

Comparação de modelos CAViaR e CARE para mensuração de risco

*Francielle de Lima e Silva¹
Clélia Maria de Castro Tolo²*

Resumo

O Valor em Risco (VaR) é uma medida de risco muito utilizada para gerenciamento e controle de risco de mercado. A mensuração pode ser feita por vários métodos como a abordagem econométrica e a Teoria dos Valores Extremos (TVE). Porém, esses métodos apresentam algumas fragilidades, como por exemplo a suposição inadequada da distribuição dos erros, resultando em medidas imprecisas. Sendo assim, neste artigo são apresentados, discutidos e comparados os modelos de Valor em Risco Autorregressivo Condicional (CAViaR) e os modelos de Expectil Autorregressivo Condicional (CARE). Os modelos foram ajustados para a mensuração do Valor em Risco (VaR) e Expected Shortfall (ES) feitos para a série do IBOVESPA.

Palavras-chaves: Valor em Risco, Expected Shortfall, Modelos CAViaR, Modelos CARE.

¹ Departamento de Estatística - Universidade de São Paulo, Brasil. E-mail: franciellelimasilva@gmail.com

² Departamento de Estatística - Universidade de São Paulo, Brasil. E-mail: clelia@ime.usp.br

1. Introdução

No mercado financeiro, existem três tipos de risco aos quais as empresas estão expostas: operacional, estratégico e financeiro. Este último pode ainda ser subdividido em: operacional, de crédito, de liquidez, legal e de mercado.

O artigo apresenta somente medidas de riscos financeiros de mercado, que estão associadas às possíveis perdas ou ganhos potenciais de investimentos (posições financeiras) de acordo com o comportamento do mercado.

Os investimentos citados são referências feitas às posições financeiras definidas como *vendidas* ou *compradas*.

Na seção 2 são detalhados e apresentados os modelos de Valor em Risco Autorregressivo Condicional (CAViaR) propostos por Engle e Manganelli (2004), que ao invés de modelar toda a distribuição dos retornos, modela diretamente seus quantis. Os modelos Expectil Autorregressivo Condicional (CARE), propostos por Taylor (2008), que também são utilizados para a estimação do VaR, podem ser vistos na seção 3. Esta seção também mostra as novas especificações que visam discutir melhor as propriedades dos modelos CARE, que foram propostas por Kuan, Yeh e Hsu (2009). Na seção 4 é mostrado o Expected Shortfall (ES), uma medida de risco coerente que apresenta informações sobre os retornos que estão acima ou abaixo do VaR. Na seção 5 são feitas aplicações a série de Índices da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), considerando todos os métodos descritos para a mensuração do VaR e do ES.

2. CAViaR - Valor em Risco Autorregressivo Condicional

Séries de retornos financeiros muitas vezes apresentam autocorrelação, logo o Valor em Risco (VaR) pode apresentar um comportamento semelhante. Assim, com uma estrutura similar aos modelos GARCH (Generalized auto-regressive conditional heteroscedasticity), os modelos de Valor em Risco Autorregressivo Condicional (CAViaR), através de termos autorregressivos, incorporam as autorrelações do VaR ao modelo.

De acordo com Kuan, Yeh e Hsu (2009), a ideia básica é modelar o θ – quantil condicional $Q_\theta(r_t|x_t) = VaR_t(\theta)$ como uma função $g(\cdot)$ das informações $x_t \in F_{t-1}$ (informações até o instante $(t-1)$), e do vetor de parâmetros β , ou seja,

$$VaR_t(\theta) \equiv g_\theta(x_t, \beta_\theta),$$

em que $r_t, \{t: 1, \dots, T\}$, são os log-retornos, θ a probabilidade associada ao VaR e β e o vetor de parâmetros dependente de θ .

Os modelos CAViaR possuem especificações distintas, que são utilizadas de acordo com o comportamento dos retornos. Esses modelos não fazem suposições sobre a distribuição dos retornos.

Uma forma mais geral da especificação do modelo é:

$$VaR_t(\theta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i VaR_{t-i}(\theta) + g(\beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}, F_{t-1})$$

Por simplicidade, assim como nos modelos GARCH, a especificação mais utilizada é a de ordem 1:

$$VaR_t(\theta) = \beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1}(\theta) + g(\beta_2, r_{t-1}, VaR_{t-1}(\theta)),$$

em que $g(\dots)$ é a função de ligação entre $VaR_{t-1}(\theta)$ e r_{t-1} , que mede o quanto o VaR pode variar no tempo baseado em novas informações dos log-retornos, como as curvas de impacto dos modelos GARCH, com parâmetros apresentando valores entre $(-1, 1)$.

A seguir são apresentadas algumas formulações específicas:

2.1 Especificações do Modelo

- **Valor Absoluto Simétrico:**

$$VaR_t(\theta) = \beta_1 + \beta_2 VaR_{t-1}(\theta) + \beta_3 |r_{t-1}| \quad (1)$$

- **Inclinação Assimétrica:**

$$VaR_t(\theta) = \beta_1 + \beta_2 VaR_{t-1}(\theta) + \beta_3 r_{t-1} I(r_{t-1} > 0) + \beta_4 r_{t-1} I(r_{t-1} < 0), \quad (2)$$

em que $I(\cdot)$ representa uma função indicadora.

- **GARCH (1,1) Indireto:**

$$VaR_t(\theta) = (\beta_1 + \beta_2 VaR_{t-1}^2(\theta) + \beta_3 r_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

- **Adaptativo:**

$$VaR_t(\theta) = VaR_{t-1}(\theta) + \beta_1 \left\{ \left[1 + \exp \left[k \left(r_{t-1} - VaR_{t-1}(\theta) \right) \right] \right]^{-1} - \theta \right\} \quad (4)$$

- **Adaptativo Simétrico Proporcional:**

$$VaR_t(\theta) = VaR_{t-1}(\theta) + \beta_1 \max\{0, |r_{t-1}| - VaR_{t-1}(\theta)\} - \beta_2 \min\{0, |r_{t-1}| - VaR_{t-1}(\theta)\}. \quad (5)$$

- **Valor Absoluto Assimétrico:**

$$VaR_t(\theta) = \beta_1 + \beta_2 VaR_{t-1}(\theta) + \beta_3 |r_{t-1} - \beta_4|. \quad (6)$$

- **AR(1)-GARCH (1,1) indireto:**

Pensando em um modelo que possa capturar a autocorrelação da média condicional da série de retornos, Kuester, Mittnik e Paoletta (2006) estenderam a estrutura do modelo **GARCH Indireto**, propondo:

$$VaR_t(\theta) = \phi_1 r_{t-1} + \left[\beta_1 + \beta_2 (VaR_{t-1}(\theta) - \phi_1 r_{t-2})^2 + \beta_3 (r_{t-1} - \phi_1 r_{t-2})^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

2.2 Estimação do Modelo

Introduzida por Koenker e Bassett (1978), a técnica de Regressão Quantílica permite caracterizar toda a distribuição condicional de uma variável resposta a partir de um conjunto de regressores.

Seja a v.a. Y com função de distribuição $F(y)$ em que para algum $0 < \theta < 1$,

$$F^{-1}(\theta) = \inf \{y \in \mathfrak{R} : F(y) \geq \theta\} \quad (8)$$

é chamado θ – ésimo quantil de Y .

Agora considere um simples problema de teoria da decisão com a função de perda convexa descrita como a seguinte função linear:

$$p_{\theta}(u) = \begin{cases} u(\theta - 1), & \text{se } u < 0 \\ u\theta, & \text{se } u > 0 \end{cases}, \quad (9)$$

em que $u = (Y - b)$ é o desvio, $b \in \mathfrak{R}$.

Fixando um valor θ , é possível calcular a média da função e perda como sendo

$$E = \{\rho_{\theta}(u)\} = E \{\rho_{\theta}(Y - b)\} = (0 - 1) \int_{-\infty}^b (y - b) dF(y) + \theta \int_b^{+\infty} (y - b) dF(y).$$

Com o objetivo de encontrar o menor desvio, calcula-se o valor de b que minimiza a média da função de perda, dada em (9), ou seja, basta diferenciar $E \{\rho_{\theta}(Y - b)\}$ com relação a b e igualar a zero, assim:

$$(1 - \theta) \int_{-\infty}^b dF(y) - \theta \int_b^{+\infty} dF(y) = 0 \Rightarrow F(b) - \theta = 0 \Rightarrow F(b) = \theta.$$

Desde que F seja monótona, algum elemento de $\{y \in \Re : F(y) = \theta\}$ minimiza a perda esperada. Quando a solução é única,

$$b = F^{-1}(\theta), \quad (10)$$

caso contrário, tem-se um intervalo para b , no qual o menor elemento deve ser escolhido.

Note que por (8) e (10), a divisão da amostra em quantis pode ser feita através da minimização da função perda esperada com respeito à variável aleatória Y , ou seja, basta obter o valor de b que minimiza

$$CQ = \min_{b \in \Re} [E \{\rho_\theta(Y - b)\}],$$

em que a função CQ é chamada de Critério Quantílico, em que $b = Q(\theta)$ – é o θ – quantil da v.a. Y .

Para o cálculo do quantil amostral, através da função de perda para o caso discreto, considere $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\}$ uma amostra aleatória da v.a. Y e F_n a função de distribuição empírica:

$$F_n(y) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I_{(Y_i \leq y)}, \quad (11)$$

em que $i \in \{1, \dots, T\}$ e $n \in \{1, \dots, T\}$, com $i \leq n$.

