RT-MAP-7807

(Γ', Γ)-ESTABILIDADE E MÉTODOS PREDITORES-CORRETORES

Ivan de Queiroz Barros

SETEMBRO 1978

(Γ', Γ) - ESTABILIDADE E MÉTODOS PREDITORES - CORRETORES

Sumário.

A análise dos métodos de passo progressivo de vários estágios para equações diferenciais ordinárias com valores iniciais tem sido feita reduzindo-se previamente o método a um equivalente de um único estágio.

Neste trabalho definimos para um método geral de discretização de vários estagios a nocão de "(Γ', Γ)- Estabilidade" que possibilita a determinação da ordem de convergência de cada estágio mediante a verificação da ordem de consistência de cada estágio.

Apresentamos um critério de (Γ', Γ)-estabilidade que é satisfatoriamente aplicado aos métodos preditores - corretores.

Contudo este critério não fornece resultados significativos para outras classes importantes de métodos lineares de vários estágios como por exemplo os métodos tipo Runge-Kutta.

Esperamos com a continuação desta pesquisa obter critérios mais refinados que possam ser significativamente aplicados a toda a classe dos métodos lineares de vários estágios.

§1 - Definições

1.1 Definição

Sejam E, E^0 espaços normados e $F: E \to E^0$. Chamamos *problema original* a tripla $\{E, E^0, F\}$. Dizemos que $z \in E$ é uma *solução* do problema original se $Fz = 0$.

1.2 Exemplo

$$E = C^1([0,1], \mathbb{R}^s), \quad E^0 = \mathbb{R}^s \times C([0,1], \mathbb{R}^s)$$

$$Fy = (y(0) - z_0,\ y' - f \circ y)$$

onde $z_0 \in \mathbb{R}^s$, $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ é de classe C^1 e admite constante de Lipschitz L.

$$\|y\|_E = \max_{0 \le t \le 1} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^s}$$

$$\|(d_0, d)\|_{E^0} = \|d_0\|_{\mathbb{R}^s} + \max_{0 \le t \le 1} \|d(t)\|_{\mathbb{R}^s}.$$

A solução de $Fy = 0$ é a solução do problema

$$y(0) = z_0$$

$$y' = f(y) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

que sabemos existe e é única.

1.3 Definição

Um processo discreto é uma sequência de triplas $\{E_n, E_n^0, F_n\}$ onde E_n, E_n^0 são espaços normados de dimensão finita com $\dim E_n = \dim E_n^0$, e $F_n : E_n \longrightarrow E_n^0$.
Dizemos que $\{\xi_n\}$ onde $\xi_n \in E_n$ é uma solução do processo discreto se $F_n \xi_n = 0$, $\forall n$.

1.4 Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma classe de aplicações de E em E^0. Então $\mathcal{C} = \{\{E, E^0, F\} : F \in \mathcal{A}\}$ é uma classe de problemas originais.
Um método de discretização aplicável a $\mathcal{C}$ é uma sequência de quíntuplas

$$\{E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \varphi_n\}$$

onde $\Delta_n : E \longrightarrow E_n$ e $\Delta_n^0 : E^0 \longrightarrow E_n^0$ são aplicações lineares contínuas tais que

$$\|\Delta_n y\| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

$$\|\Delta_n^0 d\| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 0$$

e φ_n é uma aplicação que leva $F \in \mathcal{A}$ numa aplicação $F_n = \varphi_n(F) : E_n \to E_n^0$.

1.5 Observação

Um método de discretização $\mathcal{M} = \{E_n, E_n^\circ, \Delta_n, \Delta_n^\circ, \varphi_n\}$ aplicável a $\mathcal{C}$ define uma aplicação de $\mathcal{C}$ no conjunto dos processos discretos, definida por:

$$\mathcal{M}(\{E, E^\circ, F\}) = \{E_n, E_n^\circ, \varphi_n(F)\}$$

1.6 Definição

Uma malha G_n no intervalo $[0,1]$ é uma sequência finita de pontos

$$t_\nu \in [0,1] \ , \quad \nu = 0, 1, \dots n'(n)$$

tal que $t_0 = 0$, $t_{\nu-1} < t_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots n'$.

Indicaremos por G_n tambem o conjunto dos valores t_ν , $\nu = 0, 1, \dots n'$.

Uma sequência de malhas (G_n) é dita linearmente convergente se existem constantes $c_2 > c_1 > 0$ tais que

$$1 - t_{n'} \leq \frac{c_2}{n}$$

$$\frac{c_1}{n} \leq h_\nu \leq \frac{c_2}{n} \ , \quad \nu = 1, 2, \dots n' \ , \quad \forall n$$

onde $h_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$. As malhas consideradas serão linearmente convergentes.

1.7 Definição

Seja $\mathcal{C}$ a classe dos problemas originais do exemplo 1.2 e $\mathcal{M}$ um método de discretização aplicável a $P \in \mathcal{C}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um método de passo progressivo (MPP) se:

i) $E_n = E_n^0 = \mathcal{F}(\mathbb{G}_n, \mathbb{R}^{\bar{s}})$, $\bar{s} \in \mathbb{N}$

ii) $(F_n \eta)(t_\nu)$ depende apenas de $\eta(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots \nu$.

onde $\eta \in E_n$ e $F_n = \varphi_n(F)$.

1.8 Definição

Dizemos que um MPP tem multiplicidade k se

$$(\varphi_n(F)\eta)(t_\nu) = \begin{cases} \eta(t_\nu) - s_{n\nu}(z_0) & , \nu = 0, 1, \ldots k-1 \\ \\ \Phi_{n\nu}(\eta(t_\nu), \eta(t_{\nu-1}), \ldots \eta(t_\nu - k), h_\nu) & , \\ \qquad \nu = k, k+1, \ldots n' \end{cases}$$

1.9 Definição

Dizemos que um MPP tem $\bar{m}$ - estágios se

i) $\bar{s} = \bar{m}\, s$

ii) $$(\Delta_n y)(t_\nu) = \begin{bmatrix} y(t_\nu^1) \\ y(t_\nu^2) \\ \\ y(t_\nu^{\bar{m}}) \end{bmatrix}$$

onde os $t_\nu^j \in [0,1]$, fazem parte da definição do MPP.

