

ANÉIS DE GREEN DE REPRESENTAÇÕES INTEIRAS

Alfredo Jones

1. Representações

Uma representação de um grupo finito G é um homomorfismo, $T: G \rightarrow M_n(R)$, de G em um grupo de matrizes n por n sobre um anel R , ou o que é o mesmo, um módulo M sobre o anel de grupo RG , livre sobre R , $M = R^n$.

As representações clássicas são aquelas em que $R = \mathbb{C}$, o corpo dos números complexos.

As representações modulares são aquelas em que $R = k$, um corpo de característica $p \neq 0$ que divide a ordem do grupo G . Suporemos sempre que k é suficientemente grande, por exemplo k algébricamente fechado.

Nas representações inteiras R é o anel dos inteiros de um corpo de números algébricos. Por exemplo $R = \mathbb{Z}$. Também R pode ser um localizado de um anel de inteiros algébricos. Por exemplo R pode ser o anel dos inteiros p -ádicos. Também aqui só é interessante o caso em que p divide a ordem do grupo.

Exemplos de representações inteiras se obtém considerando um corpo de números algébricos K , normal sobre $\mathbb{Q}$ e tomando $G = \text{gal}(K, \mathbb{Q})$. Então G opera sobre o anel R dos inteiros algébricos de K . Escolhendo uma base de R sobre $\mathbb{Z}$ se tem uma representação do grupo de Galois, $T: G \rightarrow M_n(\mathbb{Z})$, onde $n = \dim_{\mathbb{Z}} R$.

Duas representações clássicas são equivalentes se e só se seus caracteres coincidem, onde o caráter da representação T é a função $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\chi(a) = \text{Tr } T(a)$ para todo $a \in G$.

Para as representações modulares os caracteres que interessam são os caracteres de Brauer. O caráter de Brauer de

uma representação modular $T: G \rightarrow M_n(k)$ é uma função ϕ definida nos elementos $a \in G$ cuja ordem m não é divisível pela característica p de k , e com valores complexos. Se $a^m = 1$ então $T(a)^m = I_n$ e o traço de $T(a)$ é soma de raízes da unidade de k de ordem primo com p . Estas raízes podem então levantar-se a raízes da unidade da mesma ordem em C , e assim $\text{tr } T(a) \in k$ levanta-se a $\phi(a) \in \mathbb{C}$.

Mas duas representações modulares com o mesmo carater de Brauer podem não ser equivalentes, de fato os caracteres de Brauer coincidem se e só se as representações tem os mesmos fatores de composição.

Para as representações inteiras os caracteres não são úteis. Os anéis de Green das representações inteiras em certa forma tomam o lugar dos caracteres.

2. Anéis de Green

Definiremos o anel de Green das representações de G sobre R supondo inicialmente que pode ser ou $R = \mathbb{C}$, ou $R = k$, corpo de característica $p \neq 0$, ou R o anel dos inteiros p -ádicos, onde p divide a ordem de G . Na definição indicaremos com $[M]$ a classe de isomorfismo do módulo M .

O anel de Green de RG é o quociente do grupo abeliano livre gerado pelos elementos $[M]$, pelo subgrupo gerado por todos os elementos da forma $[M] - [L] - [N]$, onde $M \cong N \oplus L$. O produto é definido por $[M][N] = [M \otimes_R N]$. (G opera sobre $M \otimes_R N$ na forma $a(m \otimes n) = am \otimes an$).

Este é um anel comutativo com identidade R , que denotaremos $\alpha(RG)$.

Como nos tres casos considerados vale a unicidade da decomposição em indecomponíveis, as classes de isomorfismo dos módulos indecomponíveis formam uma base de $\alpha(RG)$ sobre $\mathbb{Z}$. Pode-se obter uma álgebra sobre C estendendo o anel de coeficientes e considerando $A(RG) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \alpha(RG)$.

O anel de Grothendieck, $G_0(RG)$, das representações de G sobre R é o quociente de $\alpha(RG)$ pelo ideal gerado pelos elementos da forma $[M] - [L] - [N]$ para cada sequência exata $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$. Considera-se também a álgebra de Grothendieck $A^*(RG) = \mathcal{C} \otimes G_0(RG)$.