Escolhendo b que minimiza a perda esperada, considerando $F_n(\cdot)$ dada em (11), faz-se

$$CQ = \min_{b \in \Re} \left[n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_{\theta}(Y_i - b) \right], \quad (12)$$

e considerando um modelo linear

$$Y_i = x_i' \beta + u_i \Rightarrow u_i = Y_i - x_i' \beta,$$

em que $x_i' \beta$ são os regressores, de acordo com (12), tem-se que o vetor $\hat{\beta}_{\theta}$ é o vetor β , tal que

$$CQ = \min_{\beta} \left[n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_{\theta}(Y_i - x_i' \beta) \right].$$

Assim,

$$CQ = \min_{\beta} \left(\frac{1}{n} \left\{ \sum_{i: Y_i \geq x_i' \beta} \theta |Y_i - x_i' \beta| + \sum_{i: Y_i < x_i' \beta} (1 - \theta) |Y_i - x_i' \beta| \right\} \right) \quad (13)$$

resulta no cálculo da estimativa do vetor β_{θ} de parâmetros, ou seja, $Q(\theta)$ é obtido a partir do vetor $\hat{\beta}_{\theta}$ que minimiza a função perda esperada.

Para estender o conceito de Regressão Quantílica a uma série de retornos financeiros, existem algumas suposições básicas a serem feitas para que o cálculo do VaR, de acordo com as especificações citadas anteriormente seja possível.

A suposição chave do modelo linear é que

$$r_t = x_t' \beta_\theta + u_{t,\theta} \text{ e } Q_\theta = (u_{t,\theta} | x_t) = 0 \quad (14)$$

em que r_t são os retornos, $u_{t,\theta}$ é a parte aleatória, x_t o vetor de regressores, com ordem $(k \times 1)$ para um t fixo, β_θ o vetor de k parâmetros a serem estimados e $Q_\theta = (u_{t,\theta} | x_t)$ o θ – quantil de $u_{t,\theta}$ condicional em x_t .

De fato, tomando $Q_\theta = (u_{t,\theta} | x_t) = 0$, o modelo supõe que os erros tenham valores próximos de zero, independentemente do quantil adotado, assim possibilitando que os quantis condicionais dos retornos sejam relativamente iguais a $x_t' \beta_\theta$, ou seja,

$$Q_\theta = (r_t | x_t) = x_t' \beta_\theta. \quad (15)$$

Logo o θ – quantil de r_t dadas as informações até o instante t , é a parte determinística do modelo, ou seja, o conjunto de informações disponíveis até o período t .

Portanto, de (13)

$$CQ = \min_{\beta} \left(\frac{1}{T} \left\{ \sum_{t: r_t \geq VaR_t(\theta)} \theta |r_t - VaR_t(\theta)| + \sum_{t: r_t < VaR_t(\theta)} (1 - \theta) |r_t - VaR_t(\theta)| \right\} \right)$$

resulta na estimativa $\hat{\beta}_\theta$, do vetor β de parâmetros, necessária para o cálculo do $VaR_t(\theta)$, que pode assumir as especificações mostradas na seção 2.1.

Por exemplo, considerando a especificação **GARCH(1,1) Indireto**, dada em (3), calculando o vetor $\hat{\beta}_\theta$ pelo CQ tem-se,

$$CQ = \min_{\beta} \left[\frac{1}{T} \left\{ \sum_t \left| I_{r_t < \left(\beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1}^2(\theta) + \beta_2 r_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right|^{-\theta} \right\} \right],$$

e $\hat{\beta}_\theta = \{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}^T$.

A função CQ é considerada como uma alternativa a mais para a seleção e adequação de modelos, pois para cada especificação, considerando os parâmetros estimados, deseja-se o que resulta no menor valor de CQ.

Considerados como um caso particular de estimadores de mínimos absolutos, os estimadores por regressão quantílica possuem características que os definem como sendo mais robustos que os de mínimos quadrados, por serem menos sensíveis ao comportamento das caudas das distribuições dos dados.

Segundo Engle e Manganelli (2004), os estimadores obtidos por regressão quantílica são consistentes e assintoticamente normais, ou seja, sob certas condições e utilizando como base o trabalho de Weiss (1991), demonstram que

$$\hat{\beta}_\theta \xrightarrow{p} \beta_\theta, T \rightarrow \infty,$$

em que $\hat{\beta}_\theta$ é a solução para:

$$CQ = \min_{\beta} \left(\frac{1}{T} \left\{ \sum_{t: r_t \geq VaR_t(\theta)} \theta |r_t - VaR_t(\theta)| + \sum_{t: r_t < VaR_t(\theta)} (1 - \theta) |r_t - VaR_t(\theta)| \right\} \right)$$

Sob certas suposições, Engle e Manganelli (2004) provam que

$$\sqrt{T} A_T^{-1/2} D_T (\hat{\beta}_{\theta} - \beta_{\theta}) \xrightarrow{d} N(O, I),$$

em que

$$A_T \equiv E \left[T^{-1} \theta (1 - \theta) \sum_{t=1}^T \nabla' VaR_t(\theta) \nabla VaR_t(\theta) \right],$$

$$D_T \equiv E \left[T^{-1} \sum_{t=1}^T h_t(0|F_t) \nabla' VaR_t(\theta) \nabla VaR_t(\theta) \right],$$

em que $\nabla VaR_t(\theta)$ é gradiente de $VaR_t(\theta)$ e $h_t(0|F_t)$ a densidade condicional dos erros calculada em zero.

As matrizes A_T e D_T podem ser estimadas por

$$\begin{aligned} \hat{A}_T &= T^{-1} \theta (1 - \theta) \nabla' \widehat{VaR}_t(\theta) \nabla \widehat{VaR}_t(\theta) \\ \hat{D}_T &= (2T\hat{c}_T) \sum_{t=1}^T I(|r_t - \widehat{VaR}_t(\theta)| < \hat{c}_T) \nabla' \widehat{VaR}_t(\theta) \nabla \widehat{VaR}_t(\theta), \end{aligned}$$

em que

$$\hat{c}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\nabla \widehat{VaR}_t(\theta) \nabla' \widehat{VaR}_t(\theta)}{\widehat{VaR}_t(\theta)}.$$

2.3 Teste de Ajuste dos Modelos

Considerando uma série de retornos r_t , para uma posição comprada, para determinar se o modelo está corretamente especificado, tem-se o teste:

$$\begin{cases} H_0 : P\{r_t < VaR_t(\theta)\} = \theta, \forall t, \\ H_1 : P\{r_t < VaR_t(\theta)\} \neq \theta. \end{cases}$$

É possível obter, também, uma sequência de funções indicadoras

$$I(r_t < VaR_t(\theta)), t = 1, \dots, T$$

Assim, uma forma de testar se o modelo é válido, é verificar se a sequência de funções indicadoras é i.i.d.. Logo, uma propriedade que qualquer estimativa de VaR deve satisfazer é se comportar como um filtro, capaz de transformar uma série autocorrelacionada e heteroscedástica em uma série independente de funções indicadoras.

Esta é uma condição necessária, mas não suficiente para avaliar o comportamento e desempenho do modelo quantílico, uma vez que esta não considera e nem incorpora a influência de outras variáveis ao modelo.

Sendo assim, Engle e Manganelli (2004) propuseram um novo teste que pode ser estendido para incorporar essas variáveis ao modelo.

Seja

$$Hit_t(\beta_\theta) = I(r_t < VaR_t(\theta)) - \theta,$$

uma função que assume os valores $(1-\theta)$ quando r_t é menor que o θ -quantil e o valor $-\theta$ caso contrário.

Considerando $f_{t-1} \in F_{t-1}$,

$$E\{(f_{t-1}Hit_t)|f_{t-1}\} = f_{t-1}E\{Hit_t|f_{t-1}\},$$

o que mostra que Hit_t é não correlacionada com qualquer subconjunto pertencente ao conjunto de informações passadas F_{t-1} , ou seja, não há correlação entre Hit_t e qualquer Hit_{t-l} , para todo l .

Segundo os autores, uma maneira natural de fazer o teste é verificar se a estatística do teste

$$\frac{1}{T} X'(\hat{\beta})Hit(\hat{\beta})$$

é significativamente diferente de zero, em que $x_t(\hat{\beta}), t=1, \dots, T$ é um k-vetor, sendo uma linha de $X'(\hat{\beta})$, possivelmente dependendo de $\hat{\beta}$, mensurável em F_{t-1} , e

$$Hit(\hat{\beta}) \equiv [Hit_1(\hat{\beta}), Hit_2(\hat{\beta}), \dots, Hit_T(\hat{\beta})]'.$$

Visando testes para fins de seleção de modelos e que também possam avaliar quando uma estimativa de VaR , apresentada a uma instituição financeira, satisfaz alguns requisitos básicos, Engle e Manganelli (2004) desenvolveram os testes de *Quantis Dinâmicos (QD)*, que podem ser definidos como amostrais (QD_{am}) e pos-amostrais (QD_{pam}).

Inicialmente, detalha-se o teste QD_{am} , que verifica a qualidade do ajuste, permitindo a avaliação do modelo e possibilitando a escolha daquele mais adequado aos dados.

Sob certas suposições, assumindo algumas condições de regularidade,

$$QD_{am} \equiv \frac{Hit'(\hat{\beta})X(\hat{\beta})(\hat{M}_T\hat{M}_T')^{-1}X'(\hat{\beta})Hit'(\hat{\beta})}{\theta(1-\theta)} \stackrel{d}{\sim} \chi_{(k)}, \text{ quando } T \rightarrow \infty,$$

em que

$$\hat{M}_T \equiv X'(\hat{\beta}) - \left\{ (2T\hat{c}_T)^{-1} \sum_{t=1}^T I(|r_t - \widehat{VaR}_t(\theta)| < \hat{c}_T) \times x'_t(\hat{\beta}) \nabla \widehat{VaR}_t(\theta) \right\} \hat{D}_T^{-1} \nabla' \widehat{VaR}_t(\theta).$$

Já o teste de QD_{pam} serve como ferramenta para verificar se as estimativas dos parâmetros de interesse satisfazem alguns requisitos que toda boa estimativa quantílica deve satisfazer. Uma das grandes vantagens do teste é que pode ser considerado como simples, além do fato de não depender do procedimento de estimação. Para implementá-lo, é necessário a sequência de valores de $VaRs$ e dos correspondentes valores dos retornos.

Sendo assim, seja T_R o número de observações amostrais e N_R o número de observações pós-amostrais, ambos dependendo de T , em que $T \in \mathbb{Z}$.

