

**Christina Brech**  
**David Pires Dias**

*Organizadores*

**ANAIS**

**7º Encontro do Mestrado Profissional em  
Ensino de Matemática**

*São Paulo, SP, Brasil, 19 e 21 de outubro de 2021*

São Paulo  
IME-USP  
2021

**Universidade de São Paulo**  
**Instituto de Matemática e Estatística**  
**Mestrado Profissional em Ensino de Matemática**

**Reitor**

Prof. Dr Vahan Agopyan

**Vice-reitor**

Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

**Diretor do Instituto de Matemática e Estatística**

Prof. Dr. Junior Barrera

**Organizadores**

Profa. Dra. Christina Brech

Prof. Dr. David Pires Dias

**Diagramação, normalização e capa**

Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra

E56

Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (7. : 2021 : São Paulo, Brasil).  
Anais [do] 7º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, São Paulo, SP, Brasil, 19 e 21 de outubro de 2021 [recurso eletrônico]. / organizadores Christina Brech, David Pires Dias. -- São Paulo : IME-USP, 2021.

ISBN: 978-65-994252-1-9 (e-book)

Modo de acesso: <<https://www.ime.usp.br/posempmat/encontros>>

1. Matemática – Estudo e Ensino (Congressos). I. Brech, Christina, org. II. Dias, David Pires, org. III. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

CDD: 510.7

Catalogação na Fonte pelo Serviço de Informação e Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra.  
Elaborada pela bibliotecária Maria Lucia Ribeiro – CRB 8/2766.

Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que citada a fonte.

Proibido qualquer uso para fins comerciais.

## NÚMEROS REAIS: Uma proposta de abordagem para o Ensino Fundamental

### REAL NUMBERS: A proposed approach to Elementary School

**Érika Dudr Pereira<sup>1</sup>, Vera Helena Giusti de Souza<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Profª de Matemática formada em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo e mestrando em Ensino de Matemática pela Universidade de São Paulo; erika.dudr.pereira@usp.br

<sup>2</sup> Profª Dra. Em Educação Matemática formada em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo, mestrado em Matemática Matemática pela Universidade de São Paulo e doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; verahgsouza@gmail.com

**Resumo:** Temos por objetivo no presente artigo deixar evidente propostas relacionadas à nossa dissertação que tem como foco clarear a ideia do quanto importante se faz uma abordagem para os números reais o quanto antes no Ensino Fundamental II. Em relação ao viés teórico, baseamo-nos nas ideias de *imagem de conceito*, *definição de conceito*, *fatores de conflito potencial* e *fatores de conflito cognitivo* de Tall e Vinner (1981). Para evidenciar uma de nossas hipóteses, apresentaremos a análise de dois alunos de um questionário já aplicado na pesquisa, um de primeira e outro de terceira série do Ensino Médio, além de prováveis passos futuros.

**Palavras-chave:** Números reais. *Imagen de conceito*. *Definição de conceito*. Ensino Médio. Ensino Fundamental. Matemática. Ensino. Didática.

**Abstract:** Our object in this article is to make evident proposals related to our dissertation, which focus on clarifying the idea of how important an approach to real number is made as soon as possible in Elementary School II. Regarding the theoretical, we base ourselves on the ideas of *concept image*, *concept definition*, *potential conflict factors* and *cognitive conflict factors* of Tall and Vinner (1981). To demonstrate one of our hypotheses, we will present the analysis of two students from a questionnaire already applied in the research, one from the first and the other from the third grade of High School, as well as probable future steps.

**Keywords:** Real Numbers. *Concept Image*. *Concept Definition*. High School. Elementary School. Mathematics. Teaching. Didactics.

## 1 INTRODUÇÃO

Interessados em pesquisar e propor ideias relevantes no contexto da Educação Matemática, buscamos desenvolver a presente pesquisa, visando tratar um ponto considerado por nós nevrálgico na Educação Básica, que são os números reais.

Antes de nos aprofundarmos nas ideias, acreditamos ser importante trazer o contexto no qual a pesquisa tem se desenvolvido, e um pouco de nossa experiência como aluna e

professora. Inicialmente, destacamos o contexto pandêmico e que, por conta disso, tivemos que fazer algumas adaptações para obter as devolutivas de formulários e termos, por exemplo, por plataformas online. Ainda assim, acreditamos ter conseguido dar um andamento de qualidade para nosso projeto, mesmo com as dificuldades enfrentadas e novas adaptações.

Enquanto aluna da Educação Básica, julgamos que nossa trajetória entre o 6º ano do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio (entre os anos 2009 e 2015) serviu também como motivação para o desenvolvimento das ideias voltadas para os números reais, visto que nos recordamos ter tido uma abordagem pouco lúdica e muito tradicional, sem conseguir estabelecer conexões na cadeia que vai desde os números naturais até os números reais, enxergando-os mais isoladamente e aprofundando pouco o assunto.

Como aluna de graduação em Licenciatura em Matemática (entre os anos 2016 e 2019), a experiência foi difícil, uma vez que ideias vistas no transcorrer do curso, mais especificamente na disciplina “Análise Real”, como a construção dos números reais, foram carregadas de formalismo e pouca discussão sobre formas de abordar os números reais em sala de aula da Educação Básica.

Ingressando no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPREM) do IME-USP, foi possível ter uma experiência um pouco mais satisfatória, em relação à construção dos números reais, na disciplina “Análise Real com Aplicações”, porém ainda com ideias carregadas de formalizações e pouca relação direta com o contexto dos alunos em sala de aula na Educação Básica, e de que maneira o docente pode transpor tais aspectos para os alunos com um grau de formalização dentro das habilidades e competências esperadas de cada um dos anos neste nível de ensino.