Consideremos primeiro o caso das representações clássicas. Para cada $\alpha \in G$ define-se um carater da álgebra $A(\mathcal{C}G)$, isto é um homomorfismo de álgebras, $\psi_\alpha: A(\mathcal{C}G) \rightarrow \mathcal{C}$, tomando $\psi_\alpha([M]) = \chi_M(\alpha)$, onde χ_M é o carater da representação de G determinada por M . Esses ψ_α são caracteres que separam elementos diferentes, pois se $M \not\cong M'$ então $\chi_M \neq \chi_{M'}$, de modo que existe $\alpha \in G$ tal que $\psi_\alpha([M]) = \chi_M(\alpha) \neq \chi_{M'}(\alpha) = \psi_\alpha([M'])$. Isto implica que $A(\mathcal{C}G)$ não tem elementos nilpotentes (é semisimples), pois se $[M] - [M'] \neq 0$ em $A(\mathcal{C}G)$, então existe ψ_α tal que $\psi_\alpha([M] - [M']) \neq 0$. Ao mesmo tempo mostra-se assim que $A(\mathcal{C}G)$ é isomorfa com a álgebra dos caracteres de G . De modo que para as representações clássicas o anel de Green coincide com o anel dos caracteres de G .

Consideremos agora o anel de Grothendieck no caso modular. Pela definição de $G_0(kG)$ a imagem em $G_0(kG)$ de um kG -módulo está determinada pelos fatores de composição de M . Daqui resulta que dois kG -módulos tem a mesma imagem em $G_0(kG)$ se e só se coincidem os caracteres de Brauer correspondentes. Assim, como no caso da álgebra $A(\mathcal{C}G)$, os caracteres de Brauer de G determinam caracteres da álgebra $A^*(kG) = \mathcal{C} \otimes G_0(kG)$, que separam elementos diferentes. Com isto mostra-se que $A^*(kG)$ é semisimples para todo grupo finito G . E assim também prova-se que a álgebra $A^*(kG)$ é isomorfa com a álgebra dos caracteres de Brauer de G . Logo não temos nada novo ao estudar $G_0(kG)$.

Sobram então os anéis de Green das representações modulares e os anéis de Green e de Grothendieck das representações inteiras. Os primeiros trabalhos sobre os anéis de Green das representações inteiras e modulares foram dedicados ao problema de semisimplicidade. Mas $A(RG)$ quase nunca é semisimples.

No trabalho em que introduziu estes anéis ([5]), Green provou que se C é um grupo cíclico, $A(kC)$ é semisimples. Depois mostrou-se que se p é ímpar $A(kG)$ é semisimples se e só se o p -Sylow de G é cíclico. Para $p = 2$, $A(kG)$ também é semisimples em alguns casos em que o subgrupo de Sylow é abeliano elementar. Se R é o anel dos inteiros p -ádicos, então $A(RG)$ é semisimples só se o p -Sylow de G é cíclico de ordem p .

Há muitos recursos para estudar a estrutura aditiva do anel de Grothendieck das representações inteiras, e em alguns casos (G cíclico ou p -elementar abeliano) se conhece a estrutura de anel $G_0(RG)$ (ver [4] vol. II). Sabe-se muito menos do anel de Green das representações inteiras.

3. Produtos tensoriais

A dificuldade no estudo dos anéis de Green vem de que em geral não há como determinar $M \otimes N$ dados M e N , isto é, não há como decompor $M \otimes N$ em soma direta de indecomponíveis. Este é o principal motivo para estudar os anéis de Green, estes são estudados para entender os produtos tensoriais, que de fato são mais úteis que os anéis de Green.

Há alguns resultados básicos que ajudam a determinar produtos tensoriais, tanto de representações modulares como de representações inteiras

a. O lema de Schanuel

Vejamos como se aplica em um exemplo. Seja C_p o grupo cíclico de ordem p e R o anel dos inteiros p -ádicos. Os módulos indecomponíveis sobre RC_p são R , $RC_p = \frac{R[X]}{(X^p-1)}$ e $R = \frac{R[X]}{(\phi_p)}$, onde ϕ_p é o polinômio ciclotômico de ordem p , e onde o gerador de C_p opera por multiplicação por X .

Então R é a identidade do anel $A(RC_p)$ e $(RC_p)^2 = pRC_p$

(soma direta de p cópias de ${}^{RC}P$) e $R_1 \cdot {}^{RC}P = (p-1){}^{RC}P$. Estas fórmulas resultam de que produto por projetivo é sempre projetivo, e de que se G é um p -grupo todo projetivo sobre RG é livre.