Sob certas suposições,

$$QD_{pam} \equiv N_R^{-1} \text{Hit}'(\hat{\beta}_{T_R}) X(\hat{\beta}_{T_R}) [X'(\hat{\beta}_{T_R}) X(\hat{\beta}_{T_R})]^{-1} X \frac{X'(\hat{\beta}_{T_R}) \text{Hit}'(\hat{\beta}_{T_R})^d}{\theta(1-\theta)} \sim X_{(k)},$$

quando $R \rightarrow \infty$.

Todos os detalhes podem ser vistos em Engle e Manganelli (2004).

3. CARE – Expectil Autorregressivo Condicional

Uma das fragilidades dos modelos CAViaR com parâmetros estimados por Regressão Quantílica é que a magnitude dos dados não tem influência no processo de estimação, pois o que se considera de fato são os quantis dos dados.

Assim, ao considerar por exemplo, dois conjuntos de dados com caudas se comportando de formas diferentes, eles podem apresentar o mesmo valor para um θ -quantil.

Com o objetivo de obter medidas de risco calculadas por um método mais adequado, Taylor (2008) introduz os modelos Expectil Autorregressivo Condicional (CARE) com as mesmas estruturas dos modelos CAViaR, porém com parâmetros estimados por Mínimos

Quadrados Assimétricos. Esses modelos receberam algumas críticas por apresentarem as mesmas estruturas dos modelos CAViaR, sem considerar as propriedades assintóticas do estimador de Mínimos Quadrados Assimétricos, além de não definir um teste no contexto dinâmico.

A seguir, Kuan, Yeh e Hsu (2009) propõem novas especificações, com propriedades assintóticas e testes.

Antes de detalhar as especificações do modelo, é necessário que se defina expectil.

3.1 Expectil

Considere a função de perda definida anteriormente $\rho_\tau(u)$, com $\tau \in (0,1)$ fixo. O τ – expectil, denotado por $\mu(\tau)$ é o parâmetro m que minimiza a função de perda calculada em $(Y - m)^2$, com relação à v.a. Y , ou seja, é um mínimo quadrado assimétrico (MQA), em que

$$MQA = \min_{m \in \mathfrak{R}} [E\{\rho_\tau(Y - m)^2\}]. \quad (16)$$

De fato, para o cálculo de $\mu(\tau)$ de acordo com (16), tem-se:

$$E\{\rho_\tau(Y - m)^2\} = |\tau - 1| \int_{-\infty}^m (Y - m)^2 dF_Y(y) + |\tau| \int_m^{+\infty} (Y - m)^2 dF_Y(y).$$

Minimizando em relação a m tem-se:

$$\begin{aligned} (1 - \tau) \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} (Y - \mu(\tau)) dF_Y(y) + \tau \int_{\mu(\tau)}^{+\infty} (Y - \mu(\tau)) dF_Y(y) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(\tau) - E(Y) &= \left(\frac{1 - 2\tau}{\tau} \right) \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} (Y - \mu(\tau)) dF_Y(y). \end{aligned} \quad (17)$$

Logo, pode-se concluir que o resultado dessa minimização é o valor $\mu(\tau)$ que satisfaz a equação (17).

Ao comparar o θ – quantil e o τ – expectil, Koenker (2005) observa que o expectil tem uma maior dependência global da forma da distribuição. Por exemplo, alterando a forma da distribuição nas caudas, o quantil não é alterado, mas há um impacto no expectil.

De acordo com a definição de expectil, inicialmente é necessário determinar o valor mais adequado para τ , dado o valor de θ .

Seja $\mu(\tau)$ tal que de acordo com a equação (17):

$$\frac{1}{\theta}(\mu(\tau) - E(Y)) = \left(\frac{1-2\tau}{\tau} \right) \frac{1}{\theta} \left\{ E(YI_{Y < \mu(\tau)}) - \mu(\tau) E(I_{Y < \mu(\tau)}) \right\}.$$

Fazendo $E(I_{Y < \mu(\tau)}) = F(\mu(\tau)) = \theta$, em que F é a função de distribuição acumulada da v.a. Y , tem-se:

$$\frac{1-2\tau}{\tau} = \frac{\mu(\tau) - E(Y)}{\theta \left\{ \frac{E(YI_{Y < \mu(\tau)})}{\theta} - \mu(\tau) \right\}}. \quad (18)$$

Estendendo o conceito para uma série de retornos, inicialmente, fixa-se o valor de θ , logo $\hat{\mu}(\tau) = q_\theta(r_t | F_{t-1})$, em que $q_\theta(r_t | F_{t-1})$ é o θ – quantil empírico da série de retornos dadas as informações passadas, $E(Y) = E(r_t | F_{t-1})$, e

$$\frac{E(YI_{Y < \mu(\tau)})}{\theta} = E\left((r_t | F_{t-1}) | (r_t | F_{t-1}) < q_\theta(r_t | F_{t-1})\right),$$

ou seja, $\frac{E(YI_{Y < \hat{\mu}(\tau)})}{\theta}$ é obtido pela média dos retornos abaixo de θ – quantil estimado.

Logo, de acordo com (18), tem-se:

$$\frac{1-2\tau}{\tau} = \frac{\hat{\mu}(\tau) - E(r_t | F_{t-1})}{\theta \left\{ E\left((r_t | F_{t-1}) | (r_t | F_{t-1}) < q_\theta(r_t | F_{t-1})\right) - \hat{\mu}(\tau) \right\}}. \quad (19)$$

Fazendo o segundo lado da igualdade igual a K, tem-se:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{K}}{1 + 2\hat{K}}. \quad (20)$$

3.2 Especificações dos modelos CARE

Seguindo as mesmas estruturas dos modelos CAViaR, e utilizando o τ – expectil como um estimador o θ – quantil, em que não necessariamente lado τ seja igual a θ , Taylor (2008) define as mesmas especificações apresentadas nas expressões (1)–(7).

Para a estimação dos modelos CARE, utiliza-se o mesmo procedimento que o feito para a estimação dos modelos CAViaR, porém ao invés de calcular a função de CQ é calculada a função e MQA.

Com o objetivo de selecionar e verificar a adequação do modelo, como feito para os modelos CAViaR, Taylor (2008) propõe os teste de Hit_{am} , Hit_{pam} e QD_{am} e QD_{pam} .

3.3 Novas especificações propostas para modelos CARE

Kuan, Yeh e Hsu (2009) propõem novas especificações, mencionadas a seguir:

Considerando:

- i) Uma coleção de k variáveis, X o conjunto de informações, tais que $X \in F_t$ e β_τ o vetor $(k \times 1)$ de parâmetros dependendo de τ ;
- ii) (r_t, x'_t) o conjunto de dados disponível;
- iii) o modelo:

$$r_t = x'_t \beta_\tau + e_{t,\tau}, \quad (21)$$

em que $x'_t \in X$, $t = \{1, \dots, T\}$ e $e_{t,\tau}$ é o erro;

v) $\mu(\tau, X)$ o τ -expectil do conjunto de informações condicional em F ;

vi) que o modelo está corretamente especificado para $\mu(\tau, X)$ se existe β_τ^0 tal que $X'\beta_\tau^0 = \mu(\tau, X)$ com probabilidade um;

Sob a suposição de que o modelo é corretamente especificado, tem-se:

$$r_t = x_t' \beta_\tau^0 + \varepsilon_{t,\tau}. \quad (22)$$

No contexto dinâmico, para modelar o τ -expectil de r_t , são consideradas informações até o instante $(t-1)$, ou seja $x_t \in F_{t-1}$.

Sabendo que o expectil é também um quantil, se uma série é autocorrelacionada, então $\mu(\tau)$, para os valores fixos τ , também será autocorrelacionada. Visando ter uma medida de risco que não apresente este comportamento, retornos defasados no tempo são incluídos nos modelos.

De acordo com a definição de expectil, visando incorporar o impacto que a magnitude dos dados exercem no modelo, o quadrado ou o valor absoluto dos retornos também podem ser incluídos nos modelos.

Sejam

$$\begin{aligned} r_{t-1} &= r_{t-1}^+ - r_{t-1}^- \\ |r_{t-1}| &= r_{t-1}^+ + r_{t-1}^- \\ r_{t-1}^2 &= (r_{t-1}^+)^2 + (r_{t-1}^-)^2, \end{aligned}$$

em que $r_{t-1}^+ = \max(r_{t-1}, 0)$ e $r_{t-1}^- = \max(-r_{t-1}, 0)$.

Logo, de acordo com (21) e (22), as especificações CARE são mostradas a seguir:

- Especificação [1]

Para $x_t = (1, r_{t-1}, (r_{t-1}^+)^2, (r_{t-1}^-)^2)'$,

$$\begin{aligned} r_t &= a_0(\tau) + a_1(\tau)r_{t-1} + b_1(\tau)r_{t-1}^2 + c_1(\tau)(r_{t-1}^-)^2 + e_{t,\tau} \Rightarrow \\ r_t &= a_0(\tau) + a_1(\tau)r_{t-1} + b_1(\tau)[(r_{t-1}^+)^2 + (r_{t-1}^-)^2] + c_1(\tau)(r_{t-1}^-)^2 + e_{t,\tau} \Rightarrow \\ r_t &= a_0(\tau) + a_1(\tau)r_{t-1} + b_1(\tau)(r_{t-1}^+)^2 + \gamma_1(\tau)(r_{t-1}^-)^2 + e_{t,\tau} \end{aligned} \quad (23)$$

em que $\gamma_1(\tau) = b_1(\tau) + c_1(\tau)$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} \mu_t(\tau) &= a_0(\tau) + a_1(\tau)[\mu_{t-1}(\tau) + e_{t-1,\tau}] + b_1(\tau)(r_{t-1}^+)^2 + \gamma_1(\tau)(r_{t-1}^-)^2 \Rightarrow \\ \mu_t(\tau) &= a_0(\tau) + a_1(\tau)\mu_{t-1}(\tau) + b_1(\tau)(r_{t-1}^+)^2 + \gamma_1(\tau)(r_{t-1}^-)^2 + a_1(\tau)e_{t-1,\tau}. \end{aligned}$$

Neste modelo, a magnitude e o erro defasado no tempo são responsáveis pelo comportamento do expectil condicional do modelo.