Além de dificuldades para o ensino e a aprendizagem dos números reais, observamos que os documentos oficiais preveem, conforme será explicitado, o início do trabalho com estes números ao fim do Ensino Fundamental e acreditamos que isso possa começar antes, com uma abordagem viável para os alunos. Julgamos ainda que a maneira pela qual currículos e documentos oficiais propõem abordagens para os números reais não é a melhor possível e cremos que alunos do Ensino Médio têm saído da Educação Básica com deficiências no assunto devido à má compreensão de ideias desde os anos iniciais.

Antes de elaborar e possivelmente aplicar uma abordagem para a introdução dos números reais no Ensino Fundamental II, propusemos e analisamos um questionário diagnóstico para evidenciar dificuldades de alunos de Ensino Médio em relação a esses

números. Também entrevistamos o professor destes participantes para só então acharmos que poderíamos introduzir os números reais, o quanto antes, no Ensino Fundamental, com um conjunto de atividades.

## 2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

O tratamento aprofundado ao qual tivemos acesso na disciplina “Análise Real com Aplicações”, oferecida pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP, motivou-nos a pesquisar abordagens de assuntos da área, como os números reais, por exemplo, na Educação Básica. Além disso, após leitura crítica dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCNs, 1998), da *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC, 2017), do *Curriculo do Estado de São Paulo* (CESP, 2008), bem como do *Curriculo Paulista* (CP, 2019), cujo resultado será explicitado, temos a intenção de desenvolver e testar um conjunto de atividades para aplicação em sala de aula de Matemática, voltado para propriedades dos números reais e outros aspectos envolvidos, no contexto do Ensino Fundamental, com foco em turmas de 7º ano. Com a aplicação de tais atividades, temos o intuito de estudar e analisar tanto as experiências e situações em sala de aula, como também as respostas obtidas nos protocolos dos participantes, a fim de observar se esse conjunto de atividades teve influência positiva na concepção sobre os números reais em alunos deste nível de ensino.

Mas por que acreditamos que tal conteúdo - que geralmente ganha maior profundidade no Ensino Médio ou até no Ensino Superior - deve ser abordado tão “cedo”? Qual ganho tal abordagem no 7º Ano poderia trazer aos alunos?

Observemos um trecho da pesquisadora Igliori (1999):

Numa pesquisa diagnóstica, que realizamos com alunos do terceiro grau (Igliori e Silva, 1998), pudemos encontrar alguns dos aspectos apontados por Brousseau e reforçados por Duroux como, por exemplo, a incapacidade de encontrar um número decimal entre 3,25 e 3,26. O estudante diz nessa pesquisa que o “sucessor” de 3,14 é 3,15, numa nítida transposição do conceito de sucessor, conceito esse existente no contexto dos números naturais e transposto para os números decimais. (IGLIORI, 1999, p.89).

De acordo com o texto, alunos do Ensino Superior, chamado na época de terceiro grau, chegam com deficiências de compreensão em questões relacionadas à concepção de densidade do conjunto dos números racionais ( $Q$ ) no conjunto dos números reais ( $R$ ). Tal aspecto torna-se notável uma vez que utilizam propriedades, por exemplo, observadas nos

números naturais ( $N$ ), para determinar qual o sucessor, ou antecessor, de um número com uma determinada quantidade de casas decimais. A densidade dos números racionais está diretamente ligada à construção dos números reais, o que evidencia a importância de abordar tal assunto o quanto antes nos anos da Escola Básica.

A pesquisa diagnóstica relatada por Igliori (1999) permitiu, indiretamente, que os alunos do Ensino Superior expusessem suas concepções sobre a densidade de  $Q$  em  $R$ , bem como a respeito dos números reais, concepções essas que já deveriam estar nas *imagens de conceito* (TALL; VINNER, 1981), desse grupo, uma vez que a abordagem dos números reais está prevista ainda no Ensino Fundamental, como evidenciado em documentos oficiais.

A *imagem de conceito*, segundo Tall e Vinner (1981) diz respeito a: “[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam conscientes ou inconscientes [...]”<sup>33</sup> (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Analisamos documentos curriculares oficiais com o objetivo de encontrar desde que momento os conjuntos numéricos aparecem para os alunos. Escolhemos os que, no nosso entender, causaram impacto, como os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCNs, 1998) e os mais recentes, como a *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC, 2017), o *Curriculum do Estado de São Paulo* (CESP, 2011) e o *Curriculum Paulista* (CP, 2019). Achamos conveniente analisar tais documentos pois todos tiveram influência no currículo dos alunos participantes da pesquisa, visto que os PCNs serviram de base para a elaboração dos currículos escolares, incluindo os que estamos analisando CESP, BNCC e CP.

Em cada um dos tópicos apresentados pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, é possível ressaltar diversos aspectos. Por meio dos objetivos, conceitos e procedimentos de cada um dos ciclos, podemos observar que surgem, com grande ênfase, a aprendizagem e a compreensão das propriedades, características e aplicações dos conjuntos numéricos e é possível notar que a construção dos números reais, apesar de não ser explicitada por estes termos, está intrínseca em todos os quatro anos do Ensino Fundamental II e, por isso, deve ser explorada assim que possível, com a devida cautela sobre essa “construção”. Vemos que o que se prevê para trabalho em sala de aula, são tópicos que precisam deixar evidente a interligação entre os conjuntos numéricos, e não apenas isoladamente.

