UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN 0103-2585

SIMETRIA

ANTONIO CONDE

Nº 87

NOTAS DIDÁTICAS

ICMC USP
SÃO CARLOS

São Carlos – SP
Out./2017

Simetria

Prof. Antonio Conde

Desde que o espaço e o movimento são de grande importância a todos os animais e todos os povos primitivos, provavelmente esta atração tenha raízes evolucionárias profundas.

É curioso que quase todos os aspectos da geometria relevantes ao homem (mulher) comum são ignorados pelo sistema educacional. A Geometria tem sido (ou melhor foi) eliminada de todos os níveis de ensino, inclusive o superior. O pouco que permanece é raramente de qualquer utilidade a aqueles que queiram aplicar idéias geométricas em suas atividades como engenheiros, cientistas, arquitetos, artistas e semelhantes. Existem duas causas para tal estado das coisas. Primeiramente a geometria tem sido usada apenas como um veículo para se ensinar o raciocínio lógico dedutivo (existem veículos melhores para isso) sem preocupação com o conteúdo geométrico e suas interligações em outras áreas da matemática. Em segundo lugar, ao nível de pesquisa a geometria tornou-se como que um ramo especializado da Análise ou Álgebra. Exagerando-se assim a sua interligação com outras áreas.

Há aquela pessoa a quem foi perguntada o que é geometria? e cuja resposta foi:

É aquela área da matemática em que se faz demonstração. Isto ilustra muito bem ao que nos referimos como primeiro caso (na realidade o primeiro dos dois males acima.

Ao ser perguntada o que é geometria?, ela respondia a outra pergunta.

Qual é o modus vivendi da matemática?

ou mais amplamente

O que é ciência ?

Em cada dos dois casos acima, o apelo visual da geometria fica completamente submerso abaixo das tecnicalidades e abstrações.

Há sempre uma dose de tecnicalidade e abstração em qualquer atividade matemática. O problema está em dosar tais aspectos de modo a não deixar submergir o conteúdo sendo analisado.

Acredito que cada um de nós tem deplorado este estado de coisas, mas quase nada tem sido feito para se alterá-lo.

Neste nosso trabalho espero estar apresentando alguma coisa nova para alguns, e que venha.estimular o ensino de geometria em seus lados visuais e sensitivos.

Sob o título de *simetria* se enquadram muitas coisas. A simetria está presente na natureza, na física e tem seu estudo e ambiente naturais na matemática. Ela aparece de maneira óbvia em certos lugares e menos óbvios em outros.

Preliminar

A Simetria Bilateral

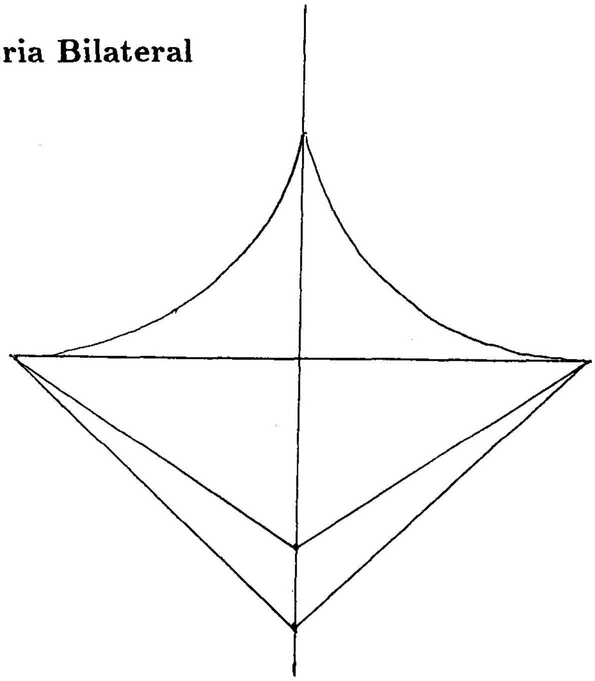

Fig. 1

Há uma reta (eixo) de simetria. O que se passa de um lado da reta se repete do outro lado. A idéia é a da imagem especular, da imagem no espelho.