Se $\overline{m} = m \cdot q$, $m, q \in \mathbb{N}$, dizemos que o método tem "m q-estágios"

1.10 MPP de multiplicidade k com m q-estágios

Seja $\mathcal{M} = \{E_n, E_n^\circ, \Delta_n, \Delta_n^\circ, \varphi_n\}$

onde $E_n = E_n^\circ = \mathcal{F}(G_n, \mathbb{R}^{mqs})$.

Adotaremos as normas

$$\|\eta\|_{E_n} = \max_{0 \le \nu \le n'} \|\eta(t_\nu)\|_{\mathbb{R}^{mqs}}$$

$$\|y\|_{\mathbb{R}^{mqs}} = \max_{1 \le i \le m} \|y^i\|_{\mathbb{R}^{qs}} \quad , \quad y^i \in \mathbb{R}^{qs}$$

$$\|y^i\|_{\mathbb{R}^{qs}} = \max_{1 \le j \le q} \|y^{ij}\|_{\mathbb{R}^s} \quad , \quad y^{ij} \in \mathbb{R}^s$$

$$\|\delta\|_{E_n^\circ} = \max_{0 \le \nu \le k-1} \|\delta(t_\nu)\|_{\mathbb{R}^{mqs}} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=k}^{n'} \|\delta(t_\nu)\|_{\mathbb{R}^{mqs}}$$

1.11 Definição

Dizemos que um MPP de multiplicidade k e m q-estágios é parcialmente consistente com $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$ de ordem (p_i', p_i) no q-estágio de índice i se

i) $\| [F_n \Delta_n z]^i (t_\nu) \|_{\mathbb{R}^{qs}} = O(n^{-p_i'})$, $\nu = 0, 1, \dots k-1$.

ii) $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\nu=k}^{n'} \| [F_n \Delta_n z]^i (t_\nu) \|_{\mathbb{R}^{qs}} = O(n^{-p_i})$.

1.12 Definição

Sejam Γ' e Γ matrizes $m \times m$ cujos elementos pertencem a $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ e seja $\mathcal{M}$ um MPP de multiplicidade k e m q-estágios.

Dizemos que $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ é (Γ', Γ)-estável se existe $S > 0$ tal que para $\forall \bar{\eta}, \tilde{\eta} \in E_n$, temos:

$$\max_{0 \le \nu \le n'} \| \bar{\eta}^i (t_\nu) - \tilde{\eta}^i (t_\nu) \|_{\mathbb{R}^{qs}} \le$$

$$\le S \sum_{j=1}^{m} \Big[n^{-\Gamma'_{ij}} \max_{0 \le \nu \le k-1} \| \bar{\eta}^j (t_\nu) - \tilde{\eta}^j (t_\nu) \|_{\mathbb{R}^{qs}} +$$

$$+ n^{-\Gamma_{ij}} \Big(\frac{1}{n} \sum_{\nu=k}^{n'} \| (F_n \bar{\eta})^j (t_\nu) - (F_n \tilde{\eta})^j (t_\nu) \| \Big) \Big]$$

$i = 1, 2, \dots m$. Convencionaremos $n^{-\infty} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.13 Observações

i) Se $\mathcal{M}$ é parcialmente consistente com $\mathcal{P}$ de ordem (p_i', p_i) em cada q-estagio i então $\mathcal{M}$ é consistente com $\mathcal{P}$ de ordem

$$p = \min_{1 \le i \le m} \min \{p_i', p_i\}$$

ii) Se $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ é (Γ', Γ)-estável com constante S então $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ é estável com constante S, pois que

$$n^{-\Gamma_{ij}'} \le 1 \;,\quad n^{-\Gamma_{ij}} \le 1 \;,\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

iii) Nas condições das observações i) e ii), $\mathcal{M}$ resulta convergente de ordem p.

1.14 Proposição

Seja $\mathcal{M}$ um MPP de multiplicidade k e m q-estágios. Se $\mathcal{M}$ é parcialmente consistente com $\mathcal{P}$ de ordem (p_j', p_j) em cada q-estagio j, então o estágio i é convergente de ordem pc_i onde

$$pc_i = \min \left\{ \min_{1 \le j \le m} (\Gamma_{ij}' + p_j') \,,\ \min_{1 \le j \le m} (\Gamma_{ij} + p_j) \right\}$$

isto é:

$$\max_{0 \le \nu \le n'} \| [\Delta_n z]^i (t_\nu) - \xi_n^i (t_\nu) \|_{\mathbb{R}^{qs}} = O(n^{-pc_i})$$

$i = 1, 2, \ldots m.$

Prova

$$\max_{0 \le \nu \le n'} \| [\Delta_n z]^{i}(t_\nu) - \zeta_n^{i}(t_\nu) \| \le$$

$$\le S \sum_{j=1}^{m} \Big[n^{-r'_{ij}} \max_{0 \le \nu \le k-1} \| [F_n \Delta_n z]^{j}(t_\nu) \| +$$

$$+ n^{-r_{ij}} \Big(\frac{1}{n} \sum_{\nu=k}^{n'} \| [F_n \Delta_n z]^{j}(t_\nu) \| \Big) \Big] =$$

$$= S \sum_{j=1}^{m} \Big[n^{-r'_{ij}} \cdot O(n^{-p'_j}) + n^{-r_{ij}} \cdot O(n^{-p_j}) \Big] = O(n^{-pc_i})$$

(q.e.d.)

§2 - Resultados Auxiliares

2.1 Notações e Convenções

Indicaremos por $M_r(X)$ o conjunto das matrizes $r \times r$ com elementos em X.
Se $x, y \in \mathbb{R}^r$, escreveremos $x \leq y$ significando $x^i \leq y^i$, $i = 1, 2, \ldots r$, e analogamente para matrizes.
Empregaremos sistematicamente as normas $\|.\|_\infty$ para vetores de $\mathbb{R}^r$ ou para matrizes de $M_r(\mathbb{R})$ qualquer que seja r.
Qualquer que seja a ordem indicaremos por I a matriz identidade e por Z a matriz definida por $Z_{ij} = 1$, $\forall i, j$.

2.2 Definição

Sejam $S, T \in M_r(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$. Definimos

$S \vee T \in M_r(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$ e $S \wedge T \in M_r(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$, por

$$(S \vee T)_{ij} = \min (S_{ij}, T_{ij})$$

$$(S \wedge T)_{ij} = \min_{1 \leq k \leq r} (S_{ik} + T_{kj})$$

2.3 Propriedades

1) $M_r(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$ munido das operações $\vee$ e $\wedge$ é um semi-anel com unidade U onde:

$$U_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i=j \\ \infty & \text{se} \quad i\neq j \end{cases}$$

Obs: usaremos o símbolo U qualquer que seja r.