---

<sup>33</sup>[...] all mental attributes associated with a concept, whether they be conscious or unconscious [...] (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Analisamos a *Base Nacional Comum Curricular* (BRASIL, 2018), que desde 2019 atua como documento normativo para as redes de ensino públicas e privadas e auxilia na elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas e vimos que prevê a introdução aos números racionais, fundamentais para a construção dos números reais, desde o 4º Ano do Ensino Fundamental.

Por meio dos objetos de conhecimento da BNCC, vemos algumas das ideias que surgem em se tratando dos números racionais. Isso também ocorre na BNCC quando observamos os objetos de conhecimento para os números naturais e inteiros, e que pode ser conferido por intermédio do próprio documento.

É razoável inferir que as caracterizações esperadas do conjunto dos números reais, na 3ª série do Ensino Médio, fazem-se presentes ao longo do ensino Fundamental II. Observamos que em cada um dos documentos oficiais mais atuais - Currículo Paulista e BNCC - poucas coisas são diferidas, eles se assemelham em muitos aspectos e acreditamos que a abordagem proposta não é eficaz, pois alunos de diversos níveis de ensino têm permanecido com conceitos insuficientes para uma compreensão rica dos números reais e temos como objetivo deixar claro isto em nossa pesquisa. Para que possíveis lacunas sejam preenchidas, vemos que se faz necessário abordar os assuntos designados para os anos iniciais de maneiras não convencionais, desfazer possíveis nós que podem ser formados no Ensino Fundamental e carregados até o final do Ensino Médio, ou mesmo no Ensino Superior. As ideias a serem desenvolvidas têm o objetivo de influenciar o cotidiano dos discentes, pois ao elucidar o que ocorre com os números, quaisquer conjuntos a que pertençam ( $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $I$  e/ou  $R$ ), os alunos poderão estudar e compreender aspectos relevantes ao seu dia a dia, tais como medidas, presentes em todos os contextos e nas mais diversas profissões, como arquitetura, engenharia, biologia, matemática, física e muitas outras.

Destacamos o fato de explorarmos em nossa pesquisa a ideia da representação decimal dos números, para cada um dos conjuntos numéricos com a perspectiva cabível para sala de aula. Para utilizar esta representação, no decorrer de nossa investigação, averiguamos como isto tem aparecido no atual documento oficial curricular na área da Educação, utilizado em nosso país, a BNCC. Apesar de nos encontrarmos no Estado de São Paulo, destacamos a BNCC uma vez que é o documento oficial utilizado em nosso país, e porque a abordagem proposta no *Currículo Paulista* é a mesma.

Tendo em vista o impacto que os números reais têm tido no Ensino Médio, decidimos realizar um estudo diagnóstico com turmas de primeira a terceira série para que pudéssemos comprovar nossa hipótese de que tais alunos possuem dificuldades mesmo nesta etapa final da Educação Básica. Comprovada esta hipótese, por meio da análise de dados, proporemos nosso plano de intervenção no Ensino Fundamental, acompanhado de um conjunto de atividades que iremos elaborar para tal.

Nosso objetivo de ensino, então, é fazer com que alunos desenvolvam ideias bem elaboradas e justificadas matematicamente, sem automatização do processo de aprendizagem, que geralmente as escolas têm desenvolvido.

Como objetivo de pesquisa, pretendemos deixar clara a importância e eficácia do trabalho docente com os números reais o quanto antes no Ensino Fundamental, a fim de que se possa dar a devida profundidade, para cada ano, de acordo com as competências e habilidades previstas, a novos conhecimentos e que isso possa ter reflexos positivos ao fim do Ensino Médio e, consequentemente no Ensino Superior.

Apresentamos como questões de pesquisa: “É realmente necessária a abordagem antecipada dos números reais na Educação Básica?” “Se sim, como fazê-la?”.

### **3 REFERENCIAL TEÓRICO**

Visando fundamentar a pesquisa com uma perspectiva teórica, a fim de que obtenhamos um olhar mais formal para o projeto, trazemos neste momento as ideias que utilizamos para isso.

Investigando compreensões sobre os conjuntos numéricos e como estes tem encaminhado os alunos para interpretar e compreender os números reais, utilizamos como auxílio os construtos de *imagem de conceito* e *definição de conceito* de Tall e Vinner (1981), e também dos mesmos autores, *fatores de conflito potencial* e *conflito cognitivo*.

Explicitamos como esses construtos se desenvolvem e como se aplicam em nossos estudos.

### 3.1 Imagem de conceito e definição de conceito

Observemos um trecho de como podemos expressar o significado de *imagem de conceito*, descrito por Tall e Vinner (1981)

Devemos usar *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados. É construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando conforme o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, tradução nossa).<sup>34</sup>

Conforme a citação, nota-se que a *imagem de conceito* de uma pessoa sobre um determinado conteúdo, é única, uma vez que varia de pessoa para pessoa, sofre mudanças com o passar do tempo, e é um conjunto de ideias que concebe a representação cognitiva de um determinado aspecto. Tais ideias formalizadas na mente de um indivíduo podem estar corretas ou não, mas ainda assim são suas concepções, e que podem ser modificadas e/ou enriquecidas. Temos esta ideia formalizada quando nos referirmos no decorrer do texto à *imagem de conceito*.