Abordamos tal simetria bilateral, definindo uma transformação, neste caso, no plano P da figura.

$$R : P \to P$$

a que a cada ponto p do plano faz corresponder um ponto p', deste mesmo plano, no semiplano onde p não está, com a propriedade de que p' está na reta passando por p e perpendicular à reta de simetria r e mais que p e p' estejam à mesma distância da reta r

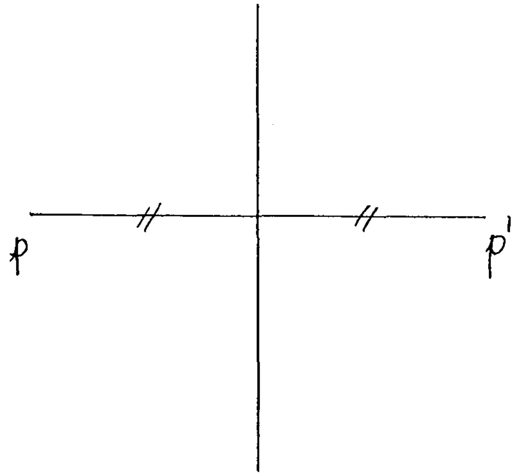

Fig. 2

e o que chamamos de reflexão de eixo r.

R determina assim uma transformação do plano todo P no plano todo P. Se aplicarmos R duas vezes, isto é $p' = R(p)$ e $p" = R(p')$. Vemos que $p" = p$, isto é compondo R consigo mesma duas vezes obtemos $RR(p) = p$ para todo ponto p do plano.

$$\mathbb{1} : P \to P$$

tal que $I(p) = p$ para cada p de P é chamada de identidade (ela não faz nada) ela deixa o plano parado ponto a ponto.

Para cada reta r de P temos definida uma *reflexão* em r, $R : P \to P$.

Agora podemos dizer quando é que uma figura F (um subconjunto) do plano tem simetria bilateral.

F tem simetria bilateral, segundo *a reta ou eixo* r, *se a reflexão* R, determinada por r leva F em F. Pomos $R(F) = F$.

Observe que embora a transformação R "mova" os pontos do plano, a figura F permanece nela mesmo, isto é, se p está em F então $p' = R(p)$ está em F, qualquer que seja p de F.

Uma figura F pode ter simetria bilateral segundo uma reta r e nenhuma outra simetria como é o caso do triângulo isósceles e não equilátero.

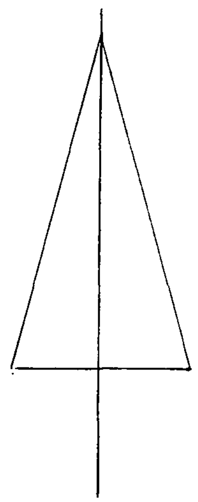

Fig. 3

ou F pode ter mais simetrias, vejamos o caso de F ser um triângulo equilátero.

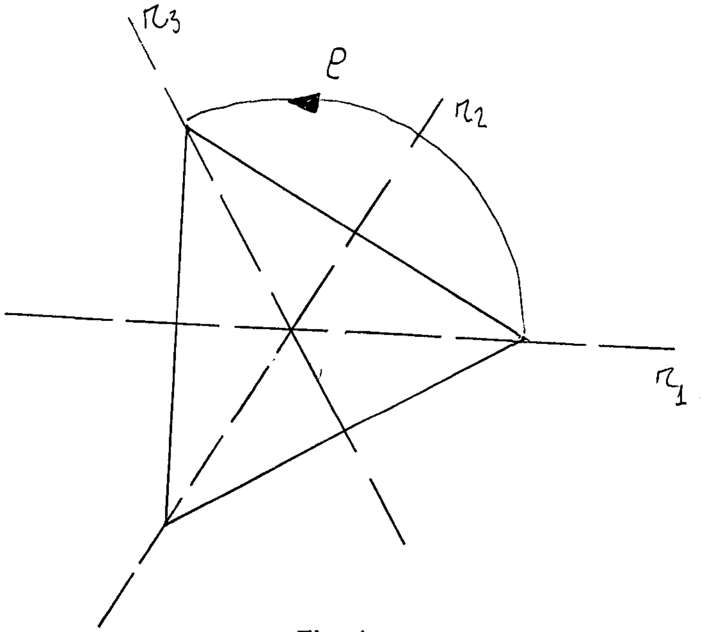

Fig. 4

O triângulo equilátero exibe três eixos de simetria bilateral, mas ainda temos mais simetrias de natureza diferente da reflexão; trata-se da rotação ρ de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ ou $360^o/3 = 120^o$ e de centro 0, isto é,

$$\rho : P \rightarrow P$$

$$p \rightarrow \rho(p) = p'$$

e move todo o plano rigidamente girando cada ponto de um certo ângulo com centro de rotação em 0.