2) $S \vee S = S$

3) Se $S_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots r$ e $q \geq r$ então $\overset{q}{\wedge} S = \overset{r}{\wedge} S$

4) $S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_1 \vee T \leq S_2 \vee T$ e $S_1 \wedge T \leq S_2 \wedge T$

5) $\overset{n}{\wedge} S + nZ = \overset{n}{\wedge} (S+Z)$

2.4 <u>Definição</u>

Definiremos $\# : M_r(\mathbb{R}) \to M_r(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$ por

$$(A^{\#})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad A_{ij} \neq 0 \\ \infty & \text{se} \quad A_{ij} = 0 \end{cases}$$

2.5 <u>Propriedades</u>

1) $I^{\#} = U$

2) $(AB)^{\#} \geq A^{\#} \wedge B^{\#}$

3) $(A+B)^{\#} \geq A^{\#} \vee B^{\#}$

Se $A \geq 0$ e $B \geq 0$ então vale a igualdade em 2) e 3).

2.6 <u>Definição</u>

Definiremos $\sim : M_{mq}(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}) \to M_m(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$

por

$$(\tilde{A})_{ij} = \min_{\substack{1 \leq s \leq q \\ 1 \leq l \leq q}} (A_{ij})_{sl} \quad , \quad 1 \leq i,j \leq m$$

onde $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$, $A_{ij} \in M_q(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$.

2.7 <u>Propriedades</u>

Sejam $S, T \in M_{mq}(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$, $A \in M_{mq}(\mathbb{R})$

1) $\widetilde{S \vee T} = \tilde{S} \vee \tilde{T}$

2) $\widetilde{S \wedge T} \geqslant \tilde{S} \wedge \tilde{T}$

3) $\widetilde{A^{\#} + Z} = \widetilde{A^{\#}} + Z$

2.8 <u>Definição</u>

Sejam $0 < h < 1$, $A \in M_r(\mathbb{R})$, $\Gamma \in M_r(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$

Definiremos $[A, \Gamma] \in M_r(\mathbb{R})$ por

$$[A, \Gamma]_{ij} = A_{ij}\, h^{\Gamma_{ij}}$$

2.9 <u>Propriedades</u>

Sejam $A, B \in M_r(\mathbb{R})$, $S, T \in M_r(\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, B \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$.

1) $A = [A, A^{\#}]$.

2) $[A, S][B, T] \leq [AB, S \wedge T]$

3) $[A, S] + [B, T] \leq [A + B, S \vee T]$

4) $\lambda [A, S] = [\lambda A, S]$

5) $h [A, S] = [A, S + Z]$

6) $A \leq B$, $S \geq T \Rightarrow [A, S] \leq [B, T]$

2.10 <u>Lema</u>

Sejam $C \in M_r(\mathbb{R})$, $0 < h_0 \|C\| < 1$, $0 < h \leq h_0 < 1$.

Então:

$$|(I-hC)^{-1}| \leq \max\left(1, \frac{\|C\|^\gamma}{1-h_0\|C\|}\right)[Z, \overset{r}{\Lambda}(U \vee (C^\# + Z))]$$

onde $\gamma = \max\limits_{i,j}\{s_{ij} : s_{ij} < \infty\}$

$$S = \bigvee_{k=0}^{\infty} (C^{k^\#} + kZ)$$

<u>Prova</u>

Seja $s_{ij} = \inf\{p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} : (C^p)_{ij} \neq 0\}$

Então $S = [s_{ij}]$ pode ser expresso por

$$S = U \vee (C^\# + Z) \vee (C^{2^\#} + 2Z) \vee \cdots = \bigvee_{k=0}^{\infty} (C^{k^\#} + kZ)$$

Observemos que existe $k_0 < \infty$ tal que

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} (C^{k^\#} + kZ) = \bigvee_{k=0}^{k_0} (C^{k^\#} + kZ).$$

Se $s_{ij} = \infty$ teremos

$$|(I-hC)^{-1}|_{ij} = 0 = h^{s_{ij}}$$

Se $s_{ij} < \infty$ podemos escrever

$$|(I-hC)^{-1}|_{ij} \leq h^{s_{ij}} |C^{s_{ij}}|_{ij} + h^{s_{ij}+1} |C^{s_{ij}+1}|_{ij} + \cdots \leq$$

$$\leq h^{s_{ij}} \|C\|^{s_{ij}} (1 + h\|C\| + h^2\|C\|^2 + \cdots) =$$

$$= \frac{\|C\|^{s_{ij}}}{1 - h\|C\|} . h^{s_{ij}} \leq \frac{\|C\|^{\gamma}}{1 - h_0\|C\|} . h^{s_{ij}}$$

Portanto $|(I-hC)^{-1}| \leq max\left(1, \frac{\|C\|^{\gamma}}{1-h_0\|C\|}\right) [Z, S]$

Mas

$$S = \bigvee_{k=0}^{\infty} (C^{k^{\#}} + kZ) \geq \bigvee_{k=0}^{\infty} (\bigwedge^{k} C^{\#} + kZ) = \bigvee_{k=0}^{\gamma} \bigwedge^{k} (C^{\#} + Z) =$$

$$= \bigwedge^{\infty} (\cup\, v(C^{\#}+Z)) = \bigwedge^{r} (\cup\, v(C^{\#}+Z)) \qquad (q.e.d.)$$

2.11 Lema

Sejam $A, B \in M_r(\mathbb{R})$ e $\|A^{\nu}\| \leq M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Então

$$\|(A+hB)^{\nu}\| \leq M e^{\nu h M \|B\|}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Prova

$(A+hB)^{\nu}$ pode ser desenvolvido numa soma de 2^{ν} parcelas onde cada parcela é produto de ν fatores. O número de parcelas com s fatores (hB) e $\nu - s$ fatores (A) é igual a $\binom{\nu}{s}$, $\nu = 0, 1, \ldots r$.

Essas parcelas contem no maximo $(s+1)$ grupos de fatores consecutivos iguais a A.

Portanto

$$\| (A+hB)^{\nu} \| \leq \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} M^{s+1} (h \|B\|)^{s} =$$

$$= M \sum_{s=0}^{\nu} \binom{s}{\nu} (h\, M \|B\|)^{s} = M(1+hM\|B\|)^{\nu} \leq M e^{\nu h M \|B\|}$$

(q.e.d.)

