

n ° 55

Integrabilidade das distribuições
dadas por subálgebras de Lie
de codimensão finita no $gh(n,C)$

Reinaldo Salvitti

Maio 1983

INTEGRABILIDADE DAS DISTRIBUIÇÕES DADAS POR SUBÁLGEBRAS DE LIE DE CODIMENSÃO FINITA NO $gh(n, \mathbb{C})$

Reinaldo Salvitti

Esta nota mostra que toda distribuição no $Gh(n, \mathbb{C})$ dada por $J(z)H$, onde $z \in Gh(n, \mathbb{C})$, H é uma subálgebra de Lie de $gh(n, \mathbb{C})$ de codimensão finita e J é o jacobiano do germe z , é integrável.

1. Notações [1]

$gh(n, \mathbb{C})$ - espaço vetorial dos germes das transformações holomorfas de $\mathbb{C}^n$ que preservam a origem.

Com o colchete $[h, k] = J(k)h - J(h)k$ esse espaço é uma álgebra de Lie.

$Gh(n, \mathbb{C}) = \{z \in gh(n, \mathbb{C}); z \text{ é inversível}\}$. Esse aberto de $gh(n, \mathbb{C})$ com a operação de composição é um grupo de Lie cuja álgebra é $gh(n, \mathbb{C})$.

2. Distribuições no $Gh(n, \mathbb{C})$ dadas por subálgebras de Lie de codimensão finita de $gh(n, \mathbb{C})$

Seja por hipótese H uma subálgebra de Lie qualquer de $gh(n, \mathbb{C})$ de codimensão finita. Tomemos no grupo $Gh(n, \mathbb{C})$ a distribuição dada pela transformação infinitesimal de $Gh(n, \mathbb{C})$ e por H , isto é,

$$\{(z, J(z)H) ; z \in Gh(n, C)\}$$

onde o jacobiano $J(z)$ é a transformação infinitesimal em z . Seja F um suplementar topológico qualquer de H . Como F e H são fechados, temos que F e H são espaços de Silva [4] e portanto [3] escalas de espaço de Banach, já que $gh(n, C)$ é a escala de Banach

$$gh(n, C) = \bigcup_{0 < s < 1} Y_s$$

$$Y_s = \{z \in gh(n, C) ; \sup_{|t| < s} |J(z)(t)| < \infty, \}$$

$$\text{onde } |J(z)(t)| = |(a_{ij}(t))| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)|.$$

$$\text{Então } F = \varinjlim_{0 < s \leq 1} (F \cap Y_s) \quad H = \varinjlim_{0 < s \leq 1} (H \cap X_s)$$

onde os limites acima indicam limites indutivos de espaços localmente convexos.

Por [2] existe uma projeção q sobre F e um número $k > 0$ tal que

$$|q(z)|_s \leq k|z|_s$$

para todo $z \in gh(n, C)$ e todo s , $0 < s \leq 1$.

Seja p a projeção sobre H dada por

$$p = I - q$$

onde I é a identidade. Portanto

$$p(z) = z - q(z)$$

$$|p(z)|_s \leq |z|_s + |q(z)|_s \leq |z|_s + k|z|_s, \quad |p(z)|_s \leq (k+1)|z|_s$$

Usando [3] e a condição acima podemos aplicar o teorema de Saravia [2] que garante a integrabilidade da distribuição $\{(z, J(z)): z \in Gh(n, \mathbb{C})\}$. Além disso por [3] a variedade integral maximal que passa pela identidade de $Gh(n, \mathbb{C})$ é um subgrupo de Lie de dimensão infinita.

Com esse resultado e [2] fica resolvida a correspondência entre subgrupos de Lie conexos de $Gh(n, \mathbb{C})$ e $gh(n, \mathbb{C})$ no caso das álgebras de Lie serem de dimensão finita ou de codimensão finita.

3. Exemplos

3.1. Consideremos as subálgebras H_k do $gh(n, \mathbb{C})$ tal que $z \in H_k$ se $z'(0) = z''(0) = \dots = z^{(k)}(0) = 0$ para $k \geq 1$. É fácil ver que H_k é uma subálgebra de Lie de $gh(n, \mathbb{C})$ de codimensão finita. Nos casos em que $k \geq 2$ os subespaços suplementares contem propriamente o espaço vetorial dos germes das transformações lineares.

