

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS GRELHAS

Tese apresentada à douta Congregação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pelo Eng.º José Carlos de Figueiredo Ferraz, para o concurso da cadeira de "Pontes e Grandes Estruturas".



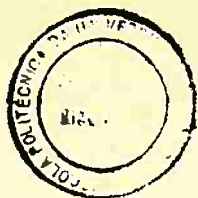
São Paulo
1951

FT-72

DEDALUS - Acervo - EPEC



31400023476



I — INTRODUÇÃO HISTÓRICA

A tese com que nos apresentamos à douta Congregação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, concorrendo à cadeira de "Pontes e Grandes Estruturas", procura focalizar uma das questões mais palpitantes da teoria das estruturas, qual seja o estudo das grelhas.

Se é bem verdade que o assunto tem sido objeto de tratamento periódico, na literatura técnica, desde os fins do século passado, não se pode deixar de reconhecer, entretanto, que os métodos e processos utilizados e recomendados pelos diferentes autores pecam pelo excessivo trabalho numérico a que conduzem, muito embora recorram êles — no louvável empenho em reduzi-lo — a numerosas hipóteses simplificadoras.

E as soluções aventadas se apresentam de tal forma sobrecarregadas de operações, tão complexas do ponto de vista do cálculo, que não se coadunam, por vezes, com a importância e o valor econômico da obra que se pretende realizar.

Isto justifica a natural aversão que nutre o estático por semelhantes processos, aversão que o leva a desprezar, no estudo das estruturas, importantes fatores ligados ao comportamento espacial e monolítico das mesmas, deixando de lado vantagens que daí lhe poderiam advir, no que diz respeito à redução dos esforços e à consequente economia do material. E quando julga, desprezando aqueles elementos, fugindo àquele emaranhado numérico, obter pelo menos um benefício, que consistiria em se colocar a favor da segurança, corre o risco — por mais que isso pareça absurdo e paradoxal — de sacrificar essa própria segurança, como chegaremos, oportunamente, a demonstrar.

Sendo a grelha constituída, em última análise, de duas famílias de vigas que se cruzam e trabalham em conjunto e que, no mais das vezes, se ligam por intermédio de uma lage, como acontece nas coberturas, pisos e tabuleiros de pontes, apresenta-se ela como um conjunto altamente hiperestático, de complexo comportamento e de difícil estudo: uma carga que a solicite, em determinado ponto, obriga a trabalho coletivo todo o sistema, propagando-se o esforço pelos diferentes elementos.

É precisamente na forma dessa distribuição, no número e identificação dos elementos que a regem e que devem intervir no cálculo que reside todo o problema.

Sua solução se apoiou, até o presente, em alguns postulados simplificadores, desprezadas certas ligações, embora não se conseguisse evitar, ainda assim, o inconveniente do incômodo algebrismo.

Não é recente, como sabemos, o estudo da grelha.

Já em 1893 a questão foi abordada por Zschetsche¹ que introduziu como incógnitas as reações recíprocas das vigas nos nós. Tal solução não deixa de apresentar enorme complexidade, mesmo no caso relativamente simples de quatro vigas longitudinais e uma transversal.

Durante cerca de vinte anos o assunto não voltou a ser ventilado, para ressurgir em 1912, com um importante trabalho de Arnstein (apud¹⁸) que cuidou da viga contínua sobre apoios elásticos, constituídos por colunas ou vigas. Foi utilizado por esse autor o "método das forças", de que já se valera Zschetsche, recaindo porém nas anteriores dificuldades de ordem numérica.

Nessa época Kögler (apud¹⁸) se interessou pelo assunto, ao estudar uma ponte de concreto com cinco vigas principais e uma transversal, chegando a estabelecer algumas regras bastante simples. Concluiu, por exemplo, que uma grande variação de momento de inércia da viga transversal tem reduzida influência na distribuição da carga. E forneceu diversas prescrições importantes relativas ao dimensionamento de pontes.

A seguir abordou o assunto o engenheiro A. Bühler², das Estradas de Ferro Suíças, que efetuou certas medidas em pontes de concreto, para o efeito de apreender a distribuição transversal da carga, tendo verificado que tal distribuição era numericamente mais elevada do que se poderia, à primeira vista, supor.

Ainda em 1912 apareceu um trabalho de H. Lossier³ baseado na teoria da viga contínua sobre apoios elásticos, bem como no princípio da reciprocidade de Maxwell. Conseguiu Lossier obter as forças cortantes e os momentos fletores nas vigas longitudinais e transversais, sob a ação de cargas móveis, e para certas posições particulares dessas mesmas cargas. Tais limitações, como bem se compreende, diminuem sobremodo o interesse do trabalho, do ponto de vista de sua aplicabilidade aos casos gerais.

Surgem nessa época algumas pesquisas experimentais. Assim Saliger⁴ ensaia uma cobertura de concreto armado com sete nervuras. De seu lado, Frank^{5 e 6} e Knorr⁷ realizam medidas em pontes de concreto armado, chegando a resultados altamente interessantes. Entretanto, a influência perturbadora da lage obscureceu a interpretação exata da prova de carga.

Em 1922 chega a vez de Thullie⁸ que escolhe como ponto de partida a rigidez infinita da viga transversal, e realiza correções para o efeito de melhorar os resultados obtidos.

Cogita Petermann⁹ do caso geral, e adota como incógnitas, no cálculo que vem a efetuar, os momentos nos nós. O sistema de equações a que conduz semelhante processo sobrecarrega-o extraordinariamente, prejudicando-o e anulando as vantagens que possa oferecer.

Também Lewerens¹⁰ cuida do assunto, atendo-se exclusivamente ao caso particularíssimo de uma estrutura com três vigas.

Quando da elaboração do projeto da Friedensbrücke, construída em Viena, em 1926, Faltus¹¹ imprime novo e enérgico impulso ao tratamento teórico da grelha, criando e lançando o conceito da "viga transversal fictícia", que por si só computasse toda a distribuição transversal.

Bleich e Melan¹² vêm a tratar do assunto, ainda que de uma forma indireta: partindo da equação de Clayperon, chegam a um sistema de equa-

ções de diferenças parciais, equações cuja solução constitui a finalidade específica do trabalho.

Em 1928 propõe-se Gennter¹³ a resolver o mesmo problema, fazendo intervir no cálculo um elemento desprezado por Bleich e Melan: a torção nas vigas. Mas, embora afirmasse que o seu processo não exigiria mais trabalho que os dos citados autores, não conseguiu vencer o excesso numérico decorrente do sistema de equações de diferenças parciais.

Já nesta altura, os ensaios efetuados em inúmeras estruturas executadas começavam a esclarecer o obscuro problema. Nas várias pontes submetidas a provas, verificou-se a grande capacidade de distribuição de carga apresentada pelo tabuleiro.

Com o correr do tempo já se nota, consultando-se a literatura especializada, uma tendência mais definida no sentido de se aproveitar o efeito da grelha. Sirva-nos de exemplo o que se verificou na ponte rodoviária sobre o rio Murg, perto de Gernsbach, em que Storz¹⁴ estudou e fez valer a distribuição de carga em três vias transversais.

Estribando-se em numerosas asserções simplistas, quais sejam, a constância e igualdade dos momentos de inércia das vigas principais, a igualdade dos espaçamentos entre as mesmas, o desprezo da torção e, finalmente, a distribuição da carga segundo uma faixa reduzida, Bela Enyedi¹⁵ se propõe a resolver o problema da repartição das cargas concentradas através das diferentes vigas longitudinais. Declara que o método atenderia, também, ao caso de diferentes momentos de inércia e desigual espaçamento entre as longarinas, mas sua aplicação seria, então, muito mais difícil.

Em 1929 Marcus¹⁶ projeta uma cobertura de grande vão, com três famílias de vigas, cobrindo um espaço triangularmente limitado, e utilizando-se de resultados colhidos em modelos.

Como contribuição ao primeiro Congresso Internacional de Concreto e Concreto Armado, realizado em 1930, o professor Giulio Krall¹⁷ apresenta um estudo a respeito da repartição das cargas nas estruturas grelhadas, atendendo-se à teoria das vigas sobre apoios elásticos e em alguns elementos do cálculo das variações. O método requer desenvolvimento matemático delicado para a obtenção de resultados apenas aproximados.

Ostenfeld¹⁸, em 1930, se insurge contra o "método das forças" aplicado à análise das grelhas, afirmando que a sua experiência com o "método das deformações" o convencera da inegável superioridade deste último. E firma as bases de uma solução sobremodo elegante que hoje se tornou clássica: considera as flechas como incógnitas hiperestáticas e, partindo da hipótese de existir em cada nó um apoio irrecalcável, chega a um sistema de equações com tantas incógnitas quantos sejam os referidos nós. Para controlar o cálculo, serve-se da prova segundo a qual a soma das reações nos nós deve igualar os esforços externos. E, a final, com o intuito de facilitar o cálculo, apresenta uma série de tabelas de vigas contínuas de que se retiram os coeficientes que intervêm nas operações.

O método de Ostenfeld, como se vê, malgrado as vantagens que oferece, é demasiadamente trabalhoso, pois se prende à solução de um sistema de equações o que, por si só, lhe prejudica a rapidez e a simplicidade das soluções. Suas possibilidades de aplicação aumentaram, entretanto, moder-

namente, com o aparecimento de processos desconhecidos ao tempo daquele autor, como, por exemplo, o de Benachiewicz. Por outro lado, um estudo de Krabbe¹⁹ veio ampliar-lhe os horizontes, decomposto que foi o sistema de Ostenfeld em vários outros, de tal forma que em cada um destes não haja mais incógnitas que vigas transversais, exceção feita das vigas de bordo.

A partir de Ostenfeld os trabalhos sobre grelhas foram surgindo com mais frequência na literatura técnica especializada. Com o aparecimento de maiores "trens-tipos" e a preferência pelas estruturas mais leves, cujo emprêgo foi permitido graças a maiores tensões admissíveis, aumentou de muito o interesse pelos estudos da distribuição das cargas.

Baseado na equação dos cinco momentos, M. A. Charrueau²⁰ chegou a uma solução geral, possibilitando expressar os momentos nos nós, vindo o mesmo autor a atingir resultados particulares interessantes.

Sucederam-se, daí em diante, os trabalhos de Wiesner²¹, A. Thoms²², Hennigs²³, vindo finalmente um estudo bastante comentado de F. Leonhardt²⁴ a respeito de grelhas apoiadas em dois bordos. O método recomendado por esse autor, baseado no que ele denomina "coeficientes de distribuição transversal", calculados analiticamente ou por intermédio de modelos, obteve bastante sucesso graças à sua simplicidade. Dois anos mais tarde, ele próprio estendeu o processo às grelhas engastadas e contínuas, fornecendo numerosas tabelas, e formulando alguns conselhos úteis para a escolha dos momentos de inércia das vigas transversais. E, se bem que o seu trabalho tenha sofrido severas críticas, pela aproximação muitas vezes fraca, constitui, inegavelmente, a primeira tentativa coroada de êxito no que diz respeito à simplicidade do cálculo das grelhas.

Geiger contribui também com um interessante estudo sobre grelhas contínuas²⁵.

J. Courbon²⁶ analisa o comportamento estático das vigas longitudinais de pontes solidarizadas por vigas transversais de momento de inércia infinito. Seu trabalho não contém, entretanto, qualquer novidade, abordando temas de soluções há muito conhecidas.

Seguiram-se novos estudos, entre eles os de M. Hillal²⁹, W. Bültmann (apud³²) e Klöppel³³, procurando sempre a exatidão no cálculo das grelhas.

Merece ser mencionado com destaque o trabalho de M. Hillal, pelo fato de — valendo-se dos meios correntes da estática — computar, entre os elementos que intervêm no cálculo, o efeito de torção. Na solução por ele proposta, o número de incógnitas iguala o número de nós, ao passo que no método de Gennter³⁴, onde também é computada a torção, as incógnitas são em número três vezes superior. Fundamento de seu processo é a "viga contínua sobre apoios elásticos, elasticamente resistente à rotação". E o grande mérito do referido estudo está, exclusivamente, nas importantes conclusões a que chega com referência ao efeito da torção. Seu emprêgo, entretanto, ainda acarreta um trabalho extraordinariamente penoso, mesmo no caso em que ocorra simetria.

Surge, pouco depois, obra de grande valor nesse terreno, qual seja a de Melan-Schindler³⁰. Baseados na equação de Clayperon, chegam às equa-

ções fundamentais do método que propõem, e cujo tratamento matemático é bastante delicado. As auto-soluções normalizadas que aparecem, graças à separação das variáveis, podem ser interpretadas como uma extensão do "B. U. Verfahren" de Andrée. O trabalho pressupõe vigas com percurso semelhante de momentos de inércia. Apesar da indicação dos auto-valores e da solução dos chamados sistemas "i" para as grelhas correntes, resta ainda enorme trabalho de cálculo, bastante suscetível de erros. E, muito embora seja o referido método denominado "exato" por seus autores, não se pode esquecer que desprezaram ambos, no cálculo das grelhas, tanto o efeito de torção quanto a colaboração da lage.

Já agora a literatura técnica se vê enriquecida por novas publicações, destacando-se, entre outros, os trabalhos de U. Thran³², K. Miesel (apud³⁴), assim como a obra de M. J. Blevot³¹, notável pelo formulário, tabelas e gráficos que contém.

Outro estudo que atraiu a atenção dos especialistas foi o de M. Y. Guyon³⁵, baseado na seguinte hipótese: serem os feixes de vigas longitudinais e transversais tão densos que se pudesse assimilá-los, em conjunto, a um sistema contínuo. Para fugir ao incômodo problema do efeito de torção, serve-se Guyon de uma equação de derivadas parciais de quarta ordem, sem o termo retangular. O que se observa é que as próprias hipóteses em que se funda o cálculo restringem o campo de aplicação do mencionado método.

Por último, surge novo trabalho de F. Leonhardt, em colaboração com H. Andrä³⁶, aperfeiçoando o já divulgado processo dos "coeficientes de distribuição transversal", e enriquecendo-o com uma série de tabelas de fácil utilização.

Assim, o que podemos concluir, após essa rápida introdução de caracter histórico, é que os diversos autores, criando e lançando novos métodos para resolver o problema do cálculo das grelhas, diligenciaram com empenho no sentido de aliar, no referido cálculo, os requisitos da exatidão e da simplicidade, sem que, entretanto, atingissem o objetivo colimado.



II — UM NOVO MÉTODO DE CÁLCULO DAS GRELHAS

O estudo acurado das obras mencionadas no capítulo anterior nos convence de que os métodos e processos aí indicados não satisfazem às exigências da prática: ora pecam pela enormidade da massa operatória requerida, ainda mesmo nos casos mais simples, ora desprezam certos efeitos que se manifestam, às vezes, em proporções bem sensíveis.

Ostenfeld, referindo-se ao assunto, confessa que a torção das vigas e a colaboração da lage desempenham importante papel na distribuição da carga, havendo toda a conveniência em serem devidamente computadas. Mas como isso acarrete complicado processo de cálculo, prefere considerá-las ambas como uma reserva de energia da estrutura.

Leonhardt elimina, desde logo, a torção, por julgá-la pequena. Quanto à lage, afirma que já a levou na devida conta, quando a introduziu nos momentos de inércia das vigas.

Mahomed Hilal²⁹ aconselha seja computada a torção das vigas, sem se preocupar com a lage, e mesmo assim o processo de que se utiliza é extremamente complicado.

M. J. Blévoit, em seu trabalho "Tabliers de Ponts-Routes en Béton Armé", onde estuda a solidariedade realizada entre as diferentes peças de uma ponte, graças à continuidade das vigas³¹, ao comentar o método de Charueau, deixa bem claro que uma das razões da imperfeição do referido método é "*la quasi-impossibilité de faire intervenir la résistance des entretoises aux couples de torsion*".

Charles Mallet³⁷, apesar de formular inúmeras hipóteses restritivas, quanto à simetria, igualdade de espaçamento e de momento de inércia, observa que "*lorsque les poutres porteuses et les entretoises ont une rigidité de torsion non négligeable, le problème devient extrêmement compliqué*".

O professor Pippard²⁷ admite um espaçamento de vigas transversais suficientemente pequeno, para que se possa lidar com um problema contínuo. A não ser assim, comenta, "*the problem is intractable in a general form*".

Contrariando, entretanto, a afirmação praticamente unânime de que é impossível, para o cálculo da grelha, a obtenção de um método em que se aliem o rigôr e a simplicidade, vimos, com o presente trabalho, apresentar um novo processo onde êsse duplo objetivo é, com felicidade, colimado.

Repousa êle, em última análise, na utilização de funções ortogonais para a resolução de equações de diferenças ordinárias, com coeficientes constantes, de 2.^a e 4.^a ordem.

À base de um algoritmo simples, o método tem grande âmbito de aplicação, e oferece, em suma, as seguintes vantagens:

1) é de grande simplicidade, reduzindo a parte numérica do cálculo às suas justas proporções;

2) possibilita espaçamentos diferentes entre vigas longitudinais;

3) permite sejam diferentes os momentos de inércia das vigas longitudinais e transversais, desde que se conservem constantes em cada viga;

4) admite a passagem, sem qualquer aumento de cálculo, da forma descontínua para a contínua, como seja a lage;

5) autoriza, pela simples observação das fórmulas, a avaliação das diversas influências em jogo;

6) permite a determinação concomitante da distribuição de carga pela lage e vigas transversais;

7) aplica-se ao caso da lage com variação longitudinal de espessura;

8) estende-se às grelhas apoiadas nos quatro bordos;

9) aplica-se às grelhas contínuas.

E, de outro lado, postula apenas a hipótese de espaçamento igual entre as vigas transversais, o que, aliás, corresponde à grande maioria dos casos correntes.

Iniciamos a nossa exposição resolvendo alguns problemas fundamentais intimamente ligados ao método que temos em mira desenvolver.

O presente trabalho é acompanhado de uma parte experimental em modelos de aço, madeira e concreto armado, alguns ensaiados no Laboratório de Estática Experimental da Escola Politécnica de São Paulo, outros na Secção de Estruturas do Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo, e os demais no Instituto de Pesquisas de Materiais da Escola Técnica Superior de Stuttgart e no Instituto de Pesquisas da Escola Técnica Superior de Karlsruhe. Verificou-se excelente concordância entre os resultados experimentais e o cálculo analítico.

III — FUNDAMENTOS DO MÉTODO APRESENTADO

O novo método de cálculo das grelhas decorre das soluções dadas a certos problemas básicos, soluções que, em seu conjunto, constituem a própria essência do processo por nós apresentado. Julgamos, assim, indispensável expor e analisar, sistematicamente, em um só capítulo, esses diferentes problemas, embora de maneira sumária, para que se tenha uma idéia precisa dos dados fundamentais que caracterizam o mencionado processo.

PROBLEMA 1 — Determinar as flechas δ nos pontos equidistantes $0, 1 \dots x \dots n-1, n$ de uma viga livremente apoiada, de momento de inércia J constante, solicitada por cargas concentradas $P_0, P_1 \dots P_x \dots P_{n-1}, P_n$ nestes mesmos pontos.

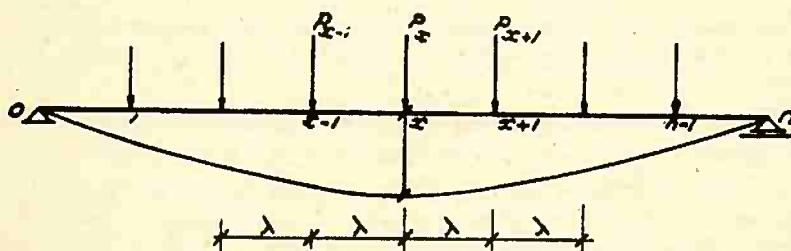


Fig. 1

Partimos da conhecida equação de diferenças da 4.^a ordem:

$$\delta_{x-2} - 4\delta_{x-1} + 6\delta_x - 4\delta_{x+1} + \delta_{x+2} = \frac{\lambda^3}{6EJ} (P_{x-1} + 4P_x + P_{x+1}) \quad (1)$$

As flechas não são influenciadas pelas cargas P_0 e P_n que atuam diretamente sobre os apoios. Desta forma, o cálculo será efetuado com outros valores de P_0 e P_n , em particular, valores nulos. É-nos possível, então, lançar mão do seguinte desenvolvimento trigonométrico:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \sin \frac{i\pi x}{n} \quad (2)$$

onde

$$p_i = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{n-1} P_x \sin \frac{i\pi x}{n} \quad (3)$$

Uma vez que $\delta_0 = \delta_n = 0$, também as flechas δ_x são passíveis de um desenvolvimento semelhante:

$$\delta_x = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \quad (4)$$

Levando êstes valores na equação de diferenças acima, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \left[\operatorname{sen} \frac{i \pi (x-2)}{n} - 4 \operatorname{sen} \frac{i \pi (x-1)}{n} + 6 \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - 4 \operatorname{sen} \frac{i \pi (x+1)}{n} + \operatorname{sen} \frac{i \pi (x+2)}{n} \right] \\ = \frac{\lambda^3}{6 E J} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \left[\operatorname{sen} \frac{i \pi (x-1)}{n} + 4 \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \operatorname{sen} \frac{i \pi (x+1)}{n} \right] \end{aligned}$$

Então:

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 \gamma_i \left(\cos \frac{2 i \pi}{n} - 4 \cos \frac{i \pi}{n} + 3 \right) \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = \frac{\lambda^3}{6 E J} \sum_{i=1}^{n-1} 2 p_i \left(\cos \frac{i \pi}{n} + 2 \right) \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Como x pode tomar qualquer valor inteiro, de 0 a n , resulta:

$$\gamma_i = \frac{\lambda^3 \left(\cos \frac{i \pi}{n} + 2 \right)}{6 \left(\cos \frac{2 i \pi}{n} - 4 \cos \frac{i \pi}{n} + 3 \right)} \frac{p_i}{E J} = \frac{\alpha_i p_i}{E J} \quad (5)$$

onde

$$\alpha_i = \frac{\lambda^3 \left(\cos \frac{i \pi}{n} + 2 \right)}{6 \left(\cos \frac{2 i \pi}{n} - 4 \cos \frac{i \pi}{n} + 3 \right)} \quad (6)$$

Com isso obtemos:

$$\delta_x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \quad (7)$$

Dadas as cargas e , portanto, os p_i (3), as flechas nos diferentes pontos x são determinadas mediante (7).

Para facilidade de cálculo, os valores de α_i , de 1 a $n-1$ encontram-se na tabela I, para n desde 2 até 20.

Se o carregamento consistir em uma única carga P_k , atuando no ponto k , o valor de p_i será, portanto:

$$p_i = \frac{2}{n} P_k \operatorname{sen} \frac{i \pi k}{n} \quad (8)$$

em virtude da fórmula (3).

PROBLEMA 2 — Determinar a flecha, num ponto de abscissa ξ de uma viga livremente apoiada, de momento de inércia J constante, sujeita à carga arbitrariamente distribuída q .

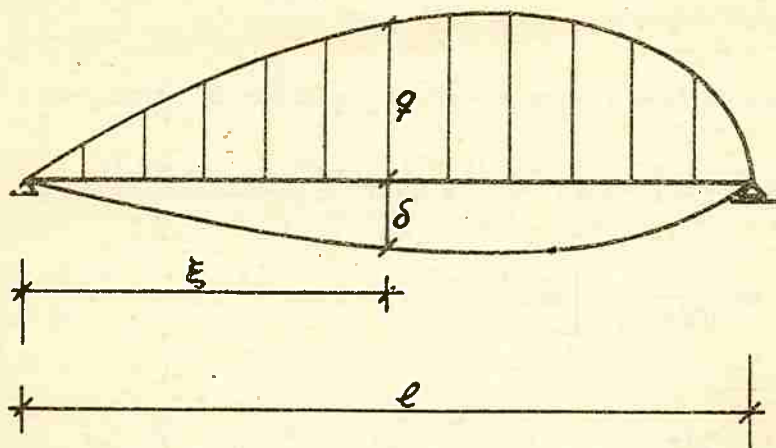


Fig. 2

Este problema pode ser resolvido diretamente, partindo-se da equação diferencial de 4.^a ordem $\frac{d^4 \delta}{d\xi^4} = \frac{q}{EJ}$ ou como limite da solução anterior, onde $n\lambda = l$ e $x\lambda = \xi$, n tendendo a infinito.

No primeiro caso, a solução aparece muito simplesmente, expressando-se a carga em série de Fourier:

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sin \frac{i \pi \xi}{l}, \quad (9)$$

$$g_i = \frac{2}{l} \int_0^l q \sin \frac{i \pi \xi}{l} d\xi \quad (10)$$

Desenvolvendo a flecha δ também em série de senos, na forma

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sin \frac{i \pi \xi}{l} \quad (11)$$

e levando-a na equação diferencial, vem:

$$EJ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \gamma_i \sin \frac{i \pi \xi}{l} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sin \frac{i \pi \xi}{l}$$

donde:

$$\gamma_i = \frac{l^4}{i^4 \pi^4 EJ} g_i \quad (12)$$

Então,

$$\delta = \frac{l^4}{\pi^4 E J} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{i^4} \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} \quad (13)$$

Se a viga estiver solicitada por uma única carga concentrada P , à abscissa ξ , o valor de p_i será, como se sabe:

$$g_i = \frac{2P}{l} \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} \quad (14)$$

Levando essa expressão de g_i em (9), resulta:

$$\delta = \frac{2Pl^3}{\pi^4 E J} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} \quad (15)$$

Por outro lado, a passagem ao limite, para $n \rightarrow \infty$, da expressão (7) já encontrada no problema n.º 1, fornece-nos, sem mais, a solução.

Assim, é fácil verificar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^3 \cos \left(\frac{i \pi}{n} + 2 \right) g_i \lambda}{6 \left(\cos \frac{2 i \pi}{n} - 4 \cos \frac{i \pi}{n} + 3 \right)} = \frac{l^4}{\pi^4 i^4} g_i$$

e, nesse caso limite obtemos:

$$\delta = \frac{l^4}{\pi^4 E J} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{i^4} \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l}$$

como já havíamos encontrado.

PROBLEMA 3 — Nas condições do problema 1, determinar os momentos nas diferentes secções 1, 2...x...n-1.

Partindo da equação de diferenças de 2.ª ordem que liga as cargas P_x e os momentos M_x :

$$M_{x+1} - 2M_x + M_{x-1} = -P_x \lambda \quad (16)$$

o problema se resolve facilmente.

Expressando P_x segundo a soma trigonométrica

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

assim como os momentos,

$$M_x = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \quad (17)$$

— o que é possível, uma vez que $M_0 = M_n = 0$ — e levando-os na equação de diferenças (16), resulta

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i \left[\operatorname{sen} \frac{i\pi(x+1)}{n} - 2 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} + \operatorname{sen} \frac{i\pi(x-1)}{n} \right] = -\lambda \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 \mathcal{M}_i \left(\cos \frac{i\pi}{n} - 1 \right) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} = -\lambda \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n}$$

Portanto:

$$\mathcal{M}_i = - \frac{\lambda p_i}{2 \left(\cos \frac{i\pi}{n} - 1 \right)} = -\rho_i p_i \quad (17a)$$

Então,

$$\mathcal{M}_i = - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i p_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \quad (18)$$

Dadas, pois, as cargas e , consequentemente, os p_i , os momentos são calculados imediatamente por (18).

PROBLEMA 4 — Nas condições do problema 2, determinar o momento fletor M , numa secção de abcissa ξ :

A solução pode advir imediatamente, quer da equação diferencial $\frac{d^2 M}{d\xi^2} = -q$, quer da passagem ao limite do caso anterior.

Assim, desenvolvendo q e M segundo série de Fourier, vem:

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \operatorname{sen} \frac{i\pi \xi}{l}$$

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i \operatorname{sen} \frac{i\pi \xi}{l}$$

e, levando estes valores na equação diferencial, resulta:

$$\frac{d^2 M}{d\xi^2} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \mathcal{M}_i \operatorname{sen} \frac{i\pi \xi}{l} = - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \operatorname{sen} \frac{i\pi \xi}{l}$$

Logo,

$$\mathcal{M}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l^2}{i^2 \pi^2} g_i \operatorname{sen} \frac{i\pi \xi}{l}$$

Portanto:

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l^2}{i^2 \pi^2} g_i \operatorname{sen} \frac{i\pi \xi}{l} \quad (19)$$

resolvendo-se, assim, o problema.

A solução poderia ser também obtida partindo-se da equação (18), onde $x\lambda = \xi$, $n\lambda = l$ e $p_i = g_i\lambda$, e passando-se ao limite para $n \rightarrow \infty$

Assim, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^3}{2 \left(\cos \frac{i\pi}{n} - 1 \right)} = - \frac{l^2}{i^2 \pi^2}$$

obtemos:

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l^2}{i^2 \pi^2} g_i \sin \frac{i\pi x}{l}$$

PROBLEMA 5 — Determinar um sistema de cargas $P_1, P_2, \dots, P_x, \dots, P_{n-1}$ a serem aplicadas nos pontos equidistantes $1, 2, \dots, x, \dots, n-1$ de uma viga livremente apoiada, de momento de inércia J constante, que provoque nesses pontos as mesmas flechas que um outro carregamento dado.

Calculadas as flechas $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_x, \dots, \delta_{n-1}$ naqueles pontos, podemos expressá-las por uma soma trigonométrica do tipo

$$\delta_x = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sin \frac{i\pi x}{n}$$

onde

$$\gamma_i = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{n-1} \delta_x \sin \frac{i\pi x}{n}$$

Suponhamos agora o sistema de cargas $P_1, P_2, \dots, P_x, \dots, P_{n-1}$, atuando sobre a viga.

Pelo que já vimos no problema 1, a flecha causada por êle, num ponto genérico, será:

$$\delta_x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J} \sin \frac{i\pi x}{n}$$

Devendo tais flechas ser iguais às produzidas pelo carregamento dado, temos, como consequência:

$$\frac{\alpha_i p_i}{E J} = \gamma_i$$

$$p_i = \frac{E J \gamma_i}{\alpha_i}$$

Então,

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \sin \frac{i\pi x}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{E J \gamma_i}{\alpha_i} \sin \frac{i\pi x}{n}$$

PROBLEMA 6 — Determinar as rotações das secções situadas nos pontos equidistantes $1, 2 \dots x \dots n-1$ de uma viga engastada, de secção constante, solicitada por momentos de torção $Z_1, Z_2, \dots, Z_x \dots Z_{n-1}$, respectivamente, nesses mesmos pontos.

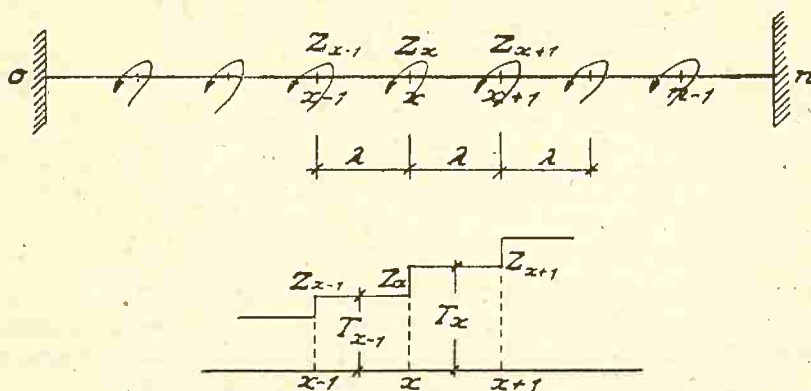


Fig. 3

Seja T_x o momento de torção na viga, no trecho $x, x+1$.

Então:

$$T_x - T_{x-1} = Z_x$$

Por outro lado, entre as rotações θ de duas secções consecutivas, nascem as relações:

$$\theta_x - \theta_{x-1} = \frac{T_{x-1} \lambda}{G J_t}$$

$$\theta_{x-1} - \theta_x = \frac{T_x \lambda}{G J_t}$$

onde GJ_t é o produto de rigidez transversal.

Como consequência, obtemos:

$$\theta_{x-1} - 2\theta_x + \theta_{x+1} = \frac{\lambda}{G J_t} (T_x - T_{x-1}) = \frac{\lambda Z_x}{G J_t} \quad (20)$$

ou seja, uma equação de diferenças de 2.^a ordem, com coeficientes constantes. Sua solução pode ser conseguida, também, com funções ortogonais simples.

Uma vez que Z_0 e Z_n atuam sobre o apoio e, portanto, não intervêm no problema, efetuamos o cálculo atribuindo-lhes valores nulos e escrevemos:

$$Z_x = \sum_{i=1}^{n-1} z_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \quad (21)$$

onde

$$z_i = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{n-1} Z_x \sin \frac{i \pi x}{n} \quad (22)$$

O mesmo podemos fazer com os ângulos de rotação Θ_x , uma vez que as rotações Θ_0 e Θ_n são nulas:

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \sin \frac{i \pi x}{n} \quad (23)$$

Introduzindo este valor na equação de diferenças (20), vem:

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_i \left[\sin \frac{i \pi (x+1)}{n} - 2 \sin \frac{i \pi x}{n} + \sin \frac{i \pi (x-1)}{n} \right] = \frac{\lambda}{G J_t} \sum_{i=1}^{n-1} z_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2 v_i \sin \frac{i \pi x}{n} \left(\cos \frac{i \pi}{n} - 1 \right) = \frac{\lambda}{G J_t} \sum_{i=1}^{n-1} z_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

Portanto:

$$v_i = \frac{\lambda z_i}{2 \left(\cos \frac{i \pi}{n} - 1 \right) G J_t} = \frac{\rho_i z_i}{G J_t} \quad (24)$$

onde

$$\rho_i = \frac{\lambda}{2 \left(\cos \frac{i \pi}{n} - 1 \right)} \quad (25)$$

Levado o valor de v_i (24) expressão (23), obtemos:

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i z_i}{G J_t} \sin \frac{i \pi x}{n} \quad (26)$$

Os valores de ρ_i de $i=1$ até $n-1$, para n de 2 a 20, constam da tabela II.

PROBLEMA 7 — Determinar a rotação Θ de uma secção situada à abscissa ξ de uma viga engastada nas duas extremidades, de secção constante, solicitada por um momento de torção w (tm/m) arbitrariamente distribuído sobre a viga.

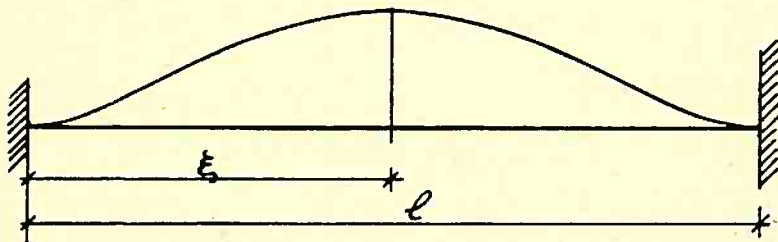


Fig. 4

A solução deste problema pode ser dada de duas maneiras: diretamente, ou com a simples pesquisa de um limite.

Assim, sendo M o momento de torção, na abscissa ξ , a variação angular será:

$$d\theta = \frac{M d\xi}{G J_t}$$

Então,

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} = \frac{dM}{d\xi} \frac{1}{G J_t} = \frac{\omega}{G J_t} \quad (27)$$

Desenvolvendo ω em série de Fourier, vem:

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} \quad (28)$$

onde

$$\Omega_i = \frac{2}{l} \int_0^l \omega \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} d\xi \quad (29)$$

Fazendo o mesmo com o ângulo de rotação θ , tem-se:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} \quad (30)$$

Levados estes valores na equação diferencial (27), resulta:

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} v_i \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Omega_i}{G J_t} \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l}$$

donde

$$v_i = - \frac{l^2}{i^2 \pi^2 G J_t} \Omega_i = \frac{\varphi_i}{G J_t} \Omega_i \quad (31)$$

em que

$$\varphi_i = - \frac{l^2}{i^2 \pi^2} \quad (32)$$

Como consequência:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i}{G J_t} \Omega_i \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} \quad (33)$$

Chegamos a idêntico resultado, fazendo na expressão (26)

$$x\lambda = \xi, \quad n\lambda = l, \quad z_i = \Omega_i \lambda,$$

e passando ao limite para $n \rightarrow \infty$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2 \left(\cos \frac{i\pi}{n} - 1 \right)} = - \frac{l^2}{i^2 \pi^2}$$

obtemos, neste caso limite,

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i}{G J_i} \Omega_i \operatorname{sen} \frac{i\pi \xi}{l}$$

que concorda com a expressão (33), obtida anteriormente.

*
* *

A esta altura, julgamo-nos suficientemente capacitados para abordar e resolver o importante problema da distribuição das cargas nas grelhas, assunto que será objeto do capítulo seguinte.

IV — CÁLCULO DAS GRELHAS

Iniciamos o estudo com as grelhas livremente apoiadas em dois bordos, para então extender o processo às grelhas contínuas. Por serem êstes dois tipos de grande importância nas estruturas de pontes, demoramo-nos mais no seu estudo, distinguindo e analisando os diferentes casos de simetria e assimetria.

Por fim tratamos da grelha apoiada nos quatro bordos que, como se verá, pode ser estudada muito simplesmente, quer pelo processo usado no cálculo das primeiras, quer por outro processo, nada mais que uma generalização daquele.

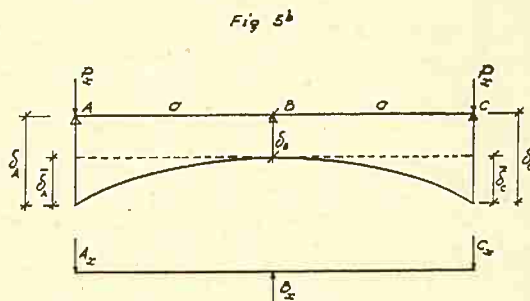
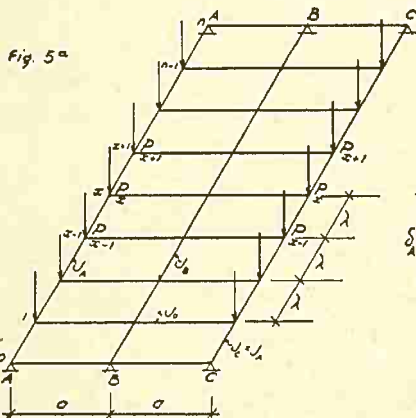
A. GRELHA LIVREMENTE APOIADA, EXCLUIDO O EFEITO DE TORÇÃO

a) Grelhas simétricas

1. TRÊS VIGAS LONGITUDINAIS

1.1. Vigas de bordo carregadas simetricamente.

Seja a grelha da (fig. 5), simétrica em relação à viga B, carregada por um conjunto de cargas simétricas $\dots P_{x-1}, P_x, P_{x+1} \dots$, atuando nas vigas A e B.



Analiseemos a viga transversal de ordem x . Entre as flechas existe a relação seguinte:

$$\delta_A = \delta_B + \bar{\delta}_A = \delta_C \quad (34)$$

Por outro lado, esta viga transversal deve estar em equilíbrio sob a ação das reações recíprocas A_x , B_x e C_x entre ela e as vigas longitudinais. Em virtude do equilíbrio, vem:

$$B_x = 2 A_x = 2 C_x \quad (35)$$

Podemos desenvolver P_x segundo a soma trigonométrica abaixo:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

em que

$$p_i = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} P_x \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Também as reações recíprocas entre vigas são passíveis de um desenvolvimento análogo:

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \quad (36)$$

Então, de acordo com o problema 1 do capítulo anterior, ter-se-á:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \\ \delta_B &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \end{aligned}$$

Quanto à flecha $\bar{\delta}_A$ podemos considerá-la como sendo a flecha produzida na extremidade de uma viga engastada, com momento de inércia J_0 , de comprimento a , solicitada por uma carga A_x agindo no extremo. Sendo assim, vem:

$$\bar{\delta}_A = \frac{a^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Levados esses valores na relação (34) e admitindo E constante para toda a grelha, resulta:

$$\frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} = \frac{2 \alpha_i A_i}{J_B} + \frac{a^3}{3 J_0} A_i$$

D'onde:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + 2 \alpha_i \frac{J_A}{J_B} + \frac{a^3}{3} \cdot \frac{J_A}{J_0}} \quad (37)$$

Sendo $J_A = J_B = J_C = J$ obtem-se:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{3 \alpha_i + \frac{a^3}{3} \frac{J}{J_0}} \quad (37a)$$

Quando o carregamento consistir em um único par de cargas P_k , atuando no ponto de ordem k basta fazer nas expressões acima

$$p_i = \frac{2}{n} P_k \sin \frac{i \pi k}{n}$$

Dadas as cargas e então os p_i , assim como os valores de α_i que constam da tabela I, os valores de A_i são determinados por (37). A fórmula (36) nos dará os valores de A_x para todos os pontos desde $x=1$ até $n-1$.

12. Vigas de bordo carregadas antimetricamente.

As cargas P_x sendo antimétricas não solicitam as vigas transversais. Cada uma das vigas de bordo suporta independentemente as cargas que as solicitam como se não houvesse vigas transversais (fig. 6).

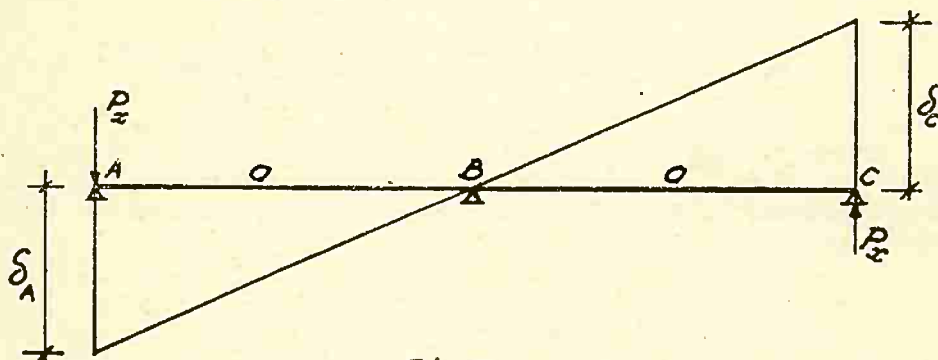


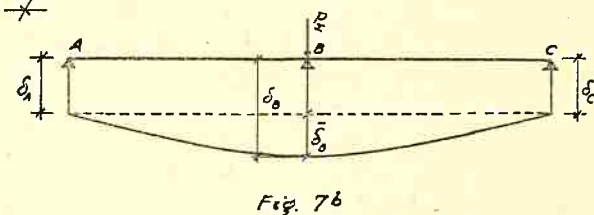
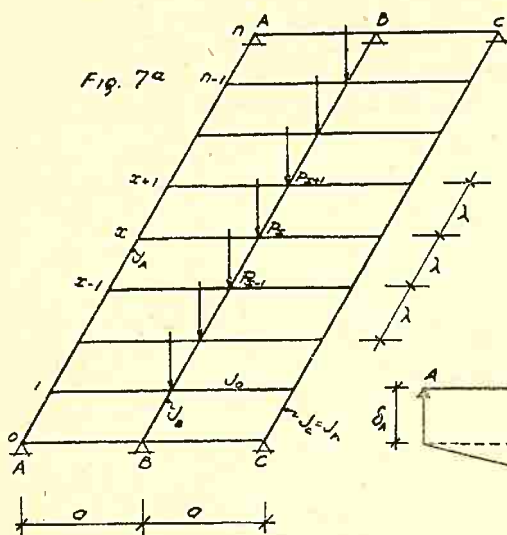
Fig. 6

12. Vigas de bordo carregadas assimetricamente.

Se apenas uma viga de bordo estiver carregada, a solução resulta facilmente da superposição dos dois casos anteriores.