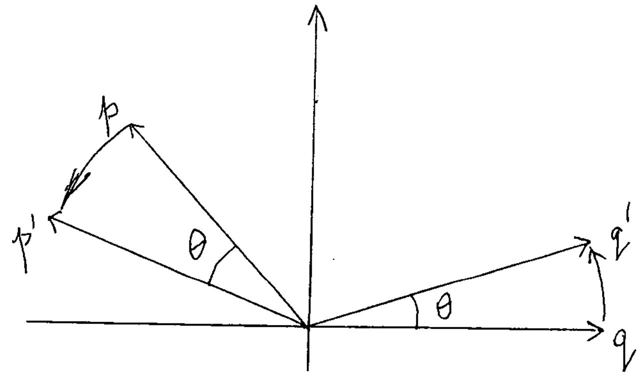

Fig. 5

Ao aplicarmos a rotação ρ de ângulo 120^0 e centro em 0 ao triângulo equilátero F, sobrepomos F a F mesma, ou seja, se p está em F , $\rho(p) = p'$ também está, logo esta rotação ρ representa mais uma simetria da figura F.

Se aplicarmos ρ duas vezes, isto é, $\rho\rho = \rho^2$ teremos uma rotação de centro 0 e ângulo 240^o que também leva F em F e daí mais uma simetria da figura F. Se continuarmos compondo com ρ teremos que será a rotação de centro 0 e ângulo 360^0 o que é o mesmo que a identidade $\rho^3(p) = p$ para todo p.

$$\rho^3 = \mathbb{1}$$

Assim temos para o conjunto de simetria do triângulo equilátero o número de seis

$$S(F) = \{\mathbb{1}, R_1, R_2, R_3, \rho, \rho^2\} \qquad\qquad \text{(ver Fig. 4)}$$

onde R_i é a reflexão de eixo r_i.

Se nossa figura fosse o triângulo isósceles não equilátero, o número de simetrias seria de apenas dois

$$S(F) = \{\mathbb{1}, R\} \qquad\qquad \text{(ver Fig. 3)}$$

Uma vez que podemos compor duas transformações do plano, obtendo uma terceira, podemos construir uma tabela para a composição semelhante a tabuada que conhecemos entre os números.

F = triângulo isósceles

	$\mathbb{1}$	R
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	R
R	R	$\mathbb{1}$

$$R^{-1} = R$$

F = triângulo equilátero

	$\mathbb{1}$	R_1	R_2	R_3	ρ	ρ^2
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	R_1	R_2	R_3	ρ	ρ^2
R_1	R_1	$\mathbb{1}$	ρ^2	ρ	R_2	R_2
R_2	R_2	ρ^2	$\mathbb{1}$	ρ	R_3	R_1
R_3	R_3	ρ	ρ^2	$\mathbb{1}$	R_1	R_2
ρ	ρ	R_3	R_1	R_2	ρ^2	$\mathbb{1}$
ρ^2	ρ^2	R_2	R_3	R_1	$\mathbb{1}$	ρ

$$\begin{aligned} R_i^{-1} &= R_i \\ \rho^{-1} &= \rho^2 \\ (\rho^2)^{-1} &= \rho \end{aligned}$$

Fazendo uma analogia com a operação de multiplicação numérica, temos os conjuntos com operações (de composição) que assemelham com a multiplicação.

O número 1 quando multiplicado por qualquer outro x não o altera

$$1.x = x.1 = x$$

Por isso o chamamos de *elemento neutro* da multiplicação. Nas tabelas acima, a transformação identidade $\mathbb{1}$ tem esta propriedade e a chamamos também de elemento neutro para a composição de transformações.