Para calcular R_1^2 observamos que

$$R_1 \cong (X-1){}^{RC}P \quad \text{e} \quad \frac{{}^{RC}}{(X-1){}^{RC}P} \cong R.$$

Assim se tem uma sequência exata:

$$0 \rightarrow R_1 \rightarrow {}^{RC}P \rightarrow R \rightarrow 0.$$

Fazendo o produto com R_1 se tem outra sequência exata. (Pois o produto tensorial por um módulo livre sobre R preserva a exatidão).

$$\text{I} \quad 0 \rightarrow R_1^2 \rightarrow (p-1){}^{RC}P \rightarrow R_1 \rightarrow 0$$

Por outro lado, $R \cong \phi_p {}^{RC}P$ e ${}^{RC}P / \phi_p {}^{RC}P \cong R_1$, logo é exata:

$$\text{II} \quad 0 \rightarrow R \rightarrow {}^{RC}P \rightarrow R \rightarrow 0$$

Como ${}^{RC}P$ é projetivo, o lema de Schanuel permite deduzir de I e II:

$$R_1^2 + {}^{RC}P = R + (p-1){}^{RC}P,$$

$$\text{logo } R_1^2 = R + (p-2){}^{RC}P.$$

b. O operador de Heller

Para cada módulo M define-se ΩM como o núcleo de uma cobertura projetiva de M . Usando o lema de Schanuel prova-se que:

$$(\Omega M) \otimes N \oplus \text{projetivo} \cong M \otimes \Omega N \oplus \text{projetivo} \cong \Omega(M \otimes N) \oplus \text{projetivo}.$$

Por exemplo, os seguintes são módulos indecomponíveis sobre

$${}^{RC}p^2.$$

$${}^{RC}p^2 = \frac{R[X]}{(X^{p^2}-1)}, \quad R_2 = \frac{R[X]}{(\phi_{p^2})} \cong (X^p-1){}^{RC}p^2$$

e

$${}^{RC}p = {}^{RC}p^2 / (X^p-1){}^{RC}p^2.$$

Assim se tem a sequência exata

$$0 \longrightarrow R_2 \longrightarrow {}^{RC}p^2 \longrightarrow {}^{RC}p \longrightarrow 0$$

onde $\Omega({}^{RC}p) = R_2$. Mostra-se também facilmente que $\Omega(R_2) = {}^{RC}p$.
Daqui:

$$R_2 \cdot {}^{RC}p = \Omega({}^{RC}p^2) = \Omega(p{}^{RC}p) = pR_2.$$

Aplicando outra vez Ω :

$$R_2^2 = p{}^{RC}p + (p-2)p{}^{RC}p^2.$$

c. O teorema de Frobenius

$$N^G \otimes M = (N \otimes M_H)^G,$$

onde H é um subgrupo de G , N é um RH -módulo, $N^G = {}^{RG} \bigotimes_{RH} N$,
 M é um RG -módulo, e M_H é a restrição de M a H .

Por exemplo, considerando o subgrupo C_{p^2} de C_{p^3} se tem,

$${}^{C_{p^3}}R_2 \cong R_3 = \frac{R[X]}{(\phi_{p^3})},$$

$$R_3^2 = {}^{C_{p^3}}R_2 \cdot R_3 = (R_2 \cdot (R_3)_{C_{p^2}}) {}^{C_{p^3}}p^3 = (R_2 \cdot pR_2) {}^{C_{p^3}}p^3 =$$

$$p^2 {}^{RC}p^2 + p^2(p-2){}^{RC}p^3$$

d. O seguinte teorema foi provado por Benson, e logo por Auslander e Carlson por outros métodos (ver [1]).

O módulo trivial R é somando direto do produto de dois indecomponíveis, $M \otimes N$, se e só se $N \cong M^* = \text{Hom}_R(M, R)$ e a função traço: $\text{Tr}: \text{End}_R(M) \rightarrow R$, é um epimorfismo que cinde. Se M é um módulo absolutamente indecomponível (indecomponível por extensões do corpo de frações de R) então M verifica esta última condição se e só se p não divide $\dim_R M$. (Todos os indecomponíveis que mencionaremos aqui são absolutamente indecomponíveis).

Em um sentido a implicação é trivial, pois $M \otimes M^* \cong \text{End}_R(M)$ como módulo sobre RG . Ademais, se p não divide $m = \dim_R M$, então $\text{Tr } I = m$ é inversível em R , logo $\text{Tr}: \text{End}_R M \rightarrow R$ é um epimorfismo, e se $\phi: R \rightarrow \text{End}_R M$ é dada por $\phi(\alpha) = m^{-1}\alpha$, então ϕ cinde Tr .

No outro sentido a demonstração usa as seqüências de Auslander Reiten.

Aplicando a, b, c e certo trabalho artesanal com representações inteiras, pode-se calcular o produto de dois indecomponíveis quaisquer sobre ${}^{RC}p^2$, sendo R o anel dos inteiros p -ádicos ([7]).

