De fato, só os problemas 4 e 5 não tinham destinatário designado, ficando indefinido qual deles seria para mim e qual para Aristides. Éramos os dois estagiários que deveríamos ficar no IMPA, sendo que os outros tinham viagem prevista para os Estados Unidos.

Em fins de outubro, Kupka proferiu uma série de palestras vertiginosas sobre as Variedades Invariantes de órbitas não necessariamente periódicas. Segundo disse, sua fonte bibliográfica principal vinha dos trabalhos de O. Perron.

Mauricio passou a orientar reuniões tutoriais para discutir as aulas de Kupka e assuntos correlatos ao Seminário. Todo mundo dava palpites. O ambiente descontraído me animou a fazê-lo também. Acertei alguns deles. Esse convívio informal estabeleceu para mim um canal de comunicação mais direto com Mauricio.

Como já disse acima, havia estudado com grande interesse o Teorema de Sard. Não sei que considerações estéticas ou elocubrações matemáticas me levaram a pensar que o Teorema de Genericidade (Abertura e Densidade de Σ^r) de Peixoto, poderia obter-se a partir desse Teorema. Haveria de exprimir-se o conjunto de campos não Estruturalmente Estáveis, $\mathcal{X}_1^r$, como valores críticos de alguma bem bolada aplicação diferenciável num espaço de dimensão infinita apropriado.

Qual espaço? Não era nada claro!

Haveria, antes de mais nada, de estender-se o Teorema de Sard para dimensão infinita. Já havia uma extensão desenvolvida por Smale, exposta nas notas de aulas redigidas por R. Abraham sobre cursos dados por este último.

Um belo dia em que Maurício abriu a guarda, transmiti-lhe minhas inquietações matemáticas. Não fez comentários, mas acho que foi nesse momento que ficou definido que eu atacaria o problema 4, o da Estabilidade de Ordem Superior. Portanto, Aristides ficou com o 5, o das Equações de Segunda Ordem. Em meados de novembro ele me deu uma copia da já citada nota de Andronov e Leontovich de 1938 que, em 4 páginas, continha definições e os enunciados dos resultados obtidos nesta línha. Fez a seguinte recomendação: "Não perca isto que é importante", frisando "é um bom problema".

Havia chegado ao IMPA em março com não muito mais do que os Fundamentos de EDO e de Topologia Combinatória, além dos conhecimentos básicos de Análise Real e Complexa e de Geometria Diferencial Clássica. Entretanto, em dezembro, estava de posse de um "bom problema", cujas possibilidades seriam imprevisíveis para mim, embora eu não tivesse então consciência disso.

A pesar das limitações técnicas que na época tinha para abordá-lo, a ilusória sensação de possessão de um problema de pesquisa me produziu um sentimento de esmagadora responsabilidade. Foi como o despertar para uma forma mais madura de enfocar a Matemática. Devo esta maravilhosa experiência intelectual a meu contato com Mauricio e o Seminário de TQEDO.

A hora da verdade havia chegado, também para mim.

6 O colóquio brasileiro de matemática de 1963

Em dezembro de 1962 completei os exames que me faltavam no Perú para formalmente ser candidato ao diploma de bacharel. No verão de 1963 trabalhei como monitor num curso de aperfeiçoamento para professores peruanos de segundo grau. Nos momentos livres, rascunhei pilhas de páginas decifrando os enunciados e tentando fornecer demonstrações dos teoremas formulados por Andronov-Leontovich.

Em março de 1963, retornando ao IMPA depois do verão, continuaram o curso de Topologia Algébrica e o Seminário de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, ministrados ambos por Mauricio. No segundo semestre iniciou-se o curso de Teoria de Galois lecionado por Otto, que acompanhei com empenho.

Em maio apresentei no Seminário TQEDO o que havia entendido da nota de Andronov-Leontovich. E também da possibilidade de adaptar as técnicas dos trabalhos de Mauricio para estender os resultados para variedades bidimensionais. Tudo parecia funcionar bem, ao custo de muito trabalho, mas sem grande originalidade ou, melhor dito, no embalo das contribuições de Mauricio e Andronov-Leontovich.