Note que, $\beta_\tau = (a_0(\tau), a_1(\tau), b_1(\tau), \gamma_1(\tau))'$.

- Especificação [2]

Uma outra alternativa de especificação, é o uso do $|r_{t-1}|$ para representar o efeito dos dados no modelo. Para este caso, $x_t = (1, r_{t-1}^+, r_{t-1}^-)'$.

Assim,

$$\begin{aligned} r_t &= a_0(\tau) + a_1(\tau)r_{t-1} + b_1(\tau)|r_{t-1}| + e_{t,\tau} \Rightarrow \\ r_t &= a_0(\tau) + \gamma_1(\tau)r_{t-1}^+ + \delta_1(\tau)r_{t-1}^- + e_{t,\tau}, \end{aligned} \quad (24)$$

em que $\gamma_1(\tau) = a_1(\tau) = b_1(\tau)$ e $\delta_1(\tau) = b_1(\tau) - a_1(\tau)$.

Neste caso, $\beta_\tau = (a_0(\tau), \gamma_1(\tau), \delta_1(\tau))$.

Esta especificação é similar a especificação do modelo CAViaR inclinação assimétrica, porém no modelo CARE o τ -expectil condicional defasado no tempo não está inserido no modelo.

- Especificação [3]

Esta especificação, é na realidade uma extensão natural do modelo definido em (23).

Seja

$$r_t = a_0(\tau) + \sum_{i=1}^p a_i(\tau) r_{t-i} + \sum_{j=1}^q [b_j(\tau)(r_{t-j}^+)^2 + \gamma_j(\tau)(r_{t-j}^-)^2] + e_{t,\tau}. \quad (25)$$

Neste caso,

$$\mu_t(\tau) = a_0(\tau) + \sum_{i=1}^p a_i(\tau) \mu_{t-i}(\tau) + \sum_{j=1}^q [b_j(\tau)(r_{t-j}^+)^2 + \gamma_j(\tau)(r_{t-j}^-)^2] + \sum_{i=1}^p e_{t-i,\tau},$$

em que de forma análoga ao modelo (23), a magnitude dos dados e os erros defasados no tempo eu determinam o comportamento do τ -expectil, em que:

$$\beta_\tau = (a_0(\tau), a_1(\tau), \dots, a_p(\tau), b_1(\tau), \dots, b_q(\tau), \gamma_1(\tau), \dots, \gamma_q(\tau)).$$

- Especificação [4]

Como no caso anterior, esta é uma extensão do modelo (24).

Assim:

$$r_t = a_0(\tau) + \sum_{i=1}^p [b_i(\tau) r_{t-i}^+ + \gamma_i(\tau) r_{t-i}^-] + e_{t,\tau}, \quad (26)$$

com $\beta_\tau = (a_0(\tau), b_1(\tau), \dots, b_p(\tau), \gamma_1(\tau), \dots, \gamma_p(\tau))$

3.4 Estimação do Modelo

As quatro especificações detalhadas anteriormente podem ser estimadas utilizando o método de Mínimos Quadrados Assimétricos (MQA), descrito e proposto por Newey e Powell (1987).

Neste caso a média da função de perda ρ_τ é calculada utilizando uma diferença quadrática $(y - m)^2$, atribuindo pesos $(1 - \tau)$ e τ de acordo com os sinais das diferenças, calculando o seu mínimo, como visto em (16). Devido a tais pesos o método é chamado de assimétrico.

Assim, o estimador $\hat{\beta}_\tau$ é o vetor β que satisfaz.

$$MQA = \min_{\beta} \left\{ T^{-1} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(r_t - x_t' \beta)^2 \right\}. \quad (27)$$

Este estimador satisfaz

$$\hat{\beta}_\tau = \left(\sum_{t=1}^T \left[\tau - I(r_t \leq x_t' \hat{\beta}_\tau) \right] (x_t r_t) \right) \left(\sum_{t=1}^T \left[\tau - I(r_t \leq x_t' \hat{\beta}_\tau) \right] (x_t x_t') \right)^{-1} \quad (28)$$

Embora (28) não seja uma solução fechada, pode ser calculada como um estimador de mínimos quadrados ponderados iterado.

Newey e Powell (1987) estabelecem a consistência e normalidade assintótica do estimador dado em (27), sob as condições de que os dados são i.i.d. De fato, mostram que

$$\hat{\beta}_\tau \xrightarrow{p} \beta_\tau, T \rightarrow \infty,$$

e também,

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma(\tau)),$$

em que

$$\Sigma(\tau) = A(\tau)^{-1} V(\tau) A(\tau)^{-1},$$

com

$$A(\tau) = E \left[\left| \tau - I(r_t \leq x'_t \beta_\tau) \right| x'_t x'_t \right],$$

$$V(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} V_T(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \left| \tau - I(r_t \leq x'_t \beta_\tau) \right| x'_t (r_t - x'_t \beta_\tau) \right).$$

De acordo com (21) e (22), se o modelo estiver corretamente especificado, $\beta_\tau = \beta_\tau^0$, em que

$$\beta_\tau^0 = E \left[\rho_\tau (r_t - x'_t \beta_\tau)^2 \middle| F_{t-1} \right].$$

Considerando todas as condições de regularidade e as propriedades de diferenças martingais, Newey e Powell (1987) mostram que

$$\sqrt{T} (\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau^0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma(\tau)),$$

em que

$$\Sigma(\tau) = A(\tau)^{-1} V(\tau) A(\tau)^{-1},$$

com

$$V(\tau) = \text{Var} \left(\left| \tau - I(r_t \leq x'_t \beta_\tau^0) \right| x'_t (r_t - x'_t \beta_\tau^0) \right).$$

A matriz de covariâncias assintótica $\Sigma(\tau)$ pode ser estimada por

$$\hat{\Sigma}(\tau) = \hat{A}(\tau)^{-1} \hat{V}(\tau) \hat{A}(\tau)^{-1},$$

em que

$$\hat{A}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\left| \tau - I(r_t \leq x_t' \hat{\beta}_\tau) \right| x_t x_t' \right) \xrightarrow{P} A(\tau),$$

$$\hat{V}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\left| \tau - I(r_t \leq x_t' \hat{\beta}_\tau) \right|^2 (r_t - x_t' \hat{\beta}_\tau)^2 x_t x_t' \right) \xrightarrow{P} V(\tau),$$

com

$$V(\tau) = \text{Var} \left\{ \left| \tau - I(r_t \leq x_t' \beta_\tau^0) \right| x_t (r_t - x_t' \beta_\tau^0) \right\}$$

3.5 Teste de Ajuste dos Modelos

Pelas especificações escolhidas de acordo com os autores, para determinar qual o modelo mais apropriado, foi desenvolvido um teste com as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : x_t' \beta_\tau^0 = \mu(\tau, F_{t-1}), \text{ com probabilidade } 1, \\ H_1 : \zeta_t' \beta_\tau^0 = \mu(\tau, F_{t-1}), \text{ com probabilidade } 1, \end{cases}$$

em que x_t tem ordem $(k \times T)$ e ζ_t' com ordem $(m \times T)$, ambos contidos em F_{t-1} , em que $k = 3q + 1$ e $m = 2q + 1$.

Note que

$$x_t' = (1, r_{t-i}, (r_{t-i}^+)^2, (r_{t-i}^-)^2), i = 1, \dots, q \text{ e}$$

$$\zeta_t' = (1, r_{t-i}^+, r_{t-i}^-), i = 1, \dots, q.$$

De acordo com os autores, uma forma de testar o modelo sob a hipótese nula, é checar se os erros ponderados são não correlacionados com as variáveis do modelo sob a hipótese alternativa:

Então, sob certas suposições,

$$\frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T \left| \tau - I(r_t \leq x'_t \hat{\beta}_\tau) \right| \tilde{\zeta}_t \hat{e}_{t,\tau} \right)' (\tilde{\Omega}(\tau))^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \left| \tau - I(r_t \leq x'_t \hat{\beta}_\tau) \right| \tilde{\zeta}_t \hat{e}_{t,\tau} \right) \xrightarrow{D} \chi^2_{(q)},$$

em que $\tilde{\Omega}(\tau)$ tem ordem q, e é estimado, substituindo ζ_t por $\tilde{\zeta}_t$.

Mais detalhes sobre a estatística do teste, assim como a distribuição assintótica podem ser visto em Kuan, Yeh e Hsu (2009).

4. ES – Expected Shortfall

O VaR, como comentado e definido anteriormente é uma medida de risco muito utilizada, mas que apresenta algumas fragilidades, como por exemplo não ser uma medida de risco coerente e não apresentar informações sobre os retornos que estão acima ou abaixo do Valor em Risco, dependendo da posição.

Assim, considerando uma posição vendida, de acordo com Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999), e McNeil, Frey e Embrechts (2005), Expected Shortfall (ES) é uma medida de risco definida como a esperança condicional dos retornos, dado que excedem o valor do VaR. Já para posições compradas, ES é a esperança condicional dos retornos que estão abaixo do valor do VaR estimado. Dessa forma, considerando L a v.a. que representa a variação percentual de preço e fixando θ para uma posição vendida, estima-se $\text{VaR}(\theta)$ definido anteriormente e calcula-se.

$$\widehat{ES}_L(\theta) = E\{L | L \geq \widehat{\text{VaR}}_L(\theta)\},$$

com

$$ES_L(\theta) = \frac{1}{1-\theta} \int_{\theta}^1 VaR_L(\theta) d\theta. \quad (29)$$

Para posição comprada,

$$ES_L(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} VaR_L(\theta) d\theta. \quad (30)$$

4.1 Estimação do ES utilizando Expectil

Um outro método, proposto por Taylor (2008), é o uso do τ -expectil como um estimador para o θ -quantil, possibilitando uma nova alternativa para a estimação de ES.