Vejamos agora do que se trata a *definição de conceito* também proposta por Tall e Vinner (1981):

Devemos considerar a *definição de conceito* como uma forma de palavras usadas para especificar esse conceito. Pode ser aprendido por um indivíduo de maneira mecânica ou aprendido de forma mais significativa e relacionado em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal pelo estudante de uma definição. É então a forma de palavras que o aluno usa para sua própria explicação de sua imagem de conceito (evocada). (TALL; VINNER, 1981, tradução nossa).<sup>35</sup>

Conforme a definição, é possível notar que, quando tratamos de *definição de conceito*, estamos nos referindo à maneira como uma pessoa define o conceito. Assim como a *imagem*

<sup>34</sup> We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures. (TALL; VINNER, 1981).

<sup>35</sup> The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. (TALL; VINNER, 1981).

*de conceito, a definição de conceito* pode ser correta ou não, é individual e pode sofrer modificações.

Formalizadas essas duas definições, temos como pergunta a ser respondida com o questionário diagnóstico proposto: Quais seriam a *imagem de conceito* e a *definição de conceito* de número real para um aluno de Ensino Médio? O mesmo questionamento é válido para números naturais, inteiros, racionais e irracionais, e buscamos responder estas indagações ao longo dos procedimentos metodológicos que escolhemos, bem como a análise de dados à posteriori.

### 3.2 Fatores de conflito potencial e fatores de conflito cognitivo

Apreciamos agora o que são *fator de conflito potencial* e *fator de conflito cognitivo* também descritos por Tall e Vinner (1981) em “*Educational Studies in Mathematics*”:

Chamamos uma parte da imagem de conceito ou definição de conceito como um conflito com outra parte da imagem de conceito ou definição de conceito, um fator de conflito potencial. Tais fatores não precisam nunca ser evocados em circunstâncias que causam um conflito cognitivo real, mas se forem evocados os fatores em questão serão chamados de fatores de conflito cognitivo. (TALL; VINNER, 1981, tradução nossa).<sup>36</sup>

Como observado, *fatores de conflito potencial* surgem quando há um desarranjo entre elementos de uma mesma *imagem de conceito*. Notamos que os autores chamam de *fator de conflito cognitivo* a situação em que dois ou mais fatores de conflitos potenciais são evocados ao mesmo tempo.

Dessa forma, em nossos estudo e análise, usamos *fator de conflito potencial* e *fator de conflito cognitivo*, para nos referir a essas ideias explicitadas por Tall e Vinner (1981).

## 4 METODOLOGIA

Neste momento, temos por objetivo descrever e explicar como desenvolvemos nossa pesquisa até agora, desde nossas escolhas para perguntas em um questionário diagnóstico com

---

<sup>36</sup> We shall call a part of the concept image or concept definition which may conflict with another part of the concept image or concept definition, a potential conflict factor. Such factors need never be evoked in circumstances which cause actual cognitive conflict but if they are so evoked the factors concerned will then be called cognitive (TALL; VINNER, 1981).

alunos do Ensino Médio, como o aplicamos e analisamos e como organizamos uma entrevista “semi aberta” com o professor desses alunos para que este nos desse sua avaliação pedagógica sobre o assunto e as questões propostas.

Temos, então, duas situações principais que embasam nossos estudos preliminares, o Questionário Diagnóstico Inicial e a entrevista com o professor. A primeira foi realizada com alunos de primeira a terceira série do Ensino Médio, a qual permitirá, por intermédio da análise das respostas adquiridas, propormos um plano de intervenção à construção dos números reais no Ensino Fundamental II.

A segunda, organizada por nós com o professor de Matemática dos participantes, permitirá que possamos comparar as perspectivas dele sobre as respostas que seus alunos dariam ao questionário, questão a questão, bem como, principalmente, quais têm sido suas percepções referentes à maneira como são abordados os números reais desde o Ensino Fundamental, até principalmente o Ensino Médio.

O Questionário Diagnóstico Inicial foi aplicado em alunos de um colégio privado de Ensino Infantil a Ensino Médio da cidade de Jundiaí-SP. Antes de qualquer aplicação foi feito um pedido à coordenação e à direção do colégio com explicações de intenção e objetivos em relação à aplicação do questionário para pesquisa. Tendo concordado com a proposta, o colégio assinou o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para a Instituição e os responsáveis pelos alunos foram comunicados oficialmente pelo colégio, para que tivessem contato com a proposta de pesquisa e concordassem ou não com a participação dos alunos pelos quais são responsáveis. Tanto os responsáveis como os alunos que concordaram assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

O professor também assinou um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, concordando em ceder duas de suas aulas para cada uma das três turmas (de 1<sup>a</sup> a 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio) para a aplicação do Questionário Diagnóstico Inicial, bem como em participar da entrevista proposta por nós em horário extra classe.

#### **4.1 Questionário Diagnóstico Inicial**

Realizamos tal questionário para comprovar, ou não, uma de nossas hipóteses principais, ou seja, que os alunos apresentam dificuldades no que tange aos números reais e aspectos relacionados, como a densidade dos racionais e dos irracionais e a ideia de sucessor,

por exemplo, ao longo do Ensino Médio, tanto em decorrência de uma má elaboração de conceitos neste nível de ensino, como também em relação à maneira como os alunos têm visto esses pontos no Ensino Fundamental II, que é nosso foco de intervenção.