No Colóquio Brasileiro de Matemática em julho de 1963, eu já tinha uma extensão dos resultados de Andronov-Leontovich para variedades orientáveis. Fiz uma comunicação de 20 minutos, sob o titulo: "Estabilidade Estrutural de Ordem Superior."

Não constam os textos das comunicações nas Atas do Colóquio. Na minha extensão dos resultados de Andronov-Leontovich para Variedades bidimensionais orientáveis, a condição de Peixoto (ausência de recorrências) era acrescentada. A parte que considero mais interessante de meu trabalho, concernente á Estrutura de Variedade de Banach da classe dos Campos de Andronov-Leontovich, não estava ainda delineada, mas as idéias principais me ocorreram nesse Colóquio.

No primeiro semestre de 1963, Kupka havia visitado a Universidade de Columbia, em Nova Iorque, onde Smale trabalhava. Trouxe os, agora cássicos, trabalhos de Palais e Smale sobre "Uma Teoria de Morse para variedades de dimensão infinita". Estimulado por Mauricio, fez numa palestra plenária sobre isto no Colóquio.

Depois de uma esclarecedora exposição, Kupka disse concluindo: "Quando você introduz uma nova teoria deve justificá-la. Esta que apresentei aqui, têm aplicações ao Cálculo das Variações, Teoria do Controle, Geometria Diferencial, entre outras."

Alciléa fez uma comunicação de 20 minutos. Falou da finitude genérica do encontro de um arco das bifurcações provenientes dos pontos singulares. Esboçou a prova que aplicava o Teorema de Transversalidade de Thom, como função de duas variáveis (parâmetro, variedade de fase), para aproximar o arco por um que fosse transversal à seção nula do fibrado tangente à variedade de fase. Eu já havia visto um procedimento análogo a esta aproximação no estudo da invariança por homotopia do "número de interseção" e "índice de um campo vetorial", na Introdução à Topologia Diferencial de Elon, Lima (1961).

Mencionarei apenas outras duas palestras plenárias do Colóquio: a de Mauricio, que falou de "Uma prova elementar da formula de Euler-Poincaré em Superfícies" , cortando e colando, e a de Pugh sobre o "Closing Lemma".

Charles Pugh, jovem matemático americano, visitou o IMPA por alguns meses, a convite de Mauricio. Foi então que desenvolveu a primeira versão do "Closing Lemma" em variedades bidimensionais, com hipóteses exclusivamente na classe (C^1, no caso) dos campos de vetores envolvidos. Outra versão anterior também de Pugh aplicava-se a classes particulares de campos com restições métricas do tipo "distal". A extensão do "Closing Lemma" a classe mais alta do que 1 é atualmente um problema famoso de Sistemas Dinâmicos, derivado dos trabalhos de Mauricio.

Esboço a seguir como as palestras de Alciléa e de Kupka influenciaram a minha concepção do problema que estudava.

De fato, o conjunto $\mathcal{X}_1^r$ para ser cruzado pelo arco devia ter uma estrutura diferenciável, como a de uma hipersuperfície, para exprimir o cruzamento ou bifurcação como um corte transversal, que servisse para todos os fenômenos dinâmicos, incluindo aqueles globais relacionados com as órbitas periódicas e as conexões de separatrizes de selas e não apenas os locais (ou pontuais) como as singularidades nas quais o esquema das variáveis (parâmetro, variedade de fase) era apropriado.

A maneira de exprimir essa estrutura devia ser por meio dos objetos matemáticos de que Kupka falava: Variedades Diferenciáveis de dimensão infinita, com espaços tangentes por meio dos que pudesse exprimir infinitesimalmente o cruzamento transversal com $\mathcal{X}_1^r$.

Assim, lancei-me a trabalhar para provar que os campos de Andronov-Leontovich tivessem tal estrutura de variedade.