Considere MQA dado por

$$MQA = \min_{m \in \mathcal{R}} [E\{\rho_{\tau}(Y - m)^2\}] ,$$

para um τ fixo, como visto anteriormente em (17)

$$\begin{aligned} \frac{1-2\tau}{\tau} \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} (Y - \mu(\tau)) dF_Y(y) &= \mu(\tau) - E(Y) \\ \Rightarrow E\{Y I_{(Y \leq \mu(\tau))}\} - \mu(\tau) E\{I_{(Y \leq \mu(\tau))}\} &= \left(\frac{\tau}{1-2\tau} \right) [\mu(\tau) - E(Y)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Utilizando um $\mu(\tau)$ como estimador para o θ – quantil , tal que $F(\mu(\tau)) = \theta$, em que $F(.)$ é a f.d. de Y , tem-se:

$$E\{I_{(Y \leq \mu(\tau))}\} = \theta \quad (32)$$

Substituindo (32) em (31), tem-se:

$$E\{Y I_{(Y \leq \mu(\tau))}\} - \mu(\tau)(\theta) = \left(\frac{\tau}{1-2\tau}\right) [\mu(\tau) - E(Y)].$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por θ , tem-se:

$$ES(\theta) = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta}\right) \mu(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta} E(Y).$$

Estendendo a estimação de ES para um a sequência r_t , com $t = (1, \dots, T)$, tem-se:

$$\widehat{ES}_t(\theta) = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta}\right) \hat{\mu}_t(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta} E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}). \quad (33)$$

Note que a estimativa do ES pelo expectil, é resultado da ligação entre a minimização da função de perda e a definição de ES, utilizando o τ – expectil como estimativa para o θ – quantil .

Sendo assim, de acordo com (33), pode-se ver que para o modelo condicional, o valor do τ – expectil é proporcional ao valor do ES.

Utilizando as estruturas do modelo CARE, pode-se estimar vários modelos autorregressivos para o ES, condicional a informações passadas. Por exemplo o modelo **CARE-Absoluto Simétrico**, tal que

$$\mu_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \mu_{t-1}(\tau) + \beta_2 |r_{t-1}|, \quad (34)$$

em um modelo em que $E(r_t | F_{t-1}) = 0$, substituindo (34) em (33),

$$ES_t(\theta) = \gamma_0 + \gamma_1 ES_{t-1}(\theta) + \gamma_2 |r_{t-1}|,$$

em que $\gamma_1 = \beta_1$, e para $j = 0$ e 2 , $\gamma_j = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta}\right) \beta_j$.

Utilizando as outras especificações, utilizando a mesma ideia é possível estimar o ES.

4.2 Verificação dos Métodos e Modelos para o ES

A idéia principal, de acordo com McNeil e Frey (2000), é obter um teste que não faça suposições sobre a distribuição dos excessos, e nem sobre os resíduos dos modelos ajustados.

Inicialmente, o teste considera somente os retornos que excedem o valor do quantil condicional ajustado, o VaR.

Considere todos os retornos r_t tais que

$$r_t > VaR_t(\theta),$$

para posição vendida e

$$r_t < VaR_t(\theta),$$

para a posição comprada.

Após o ajuste do ES para cada instante de tempo, temos os excessos com as seguintes estruturas

$$Z_t = \frac{r_t - ES_t(\theta)}{\sigma_t},$$

em que Z_t são variáveis aleatórias i.i.d..

Note que para os modelos CARE propostos por Taylor (2008) e para os métodos utilizando a Teoria de Valores Extremos (TVE), em que a volatilidade não é estimada para o cálculo do ES, o teste bootstrap é adaptado. Ao invés de padronizar os excessos pela volatilidade condicional estimada, os excessos são padronizados pelo quantil condicional estimado, ou seja:

$$Z_t = \frac{r_t - ES_t(\theta)}{VaR_t(\theta)},$$

Para esses excessos, sob o a hipótese nula de que o modelo ou método estima corretamente o ES, espera-se que tenham média zero e para isso, constrói-se o teste bootstrap para testar, no caso de posição comprada,

$$\begin{cases} H_0 : \mu_z = 0 \\ H_1 : \mu_z < 0; \end{cases}$$

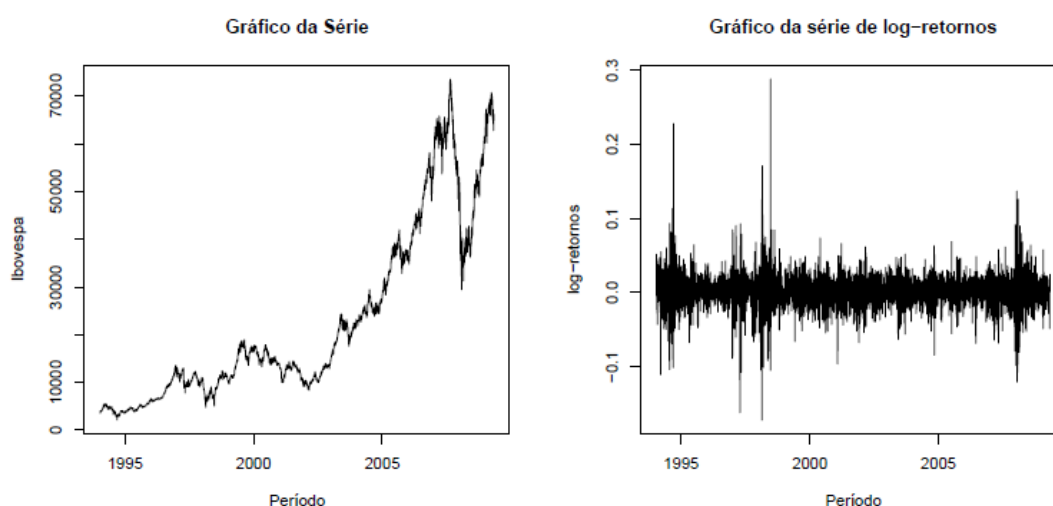
que é equivalente a testar se o modelo sistematicamente, superestima ou não o ES.

5. Aplicação

Para aplicação, considerou-se o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA), série constituída de valores no período de 04/07/1994 a 11/02/2010, totalizando 3.862 observações. A Figura 1 apresenta o gráfico da série e dos log-retornos, respectivamente.

A Análise da Figura 1 revela que o IBOVESPA, assim como outros indicadores, sofreu impacto da crise econômica de 2008 a 2009, causada pela quebra de uma dos maiores bancos de investimentos do mundo, o Lehman Brothers e, apesar de órgãos do governo brasileiro afirmarem que a crise não afetaria o país, o índice da Bolsa de São Paulo mostrou como o período foi de grande instabilidade.

Figura 1: Gráficos da série de IBOVESPA e da série de log-retornos



5.1 Modelos CAViaR

Para o ajuste dos modelos CAViaR, de acordo com Engle e Manganelli (2004), inicialmente gera-se n vetores β entre 0 e 1, em que a ordem de cada vetor depende da especificação adotada.

De acordo com a posição desejada, fixa-se o valor de θ . Visando o cálculo das medidas de risco para posições compradas, adotou-se $\theta = 0,05$.

Para cada vetor β , aplica-se a função e Critério Quantílico (CQ). Obtém-se m vetores que produziram os menores valores para o CQ.

No trabalho, foram fixos os valores $n = [10^4, 10^5, 10^4, 10^4, 10^4, 10^4, 10^4]$ e $m = [10, 15, 10, 5, 10, 10, 10]$ para as 7 especificações.

Esses m vetores são utilizados como valores iniciais para o algoritmo Quasi-Newton. Este procedimento é realizado até a convergência do algoritmo. O nível de tolerância para a função e os valores dos parâmetros é 10^{-10} .

Para a estimação do modelo foi utilizado o software *Matlab*, com as funções de otimização *fminunc* e *fminsearch*.

Como estimativa do $VaR_1(\theta)$ toma-se θ – quantil das observações amostrais.

A figura 2 apresenta os gráficos dos valores estimados para o VaR de acordo com as especificações do modelo.

As Tabelas 1 e 2 apresentam o valor estimado, *P-valor* e *Erro Padrão* pra cada um dos parâmetros, o valor dos Hit_{am} , Hit_{pam} , dos teste de QD_{am} e QD_{pam} , além do valor do CQ para cada um dos modelos adotados.

As análises de todos os modelos foram feitas a um nível de significância de 5% para todos os testes.

De modo geral, ao se falar dos modelos CAViaR, definir qual é o melhor modelo depende de a qual cenário se está referindo.

No caso da série do IBOVESPA, de acordo com os modelos ajustados, o mais indicados para estimar o valor do VaR seria o modelo Inclinação Assimétrica, em que:

$$\widehat{VaR}_t(0,05) = 0,2096 + 0,8749\widehat{VaR}_{t-1}(0,05) - 0,0349r_{t-1}I(r_{t-1} > 0) + 0,3268r_{t-1}I(r_{t-1} < 0),$$

pois apresenta o menor valor para o CQ e o melhor valor para o teste de QD_{am} . As proporções de Hits amostrais e pós-amostrais também indicam que o modelo é adequado.