Para que conseguíssemos diagnosticar tais dificuldades, propusemos o questionário com foco em analisar como se comporta a *imagem de conceito evocada e a definição de conceito* dos alunos participantes em relação aos números reais, desde os naturais, os inteiros, os racionais e os irracionais, buscando inclusive prováveis *fatores de conflito potencial* e *fatores de conflito cognitivo* relacionados a este assunto (TALL e VINNER, 1981).

Escolhemos alunos do Ensino Médio para o diagnóstico, justamente para que conseguíssemos analisar como têm lidado com os números reais, desde ingressantes nesta etapa (1<sup>a</sup> série) até concluintes da Educação Básica (3<sup>a</sup> série) e que já possuem, ou pelo menos deveriam possuir, uma *imagem de conceito* estruturada em relação aos números reais.

O Questionário Diagnóstico Inicial foi aplicado a 24 alunos de Ensino Médio, porém utilizamos as respostas apenas de 14 desses que são os que entregaram os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido apesar de os demais terem concordado em participar informalmente, como se pode observar com a primeira pergunta do Questionário. Todos os participantes tomaram ciência do que se tratava e qual a finalidade do estudo com o próprio professor de Matemática (por causa da pandemia) que pôde explicar a proposta a eles, bem como que em breve poderiam ter contato com os resultados obtidos. Nenhum dos alunos será identificado pelo nome e serão chamados por apelidos, sendo de A1 a A7 os da primeira série, e de C1 a C7, os da terceira série. Contabilizamos os dados dos alunos de segunda série em nosso arquivo pessoal, porém, como explicado anteriormente, não os utilizaremos em nosso estudo.

Em vista do contexto de pandemia, realizamos o Questionário via plataforma “*Google Forms*”, sem que os alunos tivessem tido qualquer contato com o mesmo anteriormente. Ele foi realizado em duas aulas de 50 minutos em cada turma. Inicialmente perguntamos o nome do aluno para nossa organização pessoal de quem havia entregue os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido ou não, mas esta questão não entrou na numeração de perguntas. Abaixo segue como o questionário se apresentava.

Tabela 1: Questionário Diagnóstico Inicial

<p><b>NOME (você não será identificado na pesquisa pelo seu nome, esta informação só será utilizada para confirmação do recebimento do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido):</b></p> <p><b>1) Você concorda que suas respostas a esta pesquisa sejam utilizadas para fins acadêmicos? (Suas respostas não terão identidade revelada e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa).</b></p> <p><input type="checkbox"/> Sim</p> <p><input type="checkbox"/> Não</p> <p><b>2) Qual sua idade?</b></p> <p><b>3) De qual série do Ensino Médio você é?</b></p> <p><input type="checkbox"/> 1<sup>a</sup> série</p> <p><input type="checkbox"/> 2<sup>a</sup> série</p> <p><input type="checkbox"/> 3<sup>a</sup> série</p> <p><b>4) Se você é da 2<sup>a</sup> ou 3<sup>a</sup> série, em qual escola você fez o(s) ano(s) anterior(es) do Ensino Médio? (Se você for da 1<sup>a</sup> série, apenas diga “sou da 1<sup>a</sup> série”).</b></p> <p><b>5) Em que escola você fez o Ensino Fundamental II?</b></p> <p><b>6) Escreva com suas palavras o que é um número natural para você e dê dois exemplos de números naturais.</b></p>
--

- 7) Escreva com suas palavras o que é um número inteiro para você e dê dois exemplos de números inteiros.
- 8) Escreva com suas palavras o que é um número racional para você e dê dois exemplos de números racionais.
- 9) Escreva com suas palavras o que é um número irracional para você e dê dois exemplos de números irracionais.
- 10) Escreva com suas palavras o que é um número real para você e dê dois exemplos de números reais.
- 11) A cada um dos itens de a) a j) a seguir identifique a quais conjuntos numéricos você julga que cada número pertence:
- a) 1,73
- Natural     Inteiro     Racional     Irracional
- Real**
- Justifique sua resposta do item a).
- b) pi
- Natural     Inteiro     Racional     Irracional
- Real**
- Justifique sua resposta do item b).
- c) 1/3
- Natural     Inteiro     Racional     Irracional
- Real**
- Justifique sua resposta do item c).
- d) 1,99999999...
- Natural     Inteiro     Racional     Irracional
- Real**
- Justifique sua resposta do item d).
- e) 2,030040050...
- Natural     Inteiro     Racional     Irracional
- Real**
- Justifique sua resposta do item e).

f)  $\sqrt{225}$

- Natural     Inteiro     Racional     Irracional     Real

Justifique sua resposta do item f).

g)  $\sqrt{3}$

- Natural     Inteiro     Racional     Irracional     Real

Justifique sua resposta do item g).

h) 0,141141...

- Natural     Inteiro     Racional     Irracional     Real

Justifique sua resposta do item h).

i) 1,2500000

- Natural     Inteiro     Racional     Irracional     Real

Justifique sua resposta do item i).

j) 0,4999999999...

- Natural     Inteiro     Racional     Irracional     Real

Justifique sua resposta do item j).

12) Entre quais números inteiros se encontra o número 0,167298...? EXPLIQUE O PORQUÊ de sua escolha.

13) Na sala de aula o professor perguntou aos alunos: “Qual é o menor número que se localiza entre 2 e 3?” Um aluno disse “2,1” e outro disse “2,01”. Qual deles está certo? Ou nenhum deles acertou a resposta? JUSTIFIQUE o porquê de sua resposta.

14) Existe alguma diferença entre os números 1,2 e 1,2000? Se sim, qual?