No final do segundo semestre de 1963 já estava claro que o Problema do Arco (o número 1 da Lista) e o da Estabilidade de Primeira Ordem (o número 4) eram intimamente interligados. O vínculo era a intuição sobre a estrutura de variedade diferenciável de Σ_1^r, a qual se revelava como correta. Havia, entretanto, muito trabalho por ser desenvolvido para torná-la explícita.

Combinamos com Mauricio que minha tese consistiria em complementar a extensão a variedades da nota de Andronov et al (1973) com a inclusão da já citada estrutura diferenciável do conjunto Σ_1^r.

Um contra exemplo para finitude de bifurcações no arco genérico foi então fácil de produzir repensando em termos de Transversalidade os resultados dos pioneiros russos. Este exemplo foi publicado em Sotomayor (1964). Mauricio reformulou o problema, exigindo apenas a existência (e não mais a densidade) do arco com finitas bifurcações, desenvolvendo-o mais tarde em colaboração com S. Newhouse, Peixoto & Newhouse (1976).

7 Os trabalhos de 1964

No verão de 1964 fiquei no Rio e fiz uma tentativa concentrada de redigir minha tese de doutorado (TD). Foi um verdadeiro corpo a corpo com a "página em branco", o qual se prolongou até a véspera da data limite para apresentar a versão escrita da mesma.

Os elementos que intervieram em TD eram quase tudo o que havia aprendido em 1962:

-O Cálculo em Espaços de Banach e os Elementos das Variedades de Banach.

-As variedades Invariantes a la Coddington-Levinson.

-Os Trabalhos de Mauricio (TP).

-A nota sobre Estabilidade de Primeira Ordem de Andronov-Leontovich (AL).

Para guardar a analogia com o enfoque de Mauricio e de Andronov-Ponrjagin (AP), a nota de AL pode ser reformulada e apresentada resumidamente a partir dos seguintes elementos:

-A definição axiomática da classe Σ_1^r como subconjunto dos campos de vetores de $\mathcal{X}_1^r = \mathcal{X}^r \setminus \Sigma^r$ que violam de maneira mínima as condições de Andronov- Pontrjagin e Peixoto que definem Σ^r.

-A definição da classe $\mathcal{S}_1^r$, dos sistemas de $\mathcal{X}_1^r = \mathcal{X}^r \setminus \Sigma^r$, estruturalmente estáveis quando perturbados dentro dos sistemas não estáveis.

Entre nós, ditos sistemas são denominados de "estáveis de primeira ordem". Entre os matemáticos russos, chamam-se "instáveis de primeira ordem". De fato, eles são os mais estáveis dentro dos instáveis.

A nota de Andronov-Leontovich contém o enunciado de um Teorema de Caracterização que identifica a classe Σ_1^r com o subconjunto $\mathcal{S}_1^r$.

O enunciado proposto por estes autores é limitado ao plano. As demonstrações se tornaram acessíveis no ocidente só em 1971, com a tradução do livro Andronov-Leontovich et al.

A analogia programática de AL com (AP) é clara; nada podia ser mais natural do que estendê-la para o contexto de TP.

Entretanto, TD leva mais longe a analogia com o trabalho de Peixoto e prepara o terreno para uma síntese geométrica das bifurcações genéricas. De fato, estabelece a abertura, estabilidade estrutural e densidade, relativos a $\mathcal{X}_1^r$, dos sistemas de $\mathcal{S}_1^r$ e os identifica com Σ_1^r. Este trabalho é válido para campos de vetores sobre variedades orientadas bidimensionais compactas.

O aspecto analítico-geométrico mais original de TD, sem paralelo nos enfoques de Peixoto e dos pioneiros russos, é o resultado que estabelece para Σ_1^r a estrutura de subvariedade diferenciável de classe C^{r-1} e de codimensão 1, mergulhada no espaço de Banach $\mathcal{X}^r$.

Esta estrutura torna possível uma maneira geométrica de considerar as bifurcações simples: elas acontecem quando uma curva, arco, ou família a um parâmetro de sistemas encontra transversalmente Σ_1^r.

