Uma nova classe de Métodos de Pontos Proximais para Programação Matemática

Paulo José da Silva e Silva[1]
rsilva@ime.usp.br

Carlos Humes Júnior[1]
humes@ime.usp.br

Resumo

O trabalho apresenta uma classe de Métodos de Pontos Proximais que generaliza os métodos clássicos do tipo $x^{i+1} = \underset{x\in\mathbf{R}^n}{argmin}\{f(x) + \lambda_i \parallel x - x^i \parallel_2^2\}$, mantendo a propriedade de Fejér monotonicidade em relação ao conjunto $\underset{x\in\mathbf{R}^n}{argmin}\{f(x)\}$.

1 Objetivo do Trabalho

O trabalho originou-se da tentativa de obter uma melhor compreensão do Método de Pontos Proximais (MPP) utilizando-se das idéias de separadores introduzidas por Eaves e Zangwill [3].

O MPP aplicado à Programação Matemática pode ser descrito como a solução de uma seqüência de problemas da forma

$$x^{i+1} = \underset{x\in\mathbf{R}^n}{argmin}\{f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\}.$$

onde a função $r(\cdot, x^i)$ (função de regularização) é estritamente convexa, $f(\cdot)$ é convexa, e por simplicidade, diferenciável, e $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}}$ é uma seqüência onde $0 < \lambda_i \leqq \tilde{\lambda}$.

Na literatura, veja por exemplo [4], estes métodos são explorados com três grandes classes de funções de regularização: φ-divergências [4], distâncias de Bregman [4, 2, 1] e $\parallel x - x^i \parallel_2^2$ [4, 5]. A última função induz a propriedade de Fejér monotonicidade, isto é

$$\forall x^* \in \underset{x\in\mathbf{R}^n}{argmin}\{f(x)\}, \parallel x^{i+1} - x^* \parallel_2 \leqq \parallel x^i - x^* \parallel_2 .$$

Inicialmente procuramos responder às questões: Por que $\parallel \cdot - x^i \parallel_2^2$? Por que $\parallel \cdot - x^i \parallel_2$ ao invés de outra norma geral?

2 Principais Resultados

O principal resultado é que o MPP, usando como função de regularização $\phi(\parallel \cdot - x^i \parallel_2)$, converge (com Fejér monotonicidade) se

---

[1] Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

- $\phi : A \mapsto \mathbb{R}_+$, onde A é um aberto que contém o $\mathbb{R}_+$;
- $\nabla(\phi(\| 0 \|_2)) = 0$;
- $\phi'(\cdot)$ é estritamente crescente e contínua.

Mostramos ainda que, dado um convexo B, simétrico em relação à origem e tal que $0 \in \overset{\circ}{B}$, e sua norma induzida $\| \cdot \|_B$, o método tipo MPP com regularização $\| \cdot - x^i \|_B$ não é convergente, mesmo no sentido de subseqüências. Por outro lado, com a função de regularização $\| \cdot - x^i \|_2^{1+\epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$, a convergência (no sentido de seqüência) está garantida. Também, exploramos a relação entre Féjer monotonicidade e regularizações baseadas em norma 2.

3 Perspectivas e Conclusões

- Sabe-se da íntima ligação entre métodos baseados em Lagrangianos e o MPP (por exemplo veja [4] onde se prova que o Método de Lagrangianos Aumentados pode ser visto como o MPP aplicado ao problema dual e onde também há uma redução do ''Método de Multiplicadores Exponenciais'' de Bertsekas ao MPP com distâncias de Bregman). Uma pergunta natural é se é possível gerar novos métodos baseados em Lagrangianos a partir da classe de funções de regularização aqui apresentada.
- A próxima questão é aplicar as idéias de separadores ao estudo do MPP com distâncias de Bregman.

Referências

[1] L Bregman. The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7:200--217, 1967.

[2] Y. Censor and J Zenios. The proximal minimization algorithms with D-functions. *Jounal of Optimization: Theory and Applications*, 73:451--464, 1992.

[3] B. Curtis Eaves and W. I. Zangwill. Generalized cutting plane algorithms. *SIAM Journal on Control*, 9:529--542, novembro 1971.

[4] A. Iusem. *Métodos de Ponto Proximal em Otimização*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1995. Livro do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática.

[5] R. T Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimizatio*, 14:887--898, Agosto 1976.