2.12 <u>Definição</u>

Sejam $A \in M_q(\mathbb{R})$, $B \in M_s(\mathbb{R})$.

Definimos $A \otimes B \in M_{qs}(\mathbb{R})$ por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1q}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2q}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{q1}B & A_{q2}B & \cdots & A_{qq}B \end{bmatrix}$$

2.13 <u>Lema</u>

Sejam $\beta, \varepsilon_\nu \in \mathbb{R}^r$, $\nu = 1,2,\ldots m$, $T \in M_r(\mathbb{R})$,
$\beta \geq 0$, $\varepsilon_\nu \geq 0$, $\nu = 0,1,\ldots n$, $T \geq 0$.

Se

$$\varepsilon_\nu \leq \beta + T \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \varepsilon_\mu$$

então

$$\varepsilon_\nu \leq (I+T)^{\nu} \beta$$

<u>Prova</u>

Pode ser feita por indução.

§3 - Critério de (Γ', Γ)-estabilidade

3.1 Notações

Na proposição 3.2 a seguir empregaremos as seguintes notações

i) Seja $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$. Então $\bar{f} : \mathbb{R}^{qs} \to \mathbb{R}^{qs}$ será definida por

$$\bar{f}(y) = \begin{bmatrix} f(y^1) \\ f(y^2) \\ \vdots \\ f(y^q) \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad y = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^q \end{bmatrix}, \quad y^j \in \mathbb{R}^s$$

ii) Seja $y \in \mathbb{R}^{mqs}$ onde

$$y = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}, \quad y^i \in \mathbb{R}^{qs} \quad \text{e} \quad y^i = \begin{bmatrix} y^{i1} \\ y^{i2} \\ \vdots \\ y^{iq} \end{bmatrix}, \quad y^{ij} \in \mathbb{R}^s.$$

Indicaremos por $|y|$ o vetor de $\mathbb{R}^{mq}$ definido por

$$|y| = \begin{bmatrix} |y^1| \\ |y^2| \\ \vdots \\ |y^m| \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad |y^i| = \begin{bmatrix} \|y^{i1}\| \\ \|y^{i2}\| \\ \vdots \\ \|y^{iq}\| \end{bmatrix}$$

Se $A \in M_{mqs}(\mathbb{R})$, definimos $|A|$ analogamente.

3.2 Proposição

Seja $\mathcal{M}$ como no §1, com $k=1$,

$E_n = \mathcal{F}(G_n, \mathbb{R}^{mqs}) = E_n^0$ e

$$(F_n\eta)^i_\nu = \begin{cases} \eta^i(0) - S^i_n(z_0) , & \nu = 0 \\ \dfrac{\eta^i_\nu - \sum_{j=1}^{m} (A_{ij} \otimes I)\, \eta^j_{\nu-1}}{h} - \sum_{j=1}^{m} (B_{ij} \otimes I)\, \bar{f}(\eta^j_{\nu-1}) - \\ \quad - \sum_{j=1}^{m} (C_{ij} \otimes I)\, \bar{f}(\eta^j_\nu) , & \nu = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots m$

onde $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s)$ tem constante L, $\dot{f} \in C^1$, $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in M_q(\mathbb{R})$, $I \in M_s(\mathbb{R})$.

Se $\|A^\nu\| \le S$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{M}(P)$ e' (Γ', Γ)-estavel, sendo

$$\Gamma' = \bigwedge^m [\, U \vee (\Gamma_A \wedge \Gamma_C \wedge \widetilde{H^{\#}})] \wedge \Gamma_A$$

$$\Gamma = \Gamma' \wedge \Gamma_C$$

onde $H = |C|\,|A| + |B|$

$$\Gamma_A = \bigwedge^m (U \vee \widetilde{A^{\#}}) , \quad \Gamma_C = \bigwedge^m [\, U \vee (\widetilde{C^{\#}} + Z)]$$

Prova

Podemos escrever $f(\hat{\eta}^{jl}_\nu) - f(\tilde{\eta}^{jl}_\nu) = K^{jl}_\nu [\hat{\eta}^{jl}_\nu - \tilde{\eta}^{jl}_\nu]$

onde $\tilde{\eta}, \hat{\eta} \in E_n$ e $K^{jl}_\nu : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ e' a aplicação linear definida por

$$K_\nu^{j\ell} = \int_0^1 f'\left(\tilde{\eta}_\nu^{j\ell} + t(\hat{\eta}_\nu^{j\ell} - \tilde{\eta}_\nu^{j\ell})\right) dt$$

É fácil verificar que $\| K_\nu^{j\ell} \| \leq L$.

Seja $K_\nu \in M_{mqs}(\mathbb{R})$ a matriz

$$K_\nu = \begin{bmatrix} (K_\nu)^1 & & & \\ & (K_\nu)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (K_\nu)^m \end{bmatrix}, \text{ onde } (K_\nu)^i \in M_{qs}(\mathbb{R}) \text{ é}$$

a matriz $$(K_\nu)^i = \begin{bmatrix} K_\nu^{i1} & & & \\ & K_\nu^{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_\nu^{iq} \end{bmatrix}.$$

Temos $|K_\nu| \leq L \cdot I$ onde $I \in M_{mq}(\mathbb{R})$ é o identidade.
Por subtração obtemos:

$$\hat{\eta}_\nu^i - \tilde{\eta}_\nu^i = \sum_{j=1}^m (A_{ij} \otimes I)(\hat{\eta}_{\nu-1}^j - \tilde{\eta}_{\nu-1}^j) +$$

$$+ h \sum_{j=1}^m (B_{ij} \otimes I)\left[\bar{f}(\hat{\eta}_{\nu-1}^j) - \bar{f}(\tilde{\eta}_{\nu-1}^j)\right] +$$

$$+ h \sum_{j=1}^m (C_{ij} \otimes I)\left[\bar{f}(\hat{\eta}_\nu^j) - \bar{f}(\tilde{\eta}_\nu^j)\right] + h\left[(F_n\hat{\eta})_\nu^i - (F_n\tilde{\eta})_\nu^i\right]$$