Em TD se explicitam os espaços tangentes para cada componente conexa de Σ_1^r. No caso particular das conexões homoclínicas e heteroclínicas, laços e ligações de selas, o funcional cujo núcleo define o espaço tangente pertinente é dado pela expressão integral imprópria relacionada com a "Integral de Melnikov" que, na década de 80, penetrou a literatura especializada. Uma integral análoga, porém própria, aparece para definir o espaço tangente no caso dos ciclos não hiperbólicos. Esta última, conhecida desde o tempo de Poincaré, também recebe o nome de Melnikov.

O trabalho de Aristides constistiu em caracterizar os sistemas estruturalmente estáveis que são da forma $\dot{x} = y, \dot{y} = f(x, y)$, com f periódica em x. É o primeiro trabalho sobre Estabilidade Estrutural em variedades não compactas (o cilindro, no caso).

O trabalho de Kupka ficou muito conhecido depois que Mauricio o divulgou em Peixoto (1967), unificando a versão de Smale, para difeomorfismos, com a de Kupka, para EDO, dando o nome de Sistemas de Kupka-Smale aos que têm apenas órbitas periódicas e pontos fixos hiperbólicos e as variedades invariantes de todos estes elementos se intersectam transversalmente. Ver também os artigos Kupka (1965), Smale (1967).

Este trabalho de Mauricio me proporcionou a base e a linguagem que me faltavam em 1964 para a extensão do conjunto de Andronov-Leontovich, de modo a obter uma classe estritamente mais ampla do que a de TD, que é uma variedade suave imersa. Com relação a esta variedade, a transversalidade dá a posição genérica do arco com a parte suave de $\mathcal{X}_1^r$, Sotomayor (1974).

Resultou ser que o Teorema de Sard em dimensão infinita era falso, como Kupka demostrou ainda esse ano, Kupka (1964).

Anos depois, voltei a trabalhar sobre a intuição que relaciona o Teorema de Sard e o Teorema de Genericidade de Peixoto. Demonstrei em Sotomayor (1981), Sotomayor (1981) que é possível obter o Teorema de Peixoto, numa versão métrica usando a Medida de Lebesgue, para o caso do plano, no qual não há dificuldades com as órbitas recorrentes não triviais. Há que usar várias vezes o Teorema de Sard. A versão em dimensão finita foi suficiente, aplicada aos campos transladados e rotacionados.

Retomei o trabalho de Aristides em Sotomayor (1982), para o qual adaptei o método das (translações, rotações) dos campos de vetores para (força, fricção) das funções escalares, provando a genericidade da Estabilidade Estrutural e a Medida de Lebesgue total das equações de segunda ordem, em domínios compactos do plano. Há aspectos delicados do trabalho de Aristides, que trata de domínios não compactos, os quais não foram incorporados no meu artigo.

Boa parte de meus trabalhos matemáticos posteriores podem ser conectados sem dificuldade, em suas origens e motivação, a TD ou a TP. Notadamente aqueles realizados em colaboração com Carlos Gutierrez, Ronaldo Garcia, Marco A. Teixeira, Freddy Dumortier e Robert Roussarie. As referências recentes Gutierrez & Sotomayor (1998), Sotomayor & Teixeira (1998) e Dumortier et al. (1997) contém citações às publicações anteriores das séries respectivas de colaboração com os colegas mencionados. No Memorial Sotomayor (1992) tive a ocasião de ensaiar uma discussão dessas conexões.

8 Indagações e reflexões

A meu ver, dificilmente o conceito matemático de Estabilidade Estrutural poderia ter surgido, isoladamente, nos laboratórios dos físicos ou engenheiros, ou no gabinete dos matemáticos (puros ou aplicados). Algo de muito profundo e criativo aconteceu na colaboração de Andronov-Pontrjagin. Aquilo que, num esforço de simplificação expositória, atribuí acima ao encontro de culturas distintas e ao binômio: (conhecimento experiente, talento matemático), somente pode ser explicado plenamente no dominio da tenue interseção da Matemática com a Arte.

