

**TEOREMA 3.** Seja  $A$  uma álgebra de  $\Omega$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) a aplicação  $h \in \mathbb{R}^n \oplus \text{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow d_h \in \text{Der}(A)$  é um isomorfismo de álgebras de Lie;

(ii)  $A \in \Omega_0$  no caso  $m = 1, 2, 3$ ,  $A \in \Omega_0 \cup \{A(P): P \in H_1\}$  no caso  $m = 4$  e  $A \in \Omega_0 \cup \{A(P): P \in H_2\}$  no caso  $m = 5$ , onde

$$H_1 = \{(1, t_1, t_2, t_3, t_4) : t_1 = t_2, t_1 \neq t_3, t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0\},$$

$$H_2 = \{(1, t_1, \dots, t_5) : t_1 = t_2, t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0\} \cup \{(1, t_1, \dots, t_5) : t_1 \neq t_2, t_1 - 2t_3 + t_4 \neq 0, t_4 = 2t_1 - 3t_2 + 2t_3, t_1 - 4t_2 + t_3 - t_5 \neq 0\}.$$

Para  $m \geq 6$  e  $n$  arbitrário, pode-se demonstrar que se  $P = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ ,  $t_0 = t_{m-2} = 1$ ,  $t_1 = 1$  ( $t_1 = -1$ ) se  $m$  é par (ímpar, respectivamente) e  $t_k = 0$  ( $k \neq 0, 1, m-2$ ) então  $A(P) \notin \Omega_0$  e  $A(P)$  verifica a propriedade (1). — (8 de abril de 1986).

## OS OPERADORES VÉRTICE E A CONSTRUÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE LIE AFINS DE TIPOS $A^{(1)}$ , $D^{(1)}$ , $E^{(1)}$ —

LEILA MARIA VASCONCELLOS FIGUEIREDO, credenciada por IMRE SIMON — Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP — O objetivo deste trabalho é mostrar que se podem construir representações das álgebras de Lie afins de tipos  $A^{(1)}$ ,  $D^{(1)}$  e  $E^{(1)}$ , por meio dos “operadores vértice”, usando-se apenas as propriedades do automorfismo de Coxeter no reticulado de raízes de tipos  $A_\ell$ ,  $\ell \geq 1$ ,  $D_\ell$ ,  $\ell \geq 3$  e  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ .

Seja  $\Phi$  um sistema de raízes de tipo  $A_\ell$  ( $\ell \geq 1$ ),  $D_\ell$  ( $\ell \geq 3$ ) ou  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  num espaço euclidiano  $(E, \langle, \rangle)$ . Seja  $L$  o correspondente reticulado de raízes, isto é, o  $\mathbb{Z}$ -módulo livre em  $E$  gerado por  $\Phi$ . Então  $\langle \alpha, \alpha \rangle \in 2\mathbb{Z}$  para todo  $\alpha \in L$  e  $\Phi = \{\alpha \in L \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 2\}$ . Fixe uma base  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  de  $\Phi$  e considere o elemento de Coxeter  $v = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_\ell}$  do grupo de Weyl de  $\Phi$ , onde  $r_{\alpha_i}$  indica a reflexão com respeito à raiz  $\alpha_i$ , isto é,  $r_{\alpha_i}(x) = x - \langle x, \alpha_i \rangle \alpha_i \forall x \in E$ . O automorfismo  $v$  satisfaz propriedades interessantes: (Ver N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, ch VI, §1),  $v$  não tem pontos fixos, a ordem de  $v$  é igual a  $m$ , o número de Coxeter de  $\Phi$  (isto é, o comprimento da raiz mais longa + 1) e sob a ação do grupo gerado por  $v$  agindo em  $\Phi$ ,  $\Phi$  decompõe-se em  $\ell$  órbitas, cada uma de cardinalidade  $m$ . É claro que  $v$  é uma isometria. O automorfismo  $v$  também satisfaz à seguinte propriedade:

$$\sum \langle v^p \alpha_i, \beta \rangle = 0 \pmod{m} \quad \forall \alpha_i, \beta \in L$$

(a prova desta última propriedade é feita caso por caso).

