# XVII ENCONTRO CIENTÍFICO DE PÓS-GRADUANDOS DO IMECC

11 A 14 DE ABRIL DE 2023 | IMECC - UNICAMP

# Boletim digital

## 8.8 Um algoritmo acelerado de primeira ordem aplicado ao problema inverso linear de imagem borrada e ruidosa

Gabriel R. S. Grillo[1], Sandra A. Santos[2], Elias S. H. Neto[3]
[1]Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, Brasil
[2]Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, Brasil
[3]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, Brasil

**Resumo**

Estudam-se métodos numéricos para a minimização de funções compostas, escritas como a soma de dois termos potencialmente não suaves, com a utilização de estratégias de suavização do termo desfavorável ao operador proximal, visando atender as hipóteses de algoritmos acelerados de primeira ordem propostos recentemente. Esse tipo de problema de minimização dá conta de diversos métodos de regularização variacional para solução de problemas inversos lineares, como o problema de *deblur*.
**Palavras-chave**: Minimização irrestrita, suavização, regularização, problema inverso linear.

### Problemas inversos lineares

Considerando $\mathscr{V}$ e $\mathscr{U}$ espaços de Hilbert, um operador linear compacto $T \in \mathrm{BL}(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ e $u \in \mathscr{U}$, determinar $v \in \mathscr{V}$ tal que $Tv = u$ é um problema inverso linear. Esses problemas tipicamente apresentam dependência descontínua da solução com relação aos dados, i.e., de $v$ com relação a $u$ [1, Capítulo 2]. Em geral, é preciso computar $v$ a partir de $u_\delta$, que é uma medição ruidosa de $u$ ($\|u - u_\delta\| \leq \delta$), logo a descontinuidade pode levar a soluções imprecisas mesmo que o nível de ruído $\delta$ seja baixo.

Uma forma de tratar essa descontinuidade envolve estratégias de regularização variacional, em que a solução regularizada é dada pela solução do problema de minimização

$$\min_{v \in \mathscr{V}} \varphi(Tv, u_\delta) + \alpha g(v), \tag{8.12}$$

em que $\varphi(Tv, u_\delta)$ é o termo de fidelidade aos dados, $g(v)$ é o termo regularizador e $\alpha > 0$ é o parâmetro de regularização que controla o balanço entre os dois termos. Como $\mathscr{V}$ e $\mathscr{U}$ tipicamente são espaços de dimensão infinita, discretizamos o problema (8.12) para aplicar métodos computacionais de otimização. Assim, representaremos $v$ por $x \in \mathbb{R}^n$, $u_\delta$ por $y_\delta \in \mathbb{R}^m$ e $T$ por $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

### Métodos de primeira ordem acelerados

Os métodos de primeira ordem são uma alternativa nesse contexto, visto que suas iterações são baratas e possuem baixos requisitos de memória. Essas características são importantes em dimensões altas, que é geralmente o caso ao discretizarmos (8.12). Estratégias de aceleração desses métodos permitem reduzir a quantidade total de iterações, atingindo maior precisão.

Um método dessa categoria é o FISTA [2, Seção 10.7], desenvolvido no escopo de resolução de problemas da forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + h(x), \tag{8.13}$$

em que $f$ é uma função convexa e diferenciável com gradiente Lipschitz contínuo e $h$ é convexa e possivelmente não suave, mas prox-amigável, i.e., o seu operador proximal é facilmente computável.

[1]`g216439@dac.unicamp.br`
[2]`sasantos@unicamp.br`
[3]`elias@icmc.usp.br`

Como uma discretização do problema (8.12) muitas vezes resulta em um problema da forma (8.13), o FISTA é um método utilizado para solução de problemas inversos lineares. Um exemplo é o LASSO, em que $f(x) = \|Ax - y_\delta\|_2^2$ e $h(x) = \alpha\|x\|_1$.

Entretanto, é possível que as escolhas do termo de fidelidade aos dados e do termo regularizador não resultem em funções diferenciáveis ou prox-amigáveis, de forma que uma alternativa é substituir o termo problemático por uma aproximação suave [2, Seção 10.8], que é então incorporado à parcela $f$ em (8.13) e podemos aplicar o FISTA.

## Resultado computacional

Um exemplo para a discussão anterior é o problema $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - y_\delta\|_1 + \alpha\|Qx\|_1$, em que $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortonormal é uma transformação esparsificante. A parcela $\alpha\|Qx\|_1$ é prox-amigável, mas $\|Ax - y_\delta\|_1$ tipicamente não. Como essa parcela também não é suave, a estratégia que consideramos foi substituir esse termo por uma aproximação suave por meio da função de Huber [2, Exemplo 6.59]. O uso do termo $\|Ax - y_\delta\|_1$ é interessante nos casos em que sabemos que o ruído é esparso.

Aplicamos essa estratégia à solução do problema de *deblur* com a imagem teste *cameraman* em que a imagem observada possui um ruído esparso do tipo *salt and pepper* que afeta cerca de 1% dos *pixels*. Nesse caso, $A$ representa o operador de *blur* (filtro gaussiano $9 \times 9$ com desvio padrão 4) e usamos $Q$ como a transformada de Haar de terceiro nível. Implementamos o FISTA com *backtracking* ($s = 1$ e $\eta = 1.2$) [2, p. 291] em Matlab e usamos o parâmetro de suavização $\mu = 1.53\text{e}{-5}$ e de regularização $\alpha = 1\text{e}{-2}$. Abaixo vemos o resultado.

### Referências Bibliográficas

[1] H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Springer, Dordrecht, 1996.

[2] A. Beck, *First-Order Methods in Optimization*, SIAM, Philadelphia, 2017.