15) Considere o número  $5/7$ . Vamos chamar esse número de B. Ao fazer essa divisão, o visor da calculadora mostra 0,714285. B é um número racional ou irracional? Justifique o porquê você chegou a esta conclusão.

k) Um professor perguntou para seus alunos qual era o sucessor do número 3,1415. Duas respostas foram mais populares, alguns disseram 3,1416 e outros 4,1415. Você acha que há alguma resposta correta? Justifique seu raciocínio.

Fonte: Dados da pesquisa

As perguntas de 1 a 5 foram colocadas a fim de que conhecer o perfil dos alunos, como idade, de qual série do Ensino Médio ele é, caso fosse da 2<sup>a</sup> ou 3<sup>a</sup> série, onde havia feito o(s) ano(s) anterior(es) do Ensino Médio, ou seja, na mesma escola ou em outra e, por fim, onde havia feito o Ensino Fundamental II. Nas perguntas 6 a 10, pedimos as *definições de conceito* de número Natural, Inteiro, Racional, Irracional e Real, respectivamente, e dois exemplos de cada. Na pergunta 11, abordamos 10 exemplos de números diferentes, perguntando em itens como o aluno o classificava (Natural, Inteiro, Racional, Irracional e Real) bem como as justificativas para tais escolhas. Nas perguntas 12 a 16 abordamos questões relacionadas à densidade do conjunto dos números reais, características específicas de determinados números e problemas relacionados à racionalidade ou irracionalidade de um número, bem como a ideia de sucessor, todas com pedido de justificativa.

#### **4.2 Entrevista com o Prof. de Matemática dos participantes**

Como justificamos anteriormente, realizamos uma entrevista com o professor de Matemática para que pudéssemos comparar suas perspectivas pedagógicas em relação às respostas dos participantes, bem como ter uma ideia de sua trajetória como docente e um levantamento de suas concepções em relação ao ensino dos números reais. A entrevista ocorreu mediada pela plataforma “*Google Meet*” tendo em vista o contexto de pandemia. Preparamos antecipadamente um roteiro de perguntas a fim de que o diálogo fosse aberto e minimamente guiado, acompanhado por uma áudio gravação e por um observador neutro, o que nos proporcionou observações imediatas, por escrito, do que ocorreu durante a entrevista, que teve duração de cerca de uma hora e quarenta minutos e ocorreu algumas horas depois da aplicação do questionário para as turmas, sem que o professor tivesse qualquer contato com as respostas dos alunos, apenas com as perguntas do questionário.

#### **4.3 Projeto 7ºAno do Ensino Fundamental**

Após comprovarmos nossas hipóteses com base na análise de dados, ou seja, de que existem diversos problemas relacionados aos números reais, decorrentes de como tem sido a

abordagem dos mesmos tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, temos por objetivo propor um plano de intervenção no Ensino Fundamental II. No momento, temos ideia de desenvolvê-lo ainda no 7º Ano, embasado em um conjunto de atividades ainda a ser elaborado, visto que iremos, como professora pesquisadora, ministrar aulas de Matemática em duas destas turmas no mesmo colégio no qual foi realizado o Questionário Diagnóstico Inicial.

Creamos que esta intervenção deva acontecer o mais cedo possível no Ensino Fundamental II, uma vez que, como pontuamos anteriormente, pesquisadores como Fischbein (1995) destacam e argumentam que a maneira rasa com que assuntos relacionados aos números reais são tratados pelos alunos do Ensino Médio advém do estudo mal desenvolvido de outros conteúdos que, segundo nossa concepção, podem ser abordados o quanto antes no Ensino Fundamental e como argumentamos anteriormente.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentamos a análise dos dados obtidos com o questionário de dois alunos, um de primeira série do Ensino Médio (A1) e outro de terceira (C3). Para facilidade de entendimento do texto, organizamos essa análise em três etapas. A primeira está associada com as questões 6 a 10, com as quais observamos as *definições de conceito* dos participantes para o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, respectivamente. Além das definições, como pedimos dois exemplos, destacamos se estes foram dados e se mostram coerência com a definição dada pelo participante.

A segunda etapa é a análise dos dez itens da questão 11, para verificar se: 1. as classificações feitas pelos participantes, aos exemplos numéricos estão coerentes com as *definições de conceito* dadas nas questões 6 a 10; 2. são dadas as justificativas solicitadas; e 3. se essas justificativas são coerentes com as *definições de conceito*.

A terceira etapa é dedicada à análise individual das questões 12, 13, 14, 15 e 16, para destacar concepções evocadas da *imagem de conceito* – inclusive se são condizentes ou não com as *definições de conceito* – e se podemos dizer que o participante tem uma imagem de conceito rica em concepções pertinentes e livre de fatores de conflito, tanto potencial como cognitivo.