Substituindo $\bar{f}(\hat{\eta}^j_{v-1}) - \bar{f}(\tilde{\eta}^j_{v-1}) = K^j_{v-1}(\hat{\eta}^j_{v-1} - \tilde{\eta}^j_{v-1})$

e $\bar{f}(\hat{\eta}^j_v) - \bar{f}(\tilde{\eta}_v) = K^j_v(\hat{\eta}^j_v - \tilde{\eta}^j_v)$

obtemos:

$$\hat{\eta}_v - \tilde{\eta}_v = (A\otimes I)(\hat{\eta}_{v-1} - \tilde{\eta}_{v-1}) + h(B\otimes I)K_{v-1}(\hat{\eta}_{v-1} - \tilde{\eta}_{v-1}) +$$

$$+ h(C\otimes I)K_v(\hat{\eta}_v - \tilde{\eta}_v) + h[(F_n\hat{\eta})_v - (F_n\tilde{\eta})_v].$$

donde

$$(I - h(C\otimes I)K_v)(\hat{\eta}_v - \tilde{\eta}_v) =$$

$$= [A\otimes I + h(B\otimes I)K_{v-1}](\hat{\eta}_{v-1} - \tilde{\eta}_{v-1}) + h[(F_n\hat{\eta})_v - (F_n\tilde{\eta})_v]$$

Para $h \le h_0$, $h_0 L \|C\| < 1$, existe a inversa

$$(I - h(C\otimes I)K_v)^{-1}.$$

Teremos:

$$\hat{\eta}_v - \tilde{\eta}_v = (I - h(C\otimes I)K_v)^{-1}[A\otimes I + h(B\otimes I)K_{v-1}](\hat{\eta}_{v-1} - \tilde{\eta}_{v-1}) +$$

$$+ (I - h(C\otimes I)K_v)^{-1}[(F_n\hat{\eta})_v - (F_n\tilde{\eta})_v]$$

Usando a identidade:

$$(I - h(C\otimes I)K_v)^{-1}[A\otimes I + h(B\otimes I)K_{v-1}] =$$

$$= A\otimes I + h(I - h(C\otimes I)K_v)^{-1}[(C\otimes I)K_v(A\otimes I) + (B\otimes I)K_{v-1}]$$

obtemos

$$\hat{\eta}_\nu - \tilde{\eta}_\nu = (A\otimes I)(\hat{\eta}_{\nu-1} - \tilde{\eta}_{\nu-1}) +$$

$$+ h(I - h(C\otimes I)K_\nu)^{-1}[(C\otimes I)K_\nu(A\otimes I) + (B\otimes I)K_{\nu-1}](\hat{\eta}_{\nu-1} - \tilde{\eta}_{\nu-1}) +$$

$$+ h(I - h(C\otimes I)K_\nu)^{-1}[(F_n\hat{\eta})_\nu - (F_n\tilde{\eta})_\nu]$$

Por aplicações sucessivas desta igualdade, resulta

$$\hat{\eta}_\nu - \tilde{\eta}_\nu = (A\otimes I)^\nu(\hat{\eta}_0 - \tilde{\eta}_0) +$$

$$+ h\sum_{\mu=1}^{\nu}(A\otimes I)^{\nu-\mu}(I - h(C\otimes I)K_\mu)^{-1}[(C\otimes I)K_\mu(A\otimes I) + (B\otimes I)K_{\mu-1}](\hat{\eta}_{\mu-1} - \tilde{\eta}_{\mu-1}) +$$

$$+ h\sum_{\mu=1}^{\nu}(A\otimes I)^{\nu-\mu}(I - h(C\otimes I)K_\mu)^{-1}[(F_n\hat{\eta})_\mu - (F_n\tilde{\eta})_\mu]$$

Seja $\varepsilon_\nu = |\hat{\eta}_\nu - \tilde{\eta}_\nu|$ e $\delta_\nu = |(F_n\hat{\eta})_\nu - (F_n\tilde{\eta})_\nu|$. Então:

$$\varepsilon_\nu \leq |A^\nu|\,\varepsilon_0 + h\sum_{\mu=1}^{\nu}|A^{\nu-\mu}|\,(I - hL|C|)^{-1}\delta_\mu +$$

$$+ h\sum_{\mu=1}^{\nu}|A^{\nu-\mu}|\,(I - hL|C|)^{-1}(|C||A| + |B|)\,\varepsilon_{\mu-1}$$

Considerando que:

$$|A^\nu| = [\,|A^\nu|, A^{\nu\#}] \leq \|A^\nu\|\,[Z, A^{\nu\#}] \leq$$

$$\leq \|A^\nu\|\,[Z, \overset{\nu}{\wedge} A^{\#}] \leq S\,[Z, \overset{mq}{\wedge}(U \vee A^{\#})]\ ,$$

$$|C||A| + |B| = H = [H, H^{\#}] \leq \|H\|\,[Z, H^{\#}]\ ,$$

e $\quad (I - hL|C|)^{-1} \leq \text{const}\, [Z, R]$ $\quad$ onde

$$R = \overset{mq}{\Lambda} [U \vee (C^{\#} + Z)] \,, \quad (\text{pelo lema } 2.10) \,,$$

resulta:

$$\mathcal{E}_{\nu} \leq \text{const}\, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#})] \, (\mathcal{E}_0 + [Z, R]\, h \sum_{\mu=1}^{n} \delta_{\mu}) +$$

$$+ h \,\text{const}\, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#}) \wedge R \wedge H^{\#}] \sum_{\mu=1}^{\nu} \mathcal{E}_{\mu-1}$$

Aplicando o lema 2.13 com

$$\beta = \text{const}\, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#})] \, (\mathcal{E}_0 + [Z, R]\, h \sum_{\mu=1}^{n} \delta_{\mu})$$

e $\quad T = h \,\text{const}\, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#}) \wedge R \wedge H^{\#}]$

obtemos:

$$\mathcal{E}_{\nu} \leq (I + h \,\text{const}\, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#}) \wedge R \wedge H^{\#}])^{\nu} \, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#})] \,\cdot$$

$$\cdot \, (\mathcal{E}_0 + [Z, R]\, h \sum_{\mu=1}^{n} \delta_{\mu})$$

$$\mathcal{E}_{\nu} \leq [(I + h \,\text{const}\, Z)^{\nu}, \overset{\vee}{\Lambda} (U \vee (\overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#}) \wedge R \wedge H^{\#}))] \,\cdot$$

$$\cdot \, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#})] \, (\mathcal{E}_0 + [Z, R]\, h \sum_{\mu=1}^{n} \delta_{\mu})$$