Figura 2: Gráficos de VaR estimados através dos modelos CAViaR

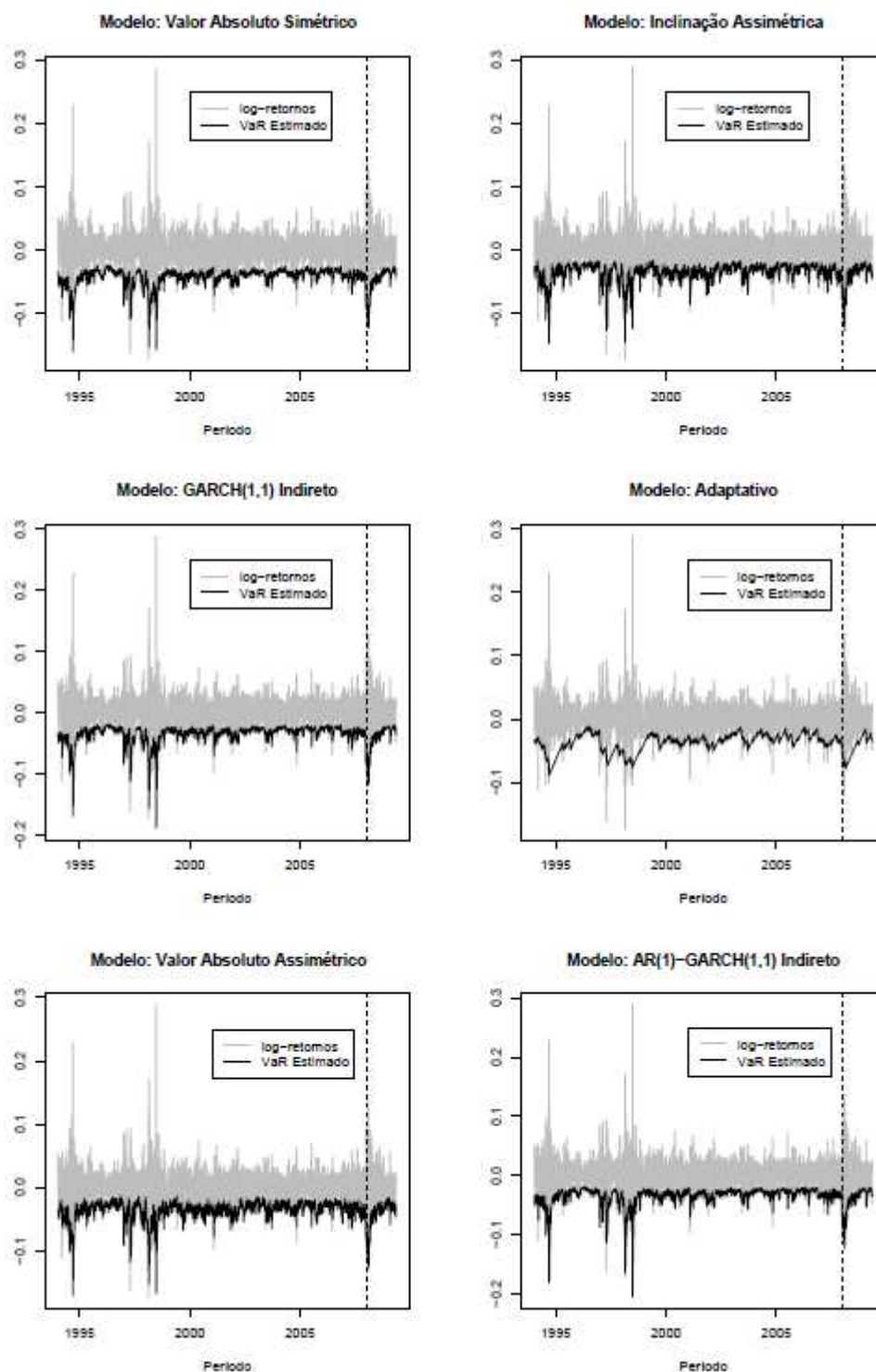


Tabela 1: Estimativas e Estatísticas dos Parâmetros Estimados utilizando as Especificações do Modelo CAViaR

Estimativas e Testes				
Modelo	Valor Absoluto Simétrico	Inclinação Assimétrica	GARCH(1,1) Indireto	Adaptativo
β_1	0,2485	0,2096	0,4596	0,6494
Erro Padrão	0,0875	0,0582	0,2522	0,0868
<i>P-valor</i>	0,0022	0,0002	0,0342	$3,6871.10^{-14}$
β_2	0,8433	0,8749	0,8359	-
Erro Padrão	0,0532	0,0175	0,0262	-
<i>P-valor</i>	0	0	0	-
β_3	0,2475	-0,0349	0,3454	-
Erro Padrão	0,0878	0,0310	0,1311	-
<i>P-valor</i>	0,0024	0,13	0,0042	-
β_4	-	0,3268	-	-
Erro Padrão	-	0,0267	-	-
<i>P-valor</i>	-	0	-	-
Hit_{am}	4,9688%	4,99%	5,0580%	4,8795%
Hit_{pam}	6,8%	6,4%	6,4%	4,8%
QD_{am}	0,0782	0,9327	0,0078	0,0184
QD_{pam}	0,5413	0,3419	0,7022	0,4344
<i>CQ</i>	835,4547	801,2110	836,2239	871,3505

Tabela 2: Estimativas e Estatísticas dos Parâmetros Estimados utilizando as Especificações do Modelo CAViaR

Estimativas e Testes			
Modelo	Adaptativo Sim.Prop.	Valor Absoluto Assimétrico	AR(1)-GARCH(1,1) Indireto
β_1	-	-0,0361	0,5175
Erro Padrão	-	0,1437	0,2428
<i>P-valor</i>	-	0,4007	0,0165
β_2	-	0,8314	0,8259
Erro Padrão	-	0,0393	0,0269
<i>P-valor</i>	-	0	0
β_3	-	0,2874	0,3697
Erro Padrão	-	0,0387	0,1141
<i>P-valor</i>	-	0	0,0006
β_4	-	0,0177	-
Erro Padrão	-	0,4154	-
<i>P-valor</i>	-	0	-
Hit_{am}	-	4,9985%	4,9985%
Hit_{pam}	-	5%	6,4%
QD_{am}	-	0,4020	0,0022
QD_{pam}	-	0,7906	0,5863
<i>CQ</i>	-	813,3368	842,6946

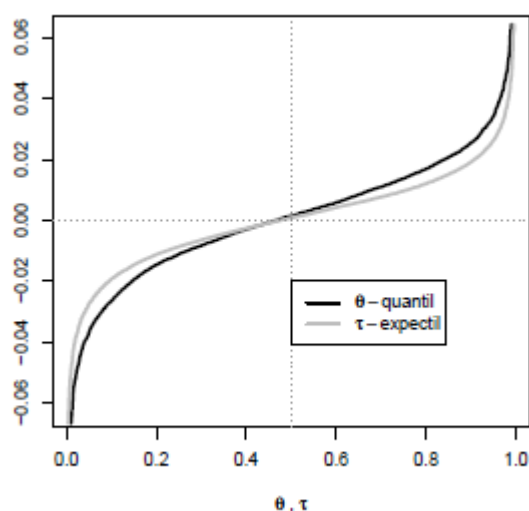
5.2 Modelos CARE

Considerando as especificações definidas por Taylor (2008), primeiramente é necessário que se estime o valor do θ – quantil pelo τ – expectil de acordo com as idéias de Efron (1991).

Este processo de estimação só é possível devido ao fato de que para cada θ – expectil existe um correspondente θ – quantil na amostra, em que não necessariamente τ seja igual a θ . Todo o suporte teórico é feito e demonstrado por Jones (1994).

A figura 3 apresenta o gráfico do θ – quantil e τ – expectil de acordo com os valores de θ e τ para a série de log-retornos.

Figura 3: Gráfico do θ – quantil e τ – expectil obtidos para a série de log-retornos.



Pelo gráfico é possível notar que τ apresenta valores mais extremos que os correspondentes valores de θ .

Considerando a série de retornos do IBOVESPA, assim como nos modelos CAViaR, foram utilizadas para a estimação dos modelos os primeiros 3361 log-retornos, e de acordo com o procedimento, utilizando a expressão (20), para $\theta = 0,05$, tem-se

$$\hat{\tau} = 0,02436630.$$

Logo, seguindo o mesmo procedimento para a estimação dos modelos CAViaR, estima-se os parâmetros dos modelos, utilizando Mínimos Quadrados Assimétricos (MQA), ao invés do Critério Quantílico.

A Figura 4 apresenta os gráficos dos valores estimados para o VaR de acordo com as especificações do modelo CARE.

Os gráficos indicam que não há muita diferença entre as estimativas utilizando modelos CARE e CAViaR, a não ser para o modelo Adaptativo.

As tabelas 3 e 4 apresentam o valor estimado, Erro Padrão, P-valor para cada um dos parâmetros, a proporção de Hit_{am} , Hit_{pam} , QD_{am} e QD_{pam} , e também o valor do MQA e CQ para cada modelo.

Assim como nos modelos CAViaR, todas as análises foram feitas considerando um nível de significância de 5%.

Tabela 3: Estimativas e Estatísticas dos Parâmetros Estimados utilizando as especificações do Modelo CARE

Estimativas e Testes				
Modelo	Valor Absoluto Simétrico	Inclinação Assimétrica	GARCH(1,1) Indireto	Adaptativo
β_1	0,3352	0,2612	0,7336	-0,0049
Erro Padrão	0,0719	0,0634	0,1971	0,0025
P-valor	0,1560	0	0,0001	0,0244
β_2	0,8040	0,8484	0,7973	-
Erro Padrão	0,0432	0,0287	0,0192	-
P-valor	0	0	0	-
β_3	0,2441	-0,0483	0,2984	-
Erro Padrão	0,0537	0,0290	0,1497	-
P-valor	0,2698	0,0481	0,0231	-
β_4	-	0,3197	-	-
Erro Padrão	-	0,0637	-	-
P-valor	-	0	-	-
Hit_{am}	6,3374%	6,5457%	6,57%	5,3853%
Hit_{pam}	8,4%	8,2%	8%	8%
QD_{am}	$3,18.10^{-8}$	0,6733	$8,9.10^{-6}$	0
QD_{pam}	0,0151	0,0267	0,07	$1,11.10^{-6}$
MQA	2.439,8	2.252,7	2.456,6	2.850,7
CQ	979,6795	954,7573	981,1122	1.092,6

Figura 4: Gráficos de VaR estimados através dos modelos CARE.