## Participante A1

Tabela 2 – Respostas do participante A1 ao questionário

	A1	
<b>Q6</b>	Não sei descrever o que seria o número natural, mas consigo dar exemplos, 2 e 3	
<b>Q7</b>	É um número que não possui vírgulas, sendo ele inteiro, como por exemplo 3,0 e 10,00.	
<b>Q8</b>	Não sei ao certo.	
<b>Q9</b>	Não sei ao certo.	
<b>Q10</b>	São aqueles que pertencem ao grupo dos reais, como o -1 e 4.	
<b>Q11a</b>	Natural e Real	J: Pois pertence ao grupo dos reais.
<b>Q11b</b>	Irracional e Real	J: Não sei ao certo.
<b>Q11c</b>	Racional	J: Não sei ao certo.
<b>Q11d</b>	Real	J: Não sei ao certo.
<b>Q11e</b>	Irracional e Real	J: Não sei ao certo.
<b>Q11f</b>	Racional	J: Não sei ao certo.
<b>Q11g</b>	Racional e Real	J: Não sei ao certo.
<b>Q11h</b>	Racional	J: Não sei ao certo.
<b>Q11i</b>	Irracional	J: Não sei ao certo.
<b>Q11j</b>	Irracional	J: Não sei ao certo.
<b>Q12</b>	Entre os números 0 e 1.	
<b>Q13</b>	2,01.	
<b>Q14</b>	Sim, o 1,2 é maior do que o 1,2000...	
<b>Q15</b>	Não sei ao certo.	
<b>Q16</b>	Acho que o número 3,1416 pois, o 4,1415 seria 1,0 a mais.	

Fonte: Dados da pesquisa

A única *definição de conceito* dada por A1 é a de número real (Q10), mas não é útil para identificar um número real pois A1 escreve “*São aqueles que pertencem ao grupo dos reais*”. Isso indica *fatores de conflito potencial e cognitivo*.

Com relação aos exemplos numéricos, A1 não apresenta nenhum para o conjunto dos números racionais nem para os irracionais e escreve “*Não sei ao certo.*”. Para os outros conjuntos, A1 dá seis exemplos apenas de números inteiros, sendo eles 5 números positivos, e um negativo (-1), na questão dos números reais, negativo.

Destacamos que, na questão 7, A1 define os números inteiros como aqueles que não possuem vírgula, mas dá dois exemplos com vírgula (3,0 e 10,00), o que indica a existência de um *fator de conflito potencial*.

Com relação à classificação dos números, em cada um dos itens da questão 11, não conseguimos estabelecer um paralelo com as *definições de conceito* de A1 pois, como dissemos, ele apenas define o conjunto dos números reais e sua justificativa – exceto para o item a – é “*não sei ao certo*”. E apesar disso, achamos importante destacar que A1, em seis dos dez itens da questão 11, usa apenas uma classificação, sem incluir os reais para todos. Será esquecimento? Ou uma prática matemática embutida de dar uma única resposta?

De qualquer forma, é importante, para nosso diagnóstico, verificar e destacar erros e acertos de A1 nas classificações que fez. Na pergunta 11a, A1 classifica 1,73 como natural e real e justifica com o texto similar ao da definição, citando apenas “...*pertence ao grupo dos reais*”.

Para os demais itens, sem justificativa, destacamos como “erradas”: A1 classifica  $\sqrt{225}$  (que é 15) como “*Racional*” (item f) e  $\sqrt{3}$  (item g) como “*Racional e Real*” e surge a dúvida “Será por causa do sinal de raiz???”; 1,2500000 (item i) e 0,49999999999... (item j) como “*Irracional*”, enquanto 1,99999... apenas como “*Real*”.

Nas questões 12, 13, 14, 15 e 16, A1 só justifica a questão 16, e isso nos impossibilita de saber o porquê das respostas dadas. Assim, nos limitamos a verificar se a resposta está certa ou errada e, no caso das erradas, interpretar quais concepções são evocadas da sua *imagem de conceito*.

Na questão 13, A1 afirma que o menor número entre 2 e 3 é 2,01, evocando de sua *imagem de conceito* que existe um número menor entre os inteiros 2 e 3.

Na questão 14, A1 evoca que “1,2 é maior que 1,2000...”, e isso indica que, em sua *imagem de conceito*, acrescentar zeros nas casas decimais do número, juntamente com as reticências, “modifica” o número e, no caso, o torna menor que o outro que não os possui.

Na questão 15, A1 não consegue evocar concepções de sua *imagem de conceito* para responder que  $5/7$  é racional, independentemente do resultado 0,714285 da divisão mostrada na calculadora (ver questão) e escreve “*Não sei ao certo*”. Uma explicação para isso é a falta de *definição de conceito* para os racionais e, talvez, a falta do uso de uma calculadora em sala de aula.

Na questão 16, A1 evoca, como sucessor de 3,1415, o número 3,1416 e afirma que “*Acho que o número 3,1416 pois, o 4,1415 seria 1,0 a mais.*” deixando claro que, em sua *imagem de conceito*, o sucessor de um número é obtido ao somar 1 na última casa decimal e não na parte inteira, conforme sua justificativa.

Tabela 3 – Respostas do participante C3 ao questionário

	C3	
Q6	Números naturais são queles que são inteiros e positivos. Ex: 1 e 100	
Q7	São naturais junto com os negativos. Ex: 1 e -1	
Q8	Racionais são as frações, decimais e os inteiros. Ex: $\frac{1}{2}$ , 0,24 e 32	
Q9	Irracionais não podem ser fração se não for nos numeros inteiros. Ex: $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$	
Q10	Numeros reais inclui tds os números. Ex: 1 e 0,724589...	
Q11a	Racional e Real	J: Porque nos racionais que se usa decimais
Q11b	Racional e Real	J: Porque achei o mais correto
Q11c	Racional e Real	J: Porque é uma fração
Q11d	Irracional e Real	J: Porqueachei o mais correto
Q11e	Irracional	J: Porqueachei correto
Q11f	Natural, Inteiro e Racional	J: Porque o resultado é 15 que é um número inteiro
Q11g	Irracional	J: Porque o resultado é decimal e não fração
Q11h	Racional	J: Porqueachei o mais correto
Q11i	Racional e Real	J: Porqueachei o mais correto
Q11j	Irracional	J: Porqueachei o mais correto
Q12	Depois do zero e antes do um, pois ele esta mais próximo de zero mas ainda sim perto do um	
Q13	Nenhum deles, já que entre 2 e 3 existe uma infinidade de números	
Q14	Sim, pois em 1,2 pode haver mais numeros atras ou ser redondo, mas em 1,2000 sabemos oq esta atras	
Q15	Irracional	
Q16	Acho que 3,1416 esta correta, pois os decimais tambem contam	