13. Viga central carregada.

Suponhamos que em cada nó x exista uma carga P_x (fig. 7).



Pela análise da viga transversal de ordem x conclui-se que:

$$\delta_A = \delta_B - \bar{\delta}_B \quad (38)$$

Do equilíbrio da viga transversal resulta:

$$B_x = 2 A_x \quad (39)$$

De maneira análoga ao caso 11 chega-se a:

$$\frac{\alpha_i A_i}{J_A} = \frac{\alpha_i P_i}{J_B} - \frac{\alpha_i B_i}{J_B} - \frac{a^3}{3 J_0} A_i$$

Como, em virtude de (39), $B_i = 2 A_i$, vem:

$$A_i = \frac{\alpha_i P_i}{\alpha_i \frac{J_B}{J_A} + 2 \alpha_i + \frac{a^3}{3} \cdot \frac{J_B}{J_0}} \quad (40)$$

Se $J_A = J_B = J$ tem-se:

$$A_i = \frac{\alpha_i P_i}{3 \alpha_i + \frac{a^3}{3} \frac{J}{J_0}}, \quad (40a)$$

expressão idêntica à já encontrada (37a).

Em se tratando de uma única carga P_k , atuando no ponto k , então o valor de P_i será igual a

$$\frac{2}{n} P_x \operatorname{sen} \frac{i \pi k}{n}$$

Se quisermos, nos casos estudados acima, considerar as vigas transversais com rigidez infinita, isto é, indeformáveis, basta fazer $J_0 = \infty$ nas expressões de A_1 .

14. Vigas transversais carregadas simetricamente.

Admitamos que sobre as vigas transversais se estendam duas linhas de cargas concentradas, simétricas em relação à viga central (fig. 8).

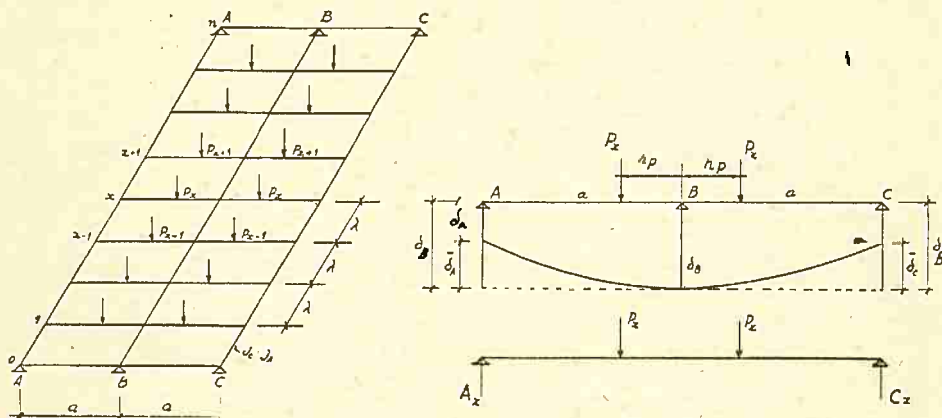


Fig 8^a

Fig 8^b

Tomando-se uma viga genérica de ordem x , observa-se a seguinte relação entre as flechas:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \delta_B. \quad (41)$$

Do equilíbrio resulta:

$$2 A_x + B_x = 2 P_x \quad (42)$$

Mas

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n};$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{a^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{AP}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

onde $\frac{\eta_{AP}}{E J_0}$ é a flecha em A provocada por carga unitária à distância r_p ;

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

De (42) resulta:

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Portanto

$$2 A_i + B_i = 2 p_i,$$

d'onde

$$B_i = 2 p_i - 2 A_i.$$

Levados os valores das flechas na expressão (41) obtem-se:

$$\frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{a^3}{3 J_o} A_i - \frac{\eta_{AP}}{J_o} p_i = \frac{\alpha_i B_i}{J_B}$$

O valor de A_i será então: ,

$$A_i = \frac{2 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{\eta_{AP}}{J_o}}{\frac{\alpha_i}{J_A} + 2 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{a^3}{J_o}} \cdot p_i \quad (43)$$

Dadas as cargas e, portanto, os p_i , assim como a sua posição (r_P), a expressão acima determina imediatamente os A_i ; com estes a reação A_x ($x = 1, 2 \dots n-1$) será obtida de:

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n},$$

o que resolve completamente o problema.

15. Vigas transversais carregadas antimetricamente.

Conforme se observa na fig. 9, a cada viga transversal x corresponde um par de cargas antimétricas P_x .

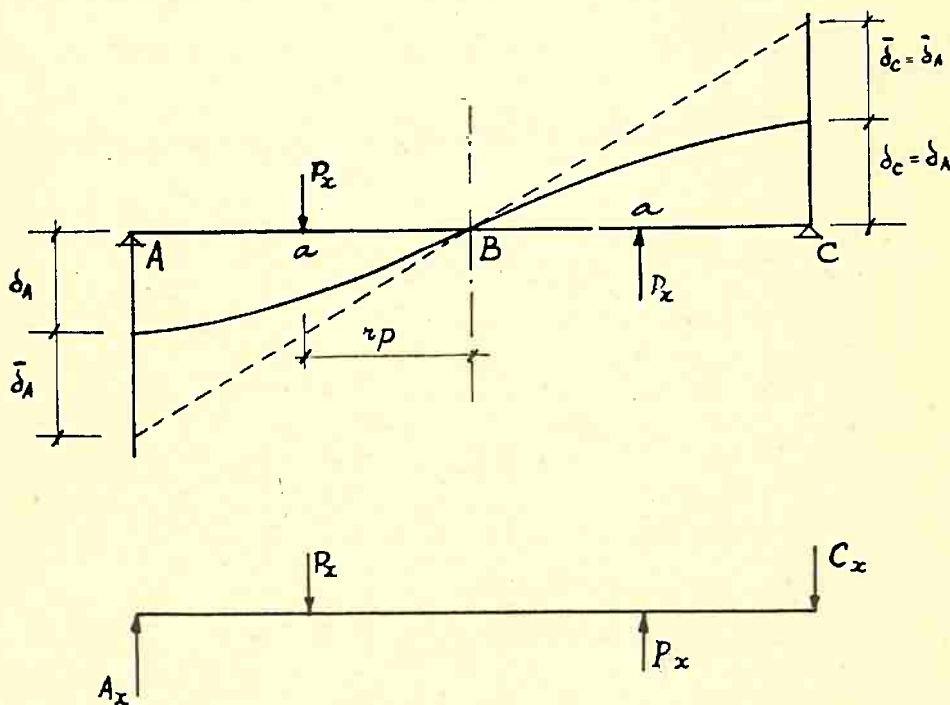


Fig. 9

Do equilíbrio da viga transversal de ordem x surge a relação:

$$A_x \cdot a = P_x \cdot r_p$$

$$\therefore A_x = \frac{r_p}{a} P_x \quad (44)$$

Desenvolvido P_x segundo a soma trigonométrica

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

onde

$$p_i = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{n-1} P_x \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

e, admitido para A_x um desenvolvimento semelhante

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

vem:

$$A_i = \frac{r_p}{a} p_i \quad (45)$$

Se houver apenas um par de cargas P_k , todas as reações são nulas excepto A_k .

Exemplo: Suponhamos a grelha da (fig. 10) solicitada por uma carga P ao centro.

$$a = \lambda$$

$$J_A = J_B = J_C = J_o$$

$$n = 4$$

$$k = 2$$

Neste caso, pela fórmula (40) vem:

$$A_i = \frac{\alpha_i \operatorname{sen} \frac{i \pi}{2}}{2 \left(3 \alpha_i + \frac{a^3}{3} \right)} P$$

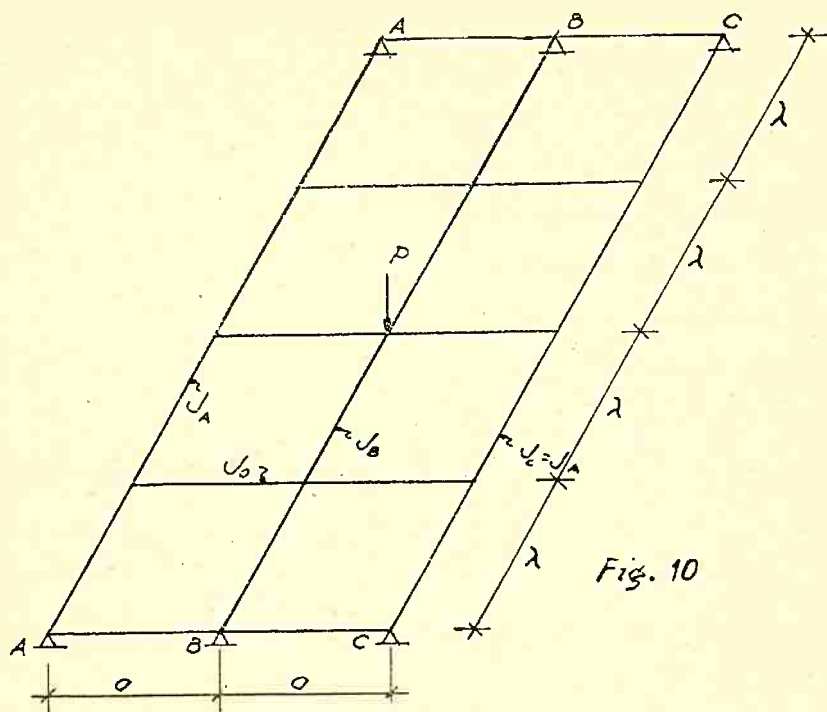
Da tabela I se tem:

$$\alpha_1 = 2,62990 \lambda^3$$

$$\alpha_3 = 0,03697 \lambda^3$$

Portanto

$$A_1 = \frac{2,62990 P}{2(3 \times 2,62990 + 0,33333)} = 0,15991 P$$



$$A_2 = 0$$

$$A_3 = - \frac{0,03697 P}{2(3 \times 0,03697 + 0,33333)} = -0,04161 P$$

Então,

$$A_1 = \sum_1^3 A_i \operatorname{sen} \frac{i\pi}{4} = 0,0837 P$$

$$A_2 = \sum_1^3 A_i \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2} = 0,2015 P$$

Com isto

$$B_1 = 2 A_1 = 0,1674 P$$

$$B_2 = 2 A_2 = 0,4030 P$$

2. QUATRO VIGAS LONGITUDINAIS

2.1. Vigas de bordo carregadas simetricamente.

Sejam então as vigas de bordo A e B, carregadas por pares de cargas simétricas P_{x-1} , P_x , P_{x+1} ... (fig. 11).

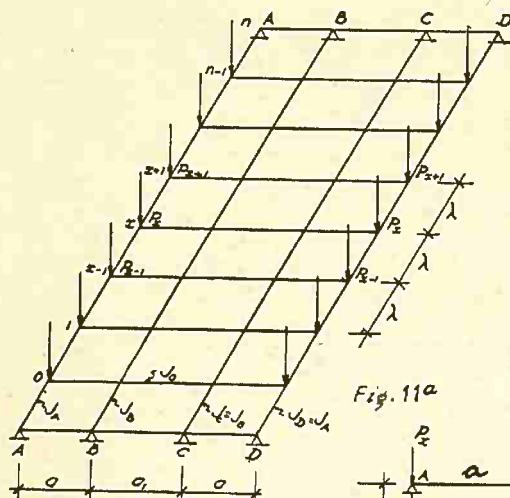


Fig. 11a

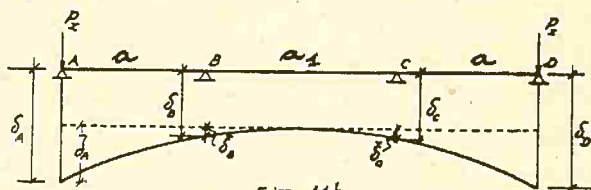


Fig. 11b

Numa viga transversal de ordem x existe a seguinte relação entre as flechas:

$$\delta_A - \bar{\delta}_A = \delta_B - \bar{\delta}_B. \quad (46)$$

Do equilíbrio da viga transversal resulta:

$$A_x = B_x = C_x = D_x. \quad (47)$$

Mas

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \sin \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \sin \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\left(\frac{a_1}{2} + a\right)^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \sin \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^3}{24 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

Levados êstes valores na expressão (46) vem:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} - \frac{\left(\frac{a_1}{2} + a\right)^3}{3 J_0} A_i + \frac{a_1^2}{24 J_0} (3a + a_1) B_i = \\ = \frac{\alpha_i B_i}{J_B} - \frac{a_1^2}{24 J_0} (3a + a_1) A_i + \frac{a_1^3}{24 J_0} B_i. \end{aligned}$$

Em virtude de (47) $A_1 = B_1$; então:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 + \alpha_1 \frac{J_A}{J_B} + \frac{1}{3} \left(a + \frac{a_1}{2}\right)^3 \frac{J_A}{J_0} - \frac{a_1^2}{12} (3a + a_1) \frac{J_A}{J_0} + \frac{a_1^3}{24} \frac{J_A}{J_0}} \quad (48)$$

Se for $a_1 = a$, obtem-se:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 + \alpha_1 \frac{J_A}{J_B} + \frac{5}{6} a^3 \frac{J_A}{J_0}}; \quad (48a)$$

e, se além disso, $J_A = J_B = J_C = J_D = J$,

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{2\alpha_1 + \frac{5}{6} a^3 \frac{J}{J_0}} \quad (48b)$$

Havendo apenas um par de cargas P_k atuando no ponto de ordem k bastará fazer $p_1 = \frac{2}{n} P_k \sin \frac{i\pi k}{n}$

22. Vigas de bordo carregadas antissimetricamente (fig. 12).

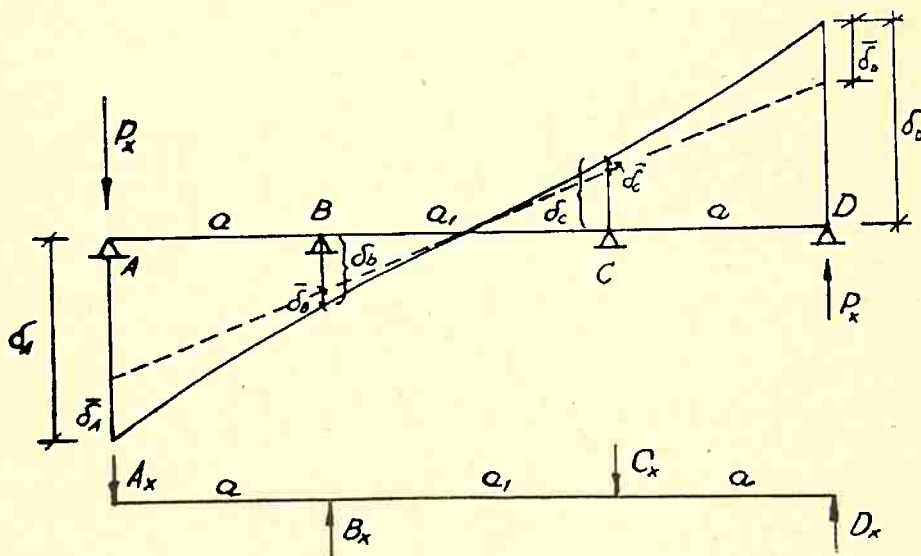


Fig 12

Neste caso a relação entre as flechas na transversal de ordem x será:

$$\delta_A - \bar{\delta}_A = \frac{2a + a_1}{a_1} (\delta_B - \bar{\delta}_B). \quad (49)$$

O equilíbrio da viga transversal, por outro lado, exige que:

$$B_x = \frac{2a + a_1}{a_1} A_x \quad (50)$$

Mas

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\left(a + \frac{a_1}{2}\right)^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^3}{24 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Levados estes valores na expressão (49), e tendo em conta que

$$B_i = \frac{2a + a_1}{a_1} A_i,$$

resulta:

$$A_i = \quad (51)$$

$$\frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + \left(\frac{2a+a_1}{a_1}\right)^2 \frac{J_A}{J_B} + \frac{1}{3} \left(a + \frac{a_1}{2}\right) \frac{J_A}{J_0} - \frac{a_1^2}{12} (3a + a_1) \frac{2a + a_1}{a_1} \frac{J_A}{J_0} + \frac{1}{24} \left(\frac{2a+a_1}{a_1}\right) a_1^3 \frac{J_A}{J_0}}$$

Se for $a_1 = a$ vem:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + 9 \alpha_i \frac{J_A}{J_B} + \frac{a^3}{2} \frac{J_A}{J_0}}, \quad (51a)$$

e se, além disso, $J_A = J_B = J_C = J_D = J$,

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{10 \alpha_i + \frac{a^3}{2} \frac{J}{J_0}} \quad (51b)$$

23. Vigas de bordo carregadas assimetricamente.

Se apenas uma das vigas de bordo estiver carregada, a solução se apresenta muito simplesmente pela superposição dos dois últimos casos.

24. Vigas internas carregadas simetricamente.

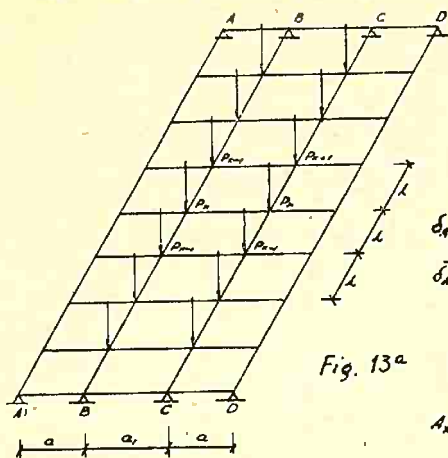


Fig. 13a

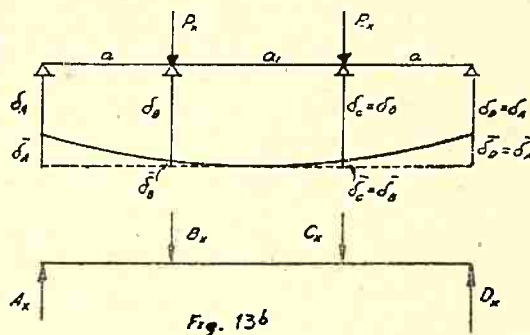


Fig. 13b

Da figura conclui-se que:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \delta_B + \bar{\delta}_B \quad (52)$$

O equilíbrio da viga transversal exige que:

$$A_x = B_x = C_x = D_x \quad (53)$$

Desenvolvidas as cargas P_x segundo a soma trigonométrica

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

e admitido um desenvolvimento análogo para as reações recíprocas entre vigas, do tipo

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

então, a exemplo dos casos anteriores, podemos escrever:

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\left(a + \frac{a_1}{2}\right)^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^3}{24 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Em virtude (53) tem-se:

$$A_1 = B_1$$

Então:

(54)

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 \frac{J_B}{J_A} + \alpha_1 + \frac{1}{3} \left(a + \frac{a_1}{2} \right)^3 \frac{J_B}{J_0} - \frac{a_1^2}{12} (3a + a_1) \frac{J_B}{J_0} + \frac{a_1^3}{24} \frac{J_B}{J_0}},$$

expressão idêntica à encontrada no caso 21, quando se substitui J_A por J_B , como era de se esperar.

Se for $a_1 = a$ virá:

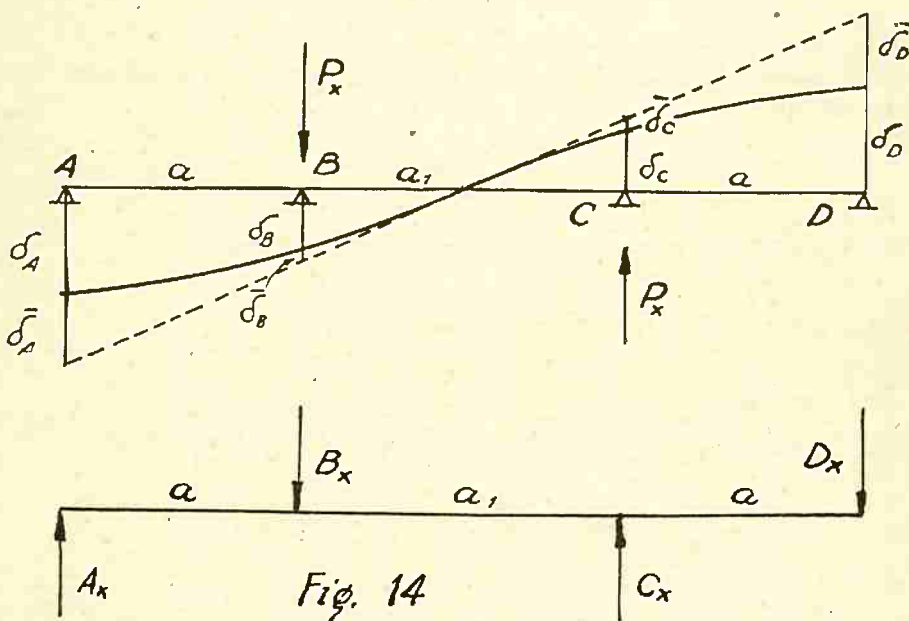
$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 \frac{J_B}{J_A} + \alpha_1 + \frac{5}{6} a^3 \frac{J_B}{J_0}} \quad (54a)$$

e, se além disso, $J_A = J_B = J_C = J_D = J$:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{2\alpha_1 + \frac{5}{6} a^3 \frac{J}{J_0}} \quad (54b)$$

Havendo apenas um par de cargas P_k , agindo no ponto de ordem k , bastará fazer $p_1 = \frac{2}{n} P_k \sin \frac{i \pi k}{n}$.

25. Vigas internas carregadas antimetricamente (fig. 14).



Neste caso entre as flechas há a seguinte relação:

$$\partial_A + \bar{\partial}_A + \frac{2a + a_1}{a_1} (\partial_B + \bar{\partial}_B) \quad (55)$$

O equilíbrio, por outro lado, exige que:

$$B_x = \frac{2a + a_1}{a_1} A_x \quad (56)$$

Mas, valendo-nos dos mesmos desenvolvimentos trigonométricos para P_x , A_x e B_x dos casos anteriores, podemos escrever:

$$\partial_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\partial}_A = \frac{\left(a + \frac{a_1}{2}\right)^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\partial_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\partial}_B = \frac{a_1^2}{24 E J_0} (3a + a_1) \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a_1^3}{24 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Da expressão (56) concluímos também:

$$B_i = \frac{2a + a_1}{a_1} A_i.$$

Com isto segue:

$$A_i = \frac{(2a + a_1) \alpha_i p_i}{a_1 \left[\alpha_i \frac{J_B}{J_A} + \alpha_i \left(\frac{2a + a_1}{a_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(a + \frac{a_1}{2} \right)^3 \frac{J_B}{J_0} - \frac{a_1^2}{12} (3a + a_1) \left(\frac{2a + a_1}{a_1} \right) \frac{J_B}{J_0} + \frac{a_1^3}{24} \left(\frac{2a + a_1}{a_1} \right)^2 \frac{J_B}{J_0} \right]} \quad (57)$$

Quando for $a = a_1$, resulta:

$$A_i = \frac{3 \alpha_i p_i}{\alpha_i \frac{J_B}{J_A} + 9 \alpha_i + \frac{a_1^3}{2} \frac{J_B}{J_0}} \quad (57a)$$

E, se além disso, $J_A = J_B = J_C = J_D = J$,

$$A_i = \frac{3 \alpha_i p_i}{10 \alpha_i + \frac{a^3}{2} \frac{J}{J_0}} \quad (57b)$$

26. *Vigas internas carregadas assimetricamente.*

Apenas uma das vigas internas é carregada. A simples superposição dos dois últimos casos fornece as reações procuradas.

27. *Vigas transversais carregadas simetricamente.*

Duas linhas de cargas simétricas solicitam as vigas transversais, cabendo à viga x o par simétrico P_x .

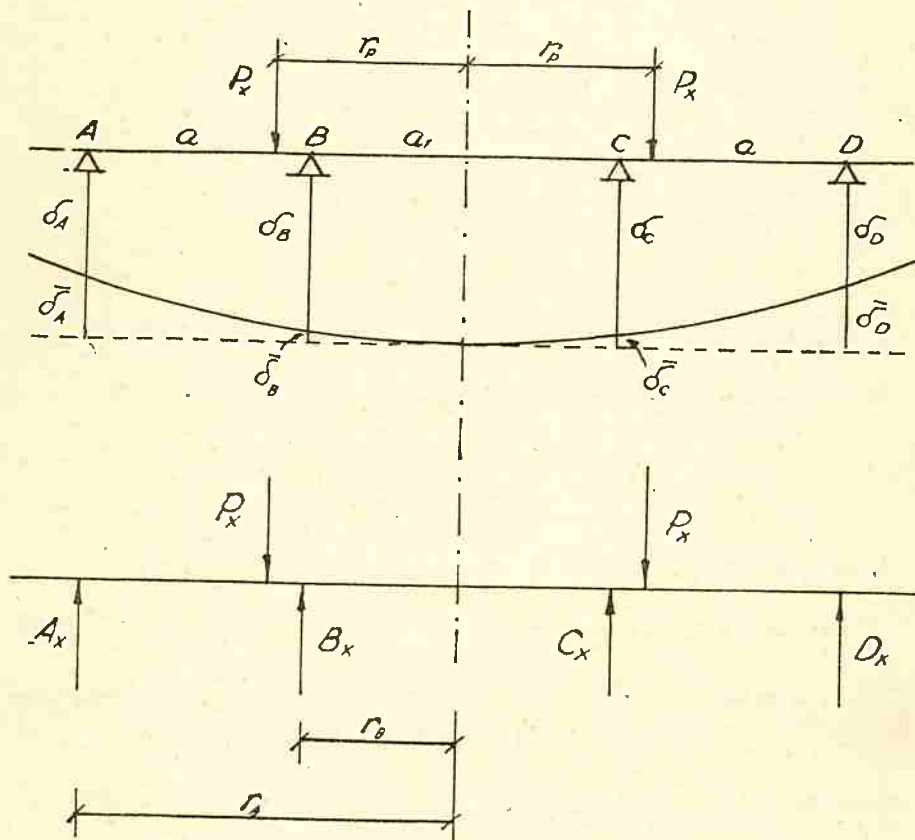


Fig. 15

Pela análise de uma viga transversal genérica x conclui-se que:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \delta_B + \bar{\delta}_B \quad (58)$$

e

$$B_x = P_x - A_x \quad (59)$$

As flechas podem ser expressas da seguinte forma:

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\eta_{AA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\eta_{AB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{AP}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\eta_{BA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\eta_{BB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{BP}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Nestas expressões $\frac{\eta_{KL}}{E J_0}$ significa a flecha em K devido à carga em L , de uma viga engastada em consolo, com momento de inércia J_0 .

Assim:

$$\eta_{AA} = \frac{r_A^3}{3},$$

$$\eta_{AB} = \frac{r_B^2}{6} (3 r_A - r_B) = \eta_{BA},$$

$$\eta_{AP} = \begin{cases} \frac{r_P^2}{6} (3 r_A - r_P) & \text{quando } r_P < r_A, \\ \frac{r_A^2}{6} (3 r_P - r_A) & \text{quando } r_P > r_A, \end{cases}$$

$$\eta_{BB} = \frac{r_B^3}{3},$$

$$\eta_{BP} = \begin{cases} \frac{r_B^2}{6} (3 r_P - r_B) & \text{quando } r_P > r_B, \\ \frac{r_P^2}{6} (3 r_B - r_P) & \text{quando } r_P < r_B. \end{cases}$$

Levando os valores das flechas na expressão (58), e atendendo que $B_1 = p_1 - A_1$, vem:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_i A_1}{J_A} + \frac{\eta_{AA}}{J_o} A_1 + \frac{\eta_{AB}}{J_o} (p_1 - A_1) - \frac{\eta_{AP}}{J_o} p_1 = \\ & = \frac{\alpha_i}{J_B} (p_1 - A_1) + \frac{\eta_{BA}}{J_o} A_1 + \frac{\eta_{BB}}{J_o} (p_1 - A_1) - \frac{\eta_{BP}}{J_o} p_1 \end{aligned}$$

Portanto:

$$A_1 = \frac{\frac{1}{J_o} (\eta_{AP} + \eta_{BB} - \eta_{AB} - \eta_{BP}) + \frac{\alpha_i}{J_B}}{\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{1}{J_o} (\eta_{AA} - 2\eta_{AB} + \eta_{BB})} p_1 \quad (60)$$

Se $r_P = r_B$ então:

$$\eta_{AP} = \eta_{AB} \text{ e } \eta_{BP} = \eta_{BB}.$$

Sendo assim:

$$\eta_{AP} + \eta_{BB} - \eta_{AB} - \eta_{BP} = 0.$$

A expressão de A_1 torna-se por isto idêntica à deduzida no caso 24; se além disso for $a = a$, resulta:

$$\eta_{AA} - \eta_{AB} + \eta_{BB} = \frac{5}{6} a^3,$$

e a expressão de A_1 passa a:

$$A_1 = \frac{\alpha_i p_1}{\alpha_i \frac{J_B}{J_A} + \alpha_i + \frac{5}{6} a^3 \frac{J_B}{J_o}}$$

idêntica à expressão (54a).

Por outro lado, se for $r_P = r_A$, vem:

$$\eta_{AP} = \eta_{AA} \text{ e } \eta_{BP} = \eta_{BA}$$

Portanto:

$$A_1 = \frac{\frac{1}{J_o} (\eta_{AA} - 2\eta_{AB} + \eta_{BB}) + \frac{\alpha_i}{J_B}}{\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{1}{J_o} (\eta_{AA} - 2\eta_{AB} + \eta_{BB})} \cdot p_1$$

Admitindo que as cargas P_x , neste caso, atuem diretamente sobre as vigas longitudinais A e D, e não nas transversais, chamemos $A_x' = D_x'$ as reações recíprocas que então aparecem. À vista disto segue:

$$A_x = P_x - A_x'$$

e portanto

$$A_i = p_i - A_i'$$

Levando este valor na expressão de A_i logo acima, resulta:

$$A_i' = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + \alpha_1 \frac{J_A}{J_B} + \frac{J_A}{J_0} \left(\eta_{AA} - 2\eta_{AB} + \eta_{BB} \right)}$$

Fazendo também $a = a_1$ obtém-se:

$$A_i' = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + \alpha_1 \frac{J_A}{J_B} + \frac{5}{6} a^3 \frac{J_A}{J_0}}$$

idêntica à expressão (48a), como era de se esperar.

28. Vigas transversais carregadas antimetricamente (fig. 16).

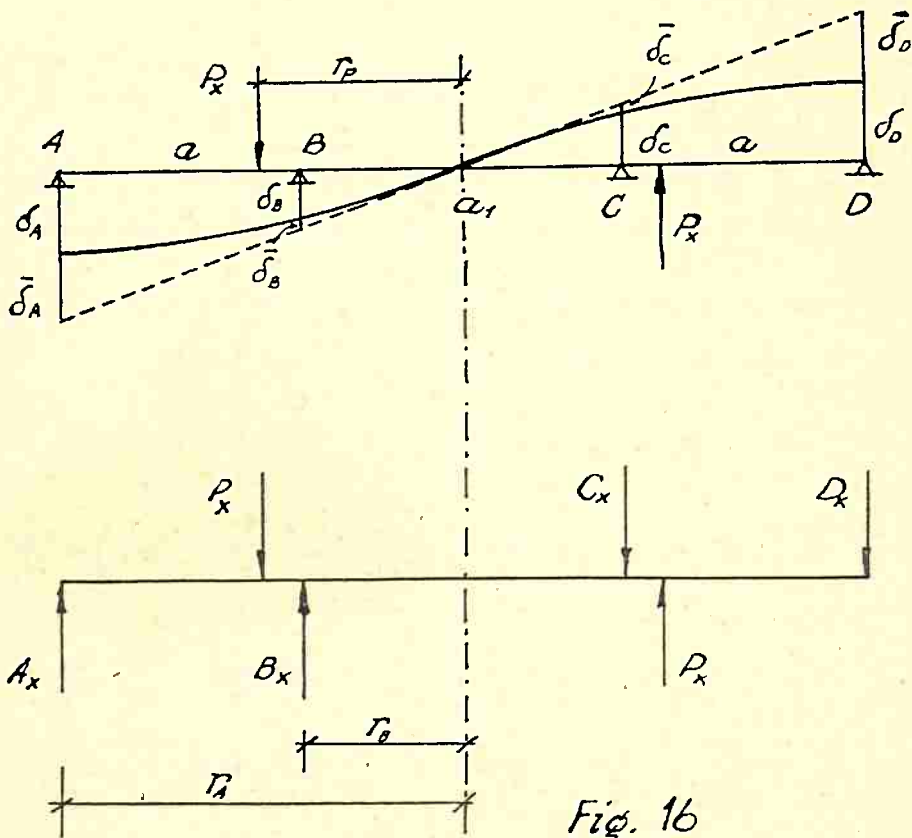


Fig. 16

Consideremos a viga transversal genérica de ordem x . Das flechas tem-se:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \frac{r_A}{r_B} (\delta_B + \bar{\delta}_B) \quad (61)$$

Do equilíbrio da mesma viga segue:

$$B_x = \frac{1}{r_B} (r_P P_x - r_A A_x) \quad (62)$$

Desenvolvendo, a exemplo dos casos anteriores, a carga P_x segundo a soma trigonométrica já conhecida, e admitindo desenvolvimento análogo das reações A_x e B_x , podemos escrever:

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\eta_{AA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\eta_{AB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{AP}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\eta_{BA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\eta_{BB}}{J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{BP}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Os $\frac{\eta_{KL}}{E J_0}$, como já sabemos, significam as flechas nos pontos K provocadas por cargas unitárias em L , n'uma viga engastada em consolo, de momento de inércia J_0 .

Levando estes valores das flechas na expressão (61) e tendo em conta que, em virtude de (62), $B_i = \frac{1}{r_B} (r_P p_i - r_A A_i)$ vem:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\eta_{AA}}{J_0} A_i + \frac{\eta_{AB}}{J_0} \frac{1}{r_B} (r_P p_i - r_A A_i) - \frac{\eta_{AP}}{J_0} p_i = \\ & = \frac{\alpha_i}{J_B} \frac{1}{r_B} (r_P p_i - r_A A_i) + \frac{\eta_{BA}}{J_0} A_i + \frac{\eta_{BB}}{J_0} \frac{1}{r_B} (r_P p_i - r_A A_i) - \frac{\eta_{BP}}{J_0} p_i \end{aligned}$$

D'onde:

$$A_i = \frac{\frac{r_A}{r_B} \frac{r_P}{r_B} \frac{\alpha_i}{J_B} - \frac{r_P}{r_B} \frac{\eta_{AB}}{J_0} + \frac{\eta_{AP}}{J_0} + \frac{r_A}{r_B} \frac{r_P}{r_B} \frac{\eta_{BB}}{J_0} - \frac{r_A}{r_B} \frac{\eta_{BP}}{J_0}}{\frac{\alpha_i}{J_A} + \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{\eta_{AA}}{J_0} - 2 \frac{r_A}{r_B} \frac{\eta_{AB}}{J_0} + \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \frac{\eta_{BB}}{J_0}} \cdot p_i \quad (63)$$

No caso particular em que $a = a$, e $r_P = r_B$, vem:

$$\frac{r_A}{r_B} = 3, \eta_{AP} = \eta_{AB} \text{ e } \eta_{BP} = \eta_{BB}$$

Então:

$$A_i = \frac{3 \alpha_i p_i}{\alpha_i \frac{J_B}{J_A} + 9 \alpha_i + \frac{J_B}{J_0} (\eta_{AA} - 6 \eta_{AB} + 9 \eta_{BB})}$$

Mas, neste caso,

$$\eta_{AA} - 6 \eta_{AB} + 9 \eta_{BB} = \frac{9}{8} a^3 - a^3 + \frac{9}{24} a^3 = \frac{a^3}{2},$$

d'onde resulta:

$$A_i = \frac{3 \alpha_i p_i}{\alpha_i \frac{J_B}{J_A} + 9 \alpha_i + \frac{a^3}{2} \frac{J_B}{J_0}},$$

expressão idêntica à (57a), como era de se esperar.

Por outro lado, sendo $r_P = r_A$, a expressão (63) toma o aspecto:

$$A_i = \frac{9 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{1}{J_0} (\eta_{AA} - 6 \eta_{AB} + 9 \eta_{BB})}{\frac{\alpha_i}{J_A} + 9 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{1}{J_0} (\eta_{AA} - 6 \eta_{AB} + 9 \eta_{BB})}$$

Admitindo que, neste caso, as cargas atuem diretamente sobre as vigas A e D, e não sobre as transversais, as reações recíprocas que então aparecem, $A_x' = D_x'$ estão ligadas a $A_x = D_x$ pela relação:

$$A_x = P_x - A_x'$$

Daí, considerado o desenvolvimento trigonométrico já conhecido, vem:

$$A_i = p_i - A_i'$$

Levando este valor na expressão de A_i logo acima obtém-se:

$$A_i' = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + 9 \alpha_i \frac{J_A}{J_B} + \frac{1}{J_0} (\eta_{AA} - 6 \eta_{AB} + 9 \eta_{BB})}$$

Sendo ainda $a = a$, resulta:

$$A_i' = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + 9 \alpha_i \frac{J_A}{J_B} + \frac{a^3}{2} \frac{J_A}{J_0}},$$

expressão que é idêntica a (51a).

29. Vigas transversais carregadas assimetricamente.

Pela superposição dos dois últimos casos determinam-se as reações recíprocas entre as vigas longitudinais e transversais.

Exemplo 2. Para mostrar a rapidez e a simplicidade do método apresentado por nós, tomemos a mesma grelha resolvida por Ostenfeld (18) à página 39.

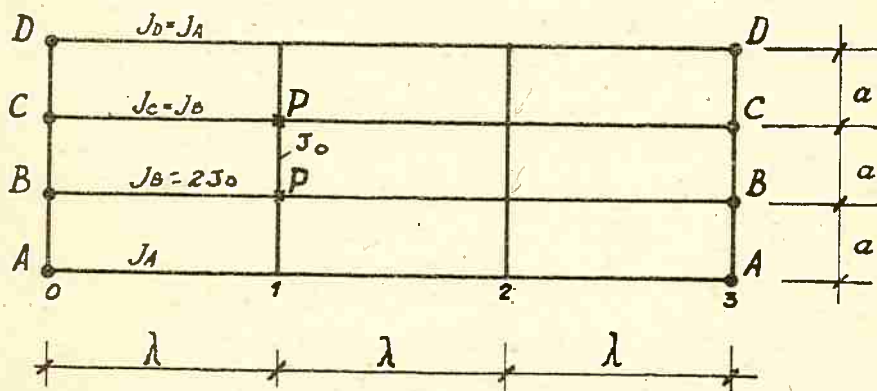


Fig. 17

Trata-se de uma grelha com as seguintes características:

$$4J_0 = J_A = J_D = 2J_B = 2J_C \quad \lambda = 4a$$

$$n = 3 \quad k = 1$$

Havendo um único par de cargas P_k , temos:

$$p_k = \frac{2}{n} P \sin \frac{i\pi k}{n}$$

Portanto:

$$p_1 = \frac{2}{3} P \sin \frac{\pi}{3} = 0,57735 P.$$

$$\text{e } p_2 = \frac{2}{3} P \sin \frac{2\pi}{3} = 0,57735 P$$

Mas, de acôrdo com a expressão (54a):

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 \frac{J_B}{J_A} + \alpha_1 + \frac{5}{6} a^3 \frac{J_B}{J_0}}$$

Da tabela I, para $n = 3$, temos

$$\alpha_1 = 0,83333 \lambda^3 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 0,05556 \lambda^3$$

Então:

$$A_2 = \frac{0,83333 \times 0,57735 P}{0,83333 \times 1,5 + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 2} = 0,3770 P,$$

$$A_1 = \frac{0,05556 \times 0,57735 P}{0,05556 \times 1,5 + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 2} = 0,2932 P$$

As reações serão pois:

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n},$$

$$A_1 = B_1 = (0,3770 \times 0,86603 + 0,2932 \times 0,86603) P \\ = 0,580 P,$$

$$A_2 = B_2 = (0,3770 \times 86603 - 0,2932 \times 0,86603) \\ = 0,073 P,$$

o que resolve completamente o problema.

Cumprе notar que Ostenfeld para resolve-lo gasta 5 páginas, sem atingir a precisão que alcançamos.

Exemplo 3. Tomemos ainda outra grelha estudada por Ostenfeld à página 47, figura 18, para cujo cálculo se utiliza de um método de aproximação sucessiva, uma vez que o processo direto por êle apresentado assume tal complexidade que o torna praticamente inexequível.

As características da grelha são:

$$n = 10 \quad J_A = J_B = J_C = J_D = 5 J_0$$

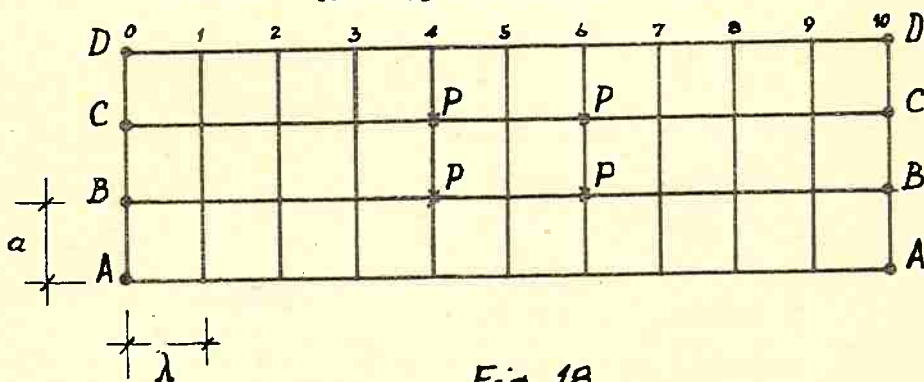


Fig. 18

Utilizamos-nos da mesma fórmula do exemplo anterior que aplicada ao caso dá:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{2 \alpha_1 + \frac{25}{6} a^3}$$

Os coeficientes do desenvolvimento de P_x serão:

$$p_1 = \frac{2}{10} \sum_{x=1}^9 P_x \sin \frac{i \pi x}{n} = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{2 i \pi}{5} + \sin \frac{3 i \pi}{5} \right)$$

Então:

$$p_1 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{2 \pi}{5} + \sin \frac{3 \pi}{5} \right) = 0,38042 P$$

$$p_2 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{4 \pi}{5} + \sin \frac{6 \pi}{5} \right) = 0 ,$$

$$p_3 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{6 \pi}{5} + \sin \frac{9 \pi}{5} \right) = -0,23512 P ,$$

$$p_4 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{8 \pi}{5} + \sin \frac{12 \pi}{5} \right) = 0 ,$$

$$p_5 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{10 \pi}{5} + \sin \frac{15 \pi}{5} \right) = 0 ,$$

$$p_6 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{12 \pi}{5} + \sin \frac{18 \pi}{5} \right) = 0 ,$$

$$p_7 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{14 \pi}{5} + \sin \frac{21 \pi}{5} \right) = 0,23512 P ,$$

$$p_8 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{16 \pi}{5} + \sin \frac{24 \pi}{5} \right) = 0 ,$$

$$p_9 = \frac{P}{5} \left(\sin \frac{18 \pi}{5} + \sin \frac{27 \pi}{5} \right) = -0,38042 P ,$$

Os valores de A_1 serão com isso:

$$A_1 = \frac{102,89609 \lambda^3 \times 0,38042 P}{2 \times 102,89609 \lambda^3 + 4,16667 a^3} = 0,18644 P ,$$

$$A_3 = \frac{-1,26920 \lambda^3 \times 0,23512 P}{2 \times 1,26920 \lambda^3 + 4,16667 a^3} = -0,04451 P ,$$

$$A_7 = \frac{0,04668 \lambda^3 \times 0,23512 P}{2 \times 0,04668 \lambda^3 + 4,16667 a^3} = 0,00258 P ,$$

$$A_0 = \frac{-0,02296 \lambda^3 \times 0,38042 P}{2 \times 0,02296 \lambda^3 + 4,16667 a^3} = -0,00207 P ,$$

e os demais, $A_2 = A_4 = A_5 = A_6 = A_8 = 0$.