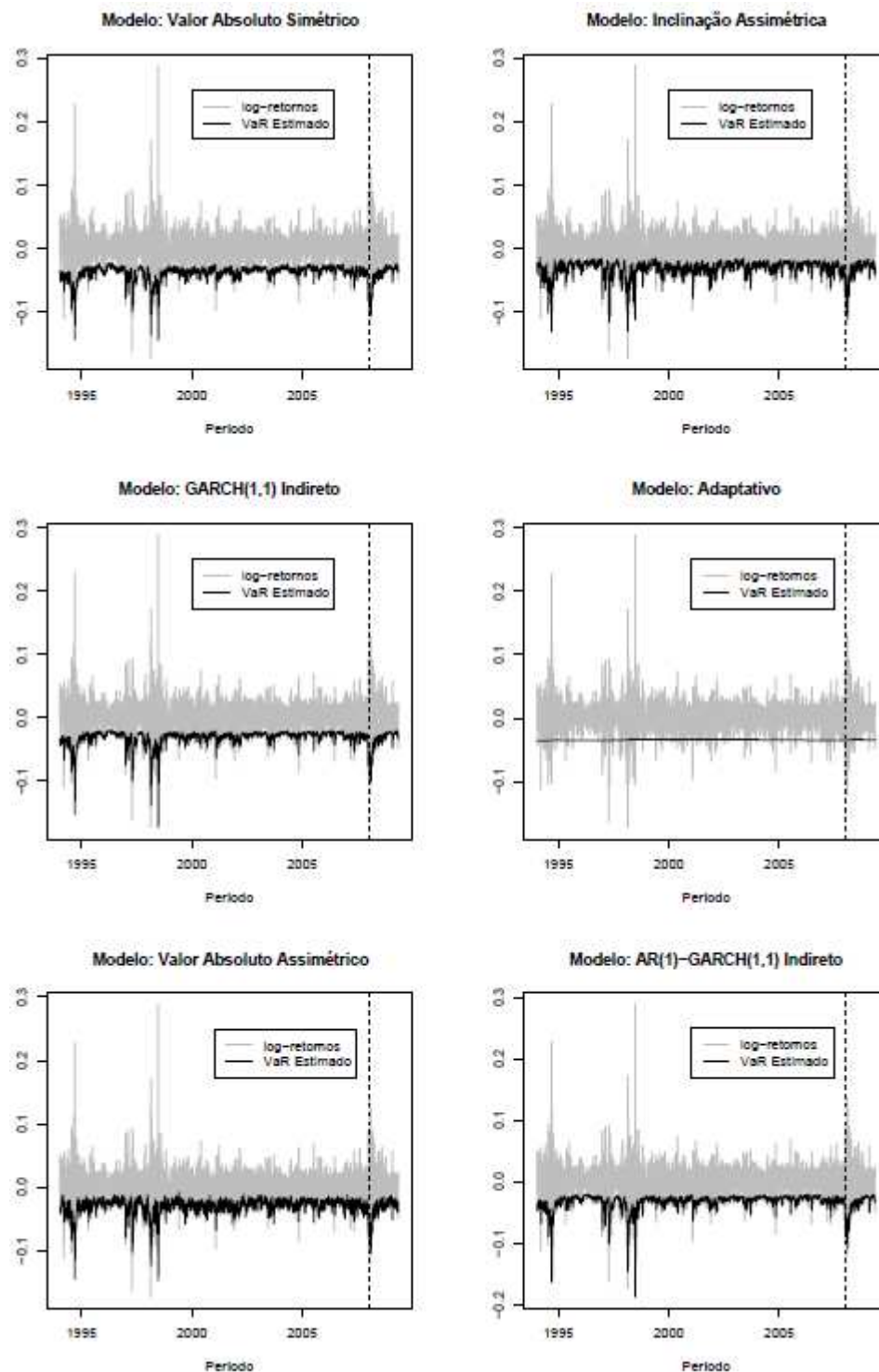


Tabela 4: Estimativas e Estatísticas dos Parâmetros Estimados Utilizando as Especificações do Modelo CARE

Estimativas e Testes			
Modelo	Adaptativo Sim.Prop.	Valor Absoluto Assimétrico	AR(1)-GARCH(1,1) Indireto
$\hat{\beta}_1$	-	-0,0055	0,7166
Erro Padrão	-	0,0672	0,2538
<i>P-valor</i>	-	0,4674	0,0024
$\hat{\beta}_2$	-	0,7905	0,7995
Erro Padrão	-	0,0295	0,0258
<i>P-valor</i>	-	0	0
$\hat{\beta}_3$	-	0,2743	0,3042
Erro Padrão	-	0,0304	0,1157
<i>P-valor</i>	-	0	0,0043
$\hat{\beta}_4$	-	0,0211	-
Erro Padrão	-	0,2021	-
<i>P-valor</i>	-	0	-
Hit_{am}	-	6,3076%	6,4267%
Hit_{pam}	-	8%	7,8%
QD_{am}	-	0,3946	$7,08.10^{-6}$
QD_{pam}	-	0,0164	0,0494
<i>MQA</i>	-	2.330,8	2.496,4
<i>CQ</i>	-	964,4457	987,6513

Todas as especificações do modelo CARE apresentam porcentagem de Hits pós-amostrais com valores maiores que os valores apresentados para os modelos CAViaR. De fato, essas observações não fazem parte do processo de estimação, além de pertencerem a um período de crise. Pelo fato da magnitude dos dados influenciarem mais nos modelos CARE, há um aumento da porcentagem dos Hit_{pam} . O valor dos teste de Quantis Dinâmicos pós-amostrais também indicam que, para períodos de instabilidade, como os identificados na série do IBOVESPA, os modelos CARE, aparentemente são menos indicados que os modelos CAViaR, para o cálculo do VaR.

5.3 Novas Especificações Propostas para os Modelos CARE

Para estas especificações, de forma mais prática, considerou-se a **Especificação 3**, com $p=5$ e $q=5$, e a **Especificação 4**, com $p=5$, em que $\theta=0,05$. Da mesma forma que os modelos CARE propostos por Taylor (2008), tem-se $\tau=0,024$.

A Figura 5 apresenta as estimativas para o VaR, de acordo com a **Especificação 3** e a **Especificação 4**, ambas utilizando os lags de ordem 5 para os log-retornos defasados no tempo.

Os gráficos mostram que os valores estimados por essa nova proposta, aparentemente não diferem muito dos valores estimados segundo as idéias de Taylor (2008). Porém, para obter uma análise mais detalhada, são apresentados os parâmetros estimados nas Tabelas 5 e 6, além do *Erro Padrão* e do *P-valor* de cada um dos parâmetros.

Figura 5: Estimativas para o VaR utilizando modelos CARE

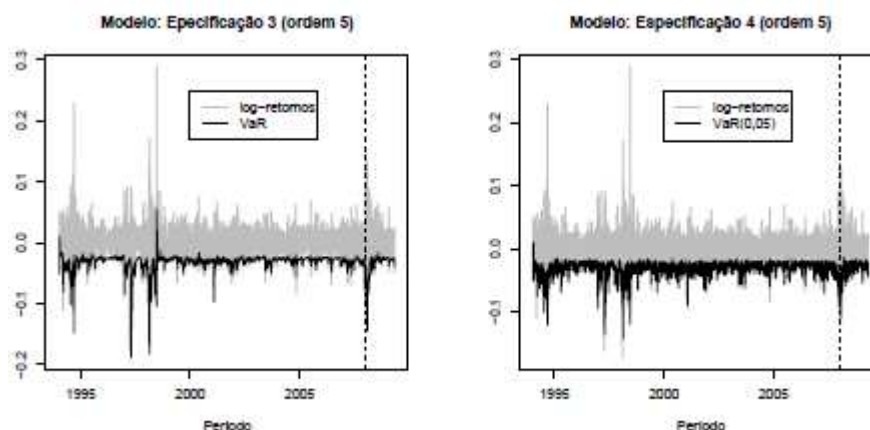


Tabela 5: Estimativas e Estatísticas dos Parâmetros Estimados Utilizando a Especificação 3 o Modelo CARE

Especificação 3			
$\hat{a}_0(\tau)$	0,2344	-	-
Erro Padrão	0,0081	-	-
<i>P – valor</i>	0	-	-
$\hat{a}_1(\tau)$	0,9050	-	-
Erro Padrão	0,0029	-	-
<i>P – valor</i>	0	-	-
$\hat{b}_1(\tau)$	-0,0225	$\hat{\gamma}_1(\tau)$	0,0198
Erro Padrão	0,0001	Erro Padrão	0,0002
<i>P – valor</i>	0	<i>P – valor</i>	0
$\hat{b}_2(\tau)$	0,0055	$\hat{\gamma}_2(\tau)$	0,0305
Erro Padrão	0,0001	Erro Padrão	0,0002
<i>P – valor</i>	0	<i>P – valor</i>	0
$\hat{b}_3(\tau)$	-0,0014	$\hat{\gamma}_3(\tau)$	-0,0240
Erro Padrão	0,0001	Erro Padrão	0,0002
<i>P – valor</i>	0	<i>P – valor</i>	0
$\hat{b}_4(\tau)$	0,0099	$\hat{\gamma}_4(\tau)$	0,0244
Erro Padrão	0,0001	Erro Padrão	0,0002
<i>P – valor</i>	0	<i>P – valor</i>	0
$\hat{b}_5(\tau)$	-0,0013	$\hat{\gamma}_5(\tau)$	-0,0165
Erro Padrão	0,0001	Erro Padrão	0,0002
<i>P – valor</i>	0	<i>P – valor</i>	0

Tabela 6: Estimativas e Estatísticas dos Parâmetros Estimados Utilizando a Especificação 4 do Modelo CARE.