Fonte: Dados da pesquisa

Nas perguntas 6 a 10, C3 dá uma *definição de conceito* para cada um dos conjuntos numéricos.

Vemos que existe uma circularidade nas definições para o conjunto dos números naturais e dos números inteiros, uma vez que ele utiliza um para tratar o outro, o que indica um *fator de conflito potencial* e possível *fator de conflito cognitivo*. Outro aspecto que observamos é o fato de C3 dar uma definição na questão 9 (dos números irracionais) de difícil interpretação por não conseguirmos estabelecer uma ligação. Uma hipótese que temos pelos exemplos que o participante deu ( $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{5}$ ) é que o participante pode considerar que os números irracionais são apenas as radiciações não exatas.

Observando os exemplos dados por C3 nas questões 6 a 10, todos possuem coerência com as definições dadas.

Nos itens da questão 11, vemos inicialmente que em alguns deles C3 não inclui o conjunto dos números reais. Poderia ser esquecimento? Percebemos ainda nas justificativas dos itens desta questão que C3 possui dúvida em suas respostas às questões 6 a 10, pois como ele precisa estabelecer uma ligação entre as definições e os itens da questão 11, encontrou-se em um impasse, respondendo “*Porque achei o mais correto*”. Acreditamos nisso, pois essa justificativa aparece em situações como no item b ao classificar pi como racional e real, “1,99999999...” e “0,499999999...” como irracionais, pois se ele se baseasse em suas *definições de conceito* para dar essas classificações, elas não seriam coerentes. Temos assim um *fator de conflito cognitivo*.

Na questão 12, C3 evoca que “0,167298...” está entre 0 e 1 por estar perto de ambos. Percebemos na *imagem de conceito* de C3 a ideia de que o número dado, próximo de 0,2 por exemplo, está próximo de 1, segundo ele.

Na questão 13, C3 evoca que nenhuma das respostas está correta e justifica algo não perguntado, pois C3 afirma que há uma infinidade de números entre 2 e 3 e por isso não há resposta, porém isto, por si só, não justifica, pois mesmo que haja uma infinidade de números neste intervalo poderíamos ter um menor.

Na questão 14, C3 evoca que há diferença entre 1,2 e 1,2000, e trata as casas decimais à direita como aquelas “*atras*”, o que parece evocar que existe diferença pois em 1,2 não conhecemos suas casas decimais, mas em 1,2000 sim.

Na questão 15, C3 evoca que  $5/7$  é irracional e não apresenta justificativa. É possível identificar um *fatores de conflito potencial e cognitivo*, pois na *definição de conceito* de C3 de números irracionais ele afirma que “*não podem ser fração*”, mas classifica  $5/7$  como irracional.

Na questão 16, C3 evoca que o sucessor de 3,1415 é 3,1416, o que parece indicar que para ele devemos somar 1 na última casa decimal do número.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso projeto até o presente, pudemos analisar *imagens de conceito, definições de conceito, fatores de conflito potencial e fatores de conflito cognitivo* (TALL; VINNER, 1981) de alunos de Ensino Médio, por meio de um estudo de caráter investigativo com um

questionário diagnóstico com 16 questões. Devido ao contexto de pandemia, realizamos todos os procedimentos até agora de maneira remota.

As ideais de Tall e Vinner (1981) foram de suma importância para nossas análises, conclusões e novas questões. Conseguimos confirmar nossa hipótese de que existem deficiências presentes em alunos de Ensino Médio da escola envolvida, relativas aos números reais.

Nossa preocupação também é preocupação de outros pesquisadores e não é de fácil tratamento em sala de aula na Educação Básica, uma vez que é um assunto que carrega consigo um grau de complexidade que exige um detalhamento a ser estudado, e para qual não encontramos suporte em documentos curriculares oficiais.

Por meio das análises feitas, notamos a importância de propor novas abordagens para o ensino dos números reais na Educação Básica a partir do 6º ano e, por isso, ainda deixamos em aberto o conjunto de atividades que queremos elaborar e, possivelmente aplicar, no 7º ano do Ensino Fundamental. Acreditamos que uma abordagem que traga visualizações práticas aos alunos e maneiras de relacionar e compreender como cada um dos conjuntos numéricos se completam, trará uma boa perspectiva de aprendizagem para dirimir os problemas que identificamos. Esse passa a ser então o foco de continuação da nossa pesquisa.

## **REFERÊNCIAS**

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 3 nov. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **RDM**, Grenoble, vol. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, n. 29, p. 29-44, 1995.

IGLIORI, S. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. In: PEREIRA, M. **Educação Matemática – uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 89-113.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: Secretaria da Educação, 2011. 72 p. Disponível em: <https://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo Paulista**. São Paulo, 2019. Disponível em:  
<https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2019/09/curriculo-paulista-26-07.pdf>.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.