As reações resultam portanto de:

$$A_x = \sum_{i=1}^9 A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{10}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0,18644 \times 0,30902 - 0,04451 \times 0,80902 + \\ &\quad + 0,00258 \times 0,80902 - 0,00207 \times 0,30902) P = \\ &= 0,023 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (0,18644 \times 0,58779 - 0,04451 \times 0,95106 \\ &\quad - 0,00258 \times 0,95106 + 0,00207 \times 0,58779) P = \\ &= 0,066 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= (0,18644 \times 0,80902 - 0,04451 \times 0,30902 \\ &\quad + 0,00258 \times 0,30902 - 0,00207 \times 0,80902) P \\ &= 0,136 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= (0,18644 \times 0,95106 + 0,04451 \times 0,58779 + \\ &\quad + 0,00258 \times 0,58779 + 0,00207 \times 0,95106) P \\ &= 0,207 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 &= (0,18644 \times 1,0 + 0,04451 \times 1,0 \\ &\quad - 0,00258 \times 1,0 - 0,00207 \times 1,0) P \\ &= 0,226 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_6 &= (0,18644 \times 0,95106 + 0,04451 \times 0,58779 \\ &\quad + 0,00258 \times 0,58779 + 0,00207 \times 0,95106) P \\ &= 0,207 P \end{aligned}$$

Como $A_x = B_x = C_x = D_x$ o problema fica resolvido em toda a sua extensão.

Quem consulte Ostenfeld poderá verificar que este mesmo problema ocupou 6 páginas para chegar a resultados apenas aproximados.

3. CINCO VIGAS LONGITUDINAIS

3.1. Vigas de bordo carregadas simetricamente (fig. 19).

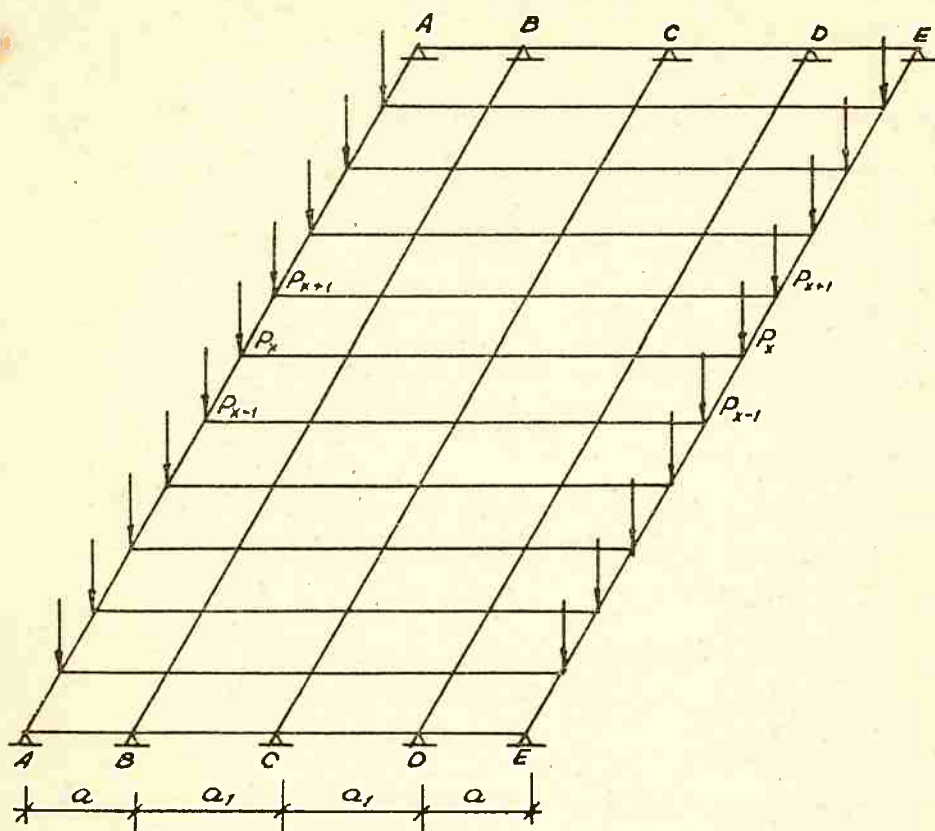


Fig 19^a

Considerando a viga transversal de ordem x concluímos que:

$$\left. \begin{aligned} \delta_A - \bar{\delta}_A &= \delta_C \\ \delta_B - \bar{\delta}_B &= \delta_C \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

O seu equilíbrio determina também:

$$2 A_x = 2 B_x + C_x \quad (65)$$

Desenvolvendo P_x vem:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} .$$

Admitindo que A_x , B_x e C_x sejam passíveis de desenvolvimento semelhante temos:

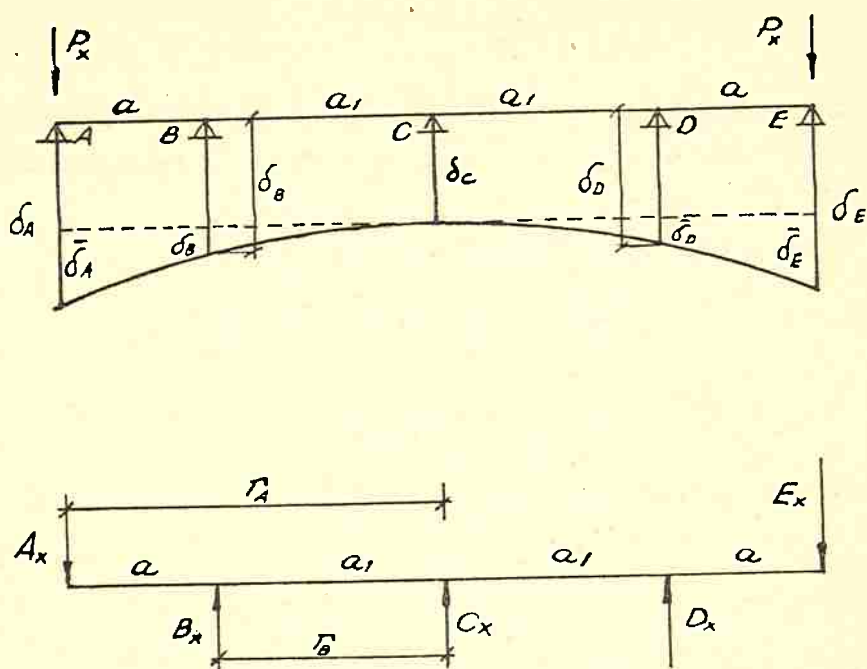


Fig 19b

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$B_x = \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$C_x = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

onde A_i , B_i e C_i ainda estão por determinar

Mas

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \rho_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \cdot A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\eta_{AA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{AB}}{J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\eta_{BA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{BB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

$$\delta_C = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i C_i}{E J_c} \sin \frac{i \pi x}{n},$$

onde $\frac{\eta_{KL}}{E J_o}$, como já dissémos atrás, é a flecha no ponto K provocada por uma carga unitária em L, numa viga engastada em consolo, de momento de inércia J_o .

Levando estes valores nas expressões (64) obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} - \frac{\eta_{AA}}{J_o} A_i + \frac{\eta_{AB}}{J_o} B_i = \frac{\alpha_i C_i}{J_c} \\ \frac{\alpha_i B_i}{J_B} - \frac{\eta_{BA}}{J_o} A_i + \frac{\eta_{BB}}{J_o} B_i = \frac{\alpha_i C_i}{J_c} \end{cases}$$

Por outro lado, de (65) vem:

$$C_i = 2 A_i - 2 B_i$$

Portanto:

$$\left(\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_c} + \frac{\eta_{AA}}{J_o} \right) A_i - \left(\frac{2 \alpha_i}{J_c} + \frac{\eta_{AB}}{J_o} \right) B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_A}$$

$$\left(\frac{2 \alpha_i}{J_c} + \frac{\eta_{BA}}{J_o} \right) A_i = \left(\frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{2 \alpha_i}{J_c} + \frac{\eta_{BB}}{J_o} \right) B_i$$

Fazendo

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_c} + \frac{\eta_{AA}}{J_o} \\ N_i &= \frac{2 \alpha_i}{J_c} + \frac{\eta_{AB}}{J_o} \\ Q_i &= \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{2 \alpha_i}{J_c} + \frac{\eta_{BB}}{J_o} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

chega-se às expressões:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{\alpha_i}{J_A \left(M_i - \frac{N_i^2}{Q_i} \right)} \cdot p_i \\ B_i &= \frac{\alpha_i}{J_A \left(\frac{M_i Q_i}{N_i} - N_i \right)} \cdot p_i \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

32. Vigas de bordo carregadas antimetricamente (fig. 20).

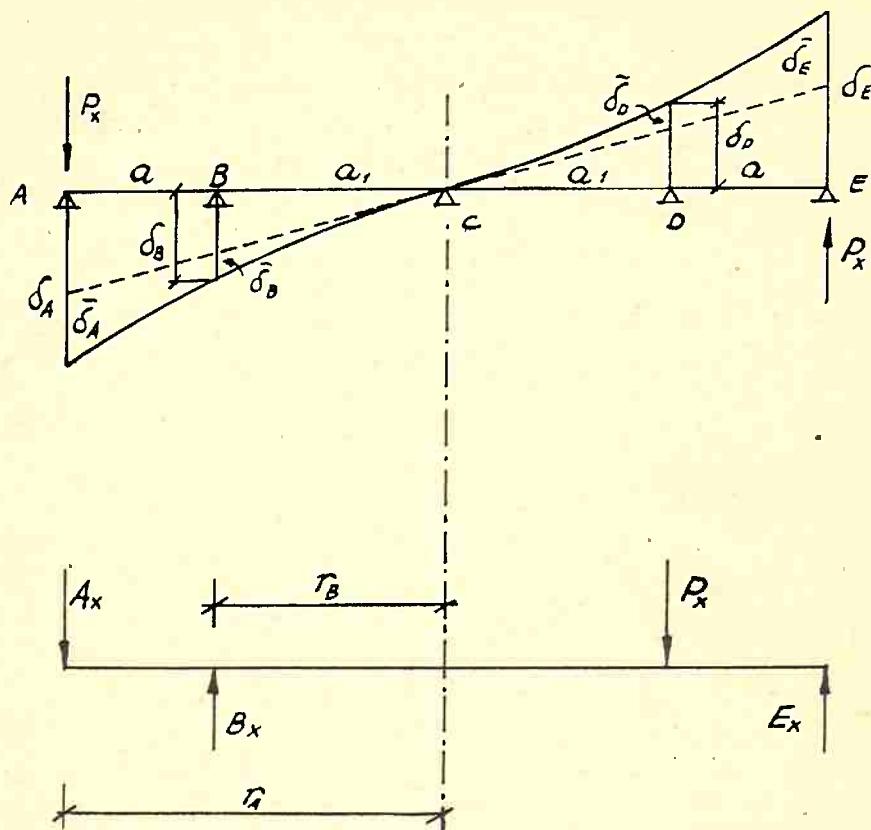


Fig. 20

Dá consideração da viga transversal de ordem x conclui-se:

$$\delta_A - \bar{\delta}_A = \frac{r_A}{r_B} (\delta_B - \bar{\delta}_B) \quad (68)$$

O equilíbrio, por outro lado, determina:

$$B_x = \frac{r_A}{r_B} A_x \quad (69)$$

Mas

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\eta_{AA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{AB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \sin \frac{i \pi x}{n}$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\gamma_{BA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{\gamma_{BB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

Introduzindo estes valores na expressão (68), e considerando que $B_i = \frac{r_A}{r_B} A_i$, chega-se a:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \frac{J_A}{J_B} \alpha_i + \gamma_{AA} \frac{J_A}{J_0} - 2 \frac{r_A}{r_B} \gamma_{AB} \frac{J_A}{J_0} + \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \gamma_{BB} \frac{J_A}{J_0}}$$

(70)

Se for $a = a_1$ vem:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + 4 \alpha_i \frac{J_A}{J_B} + \frac{2}{3} a^3 \frac{J_A}{J_0}}$$

(70a)

e, se além disso, $J_A = J_B = J_D = J_E = J$, resulta:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{5 \alpha_i + \frac{2}{3} a^3 \frac{J}{J_0}}$$

(70b)

Conhecidos então os A_i , a somação fornece os valores de A_x , que, uma vez determinados, permitem calcular os B_x , mediante a expressão (69).

33. Vigas internas, B e D, carregadas simetricamente (fig. 21).

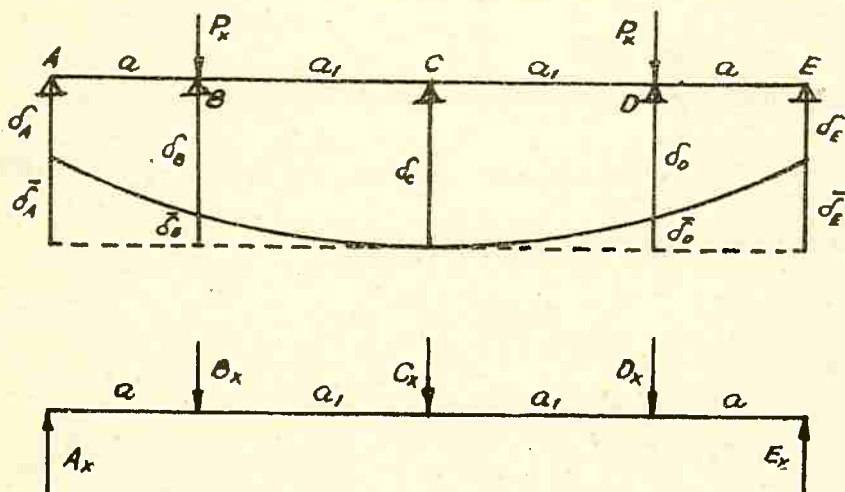


Fig. 21

O simples exame da viga transversal de ordem x autoriza escrever:

$$\left. \begin{aligned} \delta_A + \bar{\delta}_A &= \delta_C \\ \delta_B + \bar{\delta}_B &= \delta_C \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Assim também o equilíbrio da mesma viga determina:

$$2 A_x = 2 B_x + C_x \quad (72)$$

Considerados os desenvolvimentos de P_x , A_x , B_x e C_x , segundo somas trigonométricas, a exemplo dos casos anteriores, podemos expressar as flechas:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \bar{\delta}_A &= \frac{\eta_{AA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{AB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \delta_B &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \bar{\delta}_B &= \frac{\eta_{BA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{BB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \delta_C &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i C_i}{E J_C} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \end{aligned}$$

Levando estes valores nas expressões (71), e tendo em conta que $C = 2 A_i - 2 B_i$, obtem-se:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\eta_{AA}}{J_0} A_i - \frac{\eta_{AB}}{J_0} B_i &= \frac{\alpha_i}{J_C} (2 B_i - 2 A_i) \\ \frac{\alpha_i p_i}{J_B} - \frac{\alpha_i B_i}{J_B} + \frac{\eta_{BA}}{J_0} A_i - \frac{\eta_{BB}}{J_0} B_i &= \frac{\alpha_i}{J_C} (2 B_i - 2 A_i) \end{aligned} \right.$$

Reunindo os termos em A_i e B_i vem:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\eta_{AA}}{J_0} \right) A_i - \left(\frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\eta_{AB}}{J_0} \right) B_i &= 0 \\ - \left(\frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\eta_{AB}}{J_0} \right) A_i + \left(\frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\eta_{BB}}{J_0} \right) B_i &= \frac{\alpha_i p_i}{J_B} \end{aligned} \right.$$

Fazendo

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\eta_{AA}}{J_0}, \\ S_i &= \frac{\eta_{AB}}{J_0} + \frac{2 \alpha_i}{J_C}, \\ T_i &= \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\eta_{BB}}{J_0} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

chegamos às expressões:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha_1 p_1}{J_B \left(\frac{T_1 R_1}{S_1} - S_1 \right)} \\ B_1 &= \frac{\alpha_1 p_1}{J_B \left(T_1 - \frac{S_1^2}{R_1} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Fica assim resolvido completamente o problema.

3A. Vigas internas, B e D, carregadas antimetricamente (fig. 22).

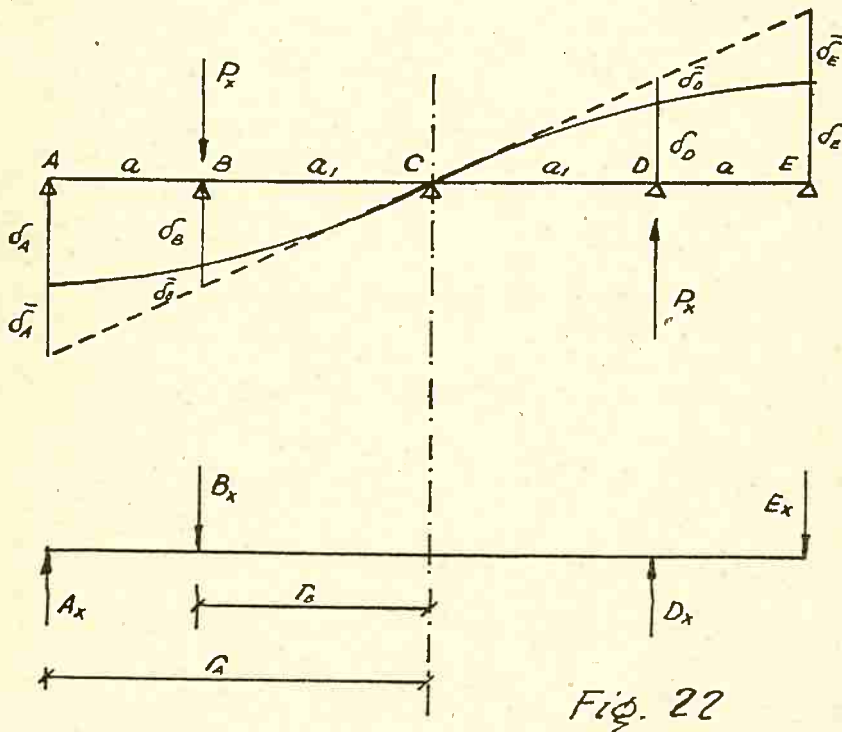


Fig. 22

Na viga transversal de ordem x há a seguinte relação de flechas:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \frac{r_A}{r_B} (\delta_B + \bar{\delta}_B) \quad (75)$$

Do equilíbrio desta mesma viga conclui-se:

$$B_x = \frac{r_A}{r_B} A_x \quad (76)$$

Então, a exemplo dos casos anteriores, vem:

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n};$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\eta_{AA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{AB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\eta_{BA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{BB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

Portanto da relação (75) resulta:

$$\frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\eta_{AA}}{J_0} A_i - \frac{\eta_{BB}}{J_0} B_i = \frac{r_A}{r_B} \left(\frac{\alpha_i p_i}{J_B} - \frac{\alpha_i B_i}{J_B} + \frac{\eta_{BA}}{J_0} A_i - \frac{\eta_{BB}}{J_0} B_i \right)$$

Mas, como $B_i = \frac{r_A}{r_B} A_i$, segue:

$$A_i = \frac{r_A \alpha_i p_i}{r_B J_B \left[\frac{\alpha_i}{J_A} + \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{\eta_{AA}}{J_0} - 2 \frac{r_A}{r_B} \frac{\eta_{AB}}{J_0} + \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \frac{\eta_{BB}}{J_0} \right]} \quad (77)$$

Sendo $a = a_1$ tem-se:

$$\frac{r_A}{r_B} = 2, \quad \eta_{AA} = \frac{(2a)^2}{3} = \frac{8a^3}{3},$$

$$\eta_{BA} = \frac{5}{6} a^3 \quad \text{e} \quad \eta_{BB} = \frac{a^3}{3};$$

com isto a expressão passa a:

$$A_i = \frac{2 \alpha_i p_i}{\alpha_i \frac{J_A}{J_B} + 4 \alpha_i + \frac{2}{3} a^3 \frac{J_B}{J_0}} \quad (77a)$$

35. Viga central carregada (fig. 23).

Tomemos a viga transversal de ordem x .

Entre as flechas dá-se:

$$\left. \begin{aligned} \delta_A + \bar{\delta}_A &= \delta_C \\ \delta_B + \bar{\delta}_B &= \delta_C \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

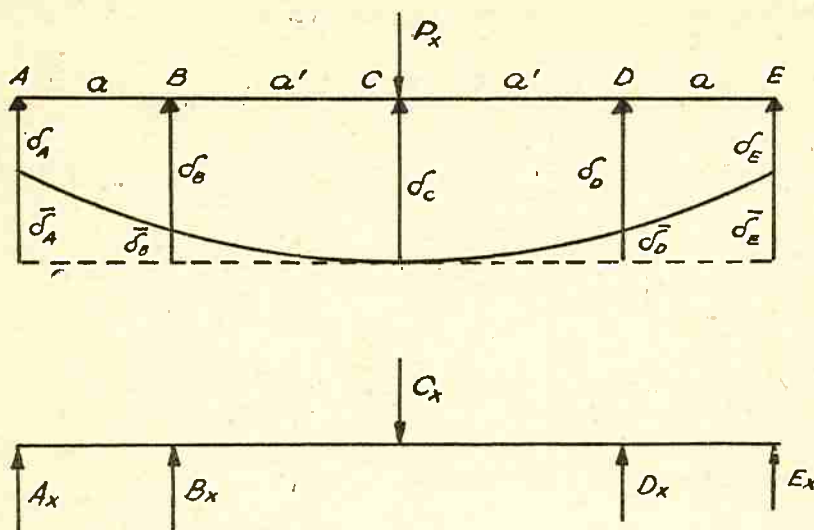


Fig. 23

Do equilíbrio resulta também:

$$2 A_x + 2 B_x = C_x \quad (79)$$

Desenvolvendo P_x segundo a soma trigonométrica

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

onde

$$p_i = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{n-1} P_x \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

e admitindo desenvolvimento análogo para A_x , B_x e C_x temos:

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$B_x = \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$C_x = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

sendo que A_i , B_i e C_i ainda estão por determinar.

Isto posto, podemos escrever:

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\gamma_{AA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{AB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\gamma_{BA}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{BB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\bar{\delta}_C = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_C} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i C_i}{E J_C} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Introduzindo estes valores nas expressões (78), chega-se a:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\gamma_{AA}}{J_0} A_i + \frac{\gamma_{AB}}{J_0} B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_C} - \frac{\alpha_i}{J_C} (2A_i + 2B_i) \\ \frac{\alpha_i B_i}{J_B} + \frac{\gamma_{BA}}{J_0} A_i + \frac{\gamma_{BB}}{J_0} B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_C} - \frac{\alpha_i}{J_C} (2A_i + 2B_i) \end{cases}$$

Daí vem:

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{AA}}{J_0} \right) A_i + \left(\frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{AB}}{J_0} \right) B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_C} \\ \left(\frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{BA}}{J_0} \right) A_i + \left(\frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{BB}}{J_0} \right) B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_C} \end{cases}$$

Fazendo

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{AA}}{J_0}, \\ N_i &= \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{AB}}{J_0}, \\ Q_i &= \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{BB}}{J_0}, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

das equações acima chega-se a:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{Q_i - N_i}{M_i Q_i - N_i^2} \frac{\alpha_i p_i}{J_C} \\ B_i &= \frac{M_i - N_i}{M_i Q_i - N_i^2} \frac{\alpha_i p_i}{J_C} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

36. Vigas transversais carregadas simetricamente (fig. 24).

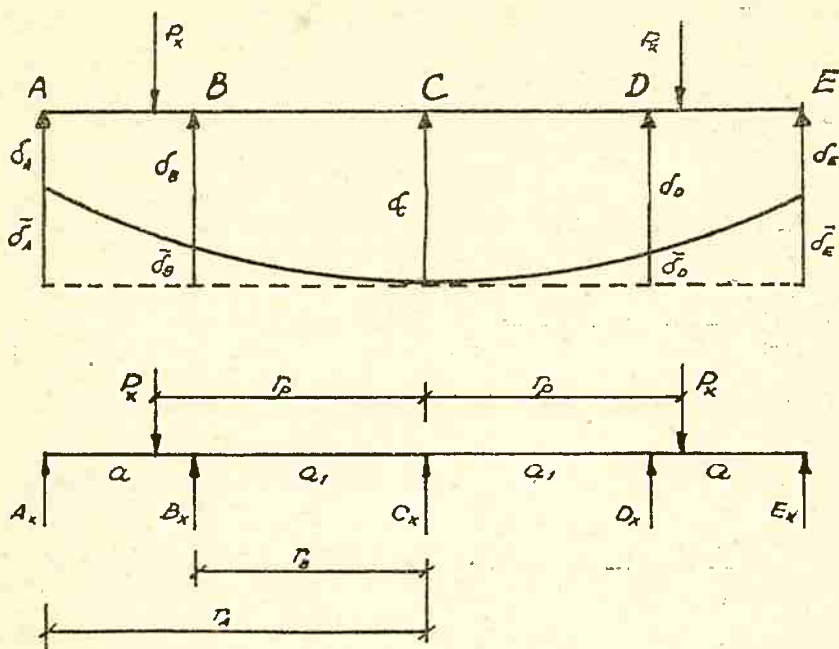


Fig. 24

Neste caso duas linhas de cargas simétricas atuam sobre as vigas transversais, cabendo à de ordem x o par de cargas P_x .

Das flechas conclui-se:

$$\left. \begin{aligned} \delta_A + \bar{\delta}_A &= \delta_C \\ \delta_B + \bar{\delta}_B &= \delta_C \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Do equilíbrio da viga transversal conclui-se também:

$$2A_x + 2B_x + C_x = 2P_x \quad (83)$$

Então:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \bar{\delta}_A &= \frac{\gamma_{\Lambda \Lambda}}{E J_a} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{\Lambda B}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\gamma_{\Lambda P}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \bar{\delta}_B &= \frac{\gamma_{B \Lambda}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{B B}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\gamma_{B P}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \delta_C &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i C_i}{E J_c} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}. \end{aligned}$$

Das expressões (49) segue:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1 A_1}{J_A} + \frac{\eta_{AA}}{J_o} A_1 + \frac{\eta_{AB}}{J_o} B_1 - \frac{\eta_{AP}}{J_o} p_1 = \frac{\alpha_1 C_1}{J_C} \\ \frac{\alpha_1 B_1}{J_B} + \frac{\eta_{BA}}{J_o} A_1 + \frac{\eta_{BB}}{J_o} B_1 - \frac{\eta_{BP}}{J_o} p_1 = \frac{\alpha_1 C_1}{J_C} \end{cases}$$

Mas como

$$C_1 = 2 p_1 - 2 A_1 - 2 B_1 ,$$

e uma vez grupados os termos em A_1 e B_1 vem:

$$\begin{cases} R_1 A_1 + S_1 B_1 = U_1 p_1 \\ S_1 A_1 + T_1 B_1 = V_1 p_1 , \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{2\alpha_1}{J_C} + \frac{\eta_{AA}}{J_o} , \\ S_1 &= \frac{2\alpha_1}{J_C} + \frac{\eta_{AB}}{J_o} , \\ T_1 &= \frac{\alpha_1}{J_B} + \frac{2\alpha_1}{J_C} + \frac{\eta_{BB}}{J_o} , \\ U_1 &= \frac{2\alpha_1}{J_C} + \frac{\eta_{AP}}{J_o} , \\ V_1 &= \frac{2\alpha_1}{J_C} + \frac{\eta_{BP}}{J_o} , \end{aligned} \quad (84)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{U_1 T_1 - V_1 S_1}{T_1 R_1 - S_1^2} \cdot p_1 \\ B_1 &= \frac{V_1 R_1 - U_1 S_1}{R_1 T_1 - S_1^2} \cdot p_1 \end{aligned} \quad (85)$$

37. *Vigas transversais carregadas antimetricamente* (fig. 25).

Neste caso temos:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \frac{r_A}{r_B} (\delta_B + \bar{\delta}_B) \quad (86)$$

O equilíbrio da viga transversal determina:

$$B_x = \frac{r_P}{r_B} P_x - \frac{r_A}{r_B} A_x \quad (87)$$

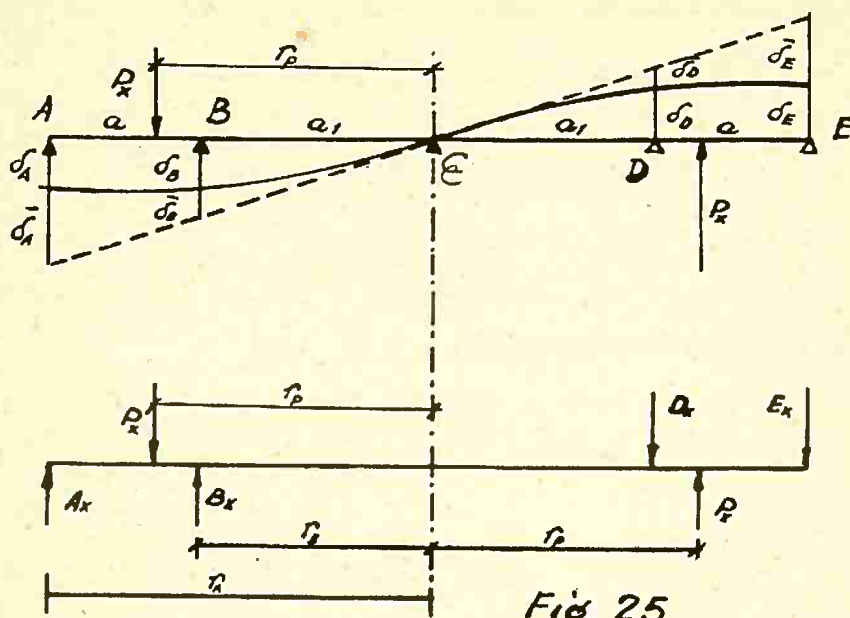


Fig. 25

Mas

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{\gamma_{AA}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{AB}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\gamma_{AP}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\gamma_{BA}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{BB}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\gamma_{BP}}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Levando estes valores nas expressões (86) resulta:

$$\frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\gamma_{AA}}{J_o} A_i + \frac{\gamma_{AB}}{J_o} B_i - \frac{\gamma_{AP}}{J_o} p_i = \frac{r_A}{r_B} \left(\frac{\alpha_i B_i}{J_B} + \frac{\gamma_{BA}}{J_o} A_i + \frac{\gamma_{BB}}{J_o} B_i - \frac{\gamma_{BP}}{J_o} p_i \right)$$

Sendo porém $B_i = \frac{r_P}{r_B} p_i - \frac{r_A}{r_B} A_i$, a expressão de A_i será:

$$A_i = \frac{\frac{r_A}{r_B} \cdot \frac{r_P}{r_B} \frac{\alpha_i}{J_B} - \frac{r_P}{r_B} \frac{\gamma_{AB}}{J_o} + \frac{\gamma_{AP}}{J_o} + \frac{r_A}{r_B} \frac{r_P}{r_B} \frac{\gamma_{BB}}{J_o} - \frac{r_A}{r_B} \frac{\gamma_{BP}}{J_o}}{\frac{\alpha_i}{J_A} + \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{\gamma_{AA}}{J_o} - 2 \frac{r_A}{r_B} \frac{\gamma_{AB}}{J_o} + \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \frac{\gamma_{BB}}{J_o}} p_i \quad (88)$$

Se nesta expressão fizermos $r_P = r_B$ vem:

$$A_i = \frac{r_A \alpha_i p_i}{r_B J_B \left[\frac{\alpha_i}{J_A} + \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{\gamma_{AA}}{J_0} - 2 \frac{r_A}{r_B} \frac{\gamma_{AB}}{J_0} + \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \frac{\gamma_{BB}}{J_0} \right]}$$

idêntica à expressão (77), como era de se esperar.

Exemplo 4. Seja a grelha da fig. 26, com as seguintes características:

$$a = \lambda$$

$$J_A = J_B = \dots J_E = J_0 = J$$

$$n = 4$$

$$k = 2$$

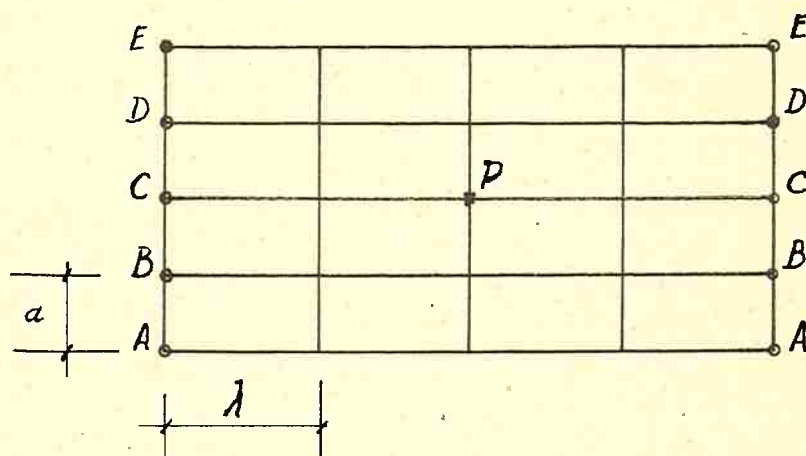


Fig. 26

De acôrdo com as expressões (80) vem:

$$M_i = \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{AA}}{J_0} = \frac{1}{J} \left(3 \alpha_i + \frac{8}{3} a^3 \right),$$

$$N_i = \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{AB}}{J_0} = \frac{1}{J} \left(2 \alpha_i + \frac{5}{6} a^3 \right),$$

$$Q_i = \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{2 \alpha_i}{J_C} + \frac{\gamma_{BB}}{J_0} = \frac{1}{J} \left(3 \alpha_i + \frac{a^3}{3} \right)$$

Tomando as coeficientes α_i da tabela I temos:

$$M_i = \frac{\lambda^3}{J} (3 \times 2,6299 + 2,6666) = 10,5563 \frac{\lambda^3}{J}$$

$$M_3 = \frac{\lambda^3}{J} (3 \times 0,03697 + 2,6666) = 2,7775 \frac{\lambda^3}{J}$$

$$N_1 = \frac{\lambda^3}{J} (2 \times 2,6299 + 0,8333) = 6,0931 \frac{\lambda^3}{J}$$

$$N_3 = \frac{\lambda^3}{J} (2 \times 0,03697 + 0,8333) = 0,9073 \frac{\lambda^3}{J}$$

$$Q_1 = \frac{\lambda^3}{J} (3 \times 2,6299 + 0,3333) = 8,2230 \frac{\lambda^3}{J}$$

$$Q_3 = \frac{\lambda^3}{J} (3 \times 0,03697 + 0,3333) = 0,4442 \frac{\lambda^3}{J}$$

Os valores de M_2 , N_2 e Q_2 não foram calculados, porque não vão ser utilizados, uma vez que $p_2 = 0$.

Aplicando as equações (81) vem:

$$A_1 = \frac{8,2230 - 6,0931}{10,5563 \times 8,2230 - (6,0931)^2} \times \frac{2,6299 P}{2} = 0,0564 P$$

$$A_3 = - \frac{0,4442 - 0,9073}{2,7775 \times 0,4442 - (0,9073)^2} \times \frac{0,03697 P}{2} = 0,0208 P$$

$$B_1 = \frac{10,5563 - 6,0931}{10,5563 \times 8,2230 - (6,0931)^2} \times \frac{2,6299 P}{2} = 0,1181 P$$

$$B_3 = - \frac{2,7775 - 0,9073}{2,7775 \times 0,4442 - (0,9073)^2} \times \frac{0,03697 P}{2} = -0,0842 P$$

Portanto:

$$A_1 = \sum_1^3 A_i \sin \frac{i\pi}{4} = (0,0564 + 0,0208) P \times 0,7071 = 0,0546 P,$$

$$A_2 = \sum_1^3 A_i \sin \frac{i\pi}{2} = (0,0564 - 0,0208) P = 0,0356 P,$$

$$B_1 = \sum_1^3 B_i \sin \frac{i\pi}{4} = (0,1181 - 0,0842) P \times 0,7071 = 0,0238 P,$$

$$B_2 = \sum_1^3 B_i \sin \frac{i\pi}{2} = (0,1181 + 0,0842) P = 0,2023 P,$$

$$C_1 = 2 A_1 + 2 B_1 = 2 (0,0546 + 0,0238) P = 0,1568 P,$$

$$C_2 = 2 A_2 + 2 B_2 = 2 (0,0356 + 0,2023) P = 0,4758 P$$

Na figura abaixo isolamos as diferentes vigas longitudinais para resumo dos resultados

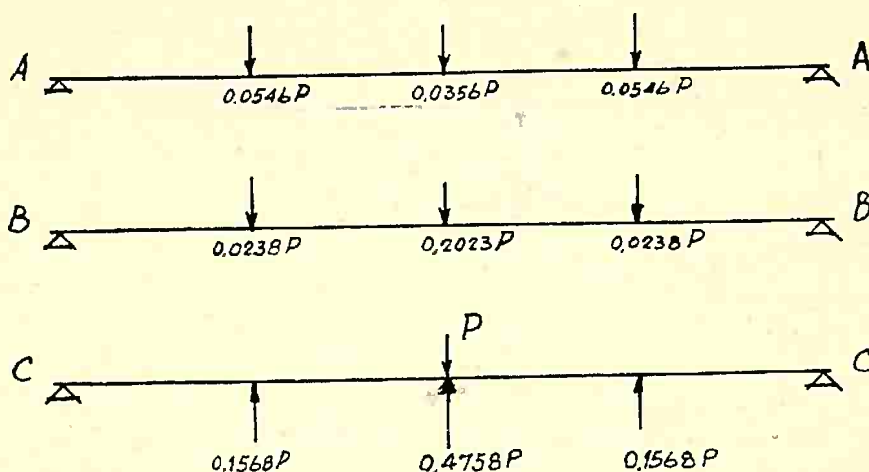


Fig. 27

4. MAIOR NÚMERO DE VIGAS LONGITUDINAIS

Neste caso, o cálculo das reações recíprocas entre vigas longitudinais e transversais se processa de maneira análoga aos dos casos acima analisados, razão porque deixamos de efetua-lo. Será contudo objeto de um trabalho complementar, já em preparação, onde se procurará estabelecer fórmulas para uma pronta aplicação.

b) Grelhas assimétricas

1. TRÊS VIGAS LONGITUDINAIS

1.1. Viga de bordo carregada.

Admitamos uma grelha assimétrica com cargas apenas numa viga de bordo (fig. 28).

Da figura conclui-se que:

$$\delta_A = \delta'_A + \delta''_A + \delta'''_A \quad (89)$$

O equilíbrio da viga transversal exige também que:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{a + a_1}{a_1} A_x, \\ C_x &= \frac{a}{a_1} A_x. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

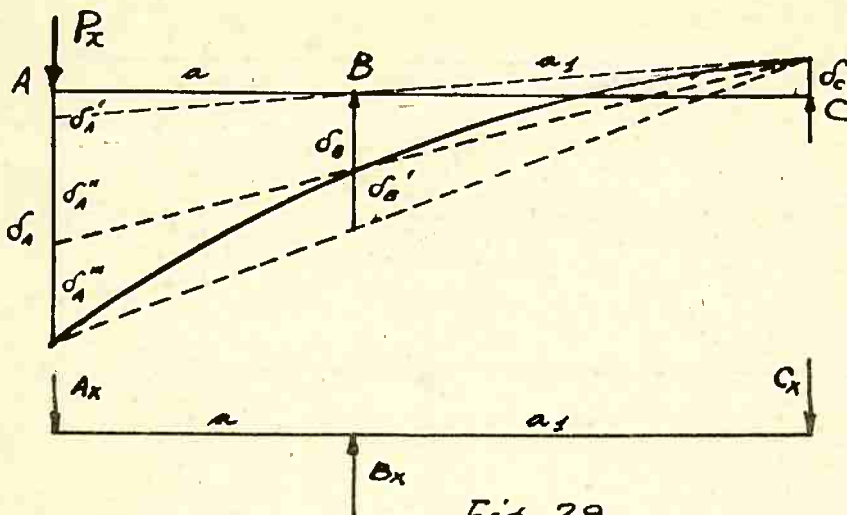


Fig. 28

Mas

$$\delta_A' = \frac{a}{a_1} \quad \delta_C = \frac{a}{a_1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i C_i}{E J_C} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_A'' = \frac{a + a_1}{a_1} \quad \delta_B = \frac{a + a_1}{a_1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_A''' = \frac{a + a_1}{a_1} \quad \delta_B' = \frac{a + a_1}{a_1} \times \frac{a^2 a_1^2}{3 E J_0} \frac{B_x}{a + a_1} = \frac{a^2 a_1}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Introduzindo estes valores na expressão (89) vem:

$$\frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} = \frac{a}{a_1} \frac{\alpha_i C_i}{J_C} + \frac{a + a_1}{a_1} \frac{\alpha_i B_i}{J_B} + \frac{a^2 a_1}{3 J_0} B_i$$

Como

$$B_i = \frac{a + a_1}{a_1} A_i$$

$$\text{e} \quad C_i = \frac{a_1}{a} A_i,$$

o valor de A_i será:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_A \left[\frac{\alpha_i}{J_A} + \left(\frac{a + a_1}{a_1} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_B} + \left(\frac{a}{a_1} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_C} + \frac{a^2}{3} \frac{(a + a_1)}{J_0} \right]} \quad (91)$$

Se for $a = a_1$, resulta:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_i + 4 \alpha_i \frac{J_A}{J_B} + \alpha_i \frac{J_A}{J_C} + \frac{2}{3} a^3 \frac{J_A}{J_0}}; \quad (91a)$$

e se, além disso, $J_A = J_B = J_C = J$,

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{6 \alpha_i + \frac{2}{3} a^3 \frac{J}{J_0}} \quad (91b)$$

Os valores de A_x são calculados então de:

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

Um a vez conhecidos os A_x , as expressões (90) permitem determinar imediatamente B_x e C_x .

12. *Viga central carregada* (fig. 29).