No número de indecomponíveis é $4p+1$. Ademais de $R, {}^{RC}p$, $R_1, {}^{RC}p^2$ e R_2 há uma extensão E de R_2 por R , $p-1$ extensões T_i de R_2 por R_1 , $p-2$ extensões Z_i de R_2 por $R \oplus {}^{RH}$, $p-1$ extensões X_i de R_2 por $R \oplus R_1$, e $p-1$ extensões Y_i de R por RH . Por exemplo, se $i < j$ e $i+j \geq p$ (com uma ordenação conveniente)

$$T_i T_j = \sum_{k=1}^{p-j-1} T_{j-i+2k-1} + \sum_{k=1}^{p-j-1} Z_{j-i+2k} + 2(j+i-p+1)(R_2 + {}^{RC}p) + (p^2 - 2i - 3){}^{RC}p^2.$$

Com a lista de todos os produtos, e bastante trabalho, é possível determinar a estrutura da álgebra $A = R \otimes \alpha(RC_{p^2})$. (Neste caso se estende o anel de coeficientes a R para que todo primo diferente de p seja inversível. Não é conveniente estender demais para que o radical seja diferente do radical de Jacobson, que é o que interessa para "conhecer" o anel).

Se $p \neq 2$ então ([8]):

1. O radical de Jacobson de A é

$$J(A) = pA + RC_p A + R_2 A + (Y_1 - X_0)A + (2Y_1 + Y_2)A + (T_1 - R + 2T_0)A.$$

2. $N = (X_0 - X_1)A$ é o ideal dos elementos nilpotentes, e $N^2 = 0$.

3. $A/J(A) \cong GF(p)^6$.

4. Se $L = pA + RC_p A + R_2 A + (Y_1 - X_0)A$, então A/L é soma direta de seis anéis uniseriais, quatro dos quais tem comprimento de Loewy $\frac{p-1}{2}$, e os outros dois comprimento $\frac{p-3}{2}$.

No caso $p = 2$, A é um anel local.

Com este resultado, e com técnicas usuais da teoria de representações, deve ser possível obter informações análogas sobre $\alpha(RG)$ para grupos G com subgrupo de Sylow C_p ou C_{p^2} . Estes são os únicos grupos para os quais $\alpha(RG)$ tem uma base finita.

O exemplo de $\alpha(RC_{p^2})$, assim como outros exemplos conhecidos de anéis de Green de representações modulares, sugerem algumas perguntas e conjecturas a respeito dos elementos nilpotentes do anel de Green. Os exemplos conhecidos de elementos nilpotentes são da forma $M - \Omega M$. No caso em que R é o anel dos inteiros p -ádicos, M é da forma $M = \Omega X$, onde X é de torção sobre R , e ademais KM é livre sobre KG . Com que generalidade valem estas

afirmações ?. Em todos os produtos calculados em [7] os indecomponíveis que aparecem com multiplicidade > 1 , como somandos diretos de um produto de indecomponíveis são sempre relativamente projetivos, com relação ao subgrupo C_p de C_{p^2} .

Referências

- [1] M. Auslander e J. Carlson. *Almost split sequences and group rings*. J. Algebra, a ser publicado.
- [2] D.J. Benson e R.A. Parker. *The Green ring of a finite group*. J. Algebra 87 (1984) 290-331.
- [3] D.J. Benson e J. Carlson. *Nilpotent elements in the Green ring*. J. Algebra, a ser publicado.
- [4] C.W. Curtis e I. Reiner. *Methods of representation theory*. Wiley. I (1981) e II.
- [5] J.A. Green. *The modular representation algebra of a finite group*. Illinois J. Math. 6 (1962) 607-619.
- [6] P.M. Gudivok e V.P. Rudko. *On modular and integral representation algebras of finite groups*. Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973) 964-987.
- [7] A. Jones e G. Michler. *On the structure of the integral Green ring of a cyclic group of order p^2* . Proceedings 4ICRA. Springer LNM 1178 (1986) 98-108.
- [8] A. Jones e G. Michler. *The Jacobson radical of the integral Green ring of a cyclic group of order p^2* . J. London Math. Soc. (2) 32 (1985) 221-228.
- [9] I. Reiner. *The integral representation ring of a finite group*. Michigan Math. J. 12 (1965) 11-22.
- [10] V.P. Rudko. *Integral representation algebra of a cyclic group of order p^2* . Dopovidi Akad. Nauk Ukr. (1967) 35-39.

Universidade de São Paulo
 Instituto de Matemática e Estatística
 Caixa Postal 20.570 - Agência Iguatemi
 01.498 São Paulo-SP