A multiplicação numérica é associativa e a composição de transformações anteriores também é

$$x(yz) = (xy)z$$

Números não nulos $x \neq 0$ tem seu inverso $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$. As transformações do plano também tem inverso, isto é para cada σ existe uma σ^{-1} tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathbb{1}$.

Em matemática, quando temos um conjunto C e uma operação para cada dois elementos de C com as três seguintes propriedades, denominamo-lo de *Grupo*.

1) $(xy)z = x(yz)$, associatividade

2) existe elemento neutro e tal que $ex = xe = x$

3) Para cada x existe um elemento inverso x^{-1} tal que $x.x^{-1} = x^{-1}x = e$.

Dizemos assim que o grupo de simetria de um triângulo isósceles (e não equilátero) T é

$$S(T) = \{\mathbb{1}, R\}$$

e o grupo de simetria de um triângulo equilátero

$$S(H) = \{\mathbb{1}, R_1, R_2, R_3, \rho, \rho^2\}$$

com as respectivas tabelas de ***multiplicação*** (composição).

Vocês já podem imaginar que cada polígono regular K de n lados (ou n vértices) terá um grupo de simetria $S(K)$ com $2n$ elementos.

Deixaremos o quadrado D para que o leitor determine cada simetria e examinaremos do pentágono P.

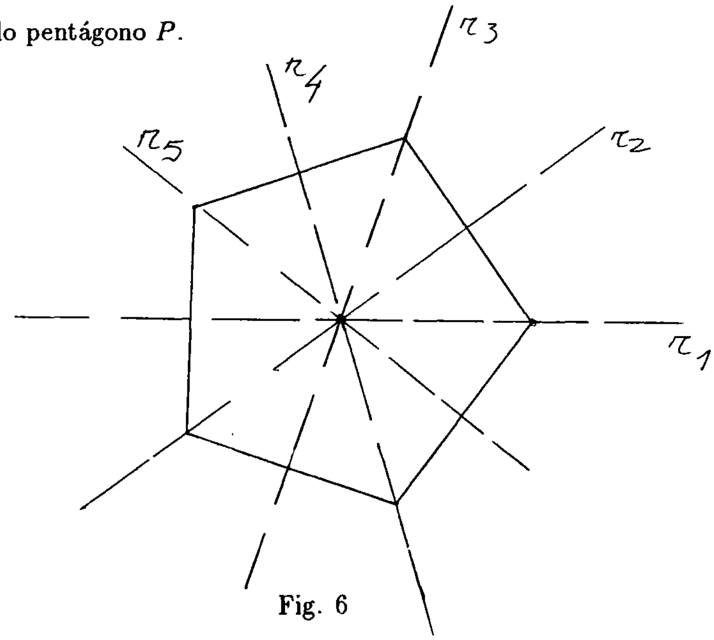

Fig. 6

$s(P) = \{\mathbb{1}, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$ onde ρ é a rotação de centro 0 e ângulo $\frac{2\pi}{5}$ ou $\frac{360^o}{5} = 72^o$.

De um modo absolutamente geral, dada uma figura F qualquer, isto é, um subconjunto qualquer F, do plano P, podemos selecionar todas as transformações (movimento rígidos) do plano que deixam F invariante isto é, aqueles movimentos rígidos

$$T : P \to P$$

com a propriedade de que p está em F então $p' = T(p)$ também está em F. Tal conjunto de transformação denotamos também por

$$S(F)$$

este conjunto com a composição das transformações tem as três propriedades de grupos. Este é o grupo de simetrias de F.

Quando este grupo é finito (tem um número finito de elementos) chamamos a figura F de uma *rosácea.*

Um tipo de simetria que ainda não examinamos é a de translação. O movimento rígido a que chamamos de translação fica determinado por três itens que são

1) direção, dada por uma reta r

2) o sentido, orientando-se a reta r

3) o comprimento do deslocamento

Estes três itens estão simultaneamente presentes no que chamamos de segmento orientado que representa também o que chamamos de *vetor*. Uma translação fica determinada e determina um *vetor*.