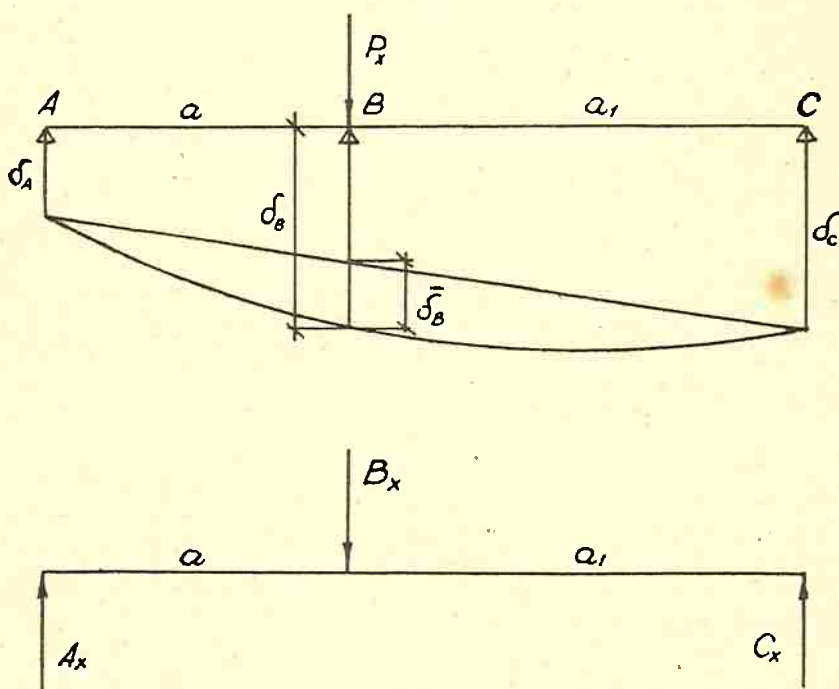


Fig. 29

Analisando a viga transversal de ordem x , chega-se à seguinte relação entre as flechas:

$$\delta_B - \bar{\delta}_B = \delta_A + \frac{a}{a + a_1} (\delta_C - \delta_A) \quad (92)$$

O equilíbrio da mesma viga obriga também que:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{a + a_1}{a_1} A_x \\ C_x &= \frac{a}{a_1} A_x \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Admitindo para P_x , A_x , B_x e C_x os desenvolvimentos trigonométricos já conhecidos dos casos anteriores, e voltando à equação (92), vem:

$$\frac{\alpha_1 p_i}{J_B} - \frac{\alpha_1 B_i}{J_B} - \frac{a^2 a_1^2}{3(a + a_1)} \frac{B_i}{J_0} = \frac{\alpha_1 A_i}{J_A} + \frac{a}{a + a_1} \frac{\alpha_1 C_i}{J_C} - \frac{a}{a + a_1} \frac{\alpha_1 A_i}{J_A}$$

Mas tendo em conta que:

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{a + a_1}{a_1} A_i \\ C_i &= \frac{a}{a_1} A_i \end{aligned}$$

obtemos para A_i a expressão seguinte:

$$A_i = \frac{\alpha_1 p_i}{J_B \left[\frac{a_1}{a + a_1} \frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{a + a_1}{a_1} \frac{\alpha_1}{J_B} + \frac{a^2}{a_1(a + a_1)} \frac{\alpha_1}{J_C} + \frac{a^2 a_1}{3 J_0} \right]} \quad (94)$$

Sendo $a = a_1$, passamos a:

$$A_i = \frac{\alpha_1 p_i}{J_B \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{J_A} + 2 \frac{\alpha_1}{J_B} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{J_C} + \frac{a^3}{3 J_0} \right)} ;$$

e se, além disso, for $J_A = J_C$ (caso da estrutura simétrica já estudada), a expressão toma o aspecto:

$$A_i = \frac{\alpha_1 p_i}{\alpha_1 \frac{J_B}{J_A} + 2 \alpha_1 + \frac{a^3}{3} \frac{J_B}{J_0}}$$

Esta expressão é idêntica à (40), como devia realmente ser.

Conhecidos os A_1 , determinam-se os valores de A_x por simples somação; os valores de B_x resultam então de (93).

13. Vigas transversais carregadas.

Admitamos uma linha de cargas situada à distância r_p da viga central (fig. 30).

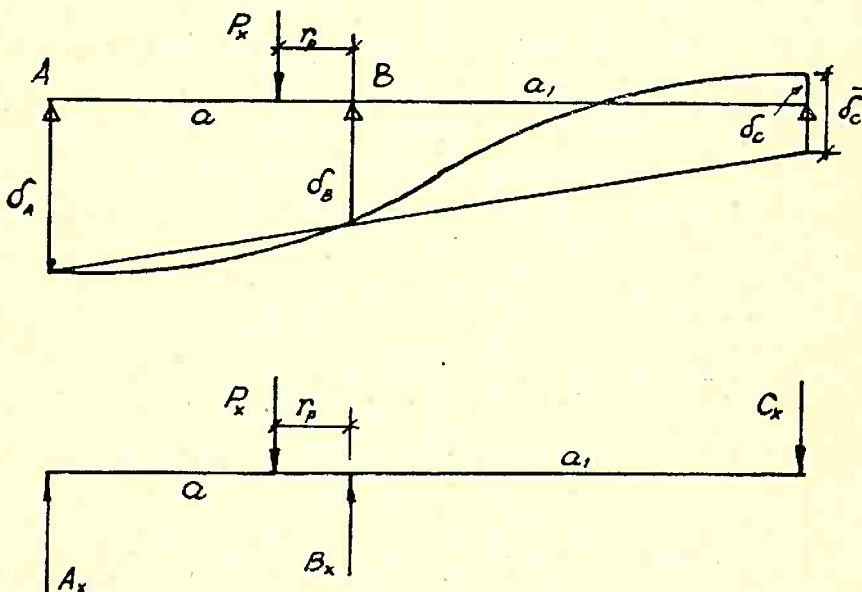


Fig. 30

Numa viga transversal genérica de ordem x , há a seguinte relação entre flechas:

$$\delta_B = \frac{a_1}{a + a_1} \delta_A + \frac{a}{a + a_1} (\bar{\delta}_C - \delta_C) \quad (95)$$

O equilíbrio desta viga conduz também a:

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \frac{r_p}{a_1} P_x - \frac{a}{a_1} A_x \\ B_x &= \frac{r_p + a_1}{a_1} P_x - \frac{a + a_1}{a_1} A_x \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Usando para P_x , A_x , B_x e C_x os desenvolvimentos trigonométricos, já do nosso conhecimento, podemos escrever:

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_C = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i C_i}{E J_C} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\delta}_C = \frac{\eta_{CP}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{\eta_{CC}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} C_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

onde $\frac{\eta_{CP}}{E J_0}$ vem a ser a flecha em C provocada por uma carga unitária em P, e $\frac{\eta_{CC}}{E J_0}$ a flecha em C provocada por uma carga unitária também em C. Estas flechas se referem à viga simples AB com consolos.

Em virtude de (96) tem-se:

$$C_i = \frac{r_P}{a_1} p_i - \frac{a}{a_1} A_i$$

$$\text{e } B_i = \frac{r_P + a_1}{a_1} p_i - \frac{a + a_1}{a_1} A_i.$$

Tendo em conta isto, e levando os valores das flechas na expressão (95) vem:

$$A_i = \frac{\frac{r_P + a_1}{a_1} \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{a}{a + a_1} \frac{r_P}{a_1} \frac{\alpha_i}{J_C} - \frac{a}{a + a_1} \frac{\eta_{CP}}{J_0} + \frac{a}{a + a_1} \frac{\eta_{CC}}{J_0} \frac{r_P}{a_1}}{\frac{a_1}{a + a_1} \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{a + a_1}{a_1} \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{a^2}{a_1 (a + a_1)} \frac{\alpha_i}{J_C} + \frac{a^2}{a_1 (a + a_1)} \frac{\eta_{CC}}{J_0}} \cdot p_i \quad (97)$$

Se nesta expressão fizermos $r_P = 0$, isto é, quando a carga estiver na viga longitudinal B, resulta:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_B \left[\frac{a_1}{a + a_1} \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{a + a_1}{a_1} \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{a^2}{a (a_1 + a_1)} \frac{\alpha_i}{J_C} + \frac{a^2 a_1}{3 J_0} \right]},$$

que é a própria expressão (94), deduzida no caso anterior.

2. QUATRO VIGAS LONGITUDINAIS

2.1. Viga de bordo carregada.

Suponhamos a viga de bordo A carregada de modo que a cada posição de viga transversal corresponda uma carga (fig. 31).

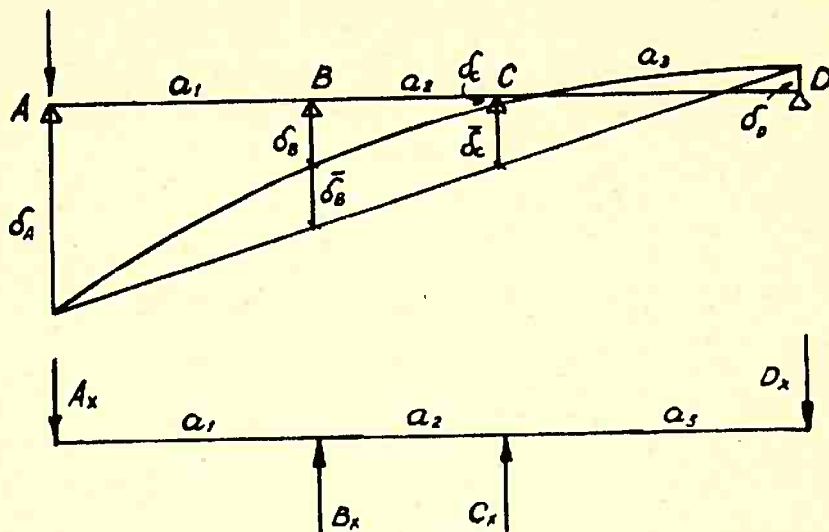


Fig. 31

Na viga transversal de ordem x há a seguinte relação entre as flechas:

$$\delta_A + \delta_D = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} (\delta_B + \bar{\delta}_B + \delta_D) \quad (98)$$

$$\delta_A + \delta_D = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} (\delta_C + \bar{\delta}_C + \delta_D) \quad (99)$$

O equilíbrio desta viga determina também:

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} A_x - \frac{a_2 + a_3}{a_3} B_x \\ D_x &= \frac{a_1 + a_2}{a_3} A_x - \frac{a_2}{a_3} B_x \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Desenvolvendo a carga P_x vem:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Admitindo desenvolvimento análogo para A_x e B_x , resulta:

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ B_x &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}. \end{aligned}$$

onde A_i e B_i não são ainda conhecidos.

Por outro lado

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{\gamma_{BB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{BC}}{J_0} \sum_{i=1}^{n-1} C_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\delta_C = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i C_i}{E J_C} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$\bar{\delta}_C = \frac{\gamma_{CB}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{\gamma_{CC}}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} C_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Analisemos agora a equação (98); introduzindo nela os valores das flechas vem:

$$\frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\alpha_i D_i}{J_D} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \left[\frac{\alpha_i B_i}{J_B} + \frac{\gamma_{BB}}{J_0} B_i + \frac{\gamma_{BC}}{J_0} C_i + \frac{\alpha_i D_i}{J_D} \right]$$

Em virtude de (100) esta equação passa a:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\alpha_i}{J_D} \left(\frac{a_1 + a_2}{a_3} A_i - \frac{a_2}{a_3} B_i \right) = \\ = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \left[\frac{\alpha_i}{J_B} B_i + \frac{\gamma_{BB}}{J_0} B_i + \frac{\gamma_{BC}}{J_0} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} A_i - \frac{a_2 + a_3}{a_3} B_i \right) \right. \\ \left. + \frac{\alpha_i}{J_D} \left(\frac{a_1 + a_2}{a_3} A_i - \frac{a_2}{a_3} B_i \right) \right] \end{aligned}$$

Daí vem:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{a_1(a_1 + a_2)}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\gamma_{BC}}{J_0} \right] A_i + \\ + \left[\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\alpha_i}{J_B} - \frac{a_1 a_3}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\alpha_i}{J_D} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\gamma_{BB}}{J_0} \right. \\ \left. - \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\gamma_{BC}}{J_0} \right] B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_A} \end{aligned}$$

Designando os coeficientes de A_i e B_i respectivamente por M_i e N_i vem:

$$M_i A_i + N_i B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_A}$$

Considerando a equação (99), resulta:

$$\frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} + \frac{\alpha_i D_i}{J_D} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \left[\frac{\alpha_i C_i}{J_C} + \frac{\eta_{CB}}{J_o} B_i + \frac{\eta_{CC}}{J_o} C_i + \frac{\alpha_i D_i}{J_D} \right]$$

Tendo em conta (100) segue:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha_i}{J_A} + \left(\frac{a_1 + a_2}{a_3} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_D} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_C} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right)^2 \frac{\eta_{CC}}{J_o} \right] A_i \\ & + \left[- \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\alpha_i}{J_C} - \frac{a_2(a_1 + a_2)}{a_3^2} \frac{\alpha_i}{J_D} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\eta_{CB}}{J_o} - \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\eta_{CC}}{J_o} \right] B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_A} \end{aligned}$$

Designando por R_i e Q_i respectivamente os coeficientes de A_i e B_i vem:

$$R_i A_i + Q_i B_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_A}$$

Chegamos então às duas equações:

$$\left. \begin{aligned} M_i A_i + N_i B_i &= \frac{\alpha_i p_i}{J_A} \\ R_i A_i + Q_i B_i &= \frac{\alpha_i p_i}{J_A} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Portanto:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{Q_i - N_i}{M_i Q_i - R_i N_i} \frac{\alpha_i p_i}{J_A} \\ B_i &= \frac{M_i - R_i}{M_i Q_i - R_i N_i} \frac{\alpha_i p_i}{J_A} \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Quando $a_1 = a_2 = a_3$ vem:

$$M_i = \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{9}{2} \frac{\eta_{BC}}{J_o} \quad (103)$$

$$N_i = \frac{3}{2} \frac{\alpha_i}{J_B} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{3}{2} \frac{\eta_{BB}}{J_o} - 3 \frac{\eta_{BC}}{J_o},$$

$$R_i = \frac{\alpha_i}{J_A} + 4 \frac{\alpha_i}{J_D} + 9 \frac{\alpha_i}{J_C} + 9 \frac{\eta_{CC}}{J_o},$$

$$Q_i = -6 \frac{\alpha_i}{J_C} - 2 \frac{\alpha_i}{J_D} + 3 \frac{\eta_{CB}}{J_o} - 6 \frac{\eta_{CC}}{J_o};$$

e se, além disso, $J_A = J_B = J_C = J_D = J$, segue:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2 \alpha_1}{J} + \frac{7}{4} \frac{a^3}{J_0} \\ N_1 &= \frac{\alpha_1}{J} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{J_0} \\ R_1 &= 14 \frac{\alpha_1}{J} + 4 \frac{a^3}{J_0} \\ Q_1 &= -8 \frac{\alpha_1}{J} - \frac{3}{2} \frac{a^3}{J_0} \end{aligned} \quad (103a)$$

Conhecidos então os A_1 e B_1 , os valores de A_x e B_x são determinados pela somação, e com isto vêm os valores de C_x e D_x das equações (100).

O problema fica assim resolvido em toda a sua extensão.

22. *Viga interna carregada* (fig. 32).

A carga ponto x desta viga corresponde uma carga P_x ($x=1, \dots, n-1$).

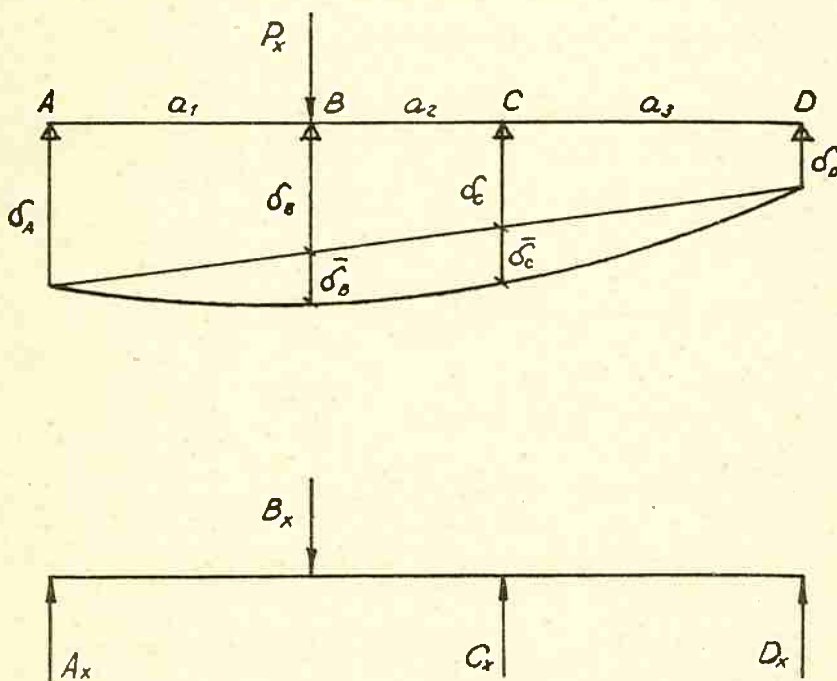


Fig. 32

Na altura da viga transversal de ordem x dão-se as seguintes relações entre flechas:

$$\left. \begin{aligned} \delta_A - \delta_D &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} (\bar{\delta}_B - \bar{\delta}_B - \delta_D) \\ \delta_A - \delta_D &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} (\bar{\delta}_C - \bar{\delta}_C - \delta_D) \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Como resultado do equilíbrio desta mesma viga, vem:

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \frac{a_2 + a_3}{a_3} B_x - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} A_x, \\ D_x &= \frac{a_1 + a_2}{a_3} A_x - \frac{a_2}{a_3} B_x \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

$\bar{\delta}_B$ e $\bar{\delta}_C$ podem ser consideradas como sendo as flechas, nos pontos B e C, respectivamente, de uma viga livremente apoiada em A e D, produzidas pelas cargas B_x e C_x .

Então:

$$\bar{\delta}_B = \frac{\eta_{BB}}{E J_0} B_x - \frac{\eta_{BC}}{E J_0} C_x,$$

$$\bar{\delta}_C = \frac{\eta_{CB}}{E J_0} B_x - \frac{\eta_{CC}}{E J_0} C_x.$$

Admitindo para P_x , A_x e B_x os desenvolvimentos trigonométricos já do nosso conhecimento, da 1.^a das equações (104), resulta:

$$\frac{\alpha_1 A_1}{J_A} - \frac{\alpha_1 D_1}{J_D} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \left(\frac{\alpha_1 p_1}{J_B} - \frac{\alpha_1 B_1}{J_B} - \frac{\eta_{BB}}{J_0} B_1 + \frac{\eta_{BC}}{J_0} C_1 - \frac{\alpha_1 D_1}{J_D} \right)$$

Daí, e uma vez que

$$C_1 = \frac{a_2 + a_3}{a_3} B_1 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} A_1, \text{ e}$$

$$D_1 = \frac{a_1 + a_2}{a_3} A_1 - \frac{a_2}{a_3} B_1,$$

se conclui que:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{a_1(a_1 + a_2)}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\alpha_1}{J_D} + \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\eta_{BC}}{J_0} \right] A_1 + \\ & + \left[\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\alpha_1}{J_B} - \frac{a_1 a_2}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\alpha_1}{J_D} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\eta_{BB}}{J_0} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\eta_{BC}}{J_0} \right] B_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \frac{\alpha_1 p_1}{J_B} \end{aligned}$$

Designando-se os coeficientes de A_1 e B_1 , respectivamente, por M_1 e N_1 , obtém-se:

$$M_1 A_1 + N_1 B_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \frac{\alpha_1 p_1}{J_B}$$

Da 2.^a equação de (104) vem:

$$\frac{\alpha_1 A_1}{J_A} - \frac{\alpha_1 D_1}{J_D} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \left[\frac{\alpha_1 C_1}{J_C} - \frac{\gamma_{CB}}{J_0} B_1 + \frac{\gamma_{CC}}{J_0} C_1 - \frac{\alpha_1 D_1}{J_D} \right]$$

D'onde:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha_1}{J_A} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right)^2 \frac{\alpha_1}{J_C} + \left(\frac{a_1 + a_2}{a_3} \right)^2 \frac{\alpha_1}{J_D} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\gamma_{CC}}{J_0} \right] A_1 \\ &= \left[\left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\alpha_1}{J_C} + \frac{a_2(a_1 + a_2)}{a_3^2} \frac{\alpha_1}{J_D} - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\gamma_{CB}}{J_0} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\gamma_{CC}}{J_0} \right] B_1 \end{aligned}$$

Designando-se por R_1 o coeficiente de A_1 e por Q_1 o de B_1 , segue:

$$R_1 A_1 = Q_1 B_1$$

Ficamos então com as duas equações:

$$\left. \begin{aligned} M_1 A_1 + N_1 B_1 &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \frac{\alpha_1 p_1}{J_B} \\ R_1 A_1 &= Q_1 B_1 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

D'onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \frac{\alpha_1 p_1}{J_B \left(M_1 + \frac{N_1 R_1}{Q_1} \right)} \\ B_1 &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \frac{\alpha_1 p_1}{J_B \left(N_1 + \frac{M_1 Q_1}{R_1} \right)} \end{aligned} \quad (107)$$

Quando for $a_1 = a_2 = a_3 = a$, vem:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{\alpha_1}{J_D} + \frac{7}{4} \frac{a^3}{J_0} \\ N_1 &= \frac{3}{2} \frac{\alpha_1}{J_B} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{J_D} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{J_0} \\ R_1 &= \frac{\alpha_1}{J_A} + 9 \frac{\alpha_1}{J_C} - 4 \frac{\alpha_1}{J_D} + 4 \frac{a^3}{J_0} \\ Q_1 &= 6 \frac{\alpha_1}{J_C} + 2 \frac{\alpha_1}{J_D} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{J_0} \end{aligned} \quad (108)$$

Se, além disso, $J_A = J_B = J_C = J_D = J$, segue:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2 a_1}{J} + \frac{7}{4} \frac{a^3}{J_0}, \\ N_1 &= \frac{a_1}{J} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{J_0}, \\ R_1 &= 14 \frac{a_1}{J} + 4 \frac{a^3}{J_0}, \\ Q_1 &= 8 \frac{a_1}{J} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{J_0}. \end{aligned} \quad (108a)$$

23. *Viga transversal carregada* (fig. 33).

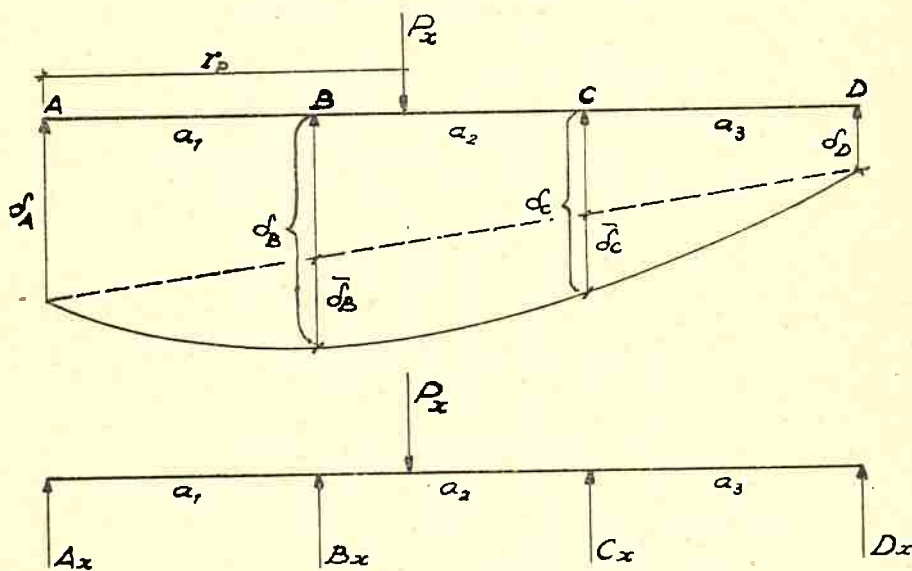


Fig. 33

Na viga transversal de ordem x existem as seguintes relações entre as flechas:

$$\begin{aligned} \delta_A - \delta_D &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \left(\delta_B - \bar{\delta}_B - \delta_D \right) \\ \delta_A - \delta_D &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \left(\delta_C - \bar{\delta}_C - \delta_D \right) \end{aligned} \quad (109)$$

O equilíbrio condiciona também:

$$C_x = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 - r_p}{a_3} \right) P_x - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) A_x - \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) B_x,$$

$$D_x = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_3} \right) A_x + \frac{a_2}{a_3} B_x - \left(\frac{a_1 + a_2 - r^P}{a_3} \right) P_x \quad (110)$$

Fazendo-se as mesmas considerações que no caso anterior, da 1.^a equação de (109), vem:

$$\frac{\alpha_i A_i}{J_A} - \frac{\alpha_i D_i}{J_D} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \left[\frac{\alpha_i B_i}{J_B} - \frac{\gamma_{BP}}{J_o} p_i + \frac{\gamma_{BB}}{J_o} B_i + \frac{\gamma_{BC}}{J_o} C_i - \frac{\alpha_i D_i}{J_D} \right]$$

Portanto, tendo-se em conta (110), segue:

$$M_i A_i + N_i B_i = T_i p_i$$

onde

$$M_i = \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{a_1(a_1 + a_2)}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\gamma_{BC}}{J_o}$$

$$N_i = - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{a_1 a_2}{a_3(a_2 + a_3)} \frac{\alpha_i}{J_D} - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\gamma_{BB}}{J_o} + \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\gamma_{BC}}{J_o}$$

$$T_i = - \left(\frac{a_1 + a_2 - r^P}{a_3} \right) \frac{\alpha_i}{J_D} - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \frac{\gamma_{BP}}{J_o} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 - r^P}{a_3} \right) \frac{\gamma_{BC}}{J_o} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2 + a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 - r^P}{a_3} \right) \frac{\alpha_i}{J_D}$$

A 2.^a equação de (109) dá:

$$\frac{\alpha_i A_i}{J_A} - \frac{\alpha_i D_i}{J_D} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \left[\frac{\alpha_i C_i}{J_C} - \frac{\gamma_{CP}}{J_o} p_i + \frac{\gamma_{CB}}{J_o} B_i + \frac{\gamma_{CC}}{J_o} C_i - \frac{\alpha_i C_i}{J_D} \right]$$

Em virtude de (110), resulta:

$$R_i A_i + Q_i B_i = V_i p_i$$

onde

$$R_i = \frac{\alpha_i}{J_A} + \left(\frac{a_1 + a_2}{a_3} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_D} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right)^2 \frac{\alpha_i}{J_C} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right)^2 \frac{\gamma_{CC}}{J_o}$$

$$Q_i = \frac{a_2(a_1 + a_2)}{a_3^2} \frac{\alpha_i}{J_D} + \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\alpha_i}{J_C} - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\gamma_{CB}}{J_o} + \left(\frac{a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\gamma_{CC}}{J_o}$$

$$V_i = \frac{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 - r_P)}{a_3^2} \frac{\alpha_i}{J_D} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 - r_P}{a_3} \right) \frac{\alpha_i}{J_C} - \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \frac{\eta_{CP}}{J_0} + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_3} \right) \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 - r_P}{a_3} \right) \frac{\eta_{CC}}{J_0}$$

Têm-se portanto as duas equações:

$$\left. \begin{aligned} M_i A_i + N_i B_i &= T_i p_i \\ R_i A_i + Q_i B_i &= V_i p_i \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

D'onde:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{T_i Q_i - V_i N_i}{M_i Q_i - R_i N_i} \cdot p_i \\ B_i &= \frac{T_i R_i - V_i M_i}{N_i R_i - Q_i M_i} \cdot p_i \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

o que resolve completamente o problema.

Quando for $a_1 = a_2 = a_3 = a$, segue:

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{7}{4} \frac{a^3}{J_0}, \\ N_i &= -\frac{3}{2} \frac{\alpha_i}{J_B} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{J_0}, \\ T_i &= \frac{2a - r_P}{2a} \frac{\alpha_i}{J_D} - \frac{3}{2} \frac{\eta_{BP}}{J_0} + \frac{7(3a - r_P)}{12} \frac{a^2}{J_0}, \\ R_i &= \frac{\alpha_i}{J_A} + 9 \frac{\alpha_i}{J_C} + 4 \frac{\alpha_i}{J_D} + 4 \frac{a^3}{J_0}, \\ Q_i &= 6 \frac{\alpha_i}{J_C} + 2 \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{J_0}, \\ V_i &= \frac{3(3a - r_P)}{a} \frac{\alpha_i}{J_C} + \frac{2(2a - r_P)}{a} \frac{\alpha_i}{J_D} - 3 \frac{\eta_{CP}}{J_0} + \frac{4(3a - r_P)}{3} \frac{a^2}{J_0}; \end{aligned}$$

e se, além disso, $r_P = a$, vem:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{J_0} \\ V_i &= \frac{6}{J_C} \alpha_i + 2 \frac{\alpha_i}{J_D} + \frac{3}{2} \frac{a^3}{J_0} \end{aligned}$$

Obtidos que foram os A_i e B_i , por simples somação, chegamos aos A_x e B_x , que, conhecidos, permitem determinar C_x e D_x por meio de (110).

B. GRELHAS LIVREMENTE APOIADAS EM DOIS BORDOS, INCLUIDO O EFEITO DE TORÇÃO

Consideraremos neste trabalho apenas as grelhas simétricas, para não nos estendermos demais. O estudo se aplica muito facilmente às grelhas assimétricas, como bem se pode depreender do que, a seguir, exporemos. Sendo, no corrente das estruturas de pontes, a resistência à torção das vigas transversais bem menor do que a das vigas longitudinais, só levaremos em conta esta última.

O apoio das vigas longitudinais será constituído de forma a permitir a livre rotação no sentido longitudinal, mas de modo a impedir qualquer rotação no sentido transversal.

1. DUAS VIGAS LONGITUDINAIS

10. Cargas sôbre uma das vigas (fig. 34).

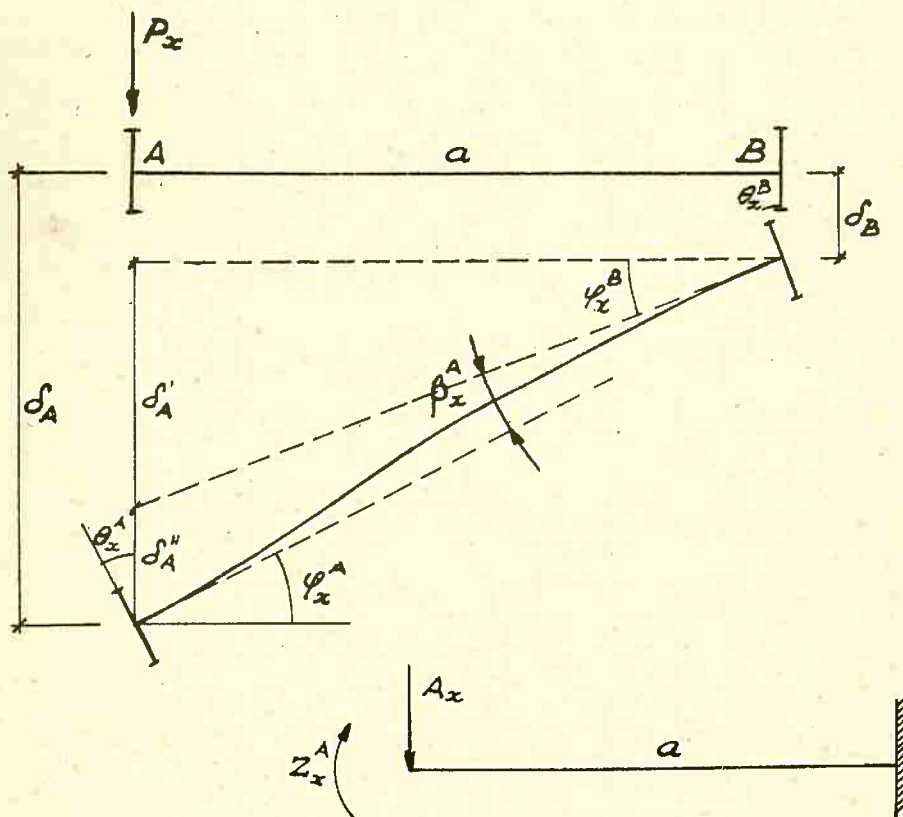


Fig. 34

A análise de uma viga transversal de ordem x leva à seguinte relação entre as flechas:

$$\delta_A = \delta_B + \delta'_A + \delta''_A \quad (113)$$

Por outro lado, a ligação rígida dos nós conduz também às igualdades:

$$\begin{aligned} \varphi_{x^A} &= -\theta_{x^A} \\ \varphi_{x^B} &= -\theta_{x^B} \end{aligned} \quad (114)$$

Além disso, há ainda a relação:

$$\varphi_{x^A} = \varphi_{x^B} + \beta_{x^A}, \quad (115)$$

onde β_{x^A} é o ângulo entre as tangentes à linha elástica da viga transversal, pelos pontos A e B, e φ_{x^B} o ângulo entre a tangente à mesma elástica em B e a primitiva linha AB.

O equilíbrio da viga transversal leva a:

$$Z_{x^B} = A_x \cdot a - Z_{x^A} \quad (116)$$

Desenvolvamos agora a carga P_x segundo a já conhecida soma trigonométrica:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Admitamos para $A_x = B_x$, Z_{x^A} e Z_{x^B} desenvolvimentos análogos:

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$Z_{x^A} = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^A \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$Z_{x^B} = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^B \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

sendo que A_i , z_i^A e z_i^B são, por ora, desconhecidos.

Então, vem:

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\delta'_A = \varphi_{x^B} \cdot a,$$

$$\delta''_A = \frac{a^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_i^A \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Mas

$$\varphi_x^n = -\theta_x^n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i}{G J_t^n} z_i^n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i}{G J_t^n} (a A_i - z_i^A) \sin \frac{i \pi x}{n}$$

de acordo com o que vimos no Problema 6, do capítulo III.

Com isto tem-se:

$$\delta'_A = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a \rho_i}{G J_t^n} (a A_i - z_i^A) \sin \frac{i \pi x}{n}$$

Introduzindo-se estes valores na equação (113), resulta:

$$\frac{\alpha_i \rho_i}{E J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} = \frac{\alpha_i A_i}{E J_B} - \frac{a^2 \rho_i}{G J_t^n} A_i + \frac{a \rho_i}{G J_t^n} z_i^A + \frac{a^3}{3 E J_0} A_i - \frac{a^2}{2 E J_0} z_i^A$$

Daí vem:

$$\frac{\alpha_i \rho_i}{E J_A} = \left(\frac{\alpha_i}{E J_A} + \frac{\alpha_i}{E J_B} - \frac{a^2 \rho_i}{G J_t^n} + \frac{a^3}{3 E J_0} \right) A_i + \left(\frac{a \rho_i}{G J_t^n} - \frac{a^2}{2 E J_0} \right) z_i^A \quad (117)$$

Em virtude de (114) e (115) segue:

$$\theta_x^A = \theta_x^n - \beta_x^A$$

Portanto:

$$\frac{\rho_i z_i^A}{G J_t^A} = \frac{\rho_i}{G J_t^n} (a A_i - z_i^A) - \beta_i^A$$

Como

$$\beta_x^A = \frac{a}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_i^A \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

tem-se:

$$\frac{\rho_i z_i^A}{G J_t^A} = \frac{\rho_i}{G J_t^n} (a A_i - z_i^A) - \frac{a z_i^A}{E J_0} + \frac{a^2}{2 E J_0} A_i$$

ou seja:

$$\left(\frac{\rho_i}{G J_t^A} + \frac{\rho_i}{G J_t^n} + \frac{a}{E J_0} \right) z_i^A = \left(\frac{a \rho_i}{G J_t^n} + \frac{a^2}{2 E J_0} \right) A_i$$

Portanto:

$$z_i^A = \frac{\left(\frac{a \rho_i}{G J_t^n} + \frac{a^2}{2 E J_0} \right) A_i}{\frac{\rho_i}{G J_t^A} + \frac{\rho_i}{G J_t^n} + \frac{a}{E J_0}} \quad (118)$$

As duas equações, (117) e (118) nos dão os valores de A_i e z_i^A . Com estes, por simples somação, chegamos aos valores de A_x e Z_x^A , que,

uma vez conhecidos, permitem a determinação de Z_{x^B} , por intermédio de (116).

A solução d'êste problema reputamos de grande significação. Com ela fica também resolvida a importante questão da distribuição transversal de cargas nas pontes constituídas de duas vigas longitudinais apenas. Uma carga, atuando sôbre uma das vigas longitudinais, é também absorvida pela outra, resultando daí grande economia, como veremos no exemplo que segue. Contudo, não se tem, até hoje, tirado partido d'êste fato, fazendo-se com que a viga, sob a ação direta da carga, suporte sôzinha esta mesma carga, o que é um verdadeiro absurdo. A viga transversal deve possuir uma armadura inferior, para absorver os momentos fletores positivos nos seus engastes com as longitudinais. As normas preocupam-se apenas com os momentos fletores negativos que aí podem aparecer, esquecendo de dois fatos importantes:

1. que nos apoios possa haver momentos fletores positivos e, então, necessidade de se prescrever uma armadura mínima correspondente;
2. que, em virtude disso, o momento fletor negativo, no apoio oposto, pode ser maior do que se prescreve.

Com o método de cálculo proposto por nós, a solução d'êste importante problema se torna imediata e de uma simplicidade comprovada.

Mais adiante veremos como se pode incluir também a colaboração da laje na distribuição transversal da carga.

Exemplo 5. Tomemos como exemplo uma grelha ensaiada no Instituto de Pesquisas da Escola Técnica Superior de Karlsruhe, Alemanha (ver capítulo VI).

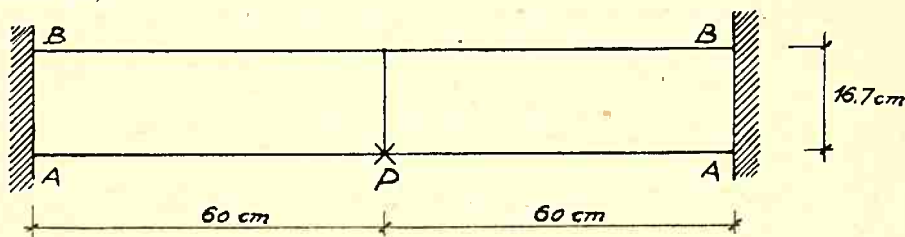


Fig. 35

Trata-se de um modelo de concreto armado com as características (fig. 35).

$$\begin{aligned}
 J_A &= J_B = J & n &= 2 \\
 J_t^A &= J_t^B = J_t & \alpha_1 &= 0,1667 \times 60 \\
 & & &= 36000 \text{ cm}^3 \\
 \frac{E J_o}{G J_t} &= 3,094 & \rho_1 &= -0,5 \times 60 = \\
 & & &= -30 \text{ cm} \\
 \frac{J_o}{J} &= 0,617
 \end{aligned}$$

Então, pela equação (118) vem:

$$z_1^A = \frac{-16,7 \times 30 \times 3,094 + 0,5 \times 16,7^2}{-2 \times 30 \times 3,094 + 16,7} = 8,35$$

Aplicando-se agora a equação (117), resulta:

$$0,617 \times 3600 P = \left(2 \times 36000 \times 0,617 + \frac{16,7^2}{30 \times 3,094} + \frac{16,7^3}{3} \right) A_1 + \left(-16,7 \times 30 \times 3,094 - \frac{16,7^2}{2} \right) 8,35 A_1$$

Portanto:

$$A_1 = \frac{22212,00}{57755,41} P = 0,385 P$$

A carga que realmente toca à viga A será então:

$$P - 0,385 P = 0,615 P.$$

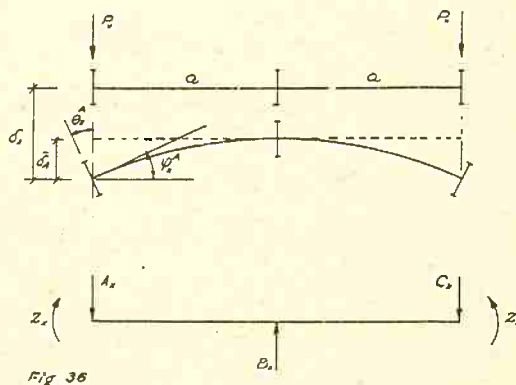
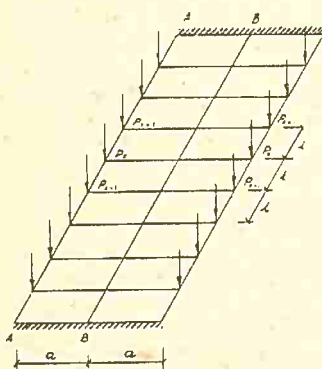
Como se vê, apenas 61,5% da carga é suportada pela viga A, cabendo à viga B os 38,5% restantes.

Se nas fórmulas acima fizemos $J_0 = \infty$, encontraremos $A_1 = 0,387 P$. Obtem-se, portanto, resultado bem aproximado, em se desprezando a deformação das vigas transversais. Isto é lícito quando os comprimentos destas forem bem inferiores aos comprimentos das vigas longitudinais.

Os resultados coincidem com os encontrados por Schöttgen [38]. Contudo o método deste autor é válido para uma viga transversal apenas, e o nosso é geral.

2. TRÊS VIGAS LONGITUDINAIS

2.1. Vigas de bordo carregadas simetricamente (fig. 36).



Entre as flechas podemos escrever a relação:

$$\delta_A - \bar{\delta}_A = \delta_B \quad (119)$$

Do equilíbrio resulta:

$$\begin{aligned} 2 A_x &= B_x \\ Z_x^A &= Z_x^C = Z_x \end{aligned} \quad (120)$$

Se admitirmos, a exemplo do caso anterior, os desenvolvimentos trigonométricos conhecidos para P_x , A_x e Z_x , teremos:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \bar{\delta}_A &= \frac{a^3}{3 E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{2 E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} z_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}, \\ \delta_B &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} 2 \frac{\alpha_i A_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} \end{aligned}$$

A relação (119), passa a:

$$\frac{\alpha_i p_i}{J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{J_A} - \frac{a^3}{3 J_o} A_i + \frac{a^2}{2 J_o} z_i = 2 \frac{\alpha_i A_i}{J_B}$$

Portanto:

$$A_i \left(\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_B} + \frac{a^3}{3 J_o} \right) = \frac{\alpha_i p_i}{J_A} + \frac{a^2}{2 J_o} z_i \quad (121)$$

Por outro lado, em virtude da ligação rígida nos nós, temos:

$$\theta_{x^A} = - \varphi_{x^A}$$

Então:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i z_i}{G J_t} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = - \frac{a^2}{2 E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{a}{E J_o} \sum_{i=1}^{n-1} z_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Daí vem:

$$z_i = \frac{a^2 A_i}{2a - 2 \frac{E J_o}{G J_t} \rho_i} \quad (122)$$

Levado este valor na equação (121), segue:

$$A_i = \frac{\alpha_i p_i}{J_A \left[\frac{\alpha_i}{J_A} + \frac{2 \alpha_i}{J_B} + \frac{a^3}{3 J_o} - \frac{a^4}{4a J_o - 4 \frac{E J_o^2}{G J_t} \rho_i} \right]} \quad (123)$$

Desprezada a torção, a fórmula passa a:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 + 2 \alpha_1 \frac{J_A}{J_B} + \frac{a^3}{3} \frac{J_A}{J_0}}.$$

idêntica à expressão (37) já encontrada por nós.

