

FUNÇÃO DERIVÁVEL NÃO MONÓTONA EM NENHUM INTERVALO DA RETA

RICARDO UEDA KARPISCHEK

ORIENTADORAS: VERA HELENA G. DE SOUZA

IRACEMA MARTIN BUND

Este é um resumo informal do artigo "Everywhere differentiable, nowhere monotone, function" de Y. Katznelson e K. Stromberg [1], que apresenta demonstrações simples para as afirmações aqui feitas.

Mostraremos que existe uma função $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável que, para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, não é monótona em I , o que equivale, com a hipótese de H ser derivável, a existirem $a, b \in I$ tais que $H'(a) > 0$ e $H'(b) < 0$.

Admitamos por um instante o seguinte

TEOREMA: Sejam $\{\alpha_i, i = 1, 2, \dots\}$, $\{\beta_i, i = 1, 2, \dots\}$ subconjuntos enumeráveis e disjuntos de $\mathbb{R}$. Então existe $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que $F'(\alpha_i) = 1$ e $F'(\beta_i) < 1$ qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$.

Uma consequência imediata é a seguinte. Tomemos $\{\alpha_i; i = 1, 2, \dots\}$, $\{\beta_i; i = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ enumeráveis, disjuntos e densos em $\mathbb{R}$. Sejam $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis tais que $F'(\alpha_i) = 1$, $F'(\beta_i) < 1$, $G'(\alpha_i) < 1$, $G'(\beta_i) = 1$ para todo i . Seja $H = F - G$. Claramente H é derivável. Além disso, para todo i tem-se $H'(\alpha_i) > 0$ e $H'(\beta_i) < 0$. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então existem $j, k \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha_j \in I$ e $\beta_k \in I$, logo H não é monótona em I .

Daremos agora indicações da demonstração do teorema acima. Podemos construir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que admita primitiva e que satisfaça $f(\alpha_1) = 1$ e $f(\beta_1) < 1$ para todo i , do seguinte modo.

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ ponha

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n c_{n,i} \phi(\lambda_{n,i}(x - \alpha_i)) \quad \text{onde } c_{n,i}, \lambda_{n,i} > 0 \text{ e}$$

$$\phi(x) = (1 + |x|)^{-1/2}.$$

$$\text{Coloquemos ainda } F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

Pode-se provar que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para f , então $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ converge para F , com F derivável e $F' = f$.

Consequentemente, se formos capazes de exibir $f_1, f_2, \dots$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convirja para f , com $f(\alpha_1) = 1$ e $f(\beta_1) < 1 \forall i$, teremos provado o teorema. Isso pode ser feito por um processo indutivo que, para cada N , nos garanta

$$(i) \quad \sum_{n=1}^N f_n(\alpha_j) > 1 - 1/n, \quad 1 \leq j \leq N; \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^N f_n(x) < 1 - 1/(n+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad f_N(\beta_j) < (1/2N2^N), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Admitindo que (f_n) satisfaça (i), (ii), (iii), segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge ($0 < \sum_{n=1}^N f_n(x) < 1 \forall N, \forall x$) para uma f que admite primitiva F com

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t) dt.$$

Além disso, para todo i , valem as relações

$$F'(\alpha_1) = f(\alpha_1) = \lim_N \sum_{n=1}^N f_n(\alpha_1) = 1$$

$$F'(\beta_1) = f(\beta_1) = \sum_{n=1}^{N-1} f_n(\beta_1) + \sum_{m=N}^{\infty} f_m(\beta_1)$$

$$< 1 - 1/N + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2N2^n} < 1 - 1/N - 1/2N = 1 - 1/2N < 1,$$

onde N é escolhido maior do que 1. □

BIBLIOGRAFIA

- [1] Katznelson, Y. e Stromberg, K., AMM, vol.81, nº4 (1974), pp. 349-354.