A figura F abaixo se imaginada repetida ao infinito nas duas direções admite como uma simetria a translação dada pelo vetor v

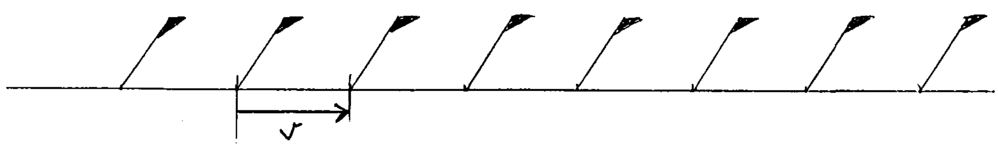

Fig. 7

Se a translação dada por v é denotada por t e suas compostas por t^n, vemos que para $i \neq j$

$$t^i \neq t^j$$

isso produz uma infinidade de simetrias da figura F acima. Os frisos ornamentais que aparecem com frequência na decoração de paredes em tetos de edifícios representam trechos de figuras que admitem simetria de translação. Os grupos de simetrias de figuras que admitem translações (numa única direção) são chamados de *grupos de frisos*. Se a figura plana admite simetria de translação *em mais de uma* direção o seu grupo de simetria é chamado de *grupo de painel*. É o que acontece com os paineis de decoração onde há elementos de repetição.

(papel de parede).

Uma figura F como abaixo, só admite a identidade como simetria, dizemos que tal F não tem simetria (rigida!)

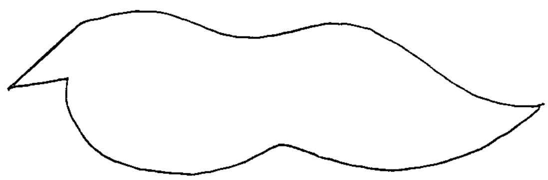

Fig. 8

Uma figura pode admitir simetria não rigida como, por exemplo a figura abaixo estendida ao infinito

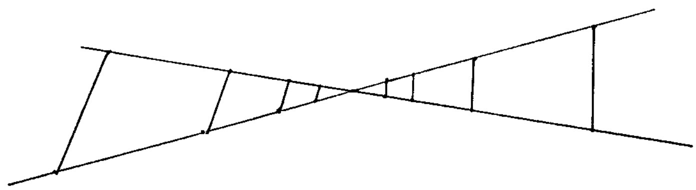

Fig. 9

Esta figura não tem simetria rígida mas é invariante por uma transformação a que chamamos de *homotetia*, que muda os comprimentos a partir de 0 *por uma mesma razão*

$$\begin{aligned} H : P &\longrightarrow P \\ p &\longmapsto H(p) = p' \end{aligned}$$

$$OP' = 2OP \qquad OQ' = 2OQ\,.$$

Esta é uma simetria não rígida mas é uma transformação do plano de F que deixa F invariante.

A simetria pode aparecer também em situações aparentemente não geométricas. Por exemplo a expressão algébrica.

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

não muda quando trocamos entre si x e y.

$$f(x,y) = f(y,x)$$

Aqui transformação envolvida é a permutação

$$x \longmapsto y$$

$$y \longmapsto x$$

Tomemos

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

novamente, qualquer permutação realizada entre os $x_i's$

$$x_i \mapsto x_{\sigma_i}$$

$$f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, x_{\sigma_3}) = f(x_1, x_2, x_3)$$

O polinômio acima nas variáveis $x_1, x_2, x_3,$ tem para grupo de simetria todos as permutações dos índices das variáveis $x_i's$.

Surpreendentemente, a noção de grupo e o início de sua teoria foi encontrada não nas figuras geométricas mas sim no estudo das equações algébricas

$$f(x) = 0$$

onde f é um *polinômio na variável* x. Isso aconteceu na primeira metade do século passado.

O corpo humano, em seu exterior como os de muitos outros animais exibe simetria bilateral (espacial). Ao invés de reta de simetria temos aqui um plano de simetria.

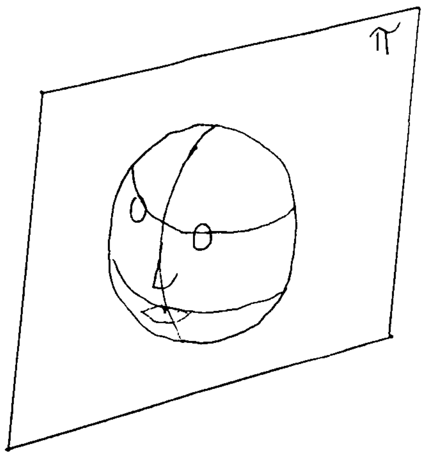

Fig. 10

Definimos a reflexão no espaço analogamente à do plano. Fixado um plano Π no espaço E, a reflexão R determinada por Π, é a transformação (rígida) R que

$$R : E \to E$$

$$p \to R(p) = p'$$

tal que p' está na reta por p, perpendicular a Π, p' no semi espaço em que não está p e p e p' equidistante de Π. Dado p no espaço E existe um único p' com a propriedade acima e que definimos como $R(p) = p'$.