Se, na fórmula, fizermos $J_0 = \infty$, vem:

$$A_1 = \frac{p_1}{3}$$

isto é, a carga se reparte igualmente pelas três vigas, como era de se esperar.

22. *Vigas de bordo carregadas antimetricamente (fig. 37).*

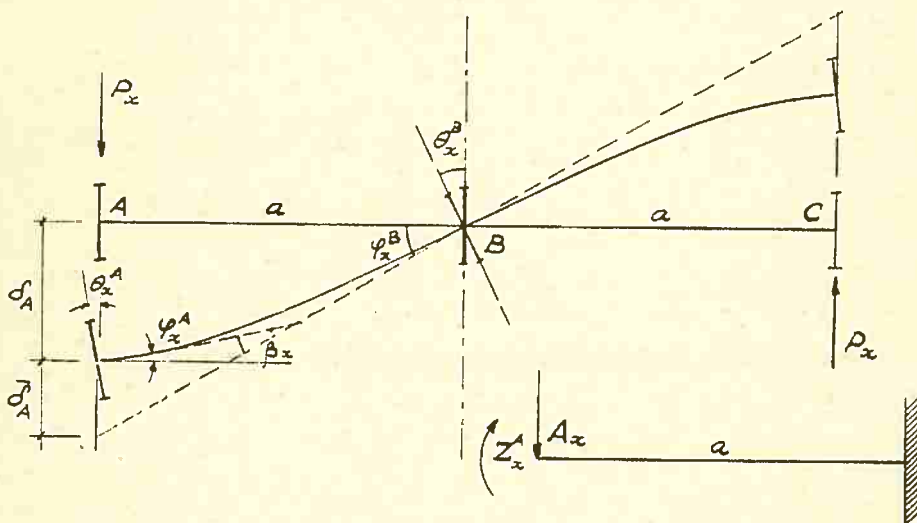


Fig. 37

As equações de elasticidade, no caso, são:

$$\varphi_x^A \cdot a - \bar{\delta}_A = \delta_A \quad (124),$$

$$\varphi_x^A = \varphi_x^B - \beta_x^A = -\theta_x^A \quad (125),$$

$$\varphi_x^B = -\theta_x^B \quad (126).$$

O equilíbrio da viga trassversal determina:

$$Z_x^B = 2 a A_x - 2 Z_x^A \quad (127)$$

Lançando-se mão dos desenvolvimentos trigonométricos, vem:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$Z_x^A = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^A \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

onde A_i e z_i^A são ainda desconhecidos.

Com isto:

$$\bar{\theta}_A = \frac{a^2}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_i^A \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\bar{\theta}_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\theta_x^A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i z_i^A}{G J_t^A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n},$$

$$\theta_x^B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i z_i^B}{G J_t^B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i}{G J_t^B} (2a A_i - 2 z_i^A) \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Então, das equações (124) e (126), segue:

$$- \frac{a \rho_i}{G J_t^B} (2a A_i - 2 z_i^A) - \frac{a^2}{2 E J_0} z_i^A + \frac{a^3}{3 E J_0} A_i = \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} - \frac{\alpha_i A_i}{E J_A}$$

Portanto:

$$\left(\frac{\alpha_i}{E J_A} + \frac{a^3}{3 E J_0} - \frac{2 a^2 \rho_i}{G J_t^B} \right) A_i + \left(\frac{2 a \rho_i}{G J_t^B} - \frac{a^2}{2 E J_0} \right) z_i^A = \frac{\alpha_i p_i}{E J_A} \quad (128)$$

Da equação (125), vem:

$$\theta_x^A = \theta_x^B + \beta_x^A$$

Mas,

$$\beta_x^A = \frac{a}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_i^A \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

D'onde:

$$\frac{\rho_i z_i^A}{G J_t^A} = \frac{\rho_i}{G J_t^B} (2a A_i - 2 z_i^A) + \frac{a}{E J_0} z_i^A - \frac{a^2}{2 E J_0} A_i$$

Portanto:

$$z_1^A = \frac{\frac{2a \rho_1}{G J_t^B} - \frac{a^2}{2 E J_0}}{\frac{\rho_1}{G J_t^A} + \frac{2 \rho_1}{G J_t^B} - \frac{a}{E J_0}} \cdot A_1 \quad (129)$$

As duas equações, (128) e (129), resolvem o problema.

23. *Viga central carregada* (fig. 38).

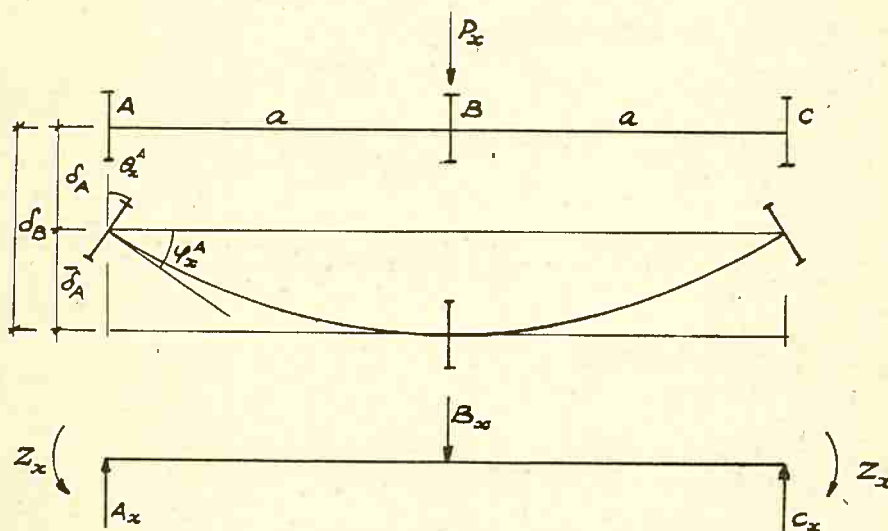


Fig. 38.

As equações, no caso, são:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \delta_B \quad (130) ,$$

$$\varphi_{x^A} = -\theta_{x^A} \quad (131) ,$$

$$B_x = 2 A_x \quad (132) .$$

Mas

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J_A} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} ,$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{a^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} ,$$

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i \rho_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i B_i}{E J_B} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} .$$

Introduzindo-se estes valores em (130) vem:

$$\frac{\alpha_1 A_1}{J_A} + \frac{a^3}{3 J_0} A_1 - \frac{a^2}{2 J_0} z_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{J_B} - \frac{\alpha_1 B_1}{J_B}$$

Portanto:

$$\left(\frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{2 \alpha_1}{J_B} + \frac{a^3}{3 J_0} \right) A_1 - \frac{a^2}{2 J_0} z_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{J_B} \quad (133)$$

Em virtude de (131), resulta:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i z_i}{G J_t} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = - \frac{a^2}{2 E J} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} + \frac{a}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}.$$

Portanto:

$$\frac{\rho_i z_i}{G J_t} = - \frac{a^2}{2 E J_0} A_i + \frac{a}{E J_0} z_i,$$

ou seja:

$$z_i = \frac{a^2}{2 a - 2 \frac{E}{G} \frac{J_0}{J_t} \rho_i} \cdot A_i$$

Levando-se este valor em (133), segue:

$$A_i = \frac{\alpha_1 p_1}{J_A \left[\frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{2 \alpha_1}{J_B} + \frac{a^3}{3 J_0} - \frac{a^4}{4 a J_0 - 4 \frac{E}{G} \frac{J_0^2}{J_t} \rho_i} \right]} \quad (134)$$

expressão idêntica à (123).

Exemplo 6. Calculemos a grelha de concreto armado que, como a do exemplo 5, foi ensaiada no Instituto de Pesquisas da Escola Técnica Superior de Kalsruhe (ver cap. VI).

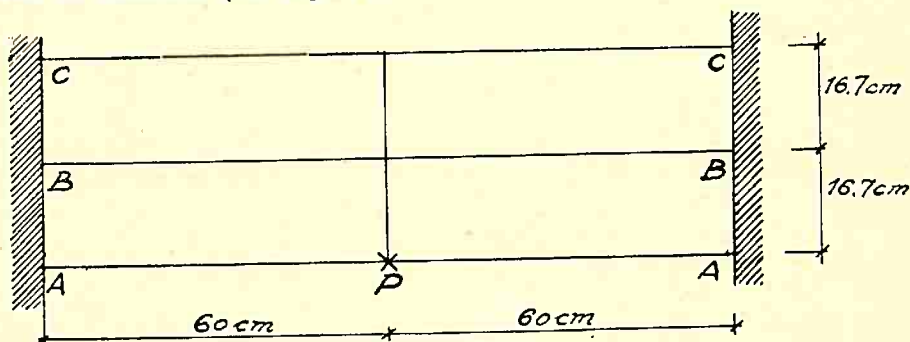


Fig. 39

As características desta grelha são:

$$\begin{aligned} J_A &= J_B = J_C = J, & n &= 2 \\ J_t^A &= J_t^B = J_t^C = J_t, & \alpha_1 &= 0,1667 \times 60^3 \\ & & &= 36000 \text{ cm}^3 \\ \frac{E J_o}{G J_t} &= 3,094 \\ \frac{E J_o}{E J} &= 0,617 & \rho_1 &= -0,5 \times 60 = -30 \text{ cm} \end{aligned}$$

Calculemos a grelha sujeita ao carregamento simétrico das vigas A e C com as cargas $P/2$. Valendo-nos da fórmula (123), encontramos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{36000 P/2}{3 \times 36000 + \frac{16,7^3}{3} \times 1,621 - \frac{16,7^4}{4 \times 16,7 \times 0,617 + 4 \times 3,094 \times 0,617 \times 30}} \\ &= 0,327 P/2 \end{aligned}$$

Passando-se ao carregamento antissimétrico com $P/2$, da equação (129), vem:

$$z_1^A = \frac{-2 \times 16,7 \times 3,094 \times 30 - 0,5 \times 16,7^2}{-3 \times 30 \times 3,094 - 16,7} \quad A_1 = 10,976 A_1$$

Introduzindo-se este valor na equação (128) resulta:

$$\begin{aligned} (0,617 \times 3600 + \frac{16,7^3}{3} + 2 \times 16,7^2 \times 3,094 \times 30) A_1 + \\ \left(-2 \times 16,7 \times 3,094 \times 30 - \frac{16,7^2}{2} \right) 10,976 A_1 = 0,617 \times 36000 P/2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$A_1 = 0,556 P/2$$

Como $A_1 = A_1$, pois $n=2$, o quinhão de carga que toca à viga A será $0,559 P$, o da viga B' $0,327 P$, e o quinhão da viga C será $0,115 P$.

Estes resultados conferem com os de Schöttgem [38].

Exemplo 7. Para demonstrar ainda uma vez a simplicidade e rapidez do nosso método, tomemos uma grelha calculada por Mahomed Hilal [29], página 63 do seu livro (fig. 40).

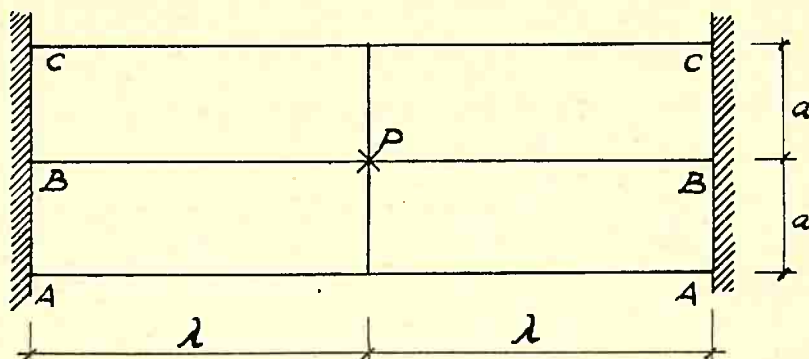


Fig. 40

As características desta grelha são:

$$J_A = J_B = J_C = 2 J_0, \quad n = 2, \quad \lambda = 2a$$

$$J_{t^A} = J_{t^B} = J_{t^C} = J_t = J_0, \quad \frac{E}{G} = 2,4$$

Então, pela expressão (134), resulta:

$$A_1 = \frac{0,1667 P}{3 \times 0,1667 + \frac{2}{24} - \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{2} + 4 \times 2,4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2}} = 0,295 P$$

Portanto, os quinhões que tocam às vigas longitudinais são: $0,295 P$ para as vigas A e C, e $P - 2 \times 0,295 P = 0,410 P$ para a viga B.

Êstes resultados concordam com os encontrados por M. Hilal, que, para a sua obtenção, ocupou três páginas e meia do seu livro, sem atingir a precisão que alcançamos.

3. QUATRO VIGAS LONGITUDINAIS

3.1. Vigas de bordo carregadas simetricamente (fig. 41).

As equações de elasticidade são as seguintes:

$$\delta_A - \bar{\delta}_A = \delta_B - \bar{\delta}_B \quad (135)$$

$$\varphi_{x^A} = -\theta_{x^A} \quad (136)$$

$$\varphi_{x^B} = -\theta_{x^B} \quad (137)$$

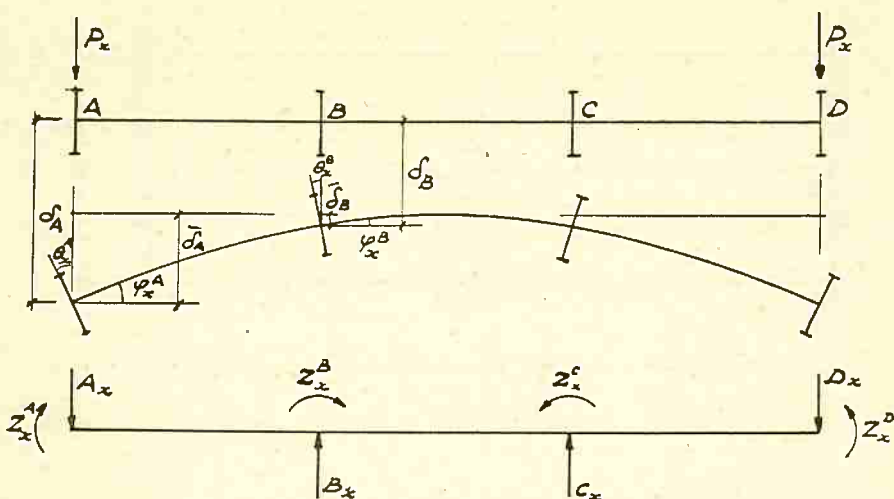


Fig. 41

O equilíbrio da viga transversal determina:

$$A_x = B_x = C_x = D_x \quad (138)$$

Mas

$$\delta_A = \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} A_x - \frac{a^3}{6 E J_0} B_x - \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} Z_x^A - \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} Z_x^B,$$

$$\delta_B = \frac{a^3}{6 E J_0} A_x - \frac{a^3}{24 E J_0} B_x - \frac{a^2}{8 E J_0} Z_x^A - \frac{a^2}{8 E J_0} Z_x^B,$$

$$\varphi_x^A = \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_x - \frac{a^2}{8 E J_0} B_x - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} Z_x^A - \frac{a}{2 E J_0} Z_x^B,$$

$$\varphi_x^B = \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_x - \frac{a^2}{8 E J_0} B_x - \frac{a}{2 E J_0} Z_x^A - \frac{a}{2 E J_0} Z_x^B.$$

Da equação (135) resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1 p_1}{E J_A} - \frac{\alpha_1 A_1}{J_A} - \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} A_1 + \frac{a^3}{6 E J_0} B_1 + \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^A + \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^B \\ & = \frac{\alpha_1 B_1}{E J_B} - \frac{a^3}{6 E J_0} A_1 + \frac{a^3}{24 E J_0} B_1 + \frac{a^2}{8 E J_0} z_1^A + \frac{a^2}{8 E J_0} z_1^B \end{aligned}$$

Como $A_1 = B_1$, vem:

$$\left(\frac{\alpha_1}{E J_A} + \frac{\alpha_1}{E J_B} + \frac{5}{6} \frac{a^3}{E J_0} \right) A_1 - \frac{a^2}{E J_0} z_1^A - \frac{a^2}{2 E J_0} z_1^B = \frac{\alpha_1 p_1}{2 E J_A} \quad (139)$$

De (136), segue:

$$-\frac{\rho_1 z_1^A}{G J_t^A} = \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_1 - \frac{a^2}{8 E J_0} B_1 - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} z_1^A - \frac{a}{2 E J_0} z_1^B .$$

Portanto:

$$\frac{a^2}{E J_0} A_1 + \left(\frac{\rho_1}{G J_t^A} - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} \right) z_1^A - \frac{a}{2 E J_0} z_1^B = 0 \quad (140)$$

De (132), segue:

$$-\frac{\rho_1 z_1^B}{G J_t^B} = \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_1 - \frac{a^2}{8 E J_0} B_1 - \frac{a}{2 E J_0} z_1^A - \frac{a}{2 E J_0} z_1^B .$$

Portanto:

$$\frac{a^2}{2 E J_0} A_1 - \frac{a}{2 E J_0} z_1^A + \left(\frac{\rho_1}{G J_t^B} - \frac{a}{2 E J_0} \right) z_1^B = 0 \quad (141)$$

Com as três equações, (139), (140) e (141) podemos determinar muito facilmente A_1 , z_1^A e z_1^B . De posse destes valores, determinamos A_x , Z_x^A e Z_x^B a saber:

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} ,$$

$$Z_x^A = \sum_{i=1}^{n-1} z_1^A \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} ,$$

$$Z_x^B = \sum_{i=1}^{n-1} z_1^B \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} .$$

32. Vigas de bordo carregadas antimetricamente (fig. 42).

A análise da viga transversal de ordem x nos conduz às relações seguintes:

$$\delta_A - \bar{\delta}_A = 3 (\delta_B - \bar{\delta}_B) , \quad (142)$$

$$\varphi_x^A = \alpha_x^A + \beta_x^A = \frac{2}{3} \frac{\delta_A - \bar{\delta}_A}{a} + \beta_x^A = -\theta_x^A , \quad (143)$$

$$\varphi_x^B = \alpha_x^B + \beta_x^B = \frac{2}{3} \frac{\delta_A - \bar{\delta}_A}{a} + \beta_x^B = -\theta_x^B . \quad (144)$$

O equilíbrio desta mesma viga transversal leva também à relação:

$$B_x = 3 A_x - \frac{2}{a} Z_x^A - \frac{2}{a} Z_x^B \quad (145) .$$

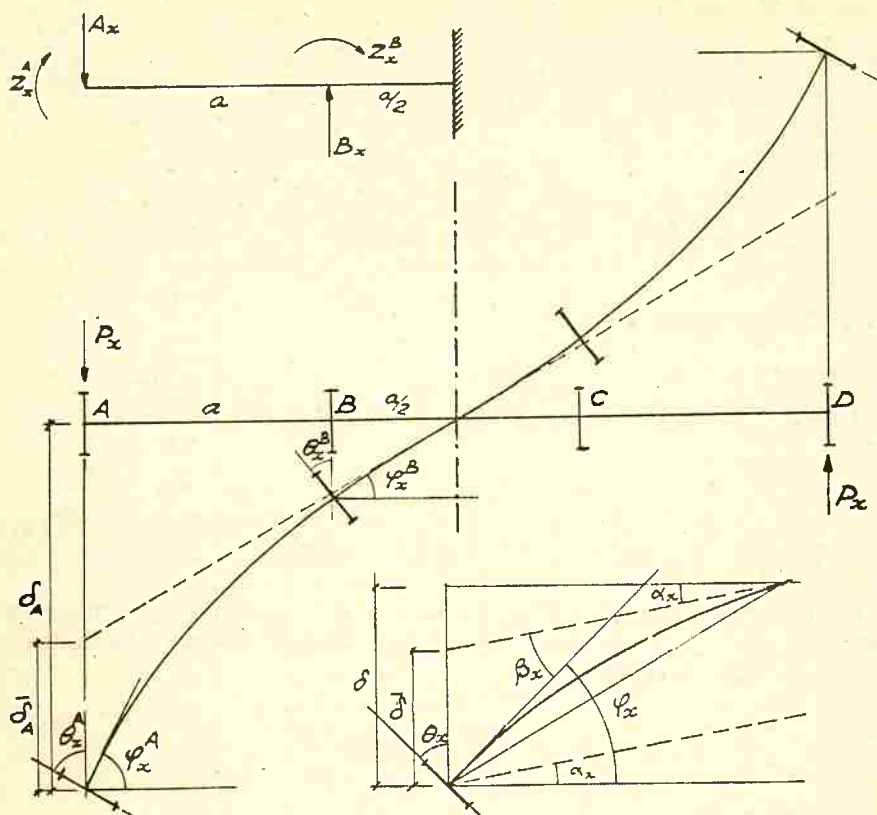


Fig. 42

Por outro lado,

$$\bar{\delta}_A = \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} A_x - \frac{a^3}{6 E J_0} B_x - \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} Z_x^A - \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} Z_x^B,$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{a^3}{6 E J_0} A_x - \frac{a^3}{24 E J_0} B_x - \frac{a^2}{8 E J_0} Z_x^A - \frac{a^2}{8 E J_0} Z_x^B,$$

$$\beta_x^A = \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_x - \frac{a^2}{8 E J_0} B_x - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} Z_x^A - \frac{a}{2 E J_0} Z_x^B,$$

$$\beta_x^B = \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_x - \frac{a^2}{8 E J_0} B_x - \frac{a}{2 E J_0} Z_x^A - \frac{a}{2 E J_0} Z_x^B.$$

Supondo P_x , A_x , B_x , Z_x^A e Z_x^B desenvolvidos segundo as somas trigonométricas já bem conhecidas por nós, e levando as expressões destas flechas na equação (142), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 p_1}{E J_A} - \frac{\alpha_1 A_1}{E J_A} - \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} A_1 + \frac{a^3}{6 E J_0} B_1 + \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^A + \\ + \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^B = 3 \frac{\alpha_1 B_1}{E J_B} - \frac{a^3}{2 E J_0} A_1 + \frac{a^3}{8 E J_0} B_1 + \\ + \frac{3}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^A + \frac{3}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^B . \end{aligned}$$

Portanto, como

$$B_1 = 3 A_1 - \frac{2}{a} z_1^A - \frac{2}{a} z_1^B , \text{ vem:}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_1}{J_A} + 9 \frac{\alpha_1}{J_B} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{J_0} \right) A_1 - \left(\frac{6 \alpha_1}{a J_B} + \frac{2}{3} \frac{a^2}{J_0} \right) z_1^A \\ - \left(\frac{6 \alpha_1}{a J_B} + \frac{1}{6} \frac{a^2}{J_0} \right) z_1^B = \frac{\alpha_1 p_1}{J_A} \end{aligned} \quad (146)$$

Da equação (143), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 a} \frac{\alpha_1 p_1}{E J_A} - \frac{2}{3 a} \frac{\alpha_1 A_1}{E J_A} - \frac{3}{4} \frac{a^2}{E J_0} A_1 + \frac{a^2}{9 E J_0} B_1 + \\ + \frac{3}{4} \frac{a}{E J_0} z_1^A + \frac{5}{12} \frac{a}{E J_0} z_1^B + \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_1 - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} z_1^A \\ - \frac{a^2}{8 E J_0} - \frac{a}{2 E J_0} z_1^B = - \frac{\rho_1 z_1^A}{G J_t^B} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3 a} \frac{\alpha_1}{E J_A} - \frac{1}{3} \frac{a^2}{E J_0} \right) A_1 + \left(\frac{13}{18} \frac{a}{E J_0} - \frac{\rho_1}{G J_t^A} \right) z_1^A \\ + \frac{1}{18} \frac{a}{E J_0} z_1^B = \frac{2}{3 a} \frac{\alpha_1 p_1}{E J_A} \end{aligned} \quad (147)$$

Da equação (144), segue:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 a} \frac{\alpha_1 p_1}{E J_A} - \frac{2}{3 a} \frac{\alpha_1 A_1}{E J_A} - \frac{3}{4} \frac{a^2}{E J_0} A_1 + \frac{1}{9} \frac{a^2}{E J_0} B_1 + \frac{3}{4} \frac{a}{E J_0} z_1^A \\ + \frac{5}{12} \frac{a}{E J_0} z_1^B + \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_1 - \frac{a^2}{8 E J_0} B_1 - \frac{a}{2 E J_0} z_1^A - \frac{a}{2 E J_0} z_1^B = \\ = - \frac{\rho_1 z_1^B}{G J_t^B} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\left(\frac{2}{3a} \frac{\alpha_1}{E J_A} + \frac{1}{6} \frac{a^2}{E J_0} \right) A_1 - \frac{5}{18} \frac{a}{E J_0} z_1^A +$$

$$+ \left(\frac{1}{18} \frac{a}{E J_0} - \frac{\rho_i}{G J_1^B} \right) z_1^B = \frac{2}{3a} \frac{\alpha_1 p_i}{E J_A} \quad (148)$$

As três equações, (146), (147) e (148) nos fornecem A_1 , z_1^A e z_1^B ; daí, por simples somação, determinamos os valores de A_x , Z_x^A e Z_x^B , e então o valor de B_x por meio de (145).

33. Vigas internas carregadas simetricamente (fig. 43).

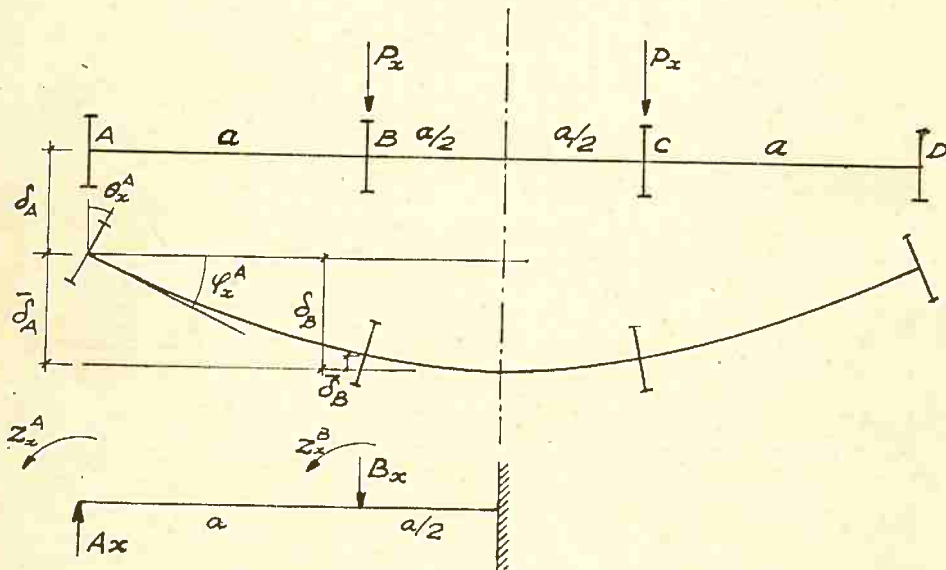


Fig. 43

Neste caso, as equações de elasticidade são:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \delta_B + \bar{\delta}_B, \quad (149)$$

$$\varphi_x^A = -\theta_x^A, \quad (150)$$

$$\varphi_x^B = -\theta_x^B. \quad (151)$$

O equilíbrio da viga transversal leva a:

$$A_x = B_x = C_x = D_x$$

Mas,

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_A &= \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^3}{6 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin \frac{i \pi x}{n} \\ &\quad - \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^A} \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^B} \sin \frac{i \pi x}{n}, \\ \bar{\delta}_B &= \frac{a^3}{6 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^3}{24 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin \frac{i \pi x}{n} \\ &\quad - \frac{a^2}{8 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^A} \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{8 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^B} \sin \frac{i \pi x}{n}, \\ \varphi_{x^A} &= \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{8 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin \frac{i \pi x}{n} \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^A} \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^B} \sin \frac{i \pi x}{n}, \\ \varphi_{x^B} &= \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a^2}{8 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \sin \frac{i \pi x}{n} \\ &\quad - \frac{a}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^A} \sin \frac{i \pi x}{n} - \frac{a}{2 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i^B} \sin \frac{i \pi x}{n}.\end{aligned}$$

Levando-se estes valores na equação (149), e tendo-se em conta que $A_i = B_i$, vem:

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_1 A_i}{J_A} + \frac{9 a^3}{8 J_0} A_i - \frac{a^3}{6 J_0} A_i - \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_{i^A} - \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_{i^B} = \\ &= \frac{\alpha_1 p_i}{J_B} - \frac{\alpha_1 A_i}{J_B} + \frac{a^3}{6 J_0} A_i - \frac{a^3}{24 J_0} A_i - \frac{a^2}{8 J_0} z_{i^A} - \frac{a^2}{8 J_0} z_{i^B}.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\left(\frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{\alpha_1}{J_B} + \frac{5}{6} \frac{a^3}{J_0} \right) A_i - \frac{a^2}{J_0} z_{i^A} - \frac{a^2}{2 J_0} z_{i^B} = \frac{\alpha_1 p_i}{J_B} \quad (152)$$

Da equação (150), segue:

$$\frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_i - \frac{a^2}{8 E J_0} A_i - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} z_{i^A} - \frac{a}{2 E J_0} z_{i^B} = - \frac{\rho_i z_{i^A}}{G J_t^A}$$

Portanto:

$$\frac{a^2}{E J_0} A_i + \left(\frac{\rho_i}{G J_t^A} - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} \right) z_{i^A} - \frac{a}{2 E J_0} z_{i^B} = 0 \quad (153)$$

Da equação (151), resulta:

$$\frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_i - \frac{a^2}{8 E J_0} A_i - \frac{a}{2 E J_0} z_{i^A} - \frac{a}{2 E J_0} z_{i^B} = - \frac{\rho_i z_{i^B}}{G J_t^B}$$

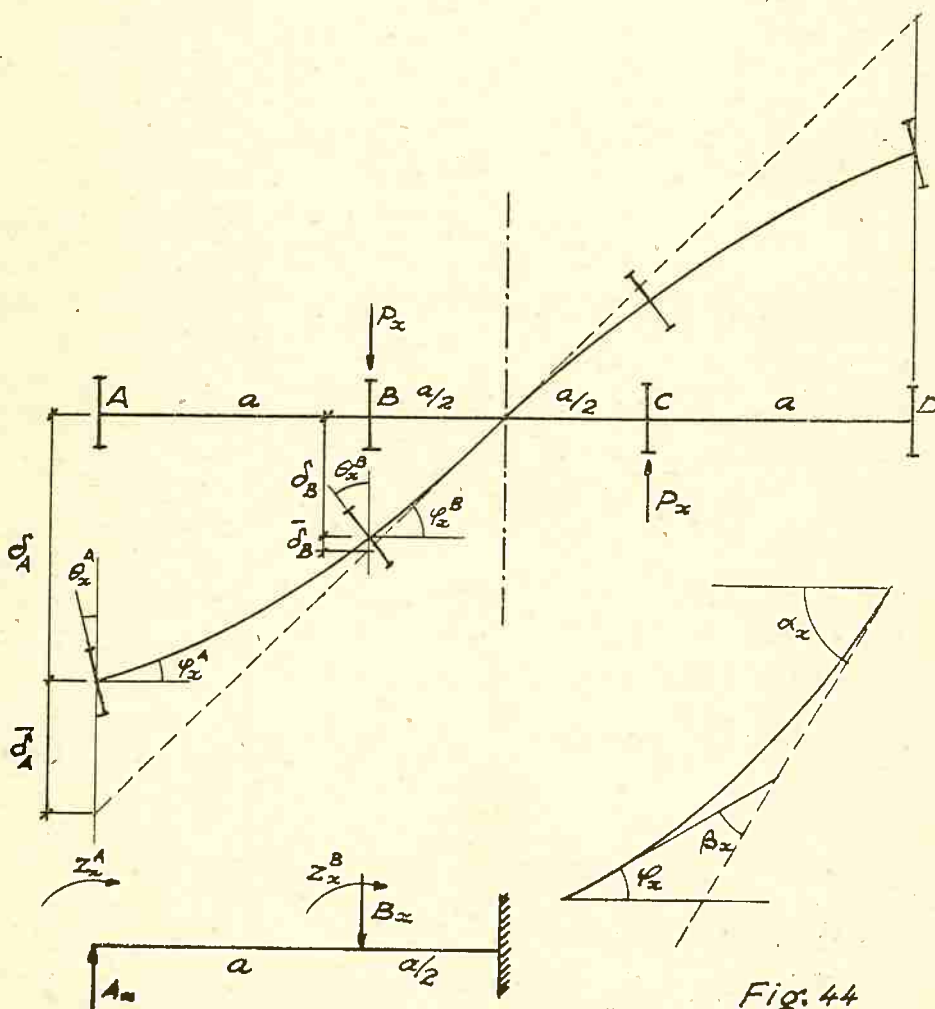
Portanto:

$$\frac{a^2}{2 E J_0} A_1 - \frac{a}{2 E J_0} z_1^A + \left(\frac{\rho_1}{G J_{TP}} - \frac{a}{2 E J_0} \right) z_1^B = 0 \quad (154)$$

Então, com as equações (152), (153) e (154) determinam-se os valores de A_1 , z_1^A e z_1^B ; e da somação conhecida resultam os valores de A_x , Z_x^A e Z_x^B .

Desprezados os z_1^A e z_1^B , isto é, desprezado o efeito de torção, as três equações se reduzem a uma só, a (152), idêntica a (54a), já encontrada anteriormente.

34. Vigas internas carregadas antimetricamente (fig. 44).



Na altura das vigas transversais de ordem x verificam-se as seguintes relações:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = 3(\delta_B + \bar{\delta}_B) \quad (155),$$

$$\varphi_{x^A} = \alpha_{x^A} - \beta_{x^A} = -\theta_{x^A} \quad (156),$$

$$\varphi_{x^B} = \alpha_{x^B} - \beta_{x^B} = -\theta_{x^B}. \quad (157).$$

Das condições de equilíbrio desta mesma viga, segue:

$$B_x = 3A_x + \frac{2}{a} Z_{x^A} + \frac{2}{a} Z_{x^B} \quad (158)$$

Mas,

$$\bar{\delta}_A = \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} A_x - \frac{a^3}{6 E J_0} B_x + \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} Z_{x^A} + \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} Z_{x^B},$$

$$\bar{\delta}_B = \frac{a^3}{6 E J_0} A_x - \frac{a^3}{24 E J_0} B_x + \frac{a^2}{8 E J_0} Z_{x^A} + \frac{a^2}{8 E J_0} Z_{x^B},$$

$$\beta_{x^A} = \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_x - \frac{a^2}{8 E J_0} B_x + \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} Z_{x^A} + \frac{a}{2 E J_0} Z_{x^B},$$

$$\beta_{x^B} = \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_x - \frac{a^2}{8 E J_0} B_x + \frac{a}{2 E J_0} Z_{x^A} + \frac{a}{2 E J_0} Z_{x^B}.$$

Admitidos para P_x , A_x , Z_{x^A} e Z_{x^B} os desenvolvimentos trigonométricos de sempre, da equação (155), vem:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1 A_1}{J_A} + \frac{9}{8} \frac{a^3}{J_0} A_1 - \frac{a^3}{6 J_0} B_1 + \frac{9}{8} \frac{a^2}{J_0} z_{1^A} + \frac{5}{8} \frac{a^2}{J_0} z_{1^B} = \\ & = 3 \left(\frac{\alpha_1 p_1}{J_B} - \frac{\alpha_1 B_1}{J_3} + \frac{a^3}{6 J_0} A_1 - \frac{a^3}{24 J_0} B_1 + \frac{a^2}{8 J_0} z_{1^A} + \frac{a^2}{8 J_0} z_{1^B} \right) \end{aligned}$$

Como

$$B_1 = 3A_1 + \frac{2}{a} z_{1^A} + \frac{2}{a} z_{1^B},$$

segue:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_1}{J_A} + \frac{9\alpha_1}{J_B} + \frac{a^3}{2J_0} \right) A_1 + \left(\frac{6\alpha_1}{aJ_B} + \frac{2}{3} \frac{a^2}{J_0} \right) z_{1^A} + \\ & + \left(\frac{6\alpha_1}{aJ_B} + \frac{a^2}{6J_0} \right) z_{1^B} = \frac{3\alpha_1 p_1}{J_B} \end{aligned} \quad (159)$$

Da equação (156) resulta:

$$\frac{2}{3} \frac{\partial_A + \bar{\partial}_A}{a} - \beta_x^A = - \theta_x^A$$

Portanto:

$$\frac{3}{2a} \left(\frac{\alpha_1 A_1}{E J_A} + \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} A_1 - \frac{a^3}{6 E J_0} B_1 + \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^A + \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^B \right) - \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} A_1 + \frac{a^2}{8 E J_0} B_1 - \frac{3}{2} \frac{a}{E J_0} z_1^A - \frac{a}{2 E J_0} z_1^B = - \frac{\rho_1 z_1^A}{G J_t^A}$$

Dai segue:

$$\left(\frac{2 \alpha_1}{3a E J_A} - \frac{a^2}{3 E J_0} \right) A_1 + \left(\frac{\rho_1}{G J_t^A} + \frac{13}{18} \frac{a}{E J_0} \right) z_1^A - \frac{a}{18 E J_0} z_1^B = 0 \quad (160)$$

Finalmente, da equação (157) segue:

$$\frac{2}{3a} \left(\frac{\alpha_1 A_1}{E J_A} + \frac{9}{8} \frac{a^3}{E J_0} A_1 - \frac{a^3}{6 E J_0} B_1 + \frac{9}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^A + \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_0} z_1^B \right) - \frac{5}{8} \frac{a^2}{E J_A} A_1 + \frac{a^2}{8 E J_0} B_1 - \frac{a}{2 E J_0} z_1^A - \frac{a}{2 E J_0} z_1^B = - \frac{\rho_1 z_1^B}{G J_t^B}$$

D'onde:

$$\left(\frac{2 \alpha_1}{3a E J_A} + \frac{a^2}{6 E J_0} \right) A_1 + \frac{5}{18} \frac{a}{E J_0} z_1^A + \left(\frac{\rho_1}{G J_t^B} - \frac{a}{18 E J_0} \right) z_1^B = 0 \quad (161)$$

As três equações (159), (160) e (161) permitem determinar A_1 , z_1^A e z_1^B , que, conhecidos, dão, por somação, os valores de A_x , Z_x^A e Z_x^B .

Exemplo 8. Apliquemos agora o nosso método de cálculo a uma grelha que, como as dos exemplos 5 e 6, foi também ensaiada no Instituto de Pesquisa da Escola Técnica Superior de Karlsruhe (ver cap. VI).

Trata-se de uma grelha de concreto armado (fig. 45) com as características seguintes:

$$J_A = J_B = J_C = J_D = J, \quad n = 2,$$

$$J_t^A = J_t^B = J_t^C = J_t^D = J_t, \quad \alpha_1 = 36000 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{E J_o}{G J_t} = 3,094, \quad \rho_1 = -30 \text{ cm},$$

$$\frac{J_o}{J} = 0,617.$$

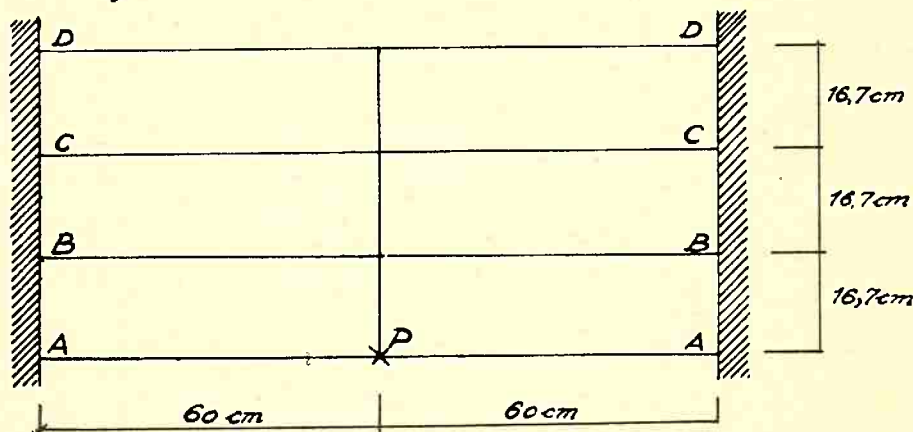


Fig. 45

O carregamento consiste em uma única carga concentrada P , no ponto de intersecção da viga transversal com a longitudinal A .

Decomposto o carregamento em dois, um simétrico com $P/2$, e outro antissimétrico com $P/2$, calculemos em primeiro lugar o antissimétrico.

Valendo-nos das fórmulas (139), (140) e (141), vem:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(36000 + 36000 + \frac{5}{6} \times \overline{16,7}^3 \times 1,621 \right) A_1 - 1,621 \times \overline{16,7}^2 z_1^A \\ & \quad - 1,621 \times \frac{\overline{16,7}^2}{2} z_1^B = 36000 P/2 \\ & \overline{16,7}^2 A_1 + \left(-30 \times 3,094 - \frac{3}{2} \times \overline{16,7} \right) z_1^A - \frac{\overline{16,7}}{2} z_1^B = 0 \\ & \frac{\overline{16,7}^2}{2} A_1 - \frac{\overline{16,7}}{2} z_1^A + \left(-30 \times 3,094 - \frac{\overline{16,7}}{2} \right) z_1^B = 0 \end{aligned} \right.$$

Portanto:

$$78\,291,46 A_1 - 452,08 z_1^A - 226,04 z_1^B = 36000 P/2$$

$$278,89 A_1 - 117,87 z_{1^A} - 8,35 z_{1^B} = 0$$

$$139,44 A_1 - 8,35 z_{1^A} - 101,17 z_{1^B} = 0$$

D'onde:

$$A_1 = 0,4676 P/2 = A_1$$

$$z_{1^A} = 1,0669 P/2 = Z_{1^A}$$

$$z_{1^B} = 0,5564 P/2 = Z_{1^B}$$

Vejamos agora o carregamento antissimétrico. Lançamos mão das fórmulas (146), (147) e (148).

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(10 \times 36000 + \frac{16,7^2}{2} \right) A_1 - \left(\frac{6 \times 36000}{16,7} + \frac{2}{3} \times 16,7 \times 1,621 \right) z_{1^A} \\ & - \left(\frac{6 \times 36000}{16,7} + \frac{2}{3} \times 16,7 \times 1,621 \right) z_{1^B} = 36000 P/2 \\ & \left(\frac{2 \times 36000}{3 \times 16,7} - \frac{16,7^2}{3} \times 1,621 \right) A_1 + \left(\frac{13}{18} \times 16,7 \times 1,621 + \right. \\ & \left. + 30 \times 5,016 \right) z_{1^A} + \frac{16,7^2}{18} \times 1,621 z_{1^B} = \frac{2 \times 36000}{3 \times 16,7} P/2 . \\ & \left(\frac{2 \times 36000}{3 \times 16,7} + \frac{16,7^2}{6} \times 1,621 \right) A_1 - \frac{5}{18} \times 16,7 \times 1,621 z_{1^A} \\ & + \left(\frac{16,7}{18} \times 1,621 + 30 \times 5,016 \right) z_{1^B} = \frac{2 \times 36000}{3 \times 16,7} P/2 . \end{aligned} \right.$$

Portanto:

$$360226,04 A_1 - 13235,55 z_{1^A} - 13009,51 z_{1^B} = 36000 P/2$$

$$1286,43 A_1 + 170,03 z_{1^A} + 1,50 z_{1^B} = 1437,13 P/2$$

$$1512,47 A_1 - 7,52 z_{1^A} + 151,98 z_{1^B} = 1437,13 P/2$$

D'onde

$$A_1 = 0,4636 P/2 = A_1$$

$$z_{1^A} = 4,8998 P/2 = Z_{1^A}$$

$$z_{1^B} = 5,0847 P/2 = Z_{1^B}$$

Reunidos os dois casos, o simétrico e o antissimétrico, os quinhões de carga nas quatro vigas longitudinais são:

Viga A :

$$P - \frac{0,4636 + 0,4676}{2} P = 0,5344 P ;$$

Viga B :

$$\frac{0,1951 + 0,4676}{2} P = 0,3313 P ;$$

Viga C :

$$\frac{0,4676 - 0,1951}{2} P = 0,1362 P ;$$

Viga D :

$$\frac{0,4636 - 0,4676}{2} P = - 0,0020 P .$$

Se, nas fórmulas usadas acima, tivessemos feito $J_0 = \infty$, isto é, considerada a viga transversal indeformável, os resultados seriam:

$$\text{Viga A} : 0,5168 P ;$$

$$\text{Viga B} : 0,3391 P ;$$

$$\text{Viga C} : 0,1610 P ;$$

$$\text{Viga D} : - 0,0168 P .$$

Como se vê, são valores bem próximos dos obtidos acima, e conseguidos com um número de operações bem menor.