$$\mathcal{E}_{\nu} \leq \| (I + h \,\text{const}\, Z)^{\nu} \| \,\text{const} \,\cdot$$

$$\cdot \, [Z, \overset{mq}{\Lambda} (U \vee (\overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#}) \wedge R \wedge H^{\#})) \wedge (\overset{mq}{\Lambda} (U \vee A^{\#}))] \,\cdot$$

$$\cdot \, (\mathcal{E}_0 + [Z, R]\, h \sum_{\mu=1}^{n} \delta_{\mu})$$

Como $\nu h \leq 1$, temos pelo lema 2.11

$$\| (I + h\,\mathrm{const}\, Z)^{\nu} \| \leq \mathrm{const}$$

Seja $G = \overset{mq}{\wedge} (\mho \vee (\overset{mq}{\wedge}(\mho \vee A^{\#}) \wedge R \wedge H^{\#})) \wedge (\overset{mq}{\wedge}(\mho \vee A^{\#}))$

Teremos:

$$\varepsilon_{\nu} \leq \mathrm{const} \left\{ [Z,G]\, \varepsilon_0 + [Z, G \wedge R]\, h \sum_{\mu=1}^{n} \delta_{\mu} \right\}$$

$$\varepsilon_{\nu}^{i} \leq \mathrm{const} \sum_{j=1}^{m} \left\{ [Z,G]_{ij}\, \varepsilon_0^{j} + [Z, G \wedge R]_{ij}\, h \sum_{\mu=1}^{n} \delta_{\mu}^{j} \right\}$$

$$\| \varepsilon_{\nu}^{i} \| \leq \mathrm{const} \sum_{j=1}^{m} \left\{ h^{\widetilde{G}_{ij}} \| \varepsilon_0^{j} \| + h^{\widetilde{(G \wedge R)}_{ij}} \left(h \sum_{\mu=1}^{n} \| \delta_{\mu}^{j} \| \right) \right\}$$

Mas

$$\widetilde{G} \geq \overset{mq}{\wedge} (\mho \vee (\overset{mq}{\wedge}(\mho \vee \widetilde{A^{\#}}) \wedge \widetilde{R} \wedge \widetilde{H^{\#}})) \wedge (\overset{mq}{\wedge}(\mho \vee \widetilde{A^{\#}})) =$$

$$= \overset{m}{\wedge} (\mho \vee (\overset{m}{\wedge}(\mho \vee \widetilde{A^{\#}}) \wedge \widetilde{R} \wedge \widetilde{H^{\#}})) \wedge (\overset{m}{\wedge}(\mho \vee \widetilde{A^{\#}})).$$

$$\widetilde{R} \geq \overset{mq}{\wedge} (\mho \vee (\widetilde{C^{\#}} + Z)) = \overset{m}{\wedge} (\mho \vee (\widetilde{C^{\#}} + Z)) = \Gamma_C$$

Portanto

$$\widetilde{G} \geq \overset{m}{\wedge} (\mho \vee (\Gamma_A \wedge \Gamma_C \wedge \widetilde{H^{\#}})) \wedge \Gamma_C = \Gamma'$$

$$\widetilde{G \wedge R} \geq \widetilde{G} \wedge \widetilde{R} \geq \Gamma' \wedge \Gamma_C = \Gamma$$

Logo

$$\| \varepsilon_v^i \| \leq \text{const} \sum_{j=1}^{m} \left\{ h^{\Gamma'_{ij}} \| \varepsilon_0^j \| + h^{\Gamma_{ij}} \left(h \sum_{\mu=1}^{n} \| \delta_\mu^j \| \right) \right\}$$

Como

$$\| \varepsilon_v^i \| = \| \hat{\eta}_v^i - \tilde{\eta}_v^i \|$$

e $\| \delta_\mu^j \| = \| (F_n \hat{\eta})_\mu - (F_n \tilde{\eta})_\mu \|$, temos a tese

(q.e.d.).

3.3 Exemplo

Num MPP preditor-corretor, $\varphi_n(F) = G_n$ é definido por

$$(G_n \gamma)(t_v) =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma^i(t_v) - s^i_{mv}(z_0) \\ i = 1,2,\dots m \end{bmatrix} , \quad v = 0,1,\dots k-1 \\[2ex] \begin{bmatrix} \dfrac{\hat{\alpha}_k \gamma_v^1 + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j \gamma^m_{v-k+j}}{h} - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(\gamma^m_{v-k+j}) \\[2ex] \dfrac{\alpha_k \gamma_v^i + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \gamma^m_{v-k+j}}{h} - \beta_k f(\gamma_v^{i-1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(\gamma^m_{v-k+j}) \\[1ex] i = 2,3,\dots m \end{bmatrix} \\[2ex] \qquad v = k, k+1, \dots n \end{cases}$$

Consideremos o MPP preditor-corretor cujo procedimento preditor é caracterizado por

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 & \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 \\ \hat{\beta}_0 & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{5}{12} & -\frac{16}{12} & \frac{23}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

e cujo procedimento corretor que vamos repetir duas vezes é caracterizado por

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{19}{24} & \frac{9}{24} \end{bmatrix}$$

Temos $k = 3$, $m = 3$.

Representando com indice superior o estagio e com inferior a posição na malha, teremos:

$$\gamma^1_{v+2} = \gamma^3_{v+1} + \frac{h}{12}\left[5f(\gamma^3_{v-1}) - 16f(\gamma^3_v) + 23f(\gamma^3_{v+1})\right] + h\,[G_n\gamma]^1_{v+2}$$

$$\gamma^2_{v+2} = \gamma^3_{v+1} + \frac{h}{24}\left[f(\gamma^3_{v-1}) - 5f(\gamma^3_v) + 19f(\gamma^3_{v+1}) + 9f(\gamma^1_{v+2})\right] + h\,[G_n\gamma]^2_{v+2}$$

$$\gamma^3_{v+2} = \gamma^3_{v+1} + \frac{h}{24}\left[f(\gamma^3_{v-1}) - 5f(\gamma^3_v) + 19f(\gamma^3_{v+1}) + 9f(\gamma^2_{v+2})\right] + h\,[G_n\gamma]^3_{v+2}$$

Os valores de $S^1_{mv}(z_0)$ e $S^2_{mv}(z_0)$ para $v = 0, 1, 2$ são irrelevantes e serão supostos nulos.
Podemos escrever em forma matricial.