3.2. Seja H uma subálgebra de Lie qualquer das matrizes complexas de ordem n , $gl(n, \mathbb{C})$. Seja S um suplementar de H em $gl(n, \mathbb{C})$. Então podemos escrever $gh(n, \mathbb{C}) = S \oplus H \oplus H_1$, onde H_1 é o espaço descrito em 3.1. Desta forma o espaço vetorial $H \oplus H_1$ tem codimensão finita. Por outro lado é fácil ver que $H \oplus H_1$ é uma subálgebra de Lie de $gh(n, \mathbb{C})$. Logo a toda subálgebra de Lie de $gl(n, \mathbb{C})$ podemos associar uma subálgebra de Lie de $gh(n, \mathbb{C})$ de codimensão finita.

B I B L I O G R A F I A

1. PISANELLI, D. - An example of a infinitive Lie group -
- Proc. Am. Math. Soc. 62, nº 1 (1977) 156-160.
2. SARAIVA, E.V. - Uma demonstração do Terceiro Teorema de
Lie em $gh(n, \mathbb{C})$ usando o Teorema de Frobenius em
Escalas de Banach. 14º Seminário Brasileiro de A
nálise, Nov. 1981, IMPA, BRASIL.
3. SALVITTI, R. - Abstract Frobenius Theorem, global
formulation, applications to Lie groups. Functional
Analysis, Holomorphy and Approximation Theory,
edited by G. Zapata (North Holland, to be
published).
4. MUJICA, J. - Gérmes Holomorfos y Funciones holomorfas
en espacios de Frechet (Publicaciones del
Departamento de Teoria de Funciones - Universidade
de Santiago de Compostela, 1978).

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Universidade de São Paulo

Cidade Universitária "Armando Salles de Oliveira"

Caixa Postal nº 20570 (Agência Iguatemi)

São Paulo - Brasil

TRABALHOS
DO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TITULOS PUBLICADOS

- 8001 - PLETCH, A. Local freeness of profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8002 - PLETCH, A. Strong completeness in profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- 8003 - CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Transfinite induction on ordinal configurations. São Paulo, IME-USP, 1980. 22p.
- 8004 - JONES RODRIGUES, A.R. Integral representations of cyclic p-groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 13p.
- 8005 - CORRADA, M. & ALCANTARA, L.P. de. Notes on many-sorted systems. São Paulo, IME-USP, 1980. /25/p.
- 8006 - POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. FC-elements in a group ring. São Paulo, IME-USP, 1980. /10/p.
- 8007 - CHEN, C.C. On the Ricci condition and minimal surfaces with constantly curved Gauss map. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8008 - CHEN, C.C. Total curvature and topological structure of complete minimal surfaces. São Paulo, IME-USP, 1980. 21p.
- 8009 - CHEN, C.C. On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in R^4 . São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- 8110 - JONES RODRIGUES, A.R. Units of ZCp^n . São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- 8111 - KOTAS, J. & COSTA, N.C.A. da. Problems of modal and discussive logics. São Paulo, IME-USP, 1981. 35p.

- .8112 - BRITO, F.B. & GONÇALVES, D.L. Algebras não associativas, sistemas diferenciais polinomiais homogêneos e classes características. São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- .8113 - POLCINO MILIES, F.C. Group rings whose torsion units form a subgroup II. São Paulo, IME-USP, 1981. 1v. (não paginado)
- .8114 - CHEN, C.C. An elementary proof of Calabi's theorems on holomorphic curves. São Paulo, IME-USP, 1981. 5p.
- .8115 - COSTA, N.C.A. da & ALVES, E.H. Relations between paraconsistent logic and many-valued logic. São Paulo, IME-USP, 1981. 8p.
- .8116 - CASTILHA, M.S.A.C. On Przymusiński's theorem. São Paulo, IME-USP, 1981. 6p.
- .8117 - CHEN, C.C. & GOES, C.C. Degenerate minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$. São Paulo, IME-USP, 1981. 21p.
- .8118 - CASTILHA, M.S.A.C. Imagens inversas de algumas aplicações fechadas. São Paulo, IME-USP, 1981. 11p.
- .8119 - ARAGONA VALEJO, A.J. & EXEL FILHO, R. An infinite dimensional version of Hartogs' extension theorem. São Paulo, IME-USP, 1981. 9p.
- .8120 - GONÇALVES, J.Z. Groups rings with solvable unit groups. São Paulo, IME-USP, 1981. 15p.
- .8121 - CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Paraconsistent algebras. São Paulo, IME-USP, 1981. 16p.
- .8122 - GONÇALVES, D.L. Nilpotent actions. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8123 - COELHO, S.P. Group rings with units of bounded exponent over the center. São Paulo, IME-USP, 1981. 25p.