C. GRELHAS CONTÍNUAS

Em se tratando de vigas contínuas com um número qualquer de vãos; com momentos de inércia constantes em cada viga; os comprimentos dos vãos sendo divididos em partes iguais pelas vigas transversais; o espaçamento entre estas sendo constante em toda a extensão das vigas contínuas, então o cálculo das grelhas contínuas se fará de maneira simples, obedecendo as seguintes fases:

- a) Retiram-se os apoios internos e calcula-se a grelha resultante livremente apoiada em dois bordos, de acordo com o processo analisado nos itens anteriores.
- b) Calculam-se as flechas nos pontos de onde foram retirados os apoios.
- c) Aplica-se agora, nesses mesmos pontos, um sistema de cargas que anulem, aí, as flechas calculadas.

- d) Por superposição, obtêm-se as reações recíprocas entre as vigas longitudinais e transversais.

Analisemos um caso particular para uma melhor compreensão do método.

Exemplo 9. Seja a grelha da fig. 46.

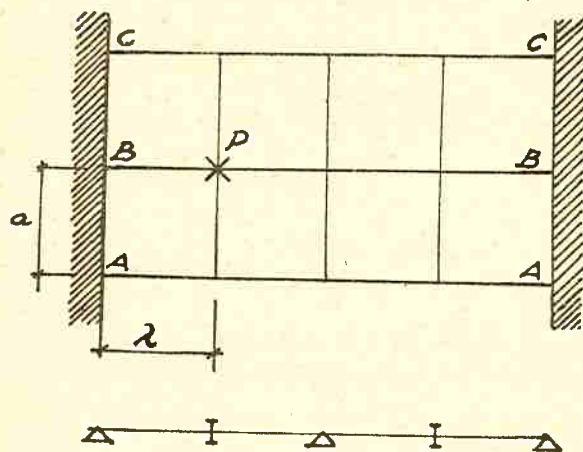


Fig. 46

Temos aí:

$$J_A = J_B = J_C = J = 2 J_0 \quad \text{e} \quad a = \lambda$$

Fase α)

Retirando-se os apoios internos, ficamos com uma grelha livremente apoiada em dois bordos. Então, de acordo com a fórmula (40a), temos:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{3 \alpha_1 + \frac{2}{3} a^3}$$

Mas,

$$p_1 = \frac{2}{n} P_k \sin \frac{i \pi k}{n} = \frac{1}{2} P \sin \frac{i \pi}{4}$$

Portanto:

$$p_1 = 0,35356 P ,$$

$$p_2 = 0,5 P ,$$

$$p_3 = 0,35356 P .$$

Da tabela I tiramos:

$$\alpha_1 = 2,62990 \lambda^3 ,$$

$$\alpha_2 = 0,16667 \lambda^3 ,$$

$$\alpha_3 = 0,03697 \lambda^3 .$$

Levando-se êstes valores na expressão de A_i , encontramos:

$$A_1 = 0,10867 P ,$$

$$A_2 = 0,07143 P ,$$

$$A_3 = 0,01681 P .$$

Logo, como

$$A_x = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

vem:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0,10867 \times 0,70711 + 0,07143 + 0,01681 \times 0,70711) P \\ &= 0,16016 P , \end{aligned}$$

$$A_2 = (0,10867 - 0,01681) P = 0,09186 P ,$$

$$\begin{aligned} A_3 &= (0,10867 \times 0,70711 - 0,07143 + 0,01681 \times 0,70711) P \\ &= 0,01730 . \end{aligned}$$

Portanto:

$$B_1 = 2 A_1 = 0,32032 P ,$$

$$B_2 = 2 A_2 = 0,18372 P ,$$

$$B_3 = 2 A_3 = 0,03460 P .$$

Fase b)

Viga A

$$\delta_2 = \sum_1^3 \frac{\alpha_i A_i}{E J} \operatorname{sen} \frac{i \pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \delta_2^A &= \frac{1}{E J} (2,62990 \times 0,10867 - 0,03697 \times 0,01681) P \lambda^3 \\ &= 0,28517 \frac{P \lambda^3}{E J} \end{aligned}$$

Viga B

$$\begin{aligned} \delta_2^B &= \frac{1}{E J} (2,62990 \times 0,35356 - 0,03697 \times 0,35356) P \lambda^3 \\ &- 2 \times 0,28517 \frac{P \lambda^3}{E J} = 0,34640 \frac{P \lambda^3}{E J} \end{aligned}$$

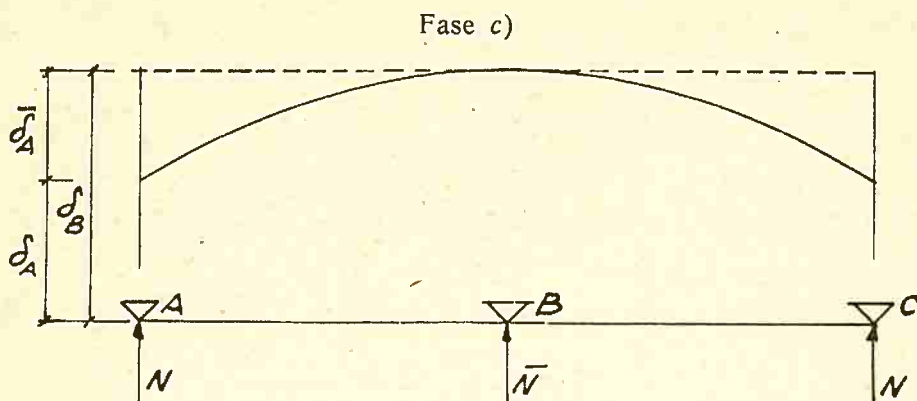


Fig. 47

Calculemos esta grelha sob a ação de três cargas atuando, respectivamente, no ponto $x=2$ das vigas A, B e C. Seja N a carga que atua nas vigas A e C, e $\bar{N}$ a que age sobre a viga B.

Surge então a seguinte relação entre flechas:

$$\delta_A + \bar{\delta}_A = \delta_B$$

e assim:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i^A}{E J} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i A_i}{E J} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} +$$

$$+ \frac{a^3}{3 E J_0} \sum_{i=1}^{n-1} A_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i p_i^B}{E J} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2 \alpha_i A_i}{E J} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

Portanto:

$$\frac{\alpha_i p_i^A}{J} - \frac{\alpha_i A_i}{J} + \frac{a^3}{3 J_0} A_i = \frac{\alpha_i p_i^B}{J} - \frac{2 \alpha_i A_i}{J}$$

Logo:

$$A_i = \frac{\alpha_i (p_i^B - p_i^A)}{\alpha_i + \frac{a^3}{3} \frac{J}{J_0}} = \frac{\alpha_i (p_i^B - p_i^A)}{\alpha_i + \frac{2}{3} a^3}$$

Mas,

$$p_i^B = \frac{2}{n} \bar{N} \operatorname{sen} \frac{i \pi k}{n} = \frac{1}{2} \bar{N} \operatorname{sen} \frac{i \pi}{2} \quad e$$

$$p_i^A = \frac{2}{n} N \operatorname{sen} \frac{i \pi k}{n} = \frac{1}{2} N \operatorname{sen} \frac{i \pi}{2}$$

Com isto temos:

$$A_1 = \frac{\frac{\alpha_1}{2} (\bar{N} - N) \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2}}{\alpha_1 + \frac{2}{3} a^3} = \frac{\alpha_1 \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2}}{2\alpha_1 + \frac{4}{3} a^3} \cdot (\bar{N} - N).$$

Então vem:

$$A_1 = \frac{2,62990}{2 \times 2,62990 + 1,33333} (\bar{N} - N) = 0,39888 (\bar{N} - N)$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = - \frac{0,03697 (\bar{N} - N)}{2 \times 0,03697 + 1,33333} = - 0,02627 (\bar{N} - N)$$

A flecha em $x=2$ na viga A será:

$$\begin{aligned} \delta_2^A &= \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i p_1^A}{EJ} \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i A_i}{EJ} \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2} \\ &= \frac{N}{2EJ} \sum_{i=1}^3 \alpha_i \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i A_i}{EJ} \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2} \\ &= \frac{N \lambda^3}{2EJ} (2,62990 + 0,03697) - \frac{\bar{N} - N}{EJ} \lambda^3 (2,6299 \times 0,39888 \\ &\quad + 0,03697 \times 0,02627) \\ &= 1,33344 \frac{N \lambda^3}{EJ} - 1,04978 \frac{(\bar{N} - N) \lambda^3}{EJ} \\ &= 2,38322 \frac{N \lambda^3}{EJ} - 1,04978 \frac{\bar{N} \lambda^3}{EJ} \end{aligned}$$

A flecha em $x=2$ na viga B será também:

$$\begin{aligned} \delta_2^B &= 1,33344 \frac{\bar{N} \lambda^3}{EJ} - 2 \times 1,04978 \frac{(\bar{N} - N) \lambda^3}{EJ} \\ &= 2,09956 \frac{N \lambda^3}{EJ} - 0,76612 \frac{\bar{N} \lambda^3}{EJ} \end{aligned}$$

Igualadas estas flechas às flechas encontradas na fase b), vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2,38322 \frac{N \lambda^3}{EJ} - 1,04978 \frac{\bar{N} \lambda^3}{EJ} = 0,28517 \frac{P \lambda^3}{EJ} \\ 2,09956 \frac{N \lambda^3}{EJ} - 0,76512 \frac{\bar{N} \lambda^3}{EJ} = 0,34640 \frac{P \lambda^3}{EJ} \end{array} \right.$$

Dai resulta:

$$N = 0,38213 P$$

$$\bar{N} = 0,59564 P$$

Portanto:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,39888 (0,59564 - 0,38213) P \\ &= 0,39888 \times 0,21351 P = 0,08517 P \end{aligned}$$

$$A_3 = -0,02627 \times 0,21351 = -0,00561 P$$

Então as reações recíprocas entre as vigas, resultantes da ação das cargas N e $\bar{N}$, serão:

$$A_x = \sum_1^3 A_i \sin \frac{i\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_1^3 A_i \sin \frac{i\pi}{4} = 0,08517 \times 0,70711 P - 0,00561 \times 0,70711 P \\ &= 0,05626 P \end{aligned}$$

$$A_2 = \sum_1^3 A_i \sin \frac{i\pi}{2} = 0,08517 P + 0,00561 P = 0,09078 P$$

$$A_3 = A_1 = 0,05626 P.$$

Portanto:

$$B_1 = 2 A_1 = 0,11252 P$$

$$B_2 = 2 A_2 = 0,18156 P$$

Finalmente, por soma, obtêm-se os esforços nas vigas, representados com os seus sentidos na figura abaixo.

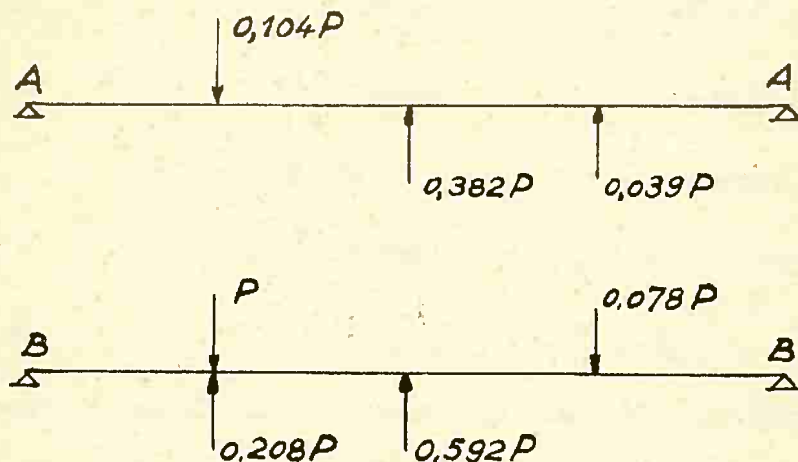


Fig. 48

D. GRELHAS LIVREMENTE APOIADAS EM QUATRO BORDOS

Suponhamos duas famílias de vigas paralelas que se cruzam segundo um ângulo qualquer, e cujas linhas de apoio são paralelas às direções destas mesmas vigas. Admitamos também que o cruzamento entre as vigas se dê de modo articulado, isto é, desprezados nos nós os momentos de torção. Quanto às cargas, façamos a hipótese de que elas atuem nos nós, o que, na verdade, não é obrigatório.

Tomemos o caso de uma grelha ortogonal (fig. 49). O que dissermos, então, vale também para a grelha esconsa.

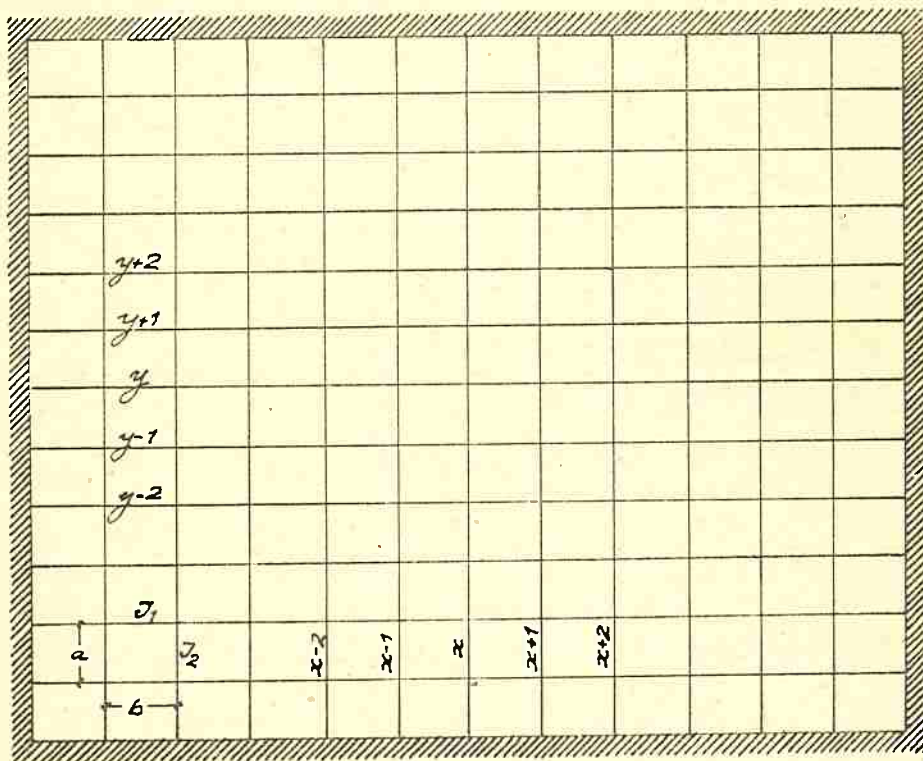


Fig. 49

A cada nó x, y corresponde uma carga $P_{x,y}$, que admitimos atuando indiferentemente, quer sobre as vigas longitudinais y , quer sobre as transversais x . Mas, uma vez fixada uma convenção, devemos respeitá-la durante todo o desenvolvimento.

Isto posto, desenvolvamos a carga P_{xy} segundo a soma trigonométrica dupla abaixo:

$$P_{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij} \sin \frac{i \pi x}{n} \sin \frac{j \pi y}{m}, \quad (162)$$

onde

$$p_{ij} = \frac{4}{n \times m} \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{m-1} P_{xy} \sin \frac{i \pi x}{n} \sin \frac{j \pi y}{m} \quad (163)$$

Este desenvolvimento é sempre possível, uma vez que P_{oy} , P_{ny} , P_{xo} e P_{xm} , atuando nos apoios, não influem sobre as flechas; podemos adotar para os mesmos valores quaisquer, em particular valores nulos.

Imaginemos as cargas P_{xy} atuando diretamente sobre as vigas longitudinais y . Designemos por X_{xy} as reações recíprocas entre as longitudinais e transversais.

Sendo δ_{xy} a flecha no nó x, y , podemos escrever as duas equações de diferenças:

$$\begin{aligned} \delta_{y,x-2} - 4 \delta_{y,x-1} + 6 \delta_{y,x} - 4 \delta_{y,x+1} + \delta_{y,x+2} = \\ = \frac{a^3}{6 E J_1} [(P_{y,x-1} - X_{y,x-1}) + 4 (P_{yx} - X_{yx}) + (P_{y,x+1} - X_{y,x+1})] \end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned} \delta_{x,y-2} - 4 \delta_{x,y-1} + 6 \delta_{x,y} - 4 \delta_{x,y+1} + \delta_{x,y+2} = \\ = \frac{b^3}{6 E J_2} [X_{x,y-1} + 4 X_{x,y} + X_{x,y+1}] \end{aligned} \quad (165)$$

Desenvolvamos também as reações recíprocas $X_{x,y}$ e $\delta_{x,y}$ segundo as somas trigonométricas duplas:

$$X_{x,y} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \chi_{ij} \sin \frac{i \pi x}{n} \sin \frac{j \pi y}{m}, \quad (166)$$

$$\delta_{x,y} = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \Delta_{lj} \sin \frac{l \pi x}{n} \sin \frac{j \pi y}{m}, \quad (167)$$

sendo χ_{ij} e Δ_{lj} ainda desconhecidos.

Introduzindo-se estes valores nas equações de diferenças acima, da equação (164) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \Delta_{lj} \left[\sin \frac{i \pi (x-2)}{n} - 4 \sin \frac{i \pi (x-1)}{n} + 6 \sin \frac{i \pi x}{n} - 4 \sin \frac{i \pi (x+1)}{n} + \sin \frac{i \pi (x+2)}{n} \right] \sin \frac{j \pi y}{m} = \\ = \frac{a^3}{6 E J_1} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} p_{lj} \left[\sin \frac{l \pi (x-1)}{n} + 4 \sin \frac{l \pi x}{n} + \sin \frac{l \pi (x+1)}{n} \right] \sin \frac{j \pi y}{m} \\ - \frac{a^3}{6 E J_1} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \chi_{lj} \left[\sin \frac{l \pi (x-1)}{n} + 4 \sin \frac{l \pi x}{n} + \sin \frac{l \pi (x+1)}{n} \right] \sin \frac{j \pi y}{m} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \Delta_{ij} & \left[2 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \cos \frac{2i\pi}{n} - 8 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \cos \frac{i\pi}{n} + 6 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \right] \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{m} = \\ & = \frac{a^3}{6 E J_1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij} \left[2 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \cos \frac{i\pi}{n} + 4 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \right] \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{m} \\ & - \frac{a^3}{6 E J_1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \chi_{ij} \left[2 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \cos \frac{i\pi}{n} + 4 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \right] \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{m} . \end{aligned}$$

E assim, segue:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \Delta_{ij} & \left[\cos \frac{2\pi i}{n} - 4 \cos \frac{i\pi}{n} + 3 \right] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{m} = \\ & = \frac{a^3}{6 E J_1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (p_{ij} - \chi_{ij}) \left(\cos \frac{i\pi}{n} + 2 \right) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{n} \operatorname{sen} \frac{j\pi y}{m} \end{aligned}$$

Esta igualdade, tendo lugar para todo valor inteiro de x , de 0 a n , e para todo valor inteiro de y , de 0 a m , resulta:

$$\Delta_{ij} \left(\cos \frac{2\pi i}{n} - 4 \cos \frac{i\pi}{n} + 3 \right) = \frac{a^3}{6 E J_1} (p_{ij} - \chi_{ij}) \left(\cos \frac{i\pi}{n} + 2 \right)$$

Portanto:

$$\Delta_{ij} = \frac{a^3}{12 E J_1} \frac{2 + \frac{\cos i\pi}{n}}{\left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)^2} (p_{ij} - \chi_{ij}) \quad (168)$$

Da equação (165) obtem-se também:

$$\Delta_{ij} = \frac{b^3}{12 E J_2} \frac{2 + \cos \frac{j\pi}{m}}{\left(1 - \cos \frac{j\pi}{m}\right)^2} \chi_{ij} \quad (169)$$

Por meio das equações, (168) e (169), determinam-se os valores de χ_{ij} e Δ_{ij} , que, uma vez conhecidos, permitem o cálculo de $X_{x,j}$ e $\delta_{x,j}$, graças a (166) e (167).

A solução fica bastante simplificada, em se tabelando os valores de

$$\frac{2 + \cos \frac{i\pi}{n}}{\left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)^2},$$

desde $i=1$ até $n-1$, para os valores mais correntes de n . A tabela servirá tanto para i como para j , o que reduz sobremodo o trabalho de cálculo.

Supuzemos implicitamente, acima, que os momentos de inércia fossem constantes e iguais para todas as vigas de uma mesma família, podendo contudo variar de uma família para a outra.

Quando isto não aconteça, lançamos mão do mesmo processo usado no cálculo das grelhas apoiadas em dois bordos, admitindo apenas que as vigas de bordo sejam indeformáveis. Esta solução é também bastante simples.

V — COLABORAÇÃO DA LAJE

Na maioria dos casos as vigas das grelhas são ligadas por uma laje, como acontece nos tabuleiros de pontes, pisos e coberturas, constituindo assim um importante elemento de distribuição de cargas. A determinação analítica desta distribuição é, contudo, bastante delicada, o que leva os autores ao desprezo da laje no cálculo das grelhas, sendo a sua colaboração levada em conta apenas pela participação no cômputo dos momentos de inércia da viga. Além disso, a sua função resumir-se-ia unicamente em repartir a carga pelas vigas limítrofes.

Mostraremos a seguir que é possível resolver o problema das grelhas, quando se deva incluir também o efeito da laje. Para tanto, admitamos que a laje distribua a carga apenas transversalmente, isto é, consideremo-la dividida em faixas, como se fosse um conjunto contínuo de vigas transversais. Trata-se de uma hipótese muito razoável, uma vez que, como se sabe, nas lajes com relação de lados de $1 : 1,3$, ou inferior, a distribuição de carga se faz quasi que exclusivamente segundo a direção do lado menor.

O método não difere em essência do já apresentado; apenas passamos do descontínuo para o contínuo, com apoio na solução que demos aos problemas 2, 3, 4 e 7 do capítulo III.

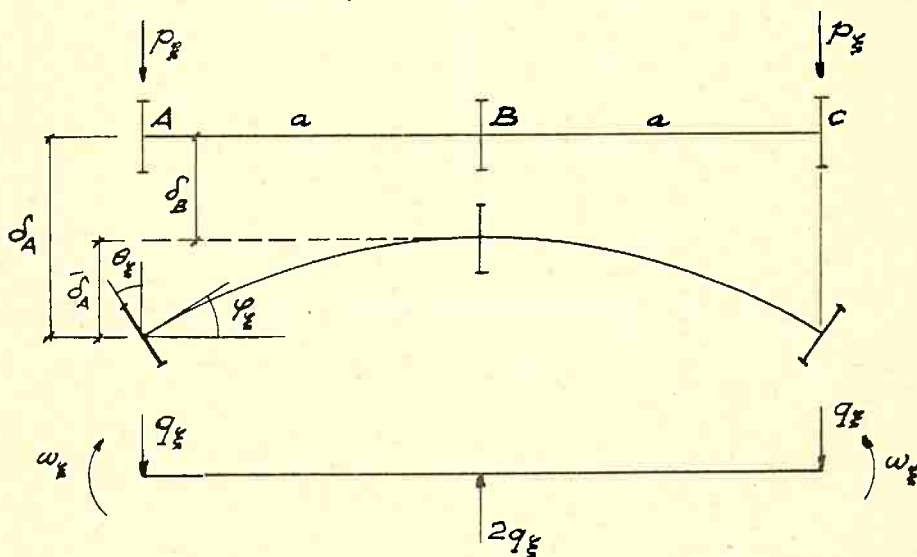


Fig. 50

Com o intuito de expor tão somente a marcha do processo a seguir, abordemos, como exemplo, o caso de grelhas simétricas com três vigas longitudinais, ligadas entre si por vigas transversais e por uma laje.

Os demais casos resolvem-se sem dificuldades, mercê do que até aqui expusemos.

Seja então a grelha da fig. 50, sujeita a uma carga distribuída p_ξ atuando simultaneamente nas vigas de bordo A e C.

Consideremos uma faixa genérica ξ de laje de largura unitária. As flechas que aí aparecem, quando da atuação da carga, estão ligadas pela relação:

$$\delta_A - \bar{\delta}_A = \delta_B \quad (170)$$

Entre os ângulos surge também a relação:

$$\theta_\xi = -\varphi_\xi \quad (171)$$

Desenvolvendo a carga p_ξ em série de Fourier, vem:

$$p_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{p}_i \sin \frac{i \pi \xi}{l} \quad (172)$$

onde

$$\bar{p}_i = \frac{2}{l} \int_0^l p_\xi \sin \frac{i \pi \xi}{l} d\xi \quad (173)$$

Admitamos também para a reação q_ξ e os momentos de torção w_ξ por unidade de comprimento, desenvolvimentos análogos:

$$q_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sin \frac{i \pi \xi}{l} \quad (174)$$

$$w_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i \sin \frac{i \pi \xi}{l} \quad (175)$$

onde g_i e Ω_i são ainda desconhecidos.

Então, de acordo com a solução do problema 2 do cap. III resulta:

$$\delta_A = \frac{l^4}{\pi^4 E J_A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{p}_i}{i^4} \sin \frac{i \pi \xi}{l} - \frac{l^4}{\pi^4 E J_A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{i^4} \sin \frac{i \pi \xi}{l} ,$$

$$\bar{\delta}_A = \frac{a^3}{3 E J_o} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \sin \frac{i \pi \xi}{l} - \frac{a^2}{2 E J_o} \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i \sin \frac{i \pi \xi}{l} ,$$

$$\delta_B = \frac{2 l^4}{\pi^4 E J_B} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{i^4} \sin \frac{i \pi \xi}{l} .$$

Levados êstes valores em (170), vem:

$$\frac{l^4}{\pi^4 J_A} \frac{\bar{p}_1}{i^4} - \frac{l^4}{\pi^4 J_A} \frac{g_i}{i^4} - \frac{a^3}{3 J_o} g_i + \frac{a^2}{2 J_o} \Omega_i = \frac{2 l^4}{\pi^4 J_B} \frac{g_i}{i^4} \quad (176)$$

Apoiados também na solução do problema 7 do capítulo III, vem:

$$\theta_i = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l^2}{i^2 \pi^2} + \frac{\Omega_i}{G J_{t^A}} \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l}$$

Por outro lado, temos:

$$\varphi_i = \frac{a^2}{2 E J_o} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l} - \frac{a}{E J_o} \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i \operatorname{sen} \frac{i \pi \xi}{l}$$

Levados êstes valores em (171), resulta:

$$\frac{l^2 \Omega_i}{i^2 \pi^2 G J_{t^A}} = \frac{a^2}{2 E J_o} g_i - \frac{a}{E J_o} \Omega_i$$

Portanto:

$$\Omega_i = \frac{a^2}{2a + \frac{2 l^2}{i^2 \pi^2} \frac{E}{G} \frac{J_o}{J_{t^A}}} \cdot g_i \quad (177)$$

Introduzindo-se êste valor na expressão (170) obtem-se:

$$g_i = \frac{l^4 \cdot \bar{p}_1}{2 l^4 \frac{J_A}{J_B} + l^4 + \frac{i^4 \pi^4}{3} \frac{J_A}{J_B} \cdot a^3 - \frac{i^4 \pi^4 \cdot J_A \cdot a^4}{4a J_o + \frac{4 l^2}{i^2 \pi^2} \frac{E}{G} \frac{J_o^2}{J_{t^A}}} \quad (178)$$

resolvendo então o problema.

Exemplo 10. Seja a grelha da fig. 51.

De acôrdo com as dimensões dadas na figura, achamos:

$$J_A = J_C = 0,03851 \text{ m}^4, J_B = 0,04612 \text{ m}^4,$$

$$J_{o,L} = 0,000666 \text{ m}^4/\text{m} \text{ (laje),}$$

$$J_{o,v} = 0,02858 \text{ m}^4/\text{m} \text{ (viga transversal),}$$

$$J_{t^A} = J_{t^C} = 0,01643 \text{ m}^4.$$

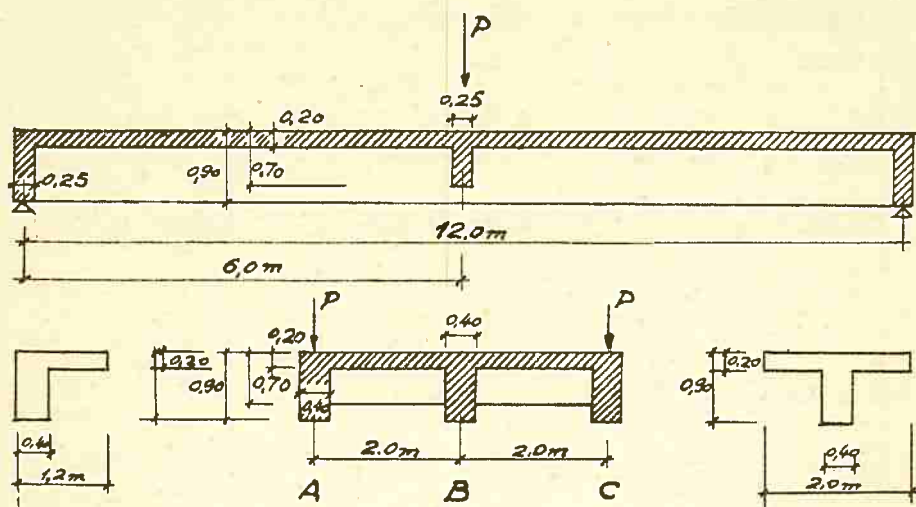


Fig. 51

Duas cargas concentradas P atuam no meio das vigas longitudinais A e C .

Pela ação destas cargas, a laje e a viga transversal central vão exercer esforços sobre as longitudinais, a saber: reações e momentos de torção distribuídos ao longo das vigas. Em virtude da simetria, a viga longitudinal central não está sujeita a momentos de torção.

Apliquemos a fórmula (178). Comecemos por determinar todos os termos do denominador:

$$\frac{2 J_A}{J_B} = \frac{2 \times 0,03851}{0,04612} = 1,67 ,$$

$$\frac{i^4 \pi^4}{3} \times \frac{J_A}{J_{0,1}} \frac{a^3}{l^4} = i^4 \frac{97,41}{3} \times \frac{0,03851}{0,000667} \frac{8}{20736} = 0,723 i^4 ,$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{12} \right)^4 \frac{i^4 \times 97,41}{4 \times 2 \times \frac{0,000667}{0,03851} \times \frac{4 \times 144}{i^2 \times 9,86965} \times 2,5 \times \frac{0,000667}{0,03851} \times \frac{0,000667}{0,01643}} \\ & = \frac{i^4 \times 0,07516}{0,1385 + \frac{0,1025}{i^2}} \end{aligned}$$

Portanto:

$$g_{i, l} = \frac{p_i}{1,67 + 1 + 0,723 i^4 - \frac{i^4 \times 0,07516}{0,1385 + \frac{0,1025}{i^2}}}$$

Então:

$$g_{1,L} = 0,325 p_1$$

$$g_{2,L} = 0,145 p_2$$

$$g_{3,L} = 0,049 p_3$$

Como se vê, a convergência é boa, o que nos permite parar no terceiro termo.

Por outro lado,

$$\bar{p}_1 = \frac{2P}{l} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{2}$$

Portanto:

$$\bar{p}_1 = 0,167 P$$

$$\bar{p}_2 = 0$$

$$\bar{p}_3 = -0,167 P$$

Isto feito, temos:

$$q_\xi = \sum_{i=1}^3 g_{i,L} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{l};$$

d'onde, para $\xi = 1,2, \dots, 5,875 \text{ m}$, vem:

$$q_{1,L} = 0,0082 P,$$

$$q_{2,L} = 0,0189 P,$$

$$q_{3,L} = 0,0325 P,$$

$$q_{4,L} = 0,0469 P,$$

$$q_{5,L} = 0,0581 P,$$

$$q_{5,875,L} = 0,0623 P.$$

Vejamos agora os valores de g_i para outro valor do momento de inércia J_o : o momento de inércia da viga transversal por metro linear, ou seja $J_{o,v} = 0,02858 \text{ m}^4/\text{m}$.

Neste caso, a convergência já não é tão boa, e assim calculamos até o sétimo termo.

$$g_{1,v} = 0,372 \bar{p}_1$$

$$g_{5,v} = 0,103 \bar{p}_5$$

$$g_{3,v} = 0,262 \bar{p}_3$$

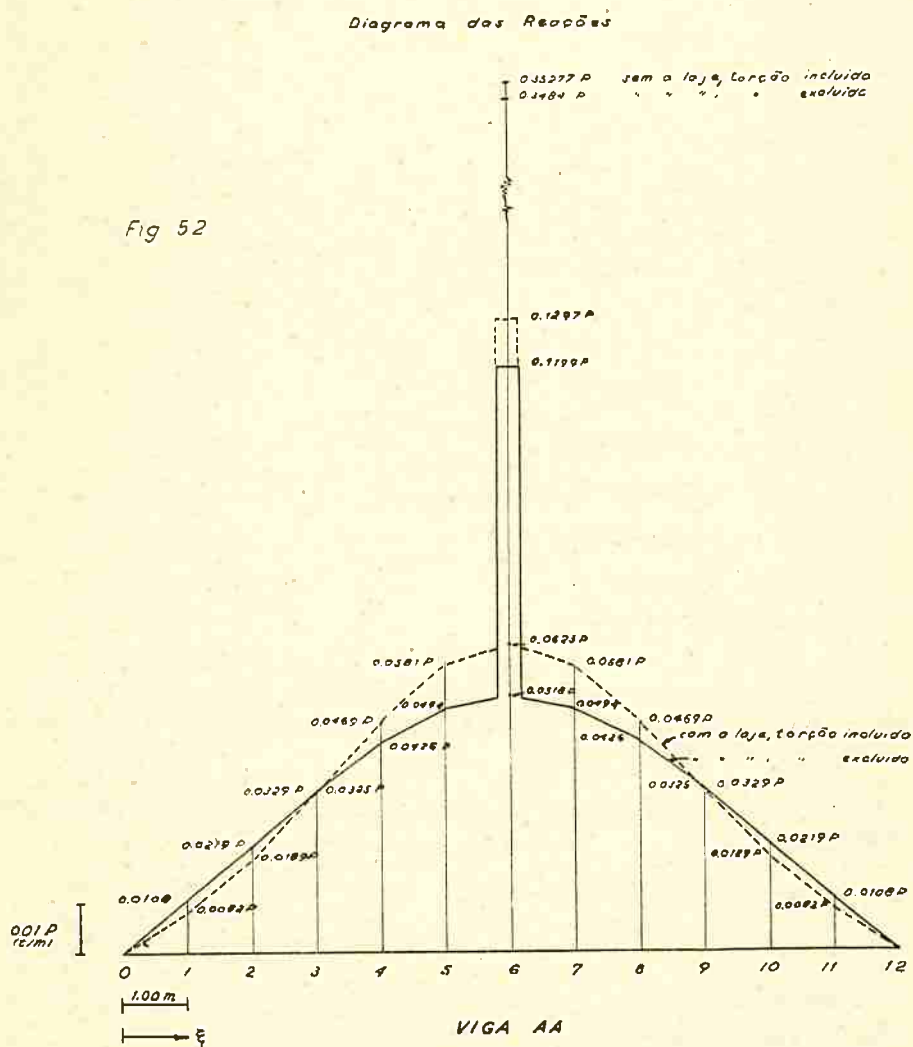
$$g_{7,v} = 0,040 \bar{p}_7$$

Os valores de $g_{2,v}$, $g_{4,v}$ etc., não interessam, uma vez que $\bar{p}_2$, $\bar{p}_4$, e todos os valores pares de $\bar{p}$ são nulos.

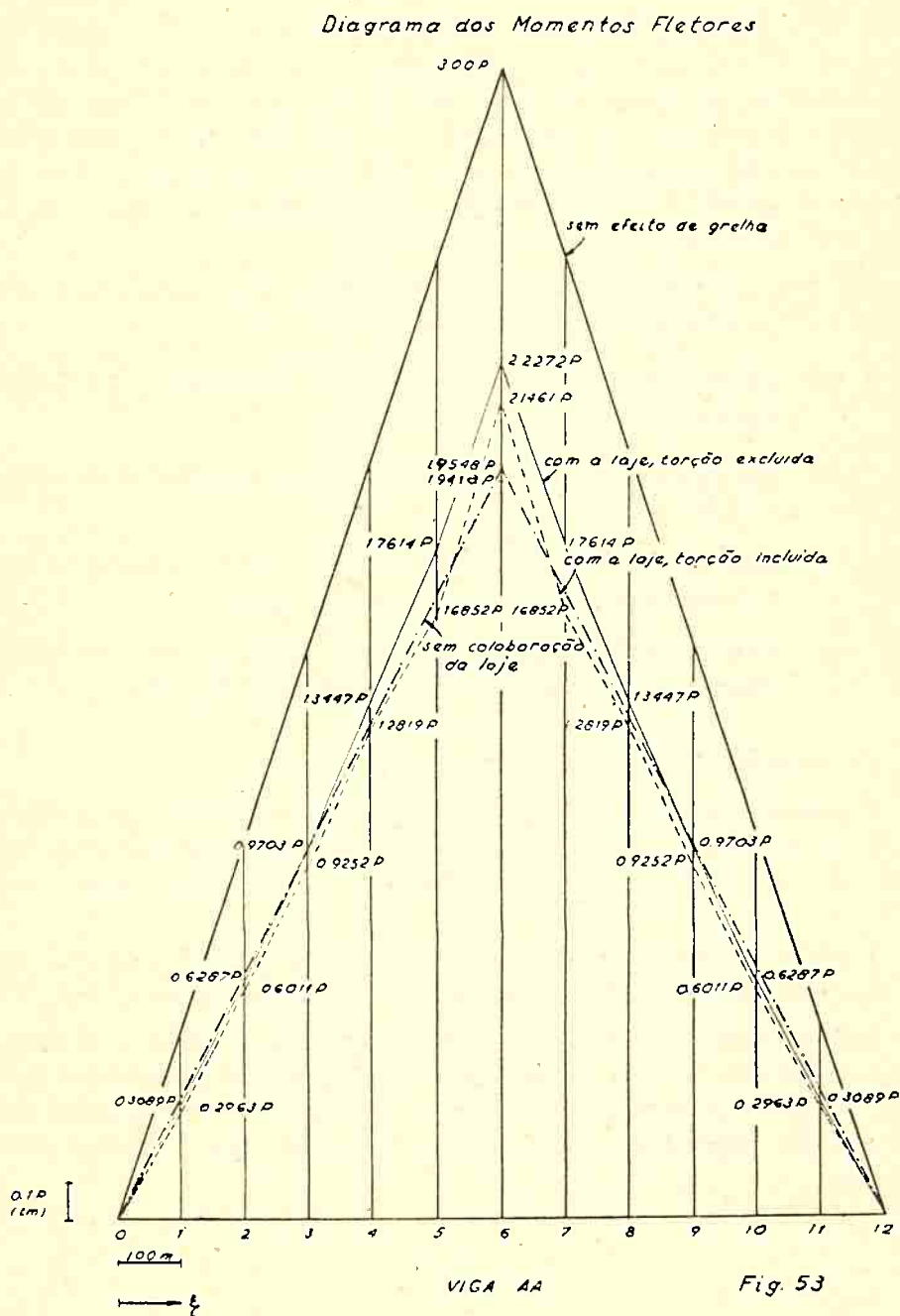
Com isto achamos:

$$\begin{aligned}
 q_{s,v} &= \sum_1^8 g_{i,v} \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2} = 0,372 \times 0,167 P + \\
 &+ 0,268 \times 0,167 P + 0,103 \times 0,167 P + 0,04 \times 0,167 P \\
 &= 0,1297 P
 \end{aligned}$$

A fig. 52 mostra claramente a distribuição das reações ao longo das vigas, para um carregamento externo de $P = 10,0 \text{ t}$.



É uma curva contínua até 5,875 m do apoio, onde sofre uma descontinuidade de 0,62 t/m para 1,30 t/m, nas vigas A e C, e de 1,24 t/m para 2,60 t/m, na viga B.



O degrau que aparece no meio das vigas é motivado pela variação brusca de momento de inércia neste ponto. Há como que uma concentração de carga na altura da viga transversal. A figura dá também os valores das reações distribuídas quando no cálculo acima se despreza o efeito de torção, usando-se então para g_1 a fórmula simplificada (178) para $J_t^A = 0$.

É interessante notar que as duas curvas, a de torção incluída e a de torção excluída, se cruzam na altura dos quartos dos vãos, sendo que as ordenadas da primeira, na zona central da viga, são maiores que as da segunda, o contrário se dando na zona dos apoios. Contudo, a área da primeira é superior à da segunda, demonstrando claramente que a torção é um fator que auxilia a distribuição da carga.

Em prosseguimento, cuidamos de determinar os diagramas dos momentos fletores para os diferentes casos de:

- a) participação da laje e viga transversal na distribuição de carga, incluído o efeito de torção;
- b) participação da laje e viga transversal na distribuição de carga, excluído o efeito de torção;
- c) participação apenas da viga transversal, a laje colaborando unicamente nos momentos de inércia das vigas;
- d) nenhuma participação da laje e viga transversal na distribuição de carga, isto é, valores obtidos sem efeito de grelha.