$$
\begin{bmatrix} \gamma^1_{\nu} \\ \gamma^1_{\nu+1} \\ \gamma^1_{\nu+2} \\ \gamma^2_{\nu} \\ \gamma^2_{\nu+1} \\ \gamma^2_{\nu+2} \\ \gamma^3_{\nu} \\ \gamma^3_{\nu+1} \\ \gamma^3_{\nu+2} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & I & & & & & & & \\
 & 0 & I & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & I \\
\hline
 & & & 0 & I & & & & \\
 & & & & 0 & I & & & \\
 & & & & & 0 & & & I \\
\hline
 & & & & & & 0 & I & \\
 & & & & & & & 0 & I \\
 & & & & & & & & I
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} \gamma^1_{\nu-1} \\ \gamma^1_{\nu} \\ \gamma^1_{\nu+1} \\ \gamma^2_{\nu-1} \\ \gamma^2_{\nu} \\ \gamma^2_{\nu+1} \\ \gamma^3_{\nu-1} \\ \gamma^3_{\nu} \\ \gamma^3_{\nu+1} \end{bmatrix}
+
$$

$$
+\frac{h}{24}
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 10I & -32I & 46I \\
\hline
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & I & -5I & 19I \\
\hline
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & I & -5I & 19I
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} f(\gamma^1_{\nu-1}) \\ f(\gamma^1_{\nu}) \\ f(\gamma^1_{\nu+1}) \\ f(\gamma^2_{\nu-1}) \\ f(\gamma^2_{\nu}) \\ f(\gamma^2_{\nu+1}) \\ f(\gamma^3_{\nu-1}) \\ f(\gamma^3_{\nu}) \\ f(\gamma^3_{\nu+1}) \end{bmatrix}
+
$$

$$
+\frac{h}{24}
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & 9I & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & 9I & & &
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} f(\gamma^1_{\nu}) \\ f(\gamma^1_{\nu+1}) \\ f(\gamma^1_{\nu+2}) \\ f(\gamma^2_{\nu}) \\ f(\gamma^2_{\nu+1}) \\ f(\gamma^2_{\nu+2}) \\ f(\gamma^3_{\nu}) \\ f(\gamma^3_{\nu+1}) \\ f(\gamma^3_{\nu+2}) \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (G_n\gamma)^1_{\nu+2} \\ 0 \\ 0 \\ (G_n\gamma)^2_{\nu+2} \\ 0 \\ 0 \\ (G_n\gamma)^3_{\nu+2} \end{bmatrix}
$$

$$\left[\begin{array}{c} \gamma_0^1 \\ \gamma_1^1 \\ \gamma_2^1 \\ \hline \gamma_0^2 \\ \gamma_1^2 \\ \gamma_2^2 \\ \hline \gamma_0^3 \\ \gamma_1^3 \\ \gamma_2^3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline s_{n0}^3(z_0) \\ s_{n1}^3(z_0) \\ s_{n2}^3(z_0) \end{array}\right]$$

Chamando

$$\eta_v^i = \left[\begin{array}{c} \gamma_v^i \\ \gamma_{v+1}^i \\ \gamma_{v+2}^i \end{array}\right] \quad e \quad (F_n\eta)_v = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (G_n\gamma)_v^1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ (G_n\gamma)_v^2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ (G_n\gamma)_v^3 \end{array}\right], \quad \text{obtemos:}$$

$$(F_n\eta)_v^i = \begin{cases} \eta^i(0) - s_n^i(z_0), & v = 0 \\[2ex] \dfrac{\eta_v^i - \sum\limits_{j=1}^{3} (A_{ij} \otimes I)\, \eta_{v-1}^j}{h} - \sum\limits_{j=1}^{3} (B_{ij} \otimes I)\, \bar{f}(\eta_{v-1}^j) - \\[2ex] \quad - \sum\limits_{j=1}^{3} (C_{ij} \otimes I)\, \bar{f}(\eta_v^j) \\ \qquad\qquad v = 1, 2, \ldots n' \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$

onde $n' = n-2$,

$$s^1_n(z_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s^2_n(z_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s^3_n(z_0) = \begin{bmatrix} s^3_{n0}(z_0) \\ s^3_{n1}(z_0) \\ s^3_{n2}(z_0) \end{bmatrix},$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & 1 \\ \hline & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 0 & & & 1 \\ \hline & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{array}\right],$$

$$B = \frac{1}{24}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & 10 & -32 & 46 \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & -5 & 19 \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & -5 & 19 \end{array}\right], \quad C = \frac{1}{24}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & 9 & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & 9 & & & \end{array}\right]$$

Como os auto-valores de A são nulos com exceção de um que vale 1, existe $S>0$ tal q

$$\|A^\nu\| \leq S \quad , \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Calculemos Γ' e Γ aplicando a proposição 3.2 com $m=3$, $q=k=3$.

$$H = |C||A| + |B| = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} & & & 10 & 32 & 46 \\ & & & 1 & 5 & 28 \\ & & & 1 & 5 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{\#} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}^{\#} = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}^{\#} = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_A = \overset{3}{\Lambda}(U . \vee \tilde{A}^{\#}) = \overset{3}{\Lambda}\begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_C = \overset{3}{\Lambda}\left[U \vee (\tilde{C}^{\#} + Z)\right] = \overset{3}{\Lambda}\begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & \infty \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_A \wedge \Gamma_C \wedge \tilde{H}^{\#} = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma' = \overset{3}{\Lambda}\left[U \vee (\Gamma_A \wedge \Gamma_C \wedge \tilde{H}^{\#})\right] \wedge \Gamma_A =$$

$$= \overset{3}{\Lambda}\begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \Gamma' \wedge \Gamma_c = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 0 \\ \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & \infty \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\max_{0 \le \nu \le n-2} \| \hat{\eta}^3(t_\nu) - \tilde{\eta}^3(t_\nu) \| \le$$

$$\le \text{const} \Big\{ \| \hat{\eta}^3(0) - \tilde{\eta}^3(0) \| + h^2 \Big(h \sum_{\mu=1}^{n-2} \| (F_n \hat{\eta})^1_\mu - (F_n \tilde{\eta})^1_\mu \| \Big) +$$

$$+ h \Big(h \sum_{\mu=1}^{n-2} \| (F_n \hat{\eta})^2_\mu - (F_n \tilde{\eta})^2_\mu \| \Big) +$$

$$+ \Big(h \sum_{\mu=1}^{n-2} \| (F_n \hat{\eta})^3_\mu - (F_n \tilde{\eta})^3_\mu \| \Big) \Big\}$$