- .8124 - PARMENTER, M.M. & POLCINO MILIES, F.C. A note on isomorphic group rings. São Paulo, IME-USP, 1981. 4p.
- .8125 - MERKLEN, H.A. Hereditary algebras with maximum spectra are of finite type. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8126 - POLCINO MILIES, F.C. Units of group rings: a short survey. São Paulo, IME-USP, 1981. 32p.
- .8127 - CHEN, C.C. & GACKSTATTER, F. Elliptic and hyperelliptic functions and complete minimal surfaces with handles. São Paulo, IME-USP, 1981. 14p.
- .8128 - POLCINO MILIES, F.C. A glance at the early history of group rings. São Paulo, IME-USP, 1981. 22p.
- .8129 - FERRER SANTOS, W.R. Reductive actions of algebraic groups on affine varieties. São Paulo, IME-USP, 1981. 52p.
- .8130 - COSTA, N.C.A. da. The philosophical import of paraconsistent logic. São Paulo, IME-USP, 1981. 26p.
- .8131 - GONÇALVES, D.L. Generalized classes of groups, spaces c-nilpotent and "the Hurewicz theorem". São Paulo, IME-USP, 1981. 30p.
- .8132 - COSTA, N.C.A. da & MORTENSEN, Chris. Notes on the theory of variable binding term operators. São Paulo, IME-USP, 1981. 18p.
- .8133 - MERKLEN, H.A. Homogenous λ -hereditary algebras with maximum spectra. São Paulo, IME-USP, 1981. 32p.
- .8134 - PERESI, L.A. A note on semiprime generalized alternative algebras. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8135 - MIRAGLIA NETO, F. On the preservation of elementary equivalence and embedding by filtered powers and structures of stable continuous functions. São Paulo, IME-USP, 1981. 9p.

- 8136 - FIGUEIREDO, G.V.R. Catastrophe theory: some global theory a full proof. São Paulo, IME-USP, 1981. 91p.
- 8237 - COSTA, R.C.F. On the derivations of gametic algebras. São Paulo, IME-USP, 1982. 17p.
- 8238 - FIGUEIREDO, G.V.R. de. A shorter proof of the Thom-Zeeman global theorem for catastrophes of cod ≤ 5 . São Paulo, IME-USP, 1982. 7p.
- 8239 - VELOSO, J.M.M. Lie equations and Lie algebras: the intransitive case. São Paulo, IME-USP, 1982. 27p.
- 8240 - GOES, C.C. Some results about minimal immersions having flat normal bundle. São Paulo, IME-USP, 1982. 37p.
- 8241 - FERRER SANTOS, W.R. Cohomology of comodules II. São Paulo, IME-USP, 1982. 15p.
- 8242 - SOUZA, V.H.G. Classification of closed sets and diffeos of one-dimensional manifolds. São Paulo, IME-USP, 1982. 15p.
- 8243 - GOES, C.C. The stability of minimal cones of codimension greater than one in $\mathbb{R}^n$. São Paulo, IME-USP, 1982. 27p.
- 8244 - PERESI, L.A. On automorphisms of gametic algebras. São Paulo, IME-USP, 1982. 27p.
- 8245 - POLCINO MILIES, F.C. & SENEGAL, S.K. Torsion units in integral group rings of metacyclic groups. São Paulo, IME-USP, 1982. 18p.
- 8246 - GONÇALVES, J.Z. Free subgroups of units in group rings. São Paulo, IME-USP, 1982. 8p.
- 8247 - VELOSO, J.M.M. New classes of intransitive simple Lie pseudo-groups. São Paulo, IME-USP, 1982. 8p.

- 8248 - CHEN, C.C. The generalized curvature ellipses and minimal surfaces. São Paulo, IME-USP, 1982. 10p.
- 8249 - COSTA, R.C.F. On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles. São Paulo, IME-USP, 1982. 24p.
- 8350 - GONÇALVES, J.Z. Free subgroups in the group of units of group rings over algebraic integers. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.
- 8351 - MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Free k-triples in linear groups. São Paulo, IME-USP, 1983. 7p.
- 8352 - BRITO, F.G.B. A remark on closed minimal hypersurfaces of S^4 with second fundamental form of constant length. São Paulo, IME-USP, 1983. 12p.
- 8353 - KIIHL, J.C.S. U-structures and sphere bundles. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.
- 8354 - COSTA, R.C.F. On genetic algebras with prescribed derivations. São Paulo, IME-USP, 1983. 23p.