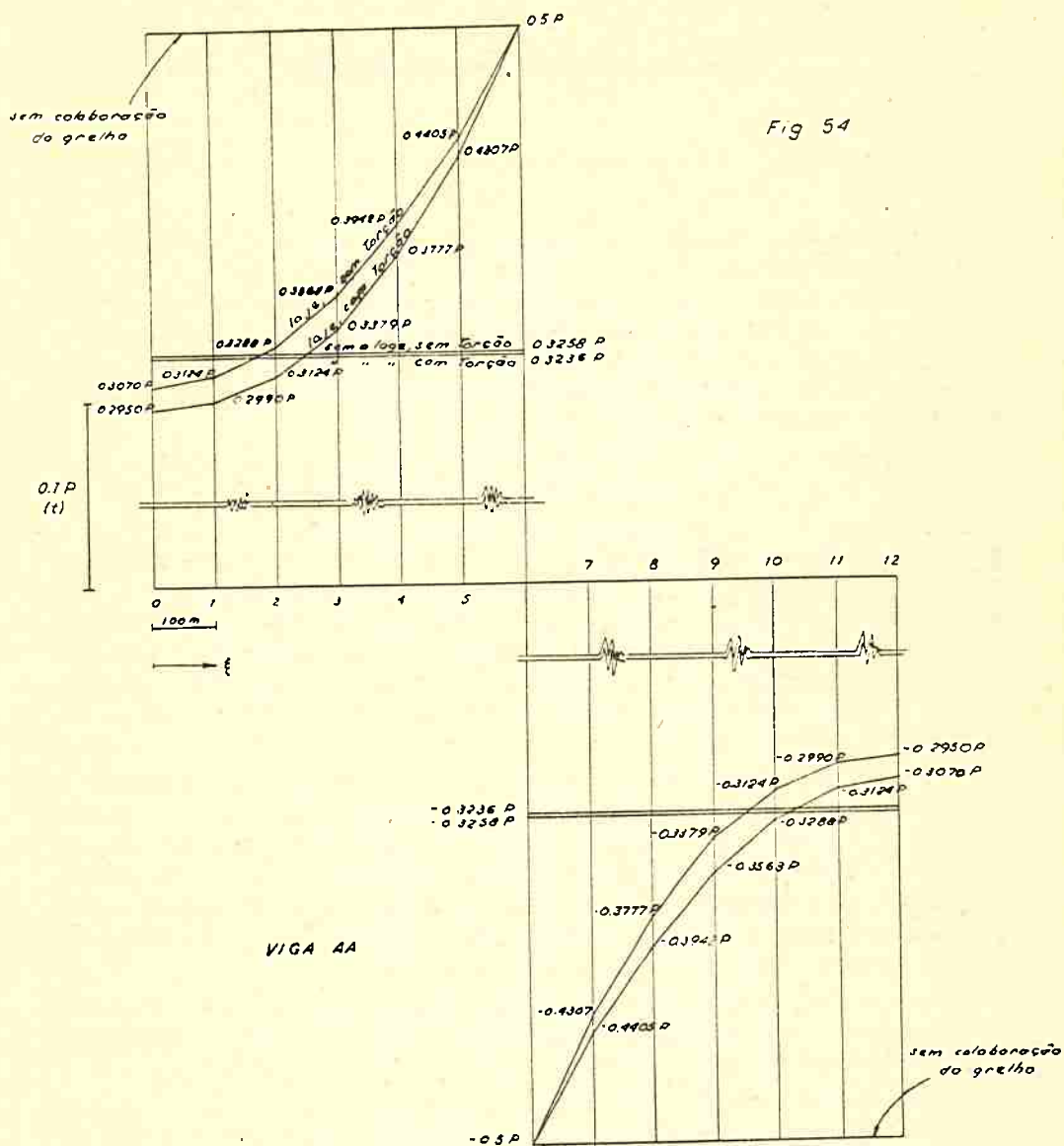
Os resultados estão reunidos na fig. 53.

No exemplo acima, verificamos que os momentos fletores encontrados, quando se considera a laje apenas no cômputo dos momentos de inércia das vigas, são bem satisfatórios, ficando bastante próximos dos valores corretos.

Também as forças cortantes foram determinadas para os diferentes casos mencionados acima. A fig. 54 apresenta os diagramas encontrados.

Dai se conclui que a laje é um poderoso fator de distribuição de carga. Convém, portanto, seja ela considerada. O processo que expusemos é bastante simples, e permite calcular a grelha levando-se em conta todos elementos, lajes e vigas transversais, incluído ou excluído deste cálculo o efeito de torção.

Diagrama das Forças Cortantes



VI — O MÉTODO DOS MODELOS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O método dos modelos na solução de problemas estáticos toma dia a dia maior incremento. Pela interpretação fiel do comportamento real das estruturas, o modelo fornece elementos seguros para a determinação dos esforços que surgem quando da aplicação das cargas. Nas estruturas com elevado grau de indeterminação, constitui o único método eficiente, uma vez que o método analítico é demasiadamente trabalhoso e não traduz, mesmo quando exequível, o quadro efetivo dos esforços.

As grelhas têm sido objeto de várias pesquisas em modelos, e hoje o emprêgo deste método mecânico-estático já está bastante generalizado.

O que se infere das inúmeras publicações pertinentes ao assunto é a preocupação que os experimentadores têm de fazer concordar o modelo com o cálculo, e não o cálculo com o modelo, como seria de se desejar. Por julgarem difícil a inclusão da torção e a colaboração da laje na distribuição transversal da carga, lançam mão de numerosos expedientes para elaborar modelos que condigam com as hipóteses restritivas do cálculo. Chegam mesmo a criar dispositivos de ligação livre de torção, como sejam os de Grassl [24] e Meier [39].

É bem verdade que, em muitas estruturas, sobretudo nas metálicas, a torção nas vigas é realmente desprezível; mas cumpre que o próprio modelo acuse o fato, e não que ele seja obrigado a interpretar um resultado decorrente de várias hipóteses simplistas. Nas estruturas de madeira, aquele efeito já é mais sensível, e nas de concreto armado é de tal monta que o seu desprezo pode conduzir a resultados bem diferentes do real, como bem mostra o cálculo feito por nós e confirmado pelos ensaios.

Em geral se imagina que, nas grelhas largas, a torção tenha influência maior, quando é exatamente o contrário que se dá: a simples inspeção dos exemplos calculados por nós mostra o quanto esta asserção é falsa.

Os resultados obtidos com modelos articulados são, portanto, aproximados, exigindo certa prudência na sua utilização; entretanto, é o tipo de modelo mais corrente, de confecção cômoda, permitindo determinar, de modo simples, os esforços que aparecem pela ação das cargas.

Sem nos estendermos muito, diremos apenas que, no caso dos modelos articulados, os momentos de inércia das diferentes barras que o compõem devem se relacionar como os das vigas correspondentes da estrutura real. Tem-se, pois, com isto, muita liberdade na escolha das barras, não se tornando necessário conservar a forma da secção das vigas. São usadas, de preferência, barras de aço estiradas, de secção circular ou retangular.

Como o valor absoluto das flechas tem muita importância na exatidão das medidas, o tamanho e esbelteza das barras devem ser convenientemente escolhidos. Com barras de aço de alta resistência (6000 a 12000 kg/cm²)

[39], de esbelteza $\frac{h}{l}$ entre $\frac{1}{150}$ e $\frac{1}{300}$, se obtêm facilmente, dentro ainda do domínio elástico, flechas suficientemente grandes.

O comprimento do modelo de grelha varia, em geral, de 100 a 200 cm. As barras transversais são sobrecolocadas ou suspensas nas longitudinais, formando uma rede semelhante à da estrutura. A ligação mais simples das barras entre si é a do laço com arame de 1 a 1,2 mm de diâmetro (fig. 52).

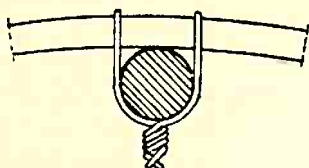


Fig. 55

O seu único inconveniente é não assegurar a constância dos espaçamentos entre as vigas.

Diversos são os tipos de ligação apresentados, cuja descrição nos abstermos de fazer.

Quando o número de grelhas for grande, há conveniência em se construir um quadro à maneira da fig. 56, onde seja possível variar o comprimento dos vãos. Nos apoios deve haver dispositivos que impeçam o levantamento das barras, e o meio mais simples consiste na aplicação de pesos nas extremidades das mesmas.

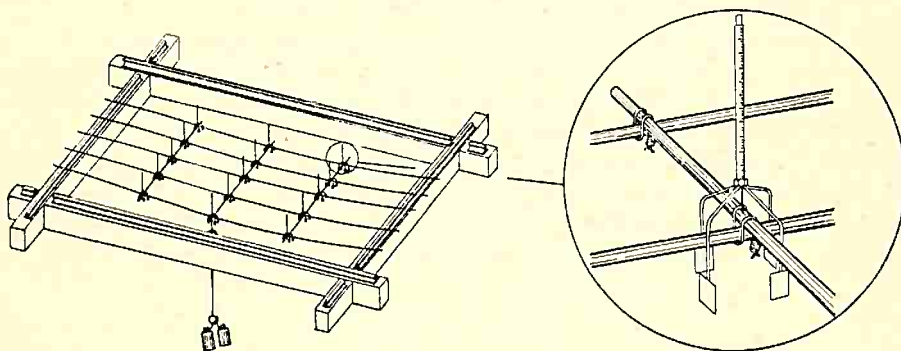


Fig. 56

As medidas de flechas são feitas, quer com o nível quer com defletômetros bem sensíveis.

2. MÉTODOS

Os modelos articulados se prestam ao emprêgo de qualquer dos métodos abaixo:

- a) Obtenção das superfícies de influência e subsequente aplicação das fórmulas de Ostenfeld [18];

- b) Obtenção das superfícies de influência para as reações nos nós e cálculo subsequente das superfícies de influência para momentos fletores e forças cortantes;
- c) Geração direta das superfícies de influência segundo o processo de Beggs.

No primeiro, basta fazer a medida das flechas em todos os nós para as diferentes posições d'uma carga concentrada P sobre a grelha. As flechas divididas por P são as ordenadas de influência. Os valores obtidos no modelo M serão multiplicados por

$$\left(\frac{I^3}{EJ} \right)_{\text{Est.}} : \left(\frac{EJ}{I^3} \right)_M,$$

para a obtenção dos valores correspondentes na estrutura.

Obtidas estas flechas δ_{ij} em i , provocadas pela carga em j , a determinação dos momentos fletores e forças cortantes se fará, levando-se aqueles valores nas expressões:

$$M_{kj} = M_{kj}^0 - M_{ka} \delta_{aj} - M_{kb} \delta_{bj} - \dots - M_{kn} \delta_{nj},$$

$$Q_{kj} = Q_{kj}^0 - Q_{ka} \delta_{aj} - Q_{kb} \delta_{bj} - \dots - Q_{kn} \delta_{nj}.$$

Os valores de M_{ki} e Q_{ki} foram tabelados por Ostenfeld, para os casos mais correntes; quando não sejam tidos à mão, será necessário calculá-los, o que é um trabalho bastante penoso.

O segundo método se baseia no conhecido teorema:

"As ordenadas de influência de uma grandeza hiperestática X , de um sistema n — vezes estaticamente indeterminado, são proporcionais às flechas devidas a $X=1$, que aparecem no sistema $(n-1)$ — vezes estaticamente indeterminado, resultante da supressão de X ."

Então, quando se quiser as ordenadas de influência de uma determinada reação de nó, por exemplo nó a , liberta-se este nó e imprime-se aí um deslocamento arbitrário δ_{aa} (fig. 57), e a seguir medem-se as flechas δ_{ra} nos demais nós. As ordenadas de influência serão dadas pela relação:

$$X_{ar} = \frac{\delta_{ra}}{\delta_{aa}}$$

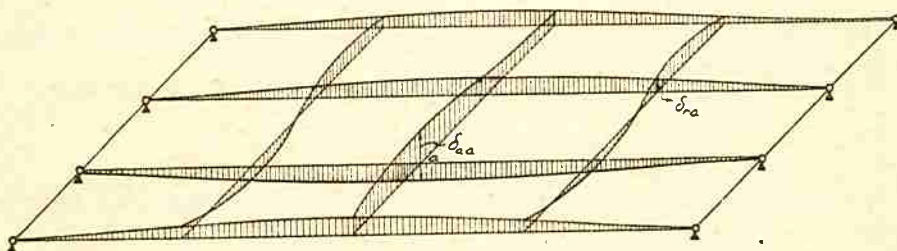


Fig. 57

De posse das superfícies de influência das reações nos nós, as superfícies de influência para momentos fletores e para forças cortantes são determinadas sem dificuldade.

A exatidão das medidas pode ser controlada com o teorema de Maxwell.

O terceiro método consiste, por sua vez, na determinação direta da superfície de influência para momentos fletores e forças cortantes n'uma determinada secção x . No caso dos momentos fletores, introduz-se no modelo uma barra provida de articulação, e imprime-se aí uma rotação φ ; as ordenadas de influência nos diferentes pontos resultam da relação das flechas nestes mesmos pontos pelo ângulo φ . No caso da força cortante, faz-se um corte na secção em apreço, e imprime-se entre as duas faces assim reparadas um deslocamento recíproco arbitrário δ ; medem-se as flechas nos diversos nós e a divisão destas por δ dá as ordenadas de influência.

3. ENSAIOS

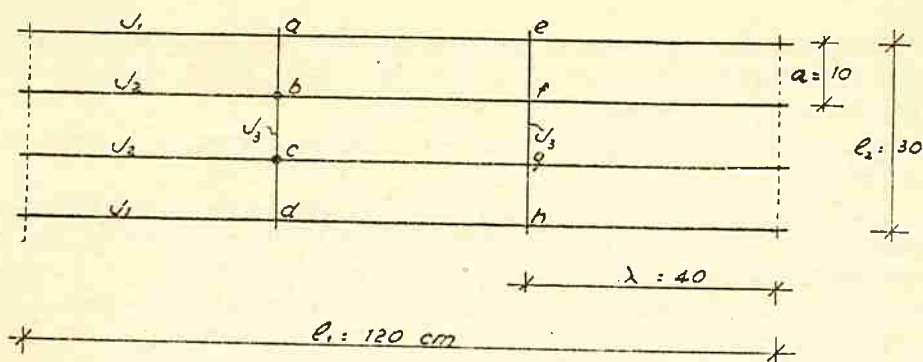
Com o intuito de confrontar os resultados analíticos, obtidos pelo nosso método, com os obtidos experimentalmente, apresentamos, a seguir, os elementos colhidos em diversos ensaios, alguns feitos por nós, e outros realizados em Institutos de Pesquisas estrangeiros. Trata-se de ensaios em modelos de aço, madeira e concreto armado.

a) Modelos de aço

Utilizamo-nos dos ensaios feitos na Escola Técnica Superior de Stuttgart, pelo Eng.^o Kaufmann, sob a orientação do Prof. O. Graf [26]. Foi elaborada uma série de modelos, com as barras ligadas entre si por laços de arame fino. Este laço foi apertado apenas o suficiente para evitar a separação entre as barras, criando-se, assim, modelos articulados. Aplicadas as cargas, as flechas nos diferentes nós foram lidas com um nível Zeiss II, em escalas a cavaleiro.

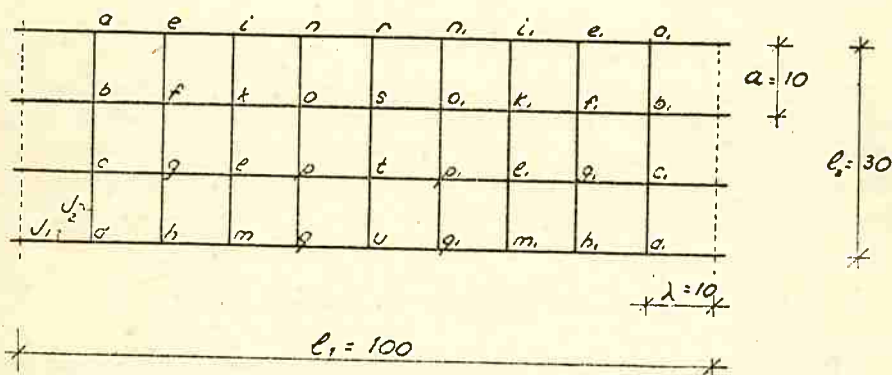
No quadro abaixo confrontamos, lado a lado, os valores de flechas lidos e os obtidos com o nosso método. A concordância é excelente. Nota-se também que o experimentador procurou obter modelos cujas características se enquadrassem em exemplos já tabelados por Ostenfeld, para evitar o cálculo que é bastante laborioso. Só isto já basta para que não se recomende o método de Ostenfeld.

Muitas vezes os modelos não puderam se cingir aos valores tabelados, resultando com isto diferenças maiores entre os valores lidos e os calculados. O experimentador atribui esta divergência tão somente à imperfeição dos modelos e imprecisão de leituras. Nós, por outro lado, já achamos diferenças bem menores, porque introduzimos nos cálculos os elementos próprios dos modelos, sem qualquer aproximação. E assim fizemos sem a menor dificuldade, calculando em poucas horas todas as grelhas ensaiadas constantes do quadro.



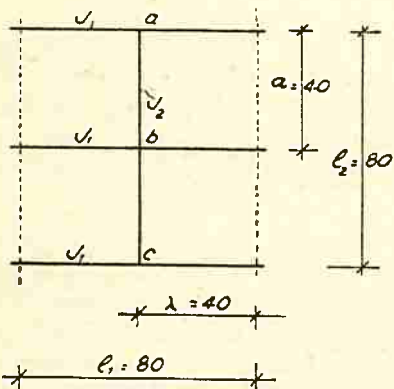
modelo a

Fig. 58



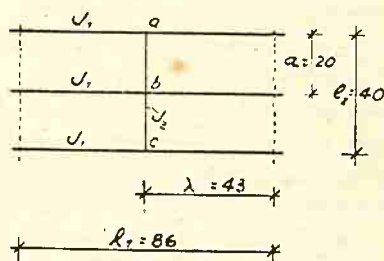
modelo b

Fig. 59



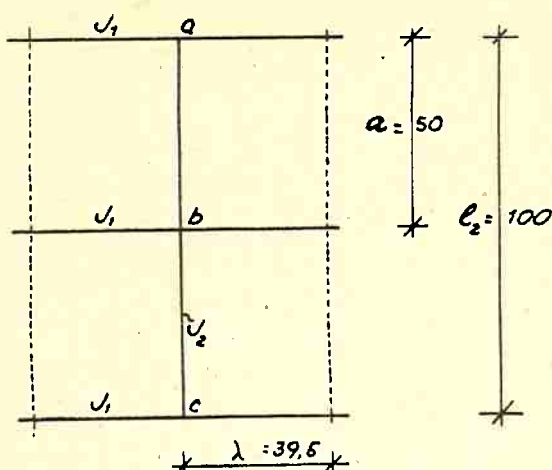
modelo c, e c2

Fig. 60



modelo c2

Fig. 61



$l_1 = 79$
modelo C_B

Fig. 62

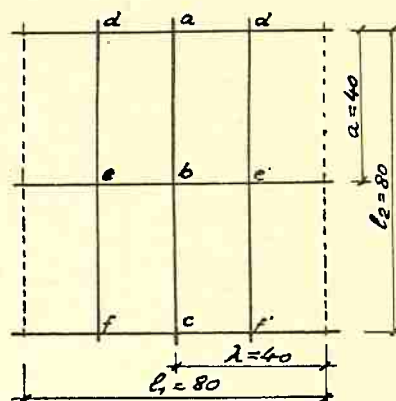


Fig. 63

b) Modelos de madeira

Os resultados conseguidos com modelos de madeira já não são tão satisfatórios, o que é bastante compreensível: trata-se de material mais heterogêneo, com módulo de elasticidade variável de barra para barra, deixando sempre certa deformação residual ao ser descarregado. Ao apresentar os resultados dos ensaios em confronto com os obtidos do cálculo analítico, visamos tão somente demonstrar que a madeira não serve como material para modelos, a não ser que se queira apenas uma ordem de grandeza dos esforços provenientes da distribuição transversal de carga.

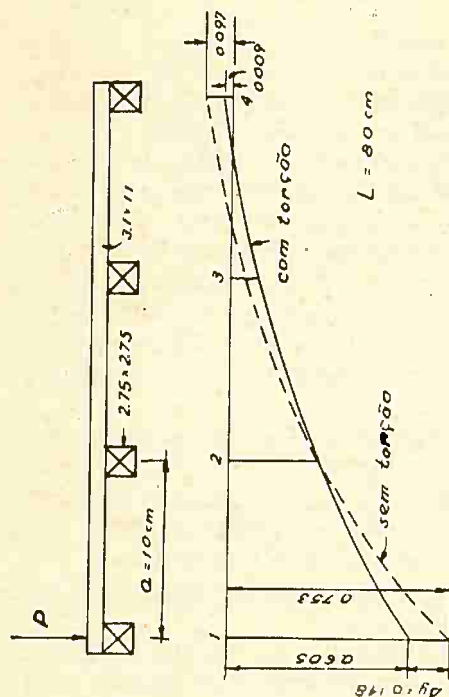
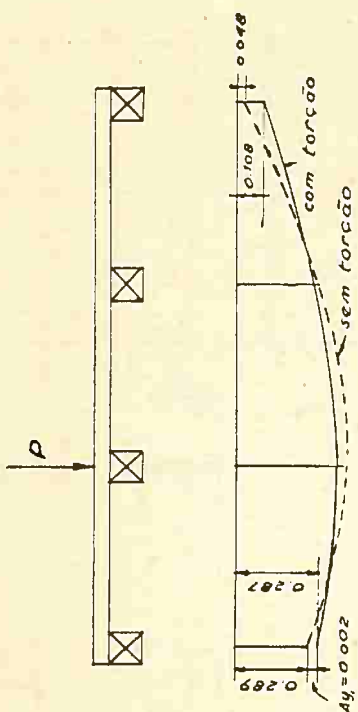
A fig. 64 contém os quinhões da carga P , distribuídos pelas quatro vigas de uma grelha ensaiada por Gaber no Instituto de Pesquisas da Escola Técnica Superior de Karlsruhe [38]. Trata-se de um modelo de faia com os seguintes valores do módulo de elasticidade: $E = 148000 \text{ kg/cm}^2$ e $G = 8000 \text{ kg/cm}^2$.

Compunha-se de quatro vigas longitudinais, ligadas ao meio por uma transversal, de dimensões constantes da figura.

As duas vigas transversais nos apoios foram vasadas de modo a apresentar pequena resistência à torção e grande resistência à flexão, como se vê na fig. 65. A carga atuava na altura da viga transversal.

Conclui-se do quadro dos valores apresentados na figura que a torção auxilia sensivelmente a distribuição da carga.

No Laboratório de Estática Experimental da Escola Politécnica de São Paulo, procedemos ao ensaio de uma miniatura de grelha, feita com pau marfim (fig. 65).



$L = 80 \text{ cm}$

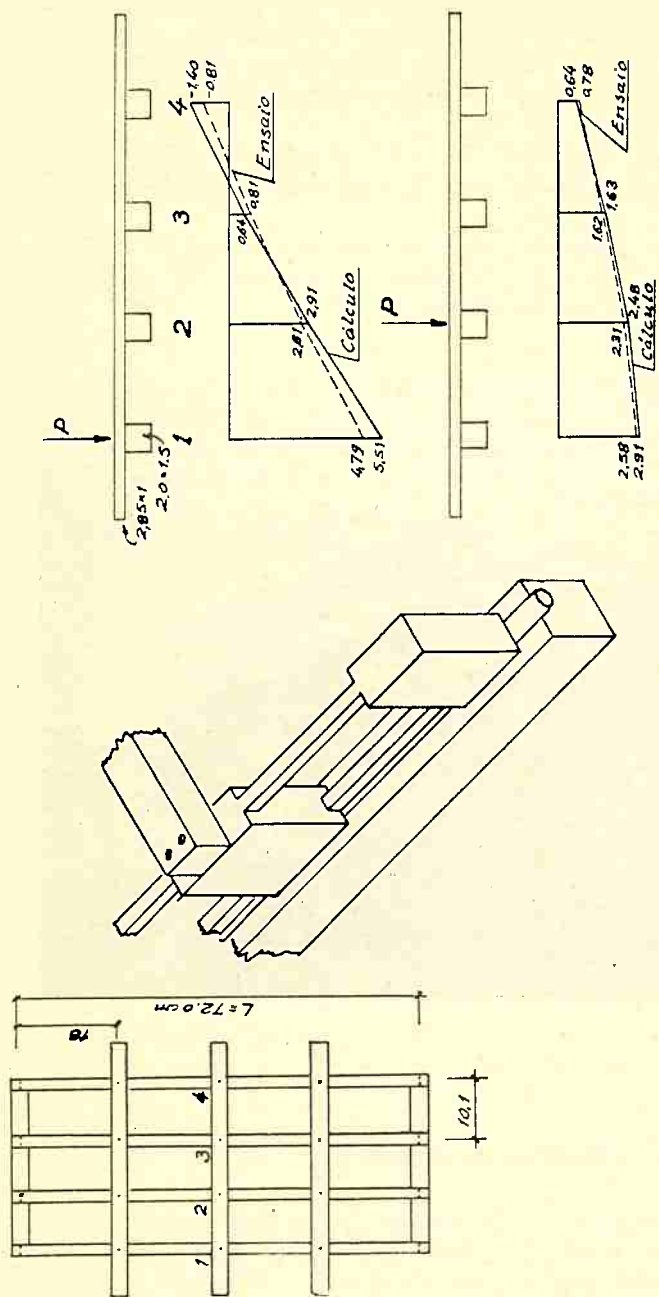
Carga $P=1$ em 2 - Quinhões de Carga

Pontos	Ensaio				Cálculo			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Modelo Rígido	0.289			0.060	0.299	0.414	0.261	0.025
Modelo Articulado	0.287			0.048	0.303	0.415	0.260	0.021

Carga $P=1$ em 1 - Quinhões de Carga

Pontos	Ensaio				Cálculo			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Modelo Rígido	0.605			-0.009	0.775	0.302	0.029	0.100
Modelo Articulado	0.753			-0.097	0.791	0.303	0.021	0.115

Fig. 64



Quadro das flechas (mm)

P=8,98 Kg	Pontos				Pontos			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Ensaio	4,79	2,61	0,81	-0,81	2,58	2,31	1,62	0,78
Cálculo	5,51	2,91	0,64	-1,40	2,91	2,48	1,63	0,64

Fig. 65

Trata-se de uma grelha com quatro vigas longitudinais e três transversais, com as dimensões constantes da figura.

O módulo de elasticidade longitudinal encontrado para a madeira da miniatura foi 162000 kg/cm^2 . O carregamento consistiu em cargas concentradas por nós, e as leituras das flechas foram feitas por defletômetros Zeiss com precisão de $1/100 \text{ mm}$, colocados num estrado sob a grelha (fig. 65a).

Conclui-se dos dados fornecidos que a discrepância maior entre o cálculo e o ensaio se dá nos pontos mais distantes do ponto de aplicação da carga.

Não pudemos ensaiar o modelo rígido por não dispormos de elementos para a determinação do módulo de elasticidade transversal G , indispensável à interpretação analítica dos resultados.

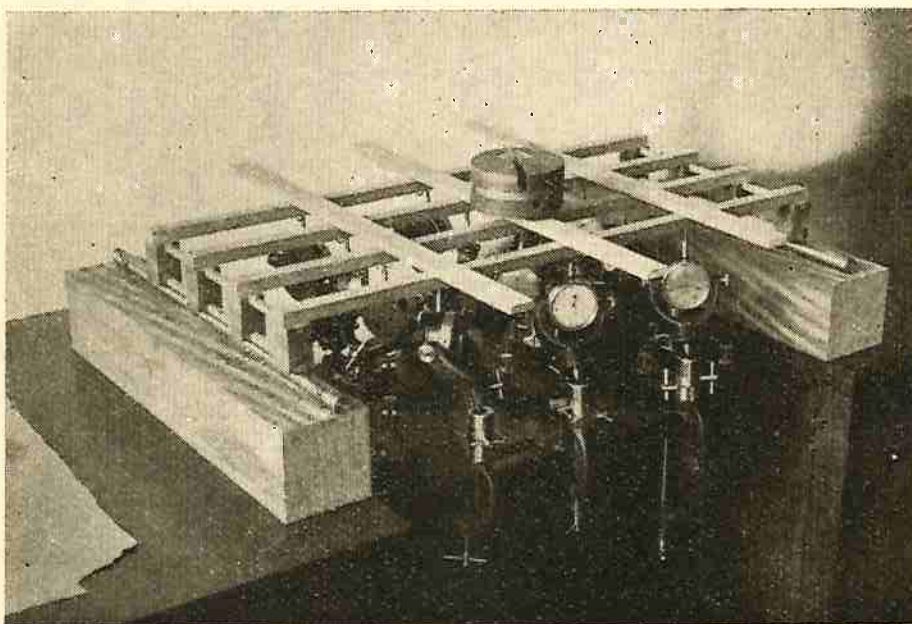


Fig. 65a — Detalhe do ensaio da grelha de madeira, realizado no Laboratório de Estática Experimental da Escola Politécnica de S. Paulo.

c) Modelos de concreto

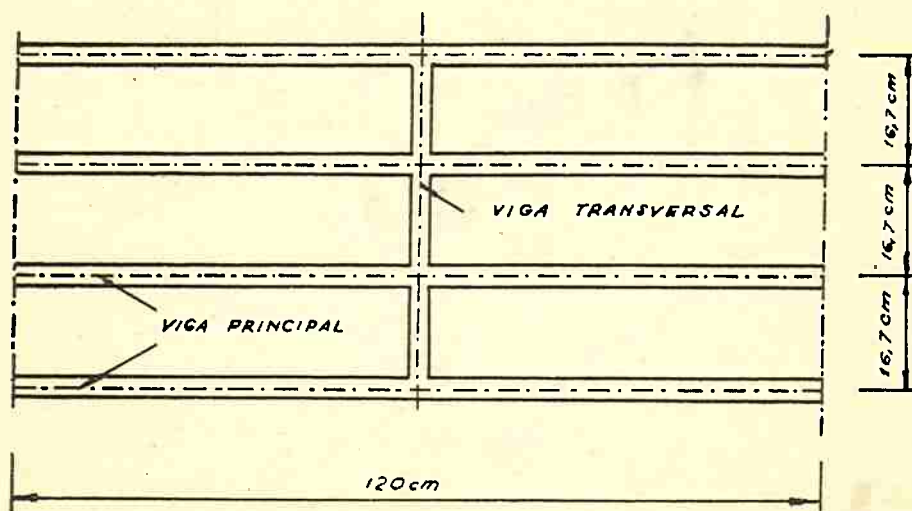
Na Escola Técnica Superior de Karlsruhe foram executados e ensaiados modelos de concreto armado com quatro, três e duas vigas longitudinais, respectivamente, e com uma viga transversal apenas. O ensaio acusou os seguintes valores para os módulos de elasticidade:

$$E = 290000 \text{ kg/cm}^2$$

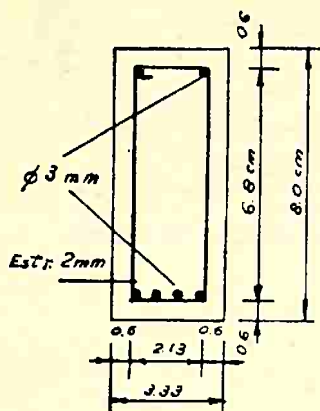
$$G = 115000 \text{ kg/cm}^2$$

As dimensões das vigas longitudinais e transversal são dadas na fig. 66.

Duas vigas transversais metálicas de extremidade constituiram os apoios das vigas longitudinais (fig. 67). Elas têm a vantagem de apresentar pequena resistência à torção, criando condições de apoio que permitem a execução do cálculo.



SECÇÃO DA VIGA PRINCIPAL



SECÇÃO DA VIGA TRANSVERSAL

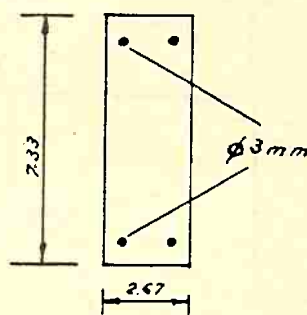


Fig. 66

Nas figuras 68, 69 e 70 estão reunidos, nos diferentes quadros, os valores dos quinhões de carga relativos a cada viga longitudinal, quando da solicitação das grelhas por carga concentrada na altura da viga transversal média.

A concordância entre o ensaio e o cálculo feito por nós é ótima.

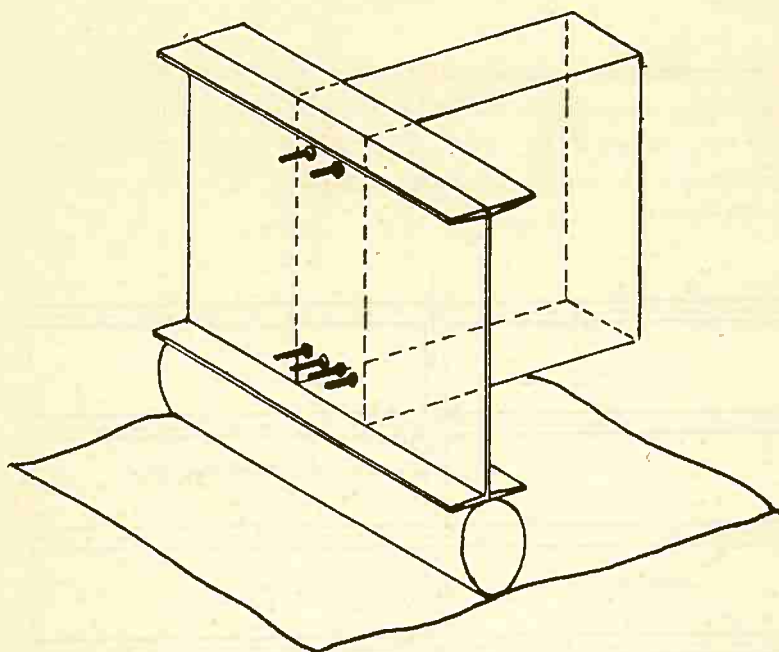


Fig. 67

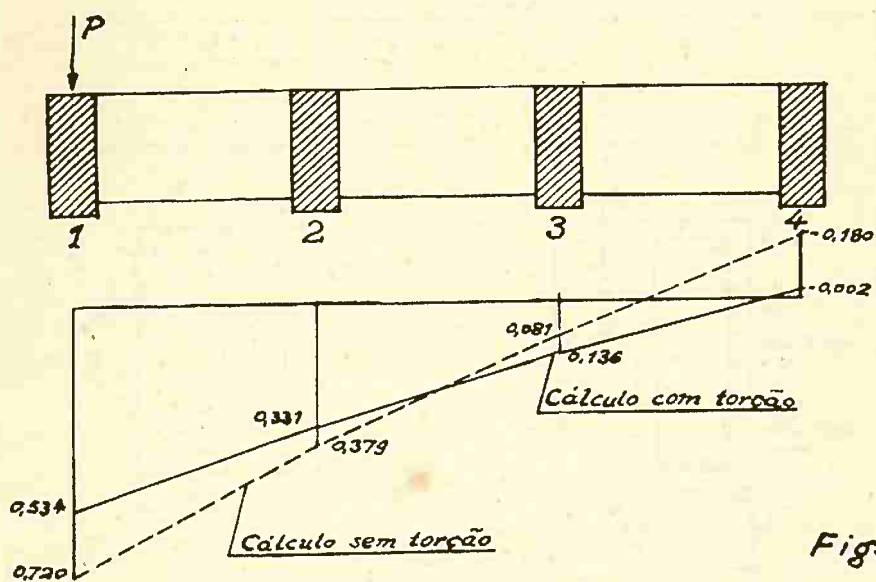


Fig. 68

$P=1$ em 1 — Quinhões de carga.

Pontos	1	2	3	4
Ensaio	0,541	0,328	0,140	-0,009
Cálculo c/ torção	0,534	0,331	0,136	-0,002
Cálculo s/ torção	0,720	0,379	0,081	-0,180

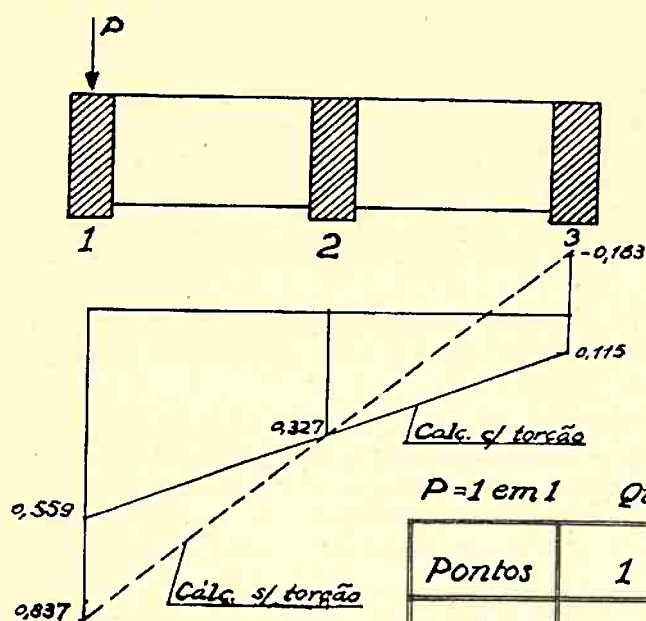


Fig. 69

Pontos	1	2	3
Ensaio	0,562	0,328	0,110
Cálculo c/ torção	0,559	0,327	0,115
Cálculo s/ torção	0,837	0,326	-0,163

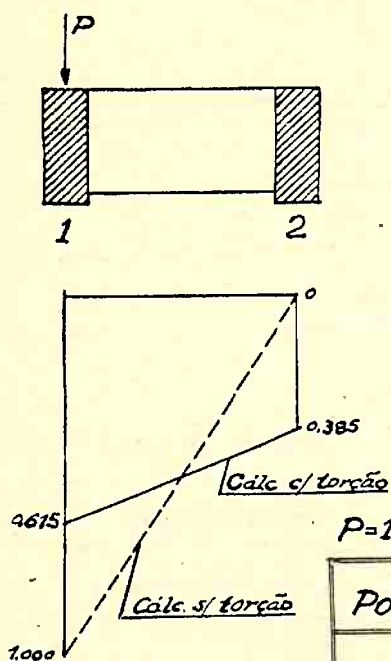


Fig. 70

Pontos	1	2
Ensaio	0,628	0,372
Cálculo c/ torção	0,615	0,385
Cálculo s/ torção	1,000	0,000

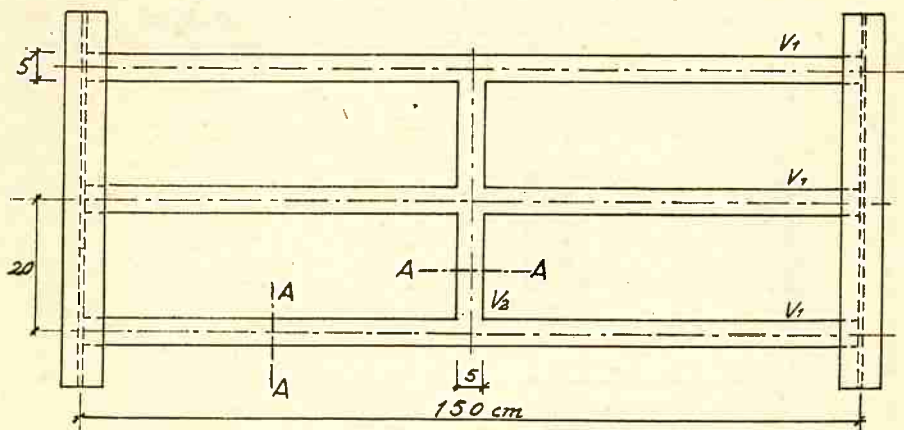
Os três modelos de grelhas ensaiados tinham as mesmas dimensões de vigas e mesmo espaçamento entre elas. Tanto o ensaio quanto o nosso cálculo atestam que, com o aumento da largura da grelha, diminui o efeito de torção, em flagrante contradição com o que afirmam outros autores.

Da nossa parte, fizemos também algumas miniaturas de grelhas de concreto armado e solicitamos o seu ensaio ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo.

Alguns resultados foram bastante satisfatórios; outros já não o foram, em virtude das precárias condições de apoio, criadas pela própria imperfeição dos modelos.

A fig. 71 representa a miniatura n.º 4 do certificado oficial n.º 91309 daquele Instituto, constituída por três vigas longitudinais, fixadas, nas suas extremidades a duas vigas de aço, e uma viga transversal no centro do vão. O quadro apresentado na fig. 72 reúne os resultados do ensaio, em confronto com os obtidos pelo nosso método de cálculo. Como se vê, a concordância é muito boa.

O mesmo se pode dizer da miniatura n.º 6, em que os resultados dos ensaios constam do mesmo certificado do I.P.T. Trata-se de grelha com duas vigas longitudinais ligadas ao meio por uma transversal de dimensões e espaçamento entre vigas idênticos aos da miniatura n.º 4. Na figura 73, reunimos os resultados dos ensaios com os do cálculo.



Corte A-A

Detalhe do apoio

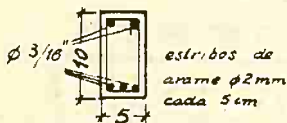
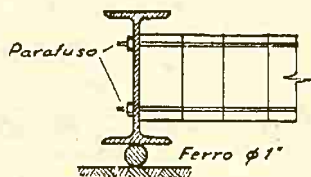
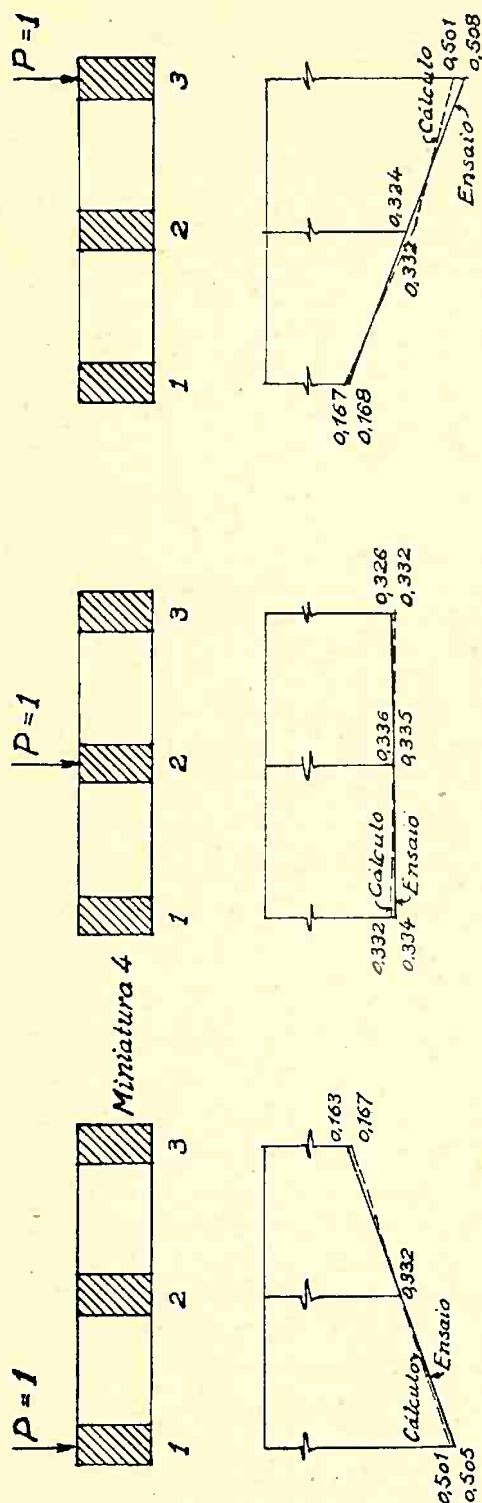


Fig. 71





Quinhões de carga

P=1	P em 1			P em 2			P em 3		
	Pontos			Pontos			Pontos		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Ensaio	0,505	0,332	0,163	0,334	0,335	0,326	0,168	0,324	0,508
Cálculo	0,501	0,332	0,167	0,332	0,336	0,332	0,167	0,332	0,501

Fig. 72

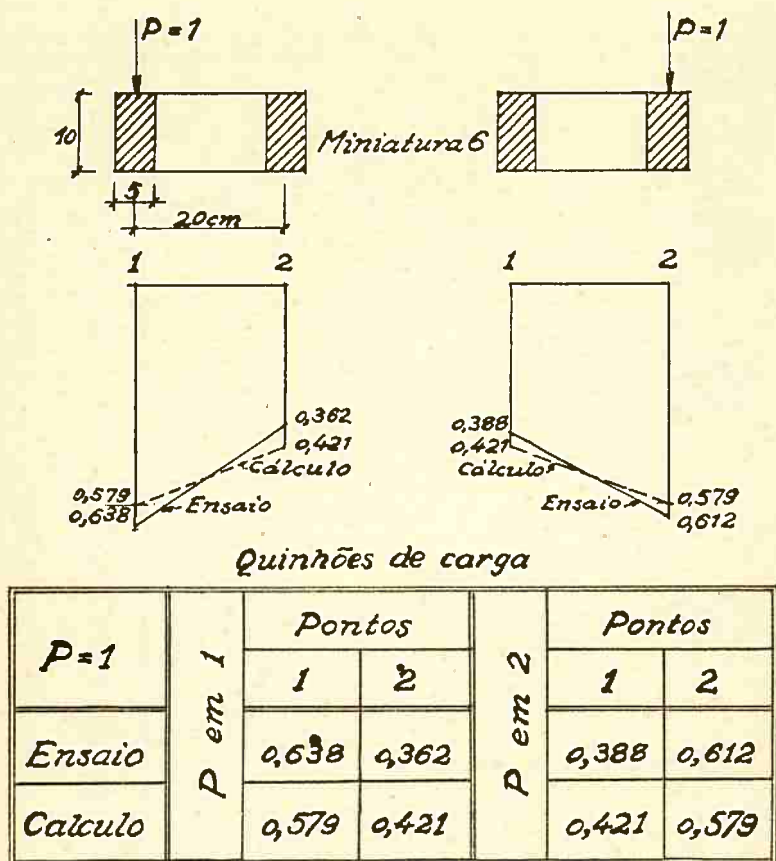


Fig. 73

Os valores dos ensaios, apresentados acima, são média de cinco valores obtidos com diversas cargas.