Uma colaboração profunda envolve a comunhão intelectual de espíritos. Neste caso temos a Andronov, Físico (aunque de formação Matemática exepcionalmente sólida), impelido a trabalhar e estimular a outros a pesquisar em Matemática e suas aplicações aos mecanismos Gorelik (1953), e a Pontrjagin, Matemático de formação "pura", inclinado a engajar-se em problemas "aplicados" Pontrjagin (1978).

Como se dá a transição madura de exemplos concretos a conceitos matemáticos fecundos e conseqüentes teoremas? É esta a questão central da psicologia do processo criativo, cujas bases e análise ainda estão por ser elucidadas. A meu ver, a colaboração Andronov–Pontrjagin merece uma análise mais profunda desde este prisma.

Entretanto, uma vez formulados e colocados no domínio da Matemática, os conceitos e teoremas são susceptíveis de generalizações, extensões, e refinamentos estéticos e de fundo. Em outras palavras, permitem o tratamento pelo Matemático, com suas fantasias e o vôo criativo da imaginação. Há varios estágios desta transição dentro da evolução das idéias matemáticas entorno da Estabilidade Estrutural, suas extensões e generalizações. Além do já citado, dado por Mauricio, outros passos cruciais estão associados aos nomes de Smale, Anosov, Arnold, Thom e Mather, entre outros, extravasando assim o cenário das EDO.

São inúmeras as implicações filosóficas e matemáticas da Estabilidade Estrutural, Bifurcações e suas extensões a Sistemas Dinâmicos em dimensão superior e a outros domínios da Análise em Variedades, tais como as Singularidades de Aplicações Diferenciáveis e a Teoria das Catástrofes. Uma visita electrónica ao Mathematical Reviews (Mathscinet) dará uma idéia da vertiginosa produção atual, com a sua variada gama de linhas mestras.

Não é possível, entretanto, esperar que a maioria dos compexos fenômenos físicos, eletromagnéticos, hidrodinâmicos, atmosféricos e a dinâmica do cérebro se ajustem a um paradigma inspirado em sua base por simplificações bidimensionais de máquinas simples, mecânicas e elétricas, vindas da Técnica dos anos 30. Novas situações dinâmicas aparecem estavelmente, tal é o caso dos Fractais, o Caos e os "atratores estranhos".

Não deverá produzir uma grande surpresa a aparição de novos entes (mais ou menos estranhos). A Matemática (i.e. o cérebro humano) e o Cosmos são complexos. A Natureza assim os fez. Cabe ao cientista a difícil tarefa de descobrir as frestas por onde enxergar setores inteligíveis dessa complexidade.

Agradecimentos

Ao CNPq e a PRONEX/ Finep/ MCT- conv 76.97.1080.00, Teoria Qualitativa de EDO, pelo apoio.

Aos colegas e estudantes que leram criticamente e fizeram sugestões valiosas na correção do Português e estilo deste artigo: Mauricio Peixoto, Luis F. Mello, Marco A. Teixeira, Paulo Cordaro, Geraldo Ávila, Alciléa Augusto e Daniel Panazzolo, entre outros. A Lev Lerman pelo envio do trabalho de Gorelik (1953), e a Michael Dokuchaev por me ajudar na sua tradução.

SOTOMAYOR, J. A list of problems on O.D.E. *Rev. Mat. Estat.* (São Paulo), v.18, p.223-45, 2000.

- *ABSTRACT: Historical presentation of the beginnings of research on Dynamical System in Brazil.*

- *KEYWORDS: Ordinary differential equations, dynamical system, history in Brazil.*

Referências Bibliográficas

1 ANDRONOV, A.A., LEONTOVICH, E. et al. *Theory of bifurcations of dynamic systems in the plane*, Israel program of scientific translations. Jerusalem, 1971.

2 CODDINGTON, E., LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations.* New York, McGraw Hill, 1955.

3 DUMORTIER, F., ROUSSARIE, R. e SOTOMAYOR, J. *Bifurcations of cuspidal loops.* Nonlinearity, v. 10, 1997.

4 GORELIK, G.S. *To the memory of A. A. Andronov*, em Russo. Uspeki Fisica Nauk, v. 49, 1953.

5 GUTIERREZ, C., de MELO, W. *The connected components of Morse-Smale vector fields on two manifolds*. Springer Lect. Notes Math. v. 597, 1977.