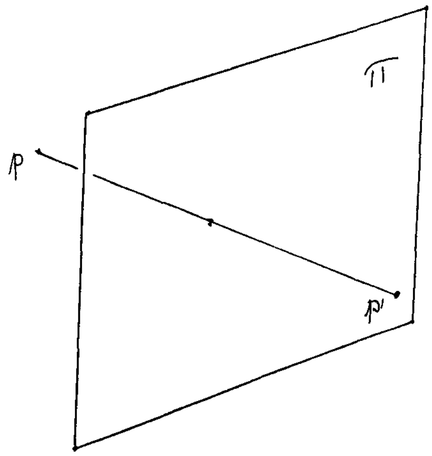

Fig. 11

Se uma figura F do espaço E é invariante por numa tal reflexão dizemos que ela admite simetria bilateral segundo plano Π. Como vemos, o corpo humano (seu exterior) admite simetria bilateral (embora não perfeita).Temos a noção de esquerda e direita. A simetria de reflexão leva uma na outra. Se olharmos num espelho teremos direita esquerda invertidas. Se você olhar numa ambulância de frente verá a palavra ambulância invertida que é para ser lida quando vista no espelho retrovisor do carro que vai á sua frente. Ernst Mach (assim como muito outros) ficou intrigado, chocado intelectualmente,ainda quando jovem, com o resultado do experimento com uma agulha magnética (bússola) que deflete (muda de direção) para a esquerda ou para direita, quando suspensa paralelamente a um fio por onde passa uma corrente elétrica num sentido fixo, como na figura abaixo:

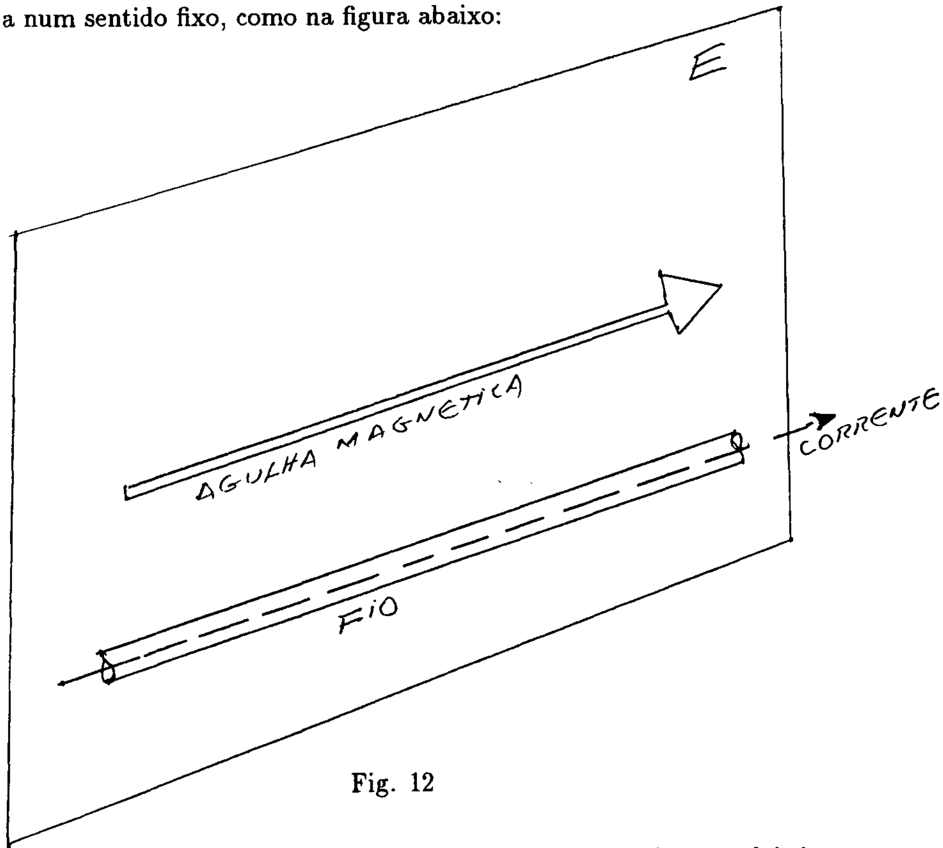

Fig. 12

Como o aspecto puramente geométrico do experimento indica que há simetria em relação ao plano E onde estão a agulha e o fio, esperar-se-ia que a agulha não deveria ter preferência para refletir quer á direita quer á esquerda. Mas ela deflete...

As aparências são, às vezes, decepcionantes. Na realidade o efeito da *re-*

flexão espacial em E, embora não mude o sentido da corrente, troca os polos magnéticos. O magnetismo da agulha tem sua origem em correntes elétricas moleculares que circundam (èspiralam) a agulha. A reflexão inverte os sentidos de tais correntes.

As leis da física são expressas em função de

Espaço

Tempo

Carga elétrica

e sempre envolvem um *referencial*, isto é, três eixos espaciais, para a localização dos pontos do espaço e um eixo temporal, tempo medido, a partir de um certo instante (zero) com contagem positiva no sentido do futuro. Há também a fixação do que se considera carga elétrica positiva ou negativa e neutra (nula). As leis físicas vem normalmente expressas por uma equação em linguagem matemática digamos

$$f(x_1, x_2, x_3, t, q) = 0$$

onde os $x_1's$ são as coordenadas espaciais, t é o tempo e q a carga elétrica. Estamos aqui super simplificando as equações para fins didáticos.

Uma questão muito importante e natural é a seguinte: O que acontece com as equações da física, quando operamos transformações nestes referenciais, ou seja, quando trocamos estes referenciais? Por exemplo se trocarmos a coordenada t por $-t$ ou se trocarmos os sinais das cargas envolvidas q por $-q$. Igualmente se operarmos transformações nas coordenas espaciais x_i, por exemplo por uma reflexão espacial segundo um plano genérico P. Os físicos tem as ciglas CPT

C para reversão da carga (charge reversal)

P para mudança espacial de paridade (parity)

T reversão temporal (time reversal)

Até antes de 1960, tudo o que se tinha (leis, equações, fenômenos) eram invariantes por cada mudança isolada de C e R em T, isto é, se trocássemos os sinais das cargas elétricas as equações ficam invariantes, o mesmo se transformássemos as coordenadas espaciais por uma reflexão ou ainda trocássemos a direção do tempo. Nos anos 60 Yang e Wu descobriram o neutrino e que o mesmo produzia o fenomeno de helicidade ao se mover (algo como uma rosca ou parafuso)

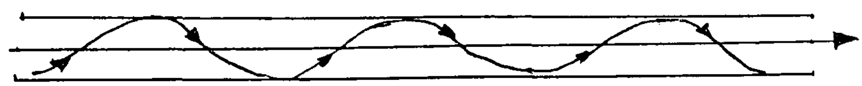

Fig. 13

e essa descoberta veio mostrar que a reflexão espacial pode não deixar invariante as leis físicas, ja que a reflexão segundo um plano, no espaço reverte o sentido da hélice em torno do movimento do neutrino e este não existe. O neutrino aparece no chamado decaimento β. A reverção temporal ainda permanece como simetria, não se conseguiu ainda uma descoberta que disprove isso. O que se sabe porem é que a transformação simultanea CPT é simetria das leis físicas, isto é, se numa equação (ou lei) da física mudarmos as coordenadas espaciais por uma reflexão num plano, trocarmos t por $-t$ e q por $-q$, estas três alterações deixam a equação nela mesma (invariante).

Referências Básicas

1) H.Weyl Simmetry 1951.

2) B. Grunbaum & ..., Tilings and Patterns 1986.

3) H. Brown, Cristalographic Groups in 4-space 1978.

JANEIRO DE 1999

ICMC - USP
Caixa Postal 668
13560-970 São Carlos, SP
Brasil