Foram ensaiadas também miniaturas de grelha com laje de 3 cm de espessura, para comparar com as correspondentes sem laje. A interpretação analítica dos resultados não foi, entretanto, possível, uma vez que o número de corpos de prova cilíndricos não fôra suficiente para obter o valor do módulo de elasticidade do concreto das grelhas, a ser adotado no cálculo. Contudo é interessante fornecer os valores das flechas colhidos nos dois casos, a saber: com laje e sem laje. A figura 74 apresenta os dois gráficos de flechas relativos à miniatura n.º 3, provida de laje, e à miniatura n.º 4, sem a laje, para uma carga concentrada $P = 150$ kg, respectivamente, em 1, 2 e 3.

Verifica-se, assim, a grande influência da laje na distribuição da carga.

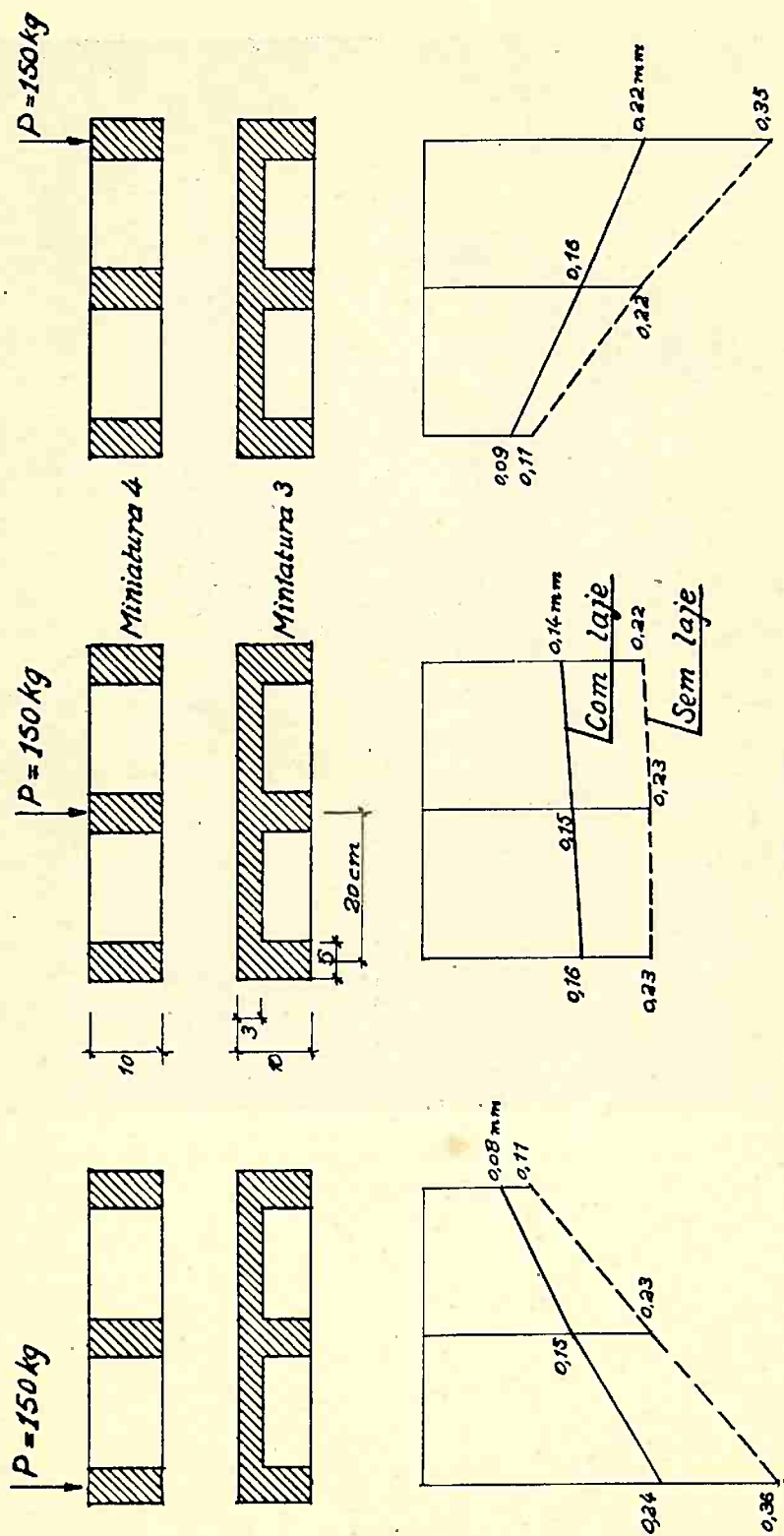


Fig. 74

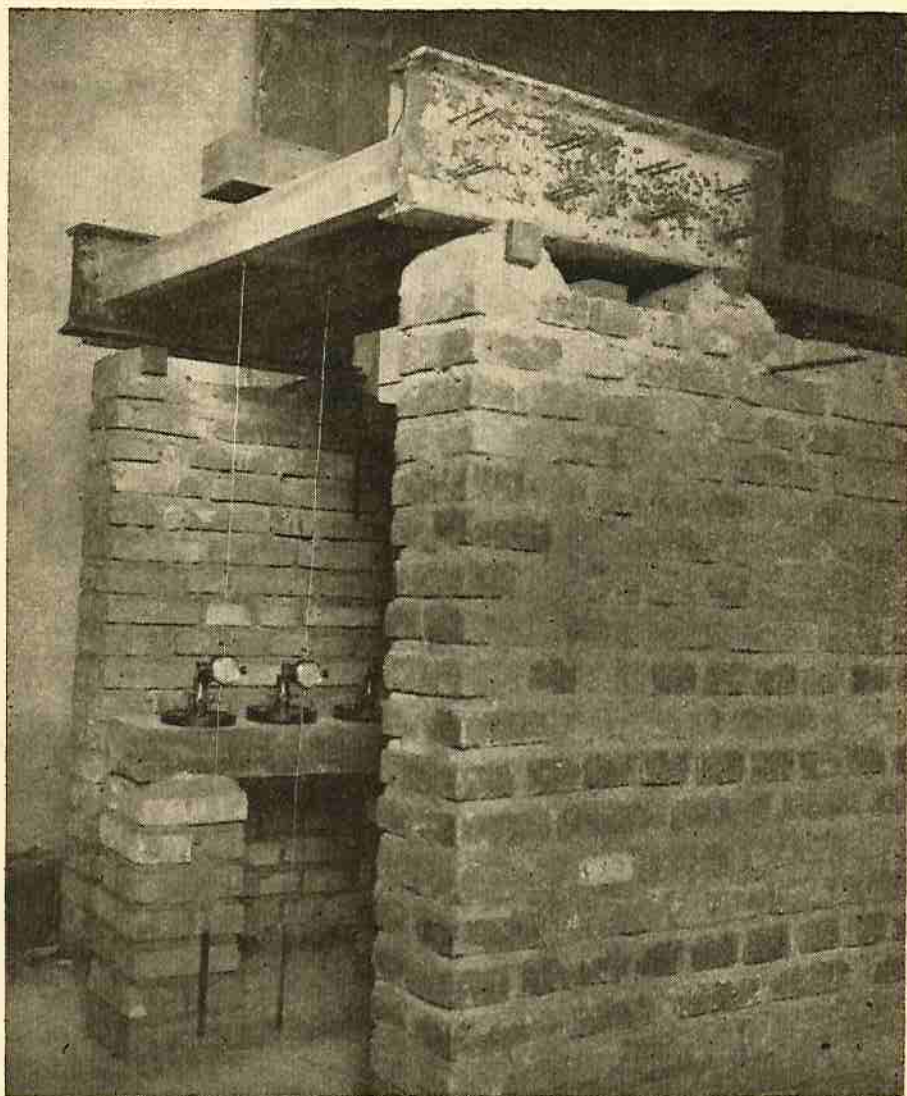


Fig. 75 — Detalhe do ensaio de grelha de concreto armado, realizado no I.P.T.
Certificado Oficial n.º 91309.

VII — O MÉTODO FOTOELÁSTICO

a) Observações fundamentais

A fotoelasticidade constitui modernamente um método experimental de grande importância na determinação das tensões no interior de um corpo, quando submetido a esforços externos. Mediante a observação da anisotropia ótica que aparece em certos materiais transparentes pela aplicação de cargas, ela permite interpretar o estado de tensões correspondente. Seu campo de ação, a princípio limitado aos problemas elásticos planos, se estende também hoje aos problemas de três dimensões.

Nas grelhas, a fotoelasticidade já tem sido empregada e com bastante êxito. Muito embora apareça uma pequena torção, constatou-se que nas barras há um estado de tensão quasi plano, quando se lida com pequenas deformações. Isto possibilita o estudo fotoelástico de um modelo transparente de grelha.

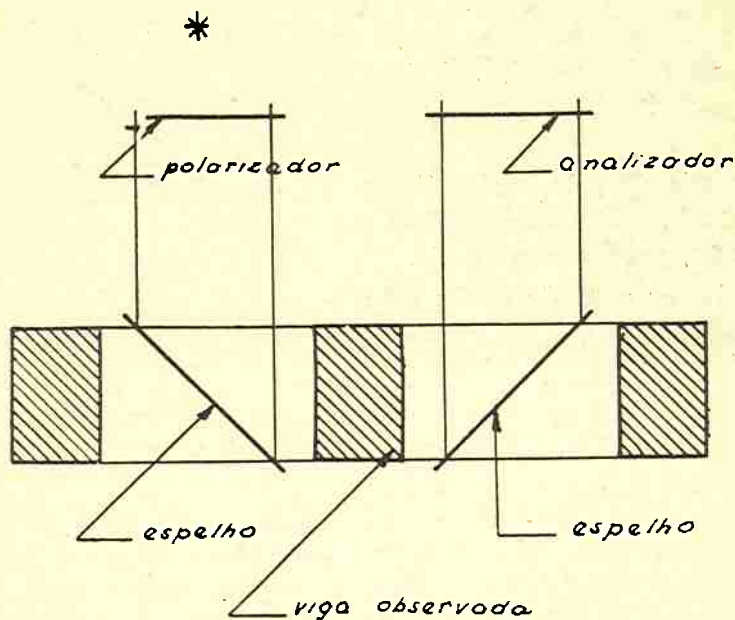


Fig. 76

Surgem, no entanto, sérias dificuldades quanto à observação de cada viga em separado. Um expediente de que se poderia lançar mão, seria a utilização de dois espelhos a 45°, como indica a fig. 76.

Este artifício não só tem uma desvantagem pela sua difícil montagem, como também outra, de ordem ótica, pois há uma polarização parcial pelas duas reflexões, o que torna o método muito impreciso.

Por sugestão do Prof. Föppl, diretor do Laboratório de Fotoelasticidade da Escola Técnica Superior de Munich, Torroja e Villena [35], conseguiram realizar o ensaio, substituindo a grelha corrente, onde todas as vigas estão situadas no mesmo plano, por outra, na qual um sistema de vigas se dispõe de forma escalonada e horizontal, enquanto o outro fica inclinado em relação ao primeiro (fig. 77). Este artifício se baseia no fato, posteriormente constatado, de que a distribuição dos momentos fletores não fica alterada com esta substituição. Deve-se, contudo, fazer com que o ângulo entre os dois sistemas de vigas seja o menor possível.

No modelo, as vigas terão sempre secção retangular,* de momento de inércia proporcional ao da estrutura real. A escala linear j de redução pode ser arbitrária; se houver materiais diferentes, cumpre que a relação $ES/E'S'$ entre as vigas seja a mesma no modelo e na estrutura.

A escala de redução das forças k é também arbitrária, mas de forma a produzir flechas pequenas no modelo.

Sendo σ_0 a tensão obtida no modelo, a tensão real que aparece na estrutura será então:

$$\sigma = \frac{k}{j^2} \sigma_0$$

A disposição escalonada das vigas obriga a confecção de dois modelos: um para observação das vigas longitudinais, e outro das transversais.

Quanto à natureza das ligações entre longarinas e transversinas, os modelos podem ser também de dois tipos: o rígido e o articulado. O modelo rígido tem a vantagem de traduzir as condições reais, pois na maior parte das vezes a ligação das vigas na estrutura é de fato rígida; contudo, aparece sempre alguma incerteza nos resultados, desde que possam surgir,

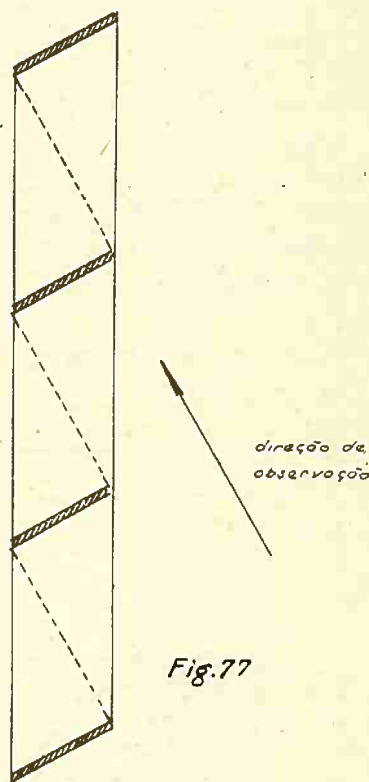


Fig.77

pela inclinação de um sistema de vigas, rotações por torção que perturbam o estudo fotoelástico.

O modelo articulado, se bem esteja isento da torção, terá a sua interpretação um tanto sacrificada, quando a ligação entre as vigas for defeituosa. Torroja e Villena, após inúmeros ensaios, inclinaram-se para o tipo de ligação da fig. 78, que consiste em um pequeno ponteiro de aço engas-

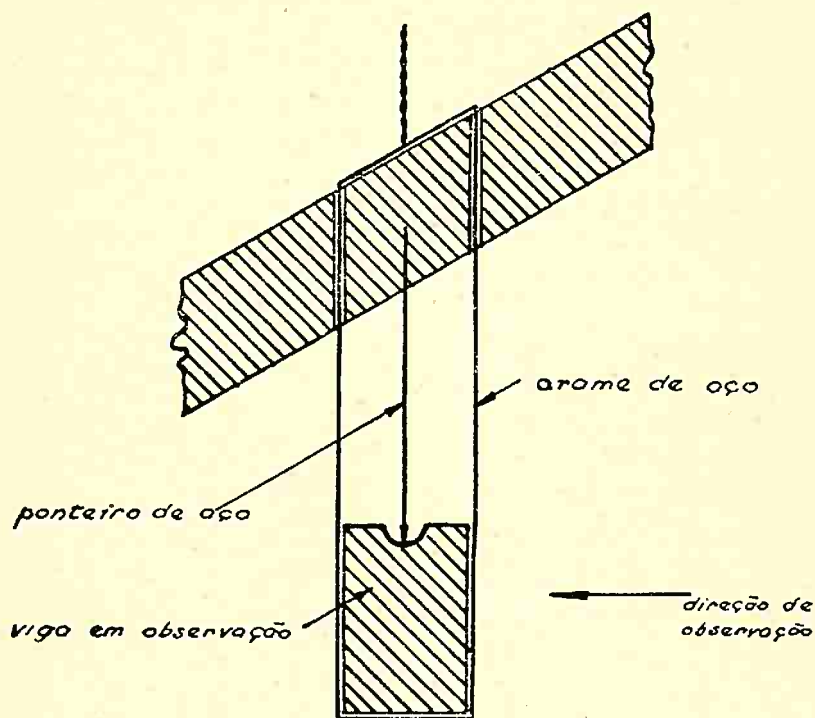


Fig. 78

tado na viga não observada, apoiando-se numa concavidade semi-esférica, de 2 mm de diâmetro, feita na viga observada; um arame atravessa duas ranhuras nas vigas não observadas, e, por uma pequena pressão, efetua a ligação, sem produzir, contudo, efeitos fotoelásticos.

Eles procederam ao exame das vigas longitudinais, apoiando-as em suportes laterais escalonados, como indica a fig. 79.

Quanto às cargas a serem aplicadas, são usados de preferência pesos, pois garantem a constância das cargas previstas.

Para as vigas transversais, adotaram a disposição da fig. 80. Os apoios das vigas longitudinais, inclinadas no caso, consistiam em chapas de Plexiglas, talhadas de modo a permitir um apoio perfeito.

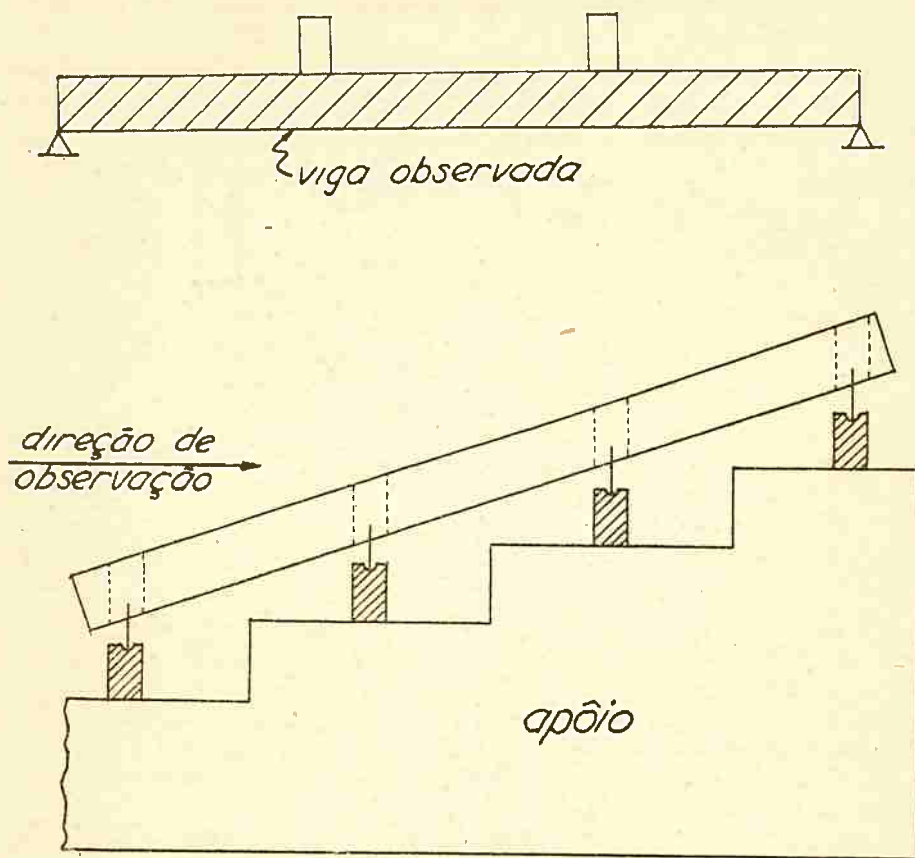


Fig. 79

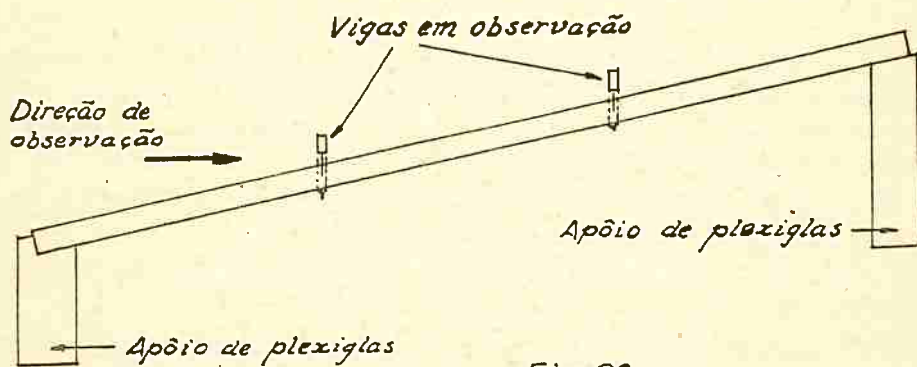


Fig. 80

b) Determinação dos momentos fletores

Admitidas as hipóteses de Bernoulli e de Navier, a tensão numa fibra à distância y da linha neutra, de uma secção sujeita a um momento fletor M , é dada por:

$$\sigma = \frac{M}{J} y$$

Sendo y' a ordenada da fibra extrema, resulta então:

$$M = \frac{J \sigma}{y'}$$

onde σ é a tensão no bordo, tangente à superfície. Salvo na zona dos apoios e nas regiões de aplicação das cargas, ao longo de uma fibra extrema, uma das tensões principais é nula, e a outra vale então o dobro da tensão máxima de cisalhamento que aí aparece.

$$\sigma' = 2 \tau_{\max}$$

A fotoelasticidade, pelo feixe de isocromáticas, determina imediatamente o valor da tensão máxima de cisalhamento na fibra extrema, pela simples multiplicação da ordem de franja pela sua constante.

Quando se trata de flexão pura, a tensão máxima de cisalhamento se anula na linha neutra e se distribui linearmente ao longo da altura. Para se obter com melhor precisão a ordem de franja da fibra extrema, é aconselhável proceder como segue:

Mede-se a distância entre duas isocromáticas de mesma ordem (fig. 81), situadas de um lado e do outro da linha neutra, tomando-se n o maior possível, e calcula-se a ordem de franja das fibras extremas pela expressão:

$$n = \frac{h}{d} n$$

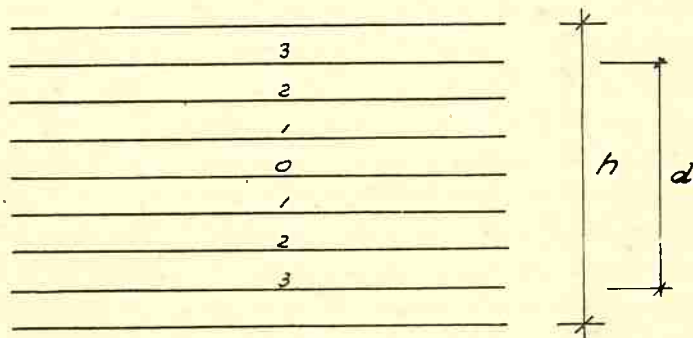


Fig. 81

Isto evita a influência perturbadora das tensões residuais de bordo.

Se houver também força cortante Q , além do momento fletor M , a linha média já não é rigorosamente a isocromática de ordem zero, uma vez que a tensão máxima de cisalhamento aí não é nula, mas sim

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{eh},$$

e a sua distribuição ao longo de h é parabólica nas vizinhanças da linha neutra (fig. 82).

Não podemos, portanto, usar o método anterior. Como na maioria das grelhas, o comprimento da viga é muito maior que sua altura, a variação da tensão de cisalhamento pode ser considerada linear em toda a altura,

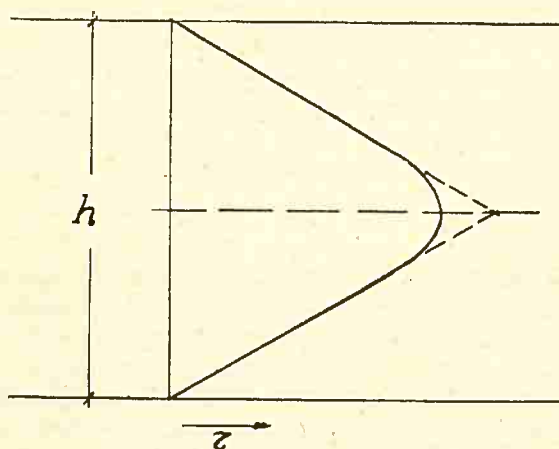


Fig. 82

salvo numa pequena zona próxima da linha neutra, uma vez que as forças cortantes são pequenas em face dos momentos fletores (fig. 82). O seu desprezo tem pequena influência nos resultados.

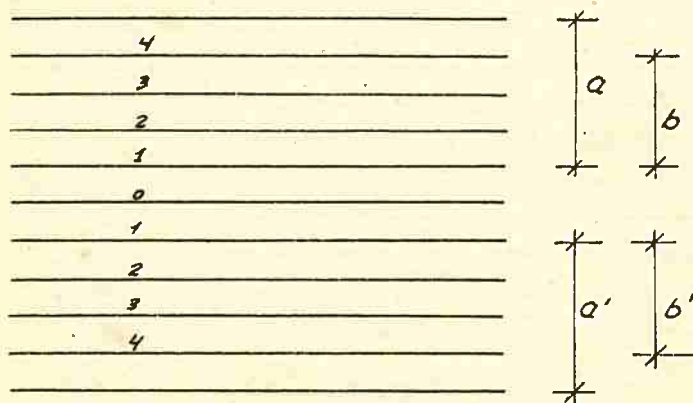


Fig. 83

Pode-se, contudo, contornar a dificuldade, se se medirem de um lado e de outro da linha neutra as distâncias a e a' entre as isocromáticas de ordem 1 e os bordos, as distâncias b e b' entre estas mesmas isocromáticas e a de ordem n qualquer (fig. 83).

A ordem de franja das fibras extremas será dada, então, por:

$$\bar{n} = 1 + \frac{a + a'}{b + b'} (n - 1)$$

Achada esta ordem de franja, basta multiplicá-la pela constante de franja C para se obter a tensão de cisalhamento.

O momento fletor na secção será, portanto:

$$M = \frac{2 J C \bar{n}}{y'}$$

Os processos que mencionamos não valem para secções muito próximas dos apoios, como também não se aplicam àquelas sujeitas a pequenos momentos fletores; aí as tensões de cisalhamento máximas não atingem, em nenhum ponto da secção, o valor da constante de franja C , e então só aparecem nelas isocromáticas de ordem zero.

Torroja e Villena ensaiaram modelos feitos com chapas de 1 cm de espessura de uma resina artificial (Decorit), perfeitamente transparente e incolor. Para obter maior rigidez, bem como constante fotoelástica mais elevada, recoseram o material fotoelástico durante sete horas a 110°C, em câmaras de pressão com 2 atm, procedendo lentamente ao resfriamento por espaço de 8 horas, a fim de evitar o aparecimento de tensões internas.

O método fotoelástico permite a determinação bastante precisa dos esforços na grelha, com a vantagem de computar a colaboração da torção.

Não pudemos apresentar ensaio fotoelástico feito por nós, porque não dispomos até o momento de elementos para a eliminação de tensões parasitas que perturbam por completo a interpretação dos resultados.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,16667	0,83333	2,62990	6,41856	13,31303	24,65553	42,04602	67,30060	102,89609	149,92351	213,99026	298,28815	396,65733	522,48246	689,99702	903,93334	1105,48519	1309,80702	1659,82778
2		0,05556	0,16667	0,40301	0,83333	1,54221	2,62990	4,21049	6,41856	9,39194	13,31303	18,34134	24,65553	32,52456	42,04602	53,53176	67,30060	83,78328	102,89609
3			0,03697	0,08224	0,16667	0,30640	0,52103	0,83333	1,26920	1,85727	2,62990	3,62123	4,87222	6,41856	8,30830	10,58695	13,31303	16,50893	20,28779
4				0,03033	0,09556	0,09911	0,16667	0,26526	0,40301	0,58902	0,83333	1,14699	1,54221	2,03936	2,62990	3,35096	4,21049	5,22781	6,41856
5					0,02714	0,04352	0,07050	0,11049	0,16667	0,24269	0,34265	0,47106	0,63223	0,83333	1,07819	1,37379	1,72603	2,14217	2,62990
6						0,02534	0,03697	0,05556	0,08224	0,11864	0,16667	0,22847	0,30640	0,40301	0,52103	0,66350	0,83333	1,03406	1,26920
7							0,02423	0,03297	0,04668	0,06591	0,11954	0,12474	0,16667	0,21871	0,28223	0,35919	0,45080	0,55908	0,68595
8								0,02348	0,03033	0,04093	0,05556	0,07472	0,09911	0,12947	0,16667	0,21160	0,26526	0,32869	0,40301
9									0,02296	0,02848	0,03697	0,04853	0,06347	0,08224	0,10531	0,13325	0,16667	0,20620	0,25253
10										0,02258	0,02714	0,03411	0,04352	0,05556	0,07050	0,08868	0,11049	0,13667	0,16667
11											0,02230	0,02613	0,03197	0,03981	0,04974	0,06197	0,07671	0,09425	0,11488
12												0,02208	0,02534	0,03033	0,03697	0,04534	0,05556	0,06779	0,08224
13													0,02190	0,02476	0,02997	0,03475	0,04191	0,05060	0,06094
14														0,02176	0,02423	0,02799	0,03297	0,03918	0,04668
15															0,02165	0,02402	0,02714	0,03152	0,03697
16																0,02155	0,02348	0,02643	0,03033
17																	0,02147	0,02320	0,02584
18																		0,02141	0,02296
19																			0,02135

Tabela I

$$\alpha_1 = \frac{\lambda^3 (\cos \frac{1}{n} + 2)}{6 (\cos \frac{2}{n} - 4 \cos \frac{1}{n} + 3)}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-0,50000	-1,00000	-1,76713	-2,61808	-3,73218	-5,04898	-6,56858	-8,29050	-10,21659	-12,34263	-14,67367	-17,21170	-19,94416	-22,88330	-26,02811	-29,37720	-32,91839	-36,65689	-40,61738
2		0,33333	-0,50000	-0,72361	-1,00000	-1,32799	-1,70713	-2,13712	-2,61808	-3,14961	-3,73218	-4,36529	-5,04898	-5,78369	-6,56858	-7,40412	-8,29050	-9,22850	-10,21659
3			-0,29289	-0,38197	-0,50000	-0,64310	-0,80995	-1,00000	-1,21297	-1,44869	-1,70713	-1,98815	-2,29190	-2,61808	-2,96683	-3,33823	-3,73218	-4,14034	-4,58758
4				-0,27639	-0,33333	-0,40899	-0,50000	-0,60507	-0,72361	-0,85331	-1,00000	-1,15757	-1,32799	-1,51117	-1,70713	-1,91578	-2,13712	-2,37124	-2,61808
5					-0,26795	-0,30798	-0,36162	-0,42602	-0,50000	-0,58297	-0,67460	-0,77471	-0,88324	-1,00000	-1,12504	-1,25830	-1,39974	-1,54933	-1,70713
6						-0,26302	-0,29289	-0,33333	-0,38197	-0,43771	-0,50000	-0,56853	-0,64310	-0,72361	-0,80995	-0,90212	-1,00000	-1,10363	-1,21297
7							-0,25989	-0,29289	-0,33333	-0,38197	-0,43771	-0,50000	-0,56853	-0,64310	-0,72361	-0,80995	-0,90212	-1,00000	-1,10363
8								-0,25777	-0,30214	-0,35325	-0,39720	-0,44621	-0,50000	-0,55837	-0,62119	-0,68841	-0,75990	-0,83569	-0,91575
9									-0,25627	-0,301490	-0,35269	-0,40187	-0,44899	-0,50000	-0,55566	-0,61457	-0,67602	-0,74061	-0,80841
10										-0,25517	-0,30029	-0,34887	-0,39798	-0,44899	-0,50000	-0,55566	-0,61457	-0,67602	-0,74061
11											-0,25433	-0,30019	-0,34887	-0,39798	-0,44899	-0,50000	-0,55566	-0,61457	-0,67602
12												-0,25348	-0,30019	-0,34887	-0,39798	-0,44899	-0,50000	-0,55566	-0,61457
13													-0,25317	-0,30019	-0,34887	-0,39798	-0,44899	-0,50000	-0,55566
14														-0,25276	-0,30019	-0,34887	-0,39798	-0,44899	-0,50000
15															-0,25242	-0,30019	-0,34887	-0,39798	-0,44899
16																-0,25215	-0,30019	-0,34887	-0,39798
17																	-0,25177	-0,30019	-0,34887
18																		-0,25141	-0,30019
19																			-0,25135

Tabela II

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{2 (\cos \frac{1}{n} - 1)}$$

RELAÇÃO DAS OBRAS CITADAS

1. A. ZSCHETZSCHE: Theorie lastvertheilender Queverbände. Zeitschrift des Oesterr. Ingenieur — und Architekten — Vereines 1893, pg. 553.
2. A. BÜHLER: Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken. Schweiz. Bauztg 1914, II, pg. 268, e 1915, I, pg. 78.
3. H. LOSSIER: Étude de la solidarité des pieces de pont. Le Genie Civil 1912, pg. 336.
4. R. SALIGER: Versuche über die Verteilung einer Linienbelastung in einer Rippenplatte. Arm. Beton 1912, pg. 361.
5. W. FRANK: Die Verteilung von Radlasten bei Eisenbetonbrücken. Arm. Beton 1913, pg. 363.
6. W. FRANK: Die Querverteilung der Raddrücke bei Eisenbetonbalkenbrücken. Arm. Beton 1914, pg. 49.
7. F. KNORR: Untersuchungen über die Last—Verteilung von Querträgern bei einer Balkenbrücke aus Eisenbeton. Arm. Beton 1919, pg. 299.
8. M. THULLIE: Die Druckverteilung auf die einzelnen Träger der Betonbrücke. Beton u. Eisen 1922, pg. 67.
9. PETERMANN: Über lastverteilende Wirkung durchgehender Querverbindungen. Bautechn. 1925, pg. 518.
10. LEWERENZ: Die Berechnung von eisernen Überbauten mit drei Haupträgern. Bautechn. 1925, pg. 557.
11. F. FALTUS: Lastverteilende Querverbindungen. Bauing 1927, p. 853.
12. BLEICH-MELAN: Die Gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. 1927. Julius Springer.
13. R. GENNTER: Der Eisenbetonträgerrost. Beton u. Eisen 1928, pg. 411.
14. W. STORTZ: Die Strassenbrücke über die Murg bei Gernsbach. Beton u. Eisen 1928, pg. 344.
15. BELA ENYEDI: Die Verteilung von Einzelkräften auf nebeneinander liegende Träger. Beton u. Eisen 1928, pg. 352.
16. MARCUS: Die weitgespannten Decken des Ssportsgebäudes im Stadion Breslau - Leerbeutel. Beton u. Eisen 1929, pg. 73.
17. GIULIO KRALL: Répartition des charges dans les structures assemblées. Primeiro Congresso Internacional de concreto e concreto armado. Liege 1930.
18. CHRIST. OSTENFELD: Lastverteilende Querverbindungen. Kopenhagen 1930, Jul. Gjellerup.
19. KRABBE: Beitrag zur Behandlung von Trägerrosten. Bauing. 1934, pg. 27.
20. A. CHARRUEAU: Sur la poutre continue à appuis élastiques. La Téchique des Travaux 1935, pg. 269.
21. E. WIESNER: Über die Berechnung von Strassenbrücken mit berücksichtigung der Lastverteilenden Querträger. Bauing. 1934, pg. 353.

22. A. THOMS: Die Berechnung mehrfach symmetrischer Trägerroste mit Hilfe von Sinus - Gewichten. Stahlbau 1936, pg. 138.
23. E. HENNIGS: Einfluss durchlaufender Querträger bei mehrwandigen Eisenbetonbalkenbrücken. Beton u. Eisen 1937, pg. 323.
24. F. LEONHARDT: Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerrost. Bautech 1938, pg. 535.
25. F. GEIGER: Kontinuierliche Rosträgerbrücken. Stahlbau 1938, pg. 78.
26. F. KAUFMANN: Modellversuche mit lastverteilenden Querverbänden. Stahlbau 1938, pg. 145.
27. A. J. S. PIPPARD e J. P. A. DE WAELE: The Loading of Interconnected Bridge-Girders. Journal of Institution of Civil Engineers. Vol. 10, 1933, pg. 97.
28. J. COURBON: Calcul des ponts à poutres multiples solidarisees par des entretoises ∞ . Annales de Ponts et Chaussées, Novembro-Dezembro 1940.
29. MAHOMED HILAL: Beiträge zur Theorie und Berechnung von Balkenbrücken. Diss. E.T.H., Zürich 1940, Gebr. Leemann u. Co.
30. MELAN - SCHINDLER: Die genaue Berechnung von Trägerrosten. Viena 1942. J. Springer.
31. M. J. BLEVOT: Tabliers de ponts-routes en béton armé. Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. Circular, serie I, n.º 9, 1942.
32. U. THRAN: Anleitung für die strenge Trägerrostberechnung. Stahlbau 1942, pg. 82.
33. K. KLÖPPEL: Zur Berechnung des Trägerrostes. Stahlbau 1942, pg. 78.
34. F. LEONHARDT: Vereinfachte Trägerrostberechnung. Nachweis des Genauigkeitssgrades und Erweiterung. Bautechn. 1944, pg. 86.
35. E. TORROJA - L. VILLENA: Estudio Teórico Y Fotoelástico de Emparrillados. Revista de Obras Publicas. Abril 1944, pg. 156.
36. M. Y. GUYON: Calcul des ponts larges a poutres multiples solidarisees par des entretoises. Annales des Ponts et Chaussées. Setembro-Outubro 1946, pg. 552.
37. CH. MALLET: Calcul des ponts à poutres multiples. Travaux, Novembro 1946, pg. 413.
38. J. SCHÖTTGEN: Einfluss der Verdrehungssteifigkeit der Hauptträger auf die Lastverteilung beim Trägerrost nach Rechnung und Versuch. Bautechnik - Archiv. 1947, Caderno 1, pg. 35.
39. F. LEONHARDT - W. ANDRÄ: Die vereinfachte Trägerrostberechnung. Stuttgart 1950. Julius Hoffmann.

INDICE

	<i>Pág.</i>
I — Introdução Histórica	3
II — Um novo método de cálculo de grelha	8
III — Fundamentos do método apresentado	10
IV — Cálculo das grelhas:	
A. Grelhas livremente apoiadas, excluído o efeito de torção.	
a) Grelhas simétricas	20
b) Grelhas assimétricas	59
B. Grelhas livremente apoiadas, incluído o efeito de torção	74
C. Grelhas contínuas	97
D. Grelhas livremente apoiadas em quatro bordos	103
V — Colaboração da laje	107
VI — O método dos modelos	116
VII — O método fotoelástico	133

INDEX

1. Introduction
2. The first part of the book
3. The second part of the book
4. The third part of the book
5. The fourth part of the book
6. The fifth part of the book
7. The sixth part of the book
8. The seventh part of the book
9. The eighth part of the book
10. The ninth part of the book
11. The tenth part of the book
12. The eleventh part of the book
13. The twelfth part of the book
14. The thirteenth part of the book
15. The fourteenth part of the book
16. The fifteenth part of the book
17. The sixteenth part of the book
18. The seventeenth part of the book
19. The eighteenth part of the book
20. The nineteenth part of the book
21. The twentieth part of the book
22. The twenty-first part of the book
23. The twenty-second part of the book
24. The twenty-third part of the book
25. The twenty-fourth part of the book
26. The twenty-fifth part of the book
27. The twenty-sixth part of the book
28. The twenty-seventh part of the book
29. The twenty-eighth part of the book
30. The twenty-ninth part of the book
31. The thirtieth part of the book
32. The thirty-first part of the book
33. The thirty-second part of the book
34. The thirty-third part of the book
35. The thirty-fourth part of the book
36. The thirty-fifth part of the book
37. The thirty-sixth part of the book
38. The thirty-seventh part of the book
39. The thirty-eighth part of the book
40. The thirty-ninth part of the book
41. The fortieth part of the book
42. The forty-first part of the book
43. The forty-second part of the book
44. The forty-third part of the book
45. The forty-fourth part of the book
46. The forty-fifth part of the book
47. The forty-sixth part of the book
48. The forty-seventh part of the book
49. The forty-eighth part of the book
50. The forty-ninth part of the book
51. The fiftieth part of the book
52. The fifty-first part of the book
53. The fifty-second part of the book
54. The fifty-third part of the book
55. The fifty-fourth part of the book
56. The fifty-fifth part of the book
57. The fifty-sixth part of the book
58. The fifty-seventh part of the book
59. The fifty-eighth part of the book
60. The fifty-ninth part of the book
61. The sixtieth part of the book
62. The sixty-first part of the book
63. The sixty-second part of the book
64. The sixty-third part of the book
65. The sixty-fourth part of the book
66. The sixty-fifth part of the book
67. The sixty-sixth part of the book
68. The sixty-seventh part of the book
69. The sixty-eighth part of the book
70. The sixty-ninth part of the book
71. The seventieth part of the book
72. The seventy-first part of the book
73. The seventy-second part of the book
74. The seventy-third part of the book
75. The seventy-fourth part of the book
76. The seventy-fifth part of the book
77. The seventy-sixth part of the book
78. The seventy-seventh part of the book
79. The seventy-eighth part of the book
80. The seventy-ninth part of the book
81. The eightieth part of the book
82. The eighty-first part of the book
83. The eighty-second part of the book
84. The eighty-third part of the book
85. The eighty-fourth part of the book
86. The eighty-fifth part of the book
87. The eighty-sixth part of the book
88. The eighty-seventh part of the book
89. The eighty-eighth part of the book
90. The eighty-ninth part of the book
91. The ninetieth part of the book
92. The ninety-first part of the book
93. The ninety-second part of the book
94. The ninety-third part of the book
95. The ninety-fourth part of the book
96. The ninety-fifth part of the book
97. The ninety-sixth part of the book
98. The ninety-seventh part of the book
99. The ninety-eighth part of the book
100. The ninety-ninth part of the book
101. The hundredth part of the book