Especificação 4			
$\hat{a}_0(\tau)$	-1,8544	-	-
Erro Padrão	0,0032	-	-
$P - valor$	0	-	-
$\hat{b}_1(\tau)$	-0,0984	$\hat{\gamma}_1(\tau)$	0,4421
Erro Padrão	0,0014	Erro Padrão	0,0014
$P - valor$	0	$P - valor$	0
$\hat{b}_2(\tau)$	0,0133	$\hat{\gamma}_2(\tau)$	0,2443
Erro Padrão	0,0014	Erro Padrão	0,0014
$P - valor$	0	$P - valor$	0
$\hat{b}_3(\tau)$	0,0291	$\hat{\gamma}_3(\tau)$	0,2369
Erro Padrão	0,0013	Erro Padrão	0,0014
$P - valor$	0	$P - valor$	0
$\hat{b}_4(\tau)$	0,1100	$\hat{\gamma}_4(\tau)$	0,2966
Erro Padrão	0,0013	Erro Padrão	0,0014
$P - valor$	0	$P - valor$	0
$\hat{b}_5(\tau)$	0,1097	$\hat{\gamma}_5(\tau)$	0,2418
Erro Padrão	0,0013	Erro Padrão	0,0014
$P - valor$	0	$P - valor$	0

Tabela 7: Hits Amostrais e Pós-amostrais e Valor do MQA

Modelo	Especificação 3	Especificação 4
Hit_{am}	6,5754%	6,5457%
Hit_{pam}	9%	7,8%
MQA	2.730,6	2.757,2

A um nível de significância de 5%, o teste apresentou a estatística

$$Q = 0,6783 \sim X_{(11)}^2,$$

com $P - valor \approx 1$.

Já testando a **Especificação 4** com o modelo sob H_0 contra a **Especificação 3**, obteve-se a estatística:

$$Q_2 = 1,1843 \sim X_{(12)}^2,$$

com $P - valor \approx 1$.

Os valores dos testes indicam que os dois modelos podem ser considerados como adequados neste cenário. Porém, visando um modelo que possua menos parâmetros e uma melhor proporção de Hit_{pam} , o modelo mais indicado neste cenário, utilizando modelos CARE de acordo com a proposta de Kuan, Yeh e Hsu (2009), seria o modelo descrito como **Especificação 4**, isto é:

$$\begin{aligned}\mu_t(0,024) = & -1,8544 - 0,0984r_{t-1}^+ + 0,0133r_{t-2}^+ + 0,0291r_{t-3}^+ + \\ & + 0,11r_{t-4}^+ + 0,1097r_{t-5}^+ + 0,4221r_{t-1}^- + 0,2443r_{t-2}^- + \\ & + 0,2369r_{t-3}^- + 0,2966r_{t-4}^- + 0,2418r_{t-5}^-.\end{aligned}$$

5.4 Estimativas para ES

A estimação do ES, utilizando modelos CARE é possível devido à ligação entre Mínimos Quadrados Assimétricos e a definição de ES.

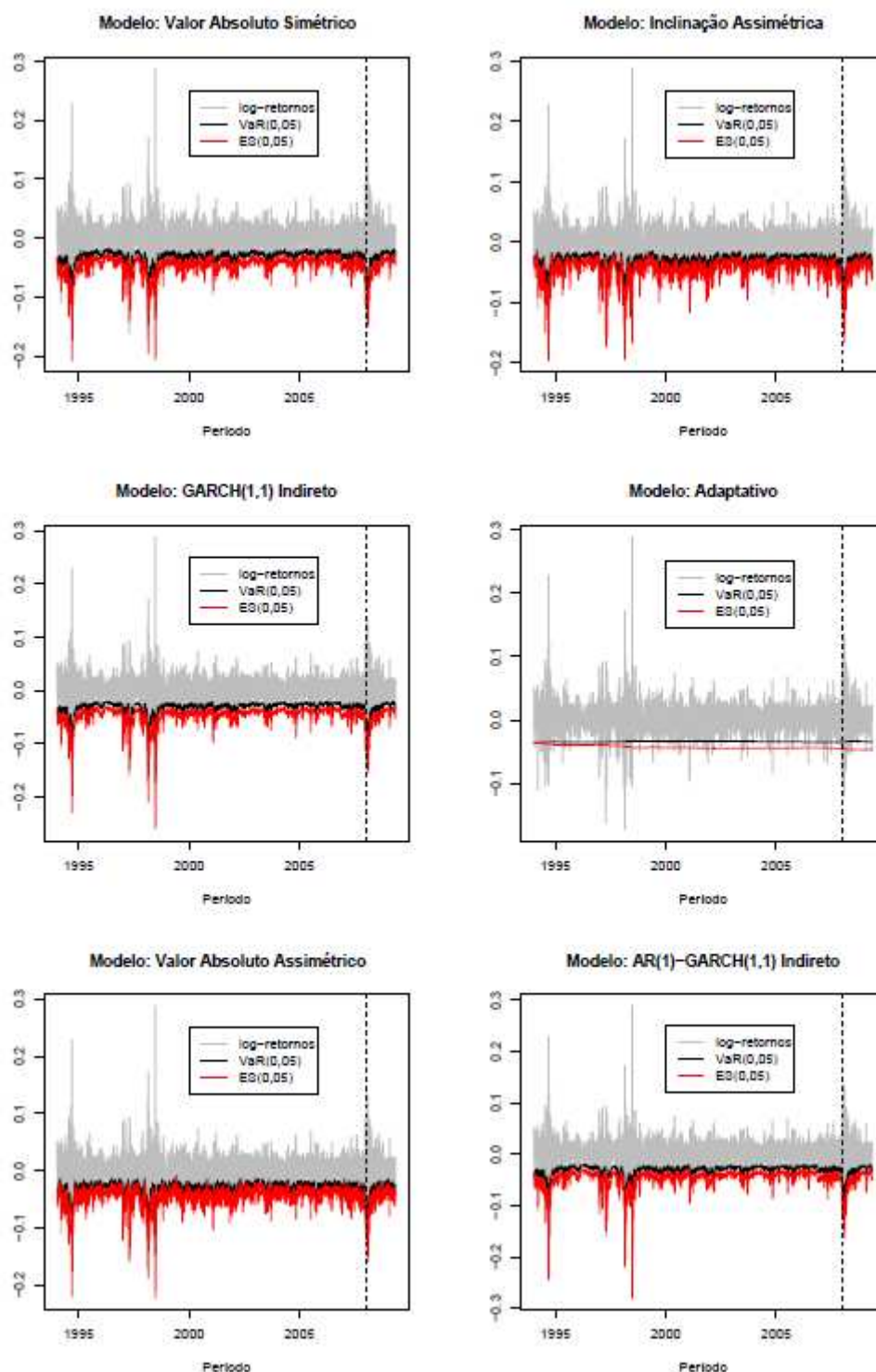
Assim, utilizando os modelos estimados para o τ -expectil de acordo com as especificações dos modelos CARE, conforme Taylor (2008), faz-se a estimação para o ES, cujas estimativas são apresentadas na Figura 6, em que se considerou $\theta = 0,05$ e $\hat{\tau} = 0,02436630$.

Tabela 8: Estatísticas do Teste Bootstrap para ES utilizando Abordagem Econométrica, TVE e modelos CARE

Teste Bootstrap para o ES			
Modelo	Estatística do Teste	Região Crítica	P-valor
Valor Absoluto Simétrico	-0,1062	$\leq -0,1449$	0,512
Inclinação Assimétrica	-0,0947	$\leq -0,1302$	0,534
GARCH(1,1) Indireto	-0,1119	$\leq -0,1470$	0,508
Adaptativo	0,3093	$\leq 0,2566$	0,493
Valor Absoluto Assimétrico	-0,09	$\leq -0,1261$	0,506
AR(1)-GARCH(1,1) Indireto	-0,0997	$\leq -0,1357$	0,502

Para esta série, todas as especificações são adequadas, pois todos os *P-valores* indicam a não rejeição de H_0 , ou seja, que todos os excessos padronizados tem média zero.

Figura 6: Gráficos de VaR e ES estimados através dos modelos CARE.



6. Conclusões

De forma geral, todos os métodos e modelos definidos, detalhados e discutidos são válidos para o cálculo do VaR e do ES. O objetivo principal do trabalho foi apresentar técnicas, não definidas como as melhores, mas as que apresentam resultados mais adequados dentro de determinados cenários, além de mostrar como modelos CAViaR e CARE podem se tornar tão precisos e adequados como os métodos mais simples e mais utilizados no mercado, porém sem fazer suposição alguma sobre a distribuição condicional das observações.

Referências bibliográficas

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. and Heath, D. (1999), Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- Efron, B. (1991), Regression Percentiles Using Asymmetric Squared Error Loss, *Estatística Sínica*, 1, 93-125.
- Engle, R. F. and Manganelli, S. (2004), CAViaR: Condicional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles, *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, 367-381.
- Jones, M. C. (1994), Expectiles and M-quantiles are Quantiles, *Statistics and Probability Letters*, 20, 149-153.
- Koenker, R. and Basset, G. (1978), Regression Quantiles, *Econometrica*, 46, 33-50.
- Koenker, R. W. (2005), *Quantile Regression*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Kuan, C., Yeh, J. and Hsu, Y. (2009), Assessing Value at Risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile Models, *Journal of Econometrics*, 150, 261-270.
- Kuester, K., Mittnik, S. and Paolella, M., S. (2006), Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies, *Journal of Financial Econometrics*, 4, 53-89.
- McNeil, A. J. and Frey, R. (2000), Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach, *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300.
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management*, New Jersey; Princeton University Press.
- Newey, W. K. and Powell, J. L. (1987), Asymmetric Least Squares Estimation and Testing, *Econometrica*, 55, 819-847.
- Taylor, J. W. (2008), Estimating Value at Risk and Expected Shortfall Using Expectiles, *Journal of Financial Econometrics*, 6, 231-252.
- Weiss, A. (1991), Estimating Nonlinear Dynamic Models Using Least Absolute Error Estimation, *Econometric Theory*, 7, 46-68.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pela CAPES.

Abstract

Value at Risk (VaR) is a financial widely used risk measure to manage and control risk market. The measure risk estimation can be done by methods such as econometric approach and Theory of Extreme Values (TVE). However, these methods have some weaknesses such as inappropriate assumption of errors distribution, resulting in inaccurate measures. Therefore, in this article we discuss and compare Autoregressive Conditional Value at Risk (CAViaR) and Expected Autoregressive Conditional (CARE) models. We apply the proposed modeling approach to calculate the Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) to the stock IBOVESOPA market index.

Keywords: Value at Risk, Expected Shortfall, CAViaR Models, CARE Models.