6 GUTIERREZ, C., SOTOMAYOR, J. *Lines of curvature umbilic points and caratheodory conjecture*. Resenhas do IME-USP, v. 3, n. 2, 1998.

7 HARTMAN, P. *Ordinary differential equations*. New York, J. Wiley and Sons, 1964.

8 HIRSH, M., PUGH, C. *Stable manifolds for hyperbolic sets*. Proc. Symp. in Pure Math, AMS, v. 14, 1970.

9 HUREWICZ, W. *Lectures on ordinary differential equations*. New York, J. Wiley and Sons, 1958.

10 KUPKA, I. *Counterexample to Morse-Sard Theorem in the case of infinite dimensional manifolds*. Proc. NY Acad. Sci., v. 16, 1965.

11 ______. *Contribution a la theorie des champs generiques*. Contr. to Diff. Equat., v. 3, 1963.

12 LIMA, E. *Introdução às variedades diferenciáveis*. Porto Alegre, Meridional, 1960.

13 ______. *Introdução á Topologia Diferencial*. IMPA, 1961.

14 de MELO, W., PALIS, J. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Projeto Euclides, 1978.

15 PEIXOTO, M.M. *On structural stability*. Ann. of Math. v. 69, 1959.

16 PEIXOTO, M.M., PEIXOTO, M.C. *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*. Ann. Acad. Bras. Cien., v. 31, 1959.

17 PEIXOTO, M.M. *On the classification of flows on 2-manifolds*. In: DYNAMICAL SYSTEMS, Ac. Press 1973. Proc. Intern. Symp. on Dyn. Syst, Salvador 1971.

18 ———. *Structural stability on two-dimensional manifolds.* Topology, v. 1, 1962.

19 ———. *On an aproximation theorem of Kupka and Smale.* Jour. Diff. Equat., v. 3, 1967.

20 PEIXOTO, M.M., NEWHOUSE, S. *There is a simple arc joining 2 Morse-Smale flows.* Asterisque, v. 32, 1976.

21 PONTRJAGIN, L. *A short autobiography.* Russ. Math. Surveys, v. 33, n. 6, 1978.

22 SCHWARTZ, A.J. *A generalization of Poincaré-Bendixson Theorem to Closed two- dimensional manifolds.* Am. Jour. Math., v. 85, 1963.

23 SMALE, S. *Differentiable dynamical systems.* Bull. Amr. Math Soc., v. 73, 1977.

24 SOTOMAYOR, J. *Generic one parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds.* Publ. Math. IHES, v. 43, 1974.

25 ———. *Sur la mesure de l'énsemble de bifurcations des champs vetorieles dans le plan.* Comp. Rend. Acad. Sc., Paris, Série I, t. 293 , 1981.

26 ———. *Lições de Equações Diferenciais.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

27 ———. *On certain one-parameter family of vector fields.* Notas de Matemáticas IMUNI, Univ. Nac. Ing., Lima, v.3, 1964.

28 ———. *Memorial de Concurso Prof. Titular.* São Paulo: IME/USP, 1992.

29 ———. *Structurally stable second order differential equations.* Springer Lect. Notes Math., v. 957, 1982.

30 ———. *Smooth dependence of solutions of differential equations on initial data.* Bol. Soc. Bras. Mat., v. 4, n. 1, 1973.

31 ———. *Curvas definidas por equações diferenciais no plano.* Rio de Janeiro, IMPA, 1981.

32 SOTOMAYOR, J., TEIXEIRA, M.A. *Regularization of discontinuos vector fields.* In: EQUADIFF-95, WORLD SCIENTIFIC, Singapura, 1998. Proceedings of Equadiff-95.

33 ZSCHAUER, S. *The fundamental group of connected components of Morse-Smale Systems on orientable manifold,* em Alemão, Liepzig, 1984. Tesis, University of Dortmund.

Recebido em 20.07.1999.