Voltando as variáveis originais temos:

$$\max_{0 \le \nu \le n} \| \hat{\gamma}^3(t_\nu) - \tilde{\gamma}^3(t_\nu) \| \le$$

$$\le \text{const} \Big\{ \max_{0 \le \nu \le 2} \| \hat{\gamma}^3(t_\nu) - \tilde{\gamma}^3(t_\nu) \| + h^2 \Big(h \sum_{\mu=3}^{n} \| (G_n \hat{\gamma})^1_\mu - (G_n \tilde{\gamma})^1_\mu \| \Big) +$$

$$+ h \Big(h \sum_{\mu=3}^{n} \| (G_n \hat{\gamma})^2_\mu - (G_n \tilde{\gamma})^2_\mu \| \Big) +$$

$$+ \Big(h \sum_{\mu=3}^{n} \| (G_n \hat{\gamma})^3_\mu - (G_n \tilde{\gamma})^3_\mu \| \Big) \Big\}$$

3.4 <u>Observação</u>

Consideremos um método preditor-corretor que utiliza $(m-1)$ correções com corretores que podem ser distintos entre si.
Seja A a matriz obtida quando se reduz o metodo ao tipo descrito no enunciado da proposição 3.2, análogamente ao que foi feito no exemplo 3.3. Prova-se que existe $S>0$ tal que $\|A^\nu\| \leq S$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ se e só se o <u>último</u> corretor satisfaz a condição de Dahlquist.

3.5 <u>Proposição</u>

Seja $\mathcal{M}$ um método preditor-corretor que utiliza $(m-1)$ corretores. Se o último corretor satisfaz a condição de Dahlquist então $\mathcal{M}(P)$ é (Γ', Γ)-estável onde Γ' e Γ são matrizes $m \times m$ dadas por

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \cdots & \infty & 0 \\ \infty & 0 & \infty & \cdots & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 0 & \cdots & \infty & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & \infty & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & (m-2) & (m-3) & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & (m-3) & \cdots & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m-2) & (m-3) & (m-4) & \cdots & 0 & 0 \\ (m-1) & (m-2) & (m-3) & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Prova</u>

Tome-se como modelo o exemplo 3.3 e considere-se o resultado enunciado na observação 3.4.

3.6 Teorema

Seja $\mathcal{M}$ um MPP preditor-corretor que utiliza $(m-1)$ corretores e cujo último corretor satisfaz a condição de Dahlquist.

Se o procedimento de partida tem ordem de consistência v, o preditor tem ordem de consistencia p_1 e os corretores ordens p_k, $k = 2, 3, \ldots m$, então o último estágio de $\mathcal{M}$ tem ordem de convergencia pc, onde

$$pc = \min \{ v, \min_{1 \leq k \leq m} (p_k + m - k) \}$$

Prova

Corolário da proposição 3.5.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.° 20.570 (Agência Iguatemi) - Tel. 211-0011
SÃO PAULO — BRASIL

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-7701 - Ivan de Queiroz Barros
On equivalence and reducibility of Generating Matrices of RK-Procedures - Agosto 1977

RT-MAP-7702 - V.W.Setzer
A Note on a Recursive Top-Down Analizer of N.Wirth - Dezembro 1977

RT-MAP-7703 - Ivan de Queiroz Barros
Introdução a Aproximação Ótima
Dezembro 1977

RT-MAP-7704 - V.W.Setzer, M.M.Sanches
A linguagem "LEAL" para Ensino básico de Computação - Dezembro 1977

RT-MAP-7801 - Ivan de Queiroz Barros
Proof of two Lemmas of interest in connection with discretization of Ordinary Differential Equations
Janeiro 1978

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.º 20.570 (Agência Iguatemi) - Tel. 211-0011
SÃO PAULO — BRASIL

RT-MAP-7802 - Silvio Ursic, Cyro Patarra
Exact solution of Systems of Linear Equations with Iterative Methods
Fevereiro - 1978

RT-MAP-7803 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypohamiltonian Digraphs
Março 1978

RT-MAP-7804 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypotraceable Digraphs
Maio 1978

RT-MAP-7805 - W.Hesse, V.W.Setzer
The Line-Justifier: an example of program development by transformations
Junho 1978

RT-MAP-7806 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap.I - Tópicos Introdutórios
Cap.II - Discretização
Julho 1978

RT-MAP-7807 - Ivan de Queiroz Barros
(Γ',Γ)-Estabilidade e Métodos Preditores-Corretores
Setembro 1978

RT-MAP-7808 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Cap. III - Métodos de passo progressivo para Eq. Dif. Ord. com condições iniciais
Setembro 1978

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.° 20.570 (Agência Iguatemi) - Tel. 211-0011
SÃO PAULO — BRASIL

RT-MAP-7809 - V.W.Setzer
Program development by transformations applied to relational Data-Base queries
Novembro 1978

RT-MAP-7810 - Nguiffo B. Boyom, Paulo Boulos
Homogeneity of Cartan-Killing spheres and singularities of vector fields
Novembro 1978

RT-MAP-7811 - D.T.Fernandes e C. Patarra
Sistemas Lineares Esparsos, um Método Exato de Solução
Novembro 1978

RT-MAP-7812 - V.W.Setzer e G.Bressan
Desenvolvimento de Programas por Transformações: uma Comparação entre dois Métodos
Novembro 1978

RT-MAP-7813 - Ivan de Queiroz Barros
Variação do Passo na Discretização de Eq.Dif. Ord. com Condições Iniciais
Novembro 1978

RT-MAP-7814 - Martin Grötschel e Yoshiko Wakabayashi
On the Complexity of the Monotone Asymmetric Travelling Salesman Polytope I: HIPOHAMILTONIAN FACETS
Dezembro 1978

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"
Caixa Postal n.° 20.570 (Agência Iguatemi) - Tel. 211-0011

SÃO PAULO — BRASIL

RT-MAP-7815 - Ana F. Humes e E. I. Jury
<u>Stability of Multidimensional Discrete Systems: State-Space Representation Approach</u>
Dezembro 1978

RT-MAP-7901 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
<u>On the complexity of the Monotone Asymmetric Travelling Salesman Polytope II: HYPOTTRACEABLE FACETS</u>
Fevereiro 1979