Considere-se  $h = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  e estenda  $\langle, \rangle$  e  $v$  à  $h$  por linearidade. Seja  $\omega$  uma raiz  $m$ -ésima primitiva da unidade, e para  $p \in \mathbb{Z}_m$ , defina  $h_{(p)} = \{x \in h \mid v^p x = \omega^p x\}$  de tal modo

que  $h = \prod_{p \in \mathbb{Z}_m} h_{(p)}$ . Denote por  $\pi_p: h \rightarrow h_{(p)}$  a  $p$ -ésima

projeção e para  $x \in h$ , denote por  $x_{(p)} = \pi_p x$ ,  $p \in \mathbb{Z}_m$ . Forme a álgebra de Lie.

$$\tilde{h} = \prod_{p \in \mathbb{Z}_m} \tilde{h}_{(p)} \otimes t^j \otimes \mathbb{C} c \otimes \mathbb{C} d$$

(aqui identificamos  $h_{(j)} = h_{(j \bmod m)}$ ) com colchetes definidas por  $[c, \tilde{h}] = 0$   $[d, x \otimes t^j] = j x \otimes t^j$  ( $x \in h_{(j)}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ) e  $[x \otimes t^i, y \otimes t^j] = 1/m \langle x, y \rangle \delta_{i+j, 0} c$  ( $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in h_{(i)}$ ,  $y \in h_{(j)}$ ).

A subálgebra  $\hat{h}$  de  $\tilde{h}$ ,  $\hat{h} = \prod_{p \in \mathbb{Z}_m} h_{(p)} \otimes t^j \otimes \mathbb{C} c$  é uma álgebra de Heisenberg de dimensão infinita, isto é, seu centro é igual à sua subálgebra de comutadores que têm dimensão 1.

Se  $\hat{h}_- = \prod_{j < 0} h_{(j)} \otimes t^j$ , é um fato conhecido que  $\hat{h}$  tem uma representação natural irredutível em  $V = S(\hat{h}_-)$  ( $S(\cdot)$  denota a álgebra simétrica), onde  $c$  atua como a identidade,  $x \otimes t^i$ ,  $i > 0$  como “derivação” com respeito à variável  $x \otimes t^{-i}$  e  $x \otimes t^i$ ,  $i < 0$ , como multiplicação por  $x \otimes t^i$ . O elemento  $d$  define uma graduação em  $V = \prod_{i < 0} V_i$ , onde  $V_i = \{v \in V \mid d.v = iv\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Denote por  $x(i)$  o operador em  $V$  correspondente à  $x_{(i)} \otimes t^i$ ,  $x \in \hat{h}$ .

Seja  $\xi$  uma variável formal e considere o espaço vetorial

$$(\text{End } V) \{ \xi \} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} T_i \xi^i \mid T_i \in \text{End } V \right\}.$$

Para  $\alpha \in h$  defina os seguintes elementos de  $(\text{End } V) \{ \xi \}$

$$E^\pm(\alpha, \xi) = \exp\left(m \sum_{j > 0} \alpha(j) \xi^j / j\right).$$

Para  $\alpha \in h$ , definimos os operadores vértice

$$X(\alpha, \xi) = \frac{1}{m} E^-(-\alpha, \xi) E^+(-\alpha, \xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_\alpha(j) \xi^j.$$

Trabalhando em espaços vetoriais de séries formais como em (J. Lepowsky, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **82**, pp. 8295-8299, 1985), obtemos o cálculo dos colchetes dos operadores vértice. Neste cálculo são usadas apenas as propriedades do automorfismo  $v$  no reticulado  $L$ . As relações obtidas nos dão o seguinte resultado:

**TEOREMA:** O subespaço de  $\text{End } V$  gerado por

$$\{\alpha(n), (n \in \mathbb{Z}, \alpha \in h), x_\alpha(n), (\alpha \in \Phi, n \in \mathbb{Z}, 1, d)\}$$

é uma subálgebra de Lie de  $\text{End } V$ , que é uma álgebra de Lie afim de tipo  $A^{(1)}$  ou  $D^{(1)}$  ou  $E^{(1)}$ . — (8 de abril de 1986).

## STRUCTURE OF THE LEVEL ONE STANDARD MODULES FOR THE AFFINE LIE ALGEBRA $G_2^{(1)*}$ —

MARLY MANDIA, presented by IMRE SIMON — Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística,

\* This work was partially supported by the Universidade de São Paulo and by the Conselho Nacional de Pesquisas Científicas e Tecnológicas (CNPq).