OF5 – 6º Encontro RPM
29 e 30 de novembro/2013
UFMS

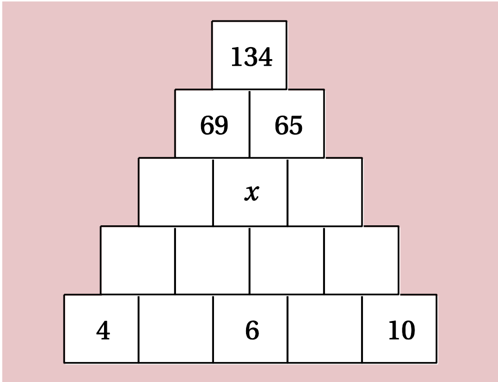
PROBLEMINHAS E PROBLEMÕES E ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

Profa. Dra. Ana Catarina P Hellmeister
IME – USP
Comitê Editorial RPM

I – Probleminhas

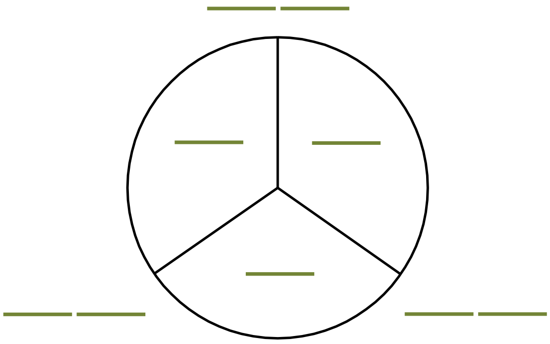
1.

Cada retângulo da figura deve ter um número dentro dele. A soma dos números de dois retângulos vizinhos numa mesma linha está no retângulo imediatamente acima deles. Qual é o número *x*?



2. face de dígitos

Preencha os espaços indicados com os dígitos de 1 a 9, sem repetição, de modo que o produto dos dois olhos seja igual ao número acima da cabeça e que o produto de cada olho e boca seja igual ao número do lado da respectiva face.



3. – que horas são?

Eu estou olhando para o meu relógio. A partir deste momento, o ponteiro das horas levará um tempo três vezes maior do que o ponteiro dos minutos para chegar no número 6. Que horas são?

II. NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

1. SUDOKU com números racionais

		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
			$0,1\overline{6}$	$33,\overline{3}\ \%$	
					1
$\frac{1}{4}$		0,50			
	$\frac{4}{3}-1$	$\frac{1}{6}$			
	$\frac{69}{20}-3,2$		$1,\overline{27}-\frac{31}{33}$	12,5%	

2. Verifique se os números abaixo são racionais ou irracionais:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5}.$$

3. Um método

Teorema: Considere a equação polinomial de coeficientes inteiros

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ \dots + c_2x^2 + c_1 x + c_0 = 0.$$

Se a fração irredutível $x = \dfrac{a}{b}$, a e b inteiros com b diferente de zero, é uma raiz da equação polinomial considerada, então

***a* é um divisor de c_0 e *b* é um divisor de c_n.**

Exemplos

1. $x^2 - 1 = 0$

As possíveis raízes racionais são: a/b com $a = \pm 1$ e $b = \pm 1$. Como ± 1 não são raízes, concluímos que a equação $x^2 - 1 = 0$ não tem raízes racionais. Logo $\sqrt{2}$ não é racional.

2. Usando a equação $x^3 - 2 = 0$ mostre que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

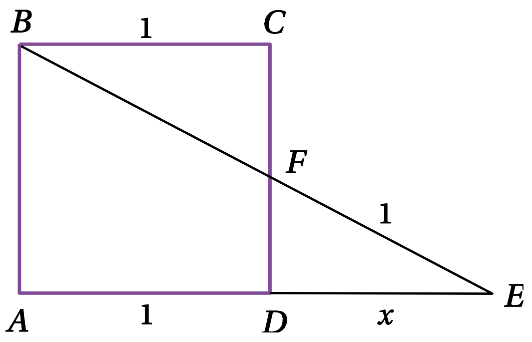
3. Mostre que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é irracional.

4. O número $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$ tem aparência de ser irracional, não é mesmo? No entanto, usando uma calculadora científica com 8 decimais, encontramos: $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = 2,7320508$ e $\sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = -0,7320508$. Logo, para a soma das duas parcelas, encontramos: 2,0000000. Será que esse número é realmente igual a 2 (nesse caso, ele não só seria racional, como até mesmo inteiro), ou será que foi só um problema da aproximação usada pela calculadora?

III. PROBLEMA E RESPOSTA DO "CÃO"

O problema

O lado AD, de medida 1, do quadrado $ABCD$ é prolongado, formando o segmento AE de modo que B, F e E sejam colineares. Se FE mede 1, obter a medida x do segmento DE.



Esse problema já foi alvo do interesse da RPM tempos atrás. Inicialmente ele apareceu na seção *Cartas do Leitor* da RPM 17 e lá são apresentadas várias diferentes soluções, usando fatoração ou substituição de variáveis, da equação

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

que é satisfeita pela medida x do segmento indicado na figura do enunciado do problema. Depois, na RPM 18, apresenta-se uma solução do mesmo problema sem cair na equação acima, usando semelhança de triângulos e funções trigonométricas.

Uma das soluções é obtida usando a fatoração

$$x^4+2x^3+x^2-2x-1=\left[x^2+(1+\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})\right]\left[x^2+(1-\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})\right]$$

A resposta obtida nessas soluções é

$$x=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2}$$

Recentemente, a RPM publicou o mesmo problema com solução que recai na equação, mas resolvendo-a de modo diferente dos apresentados anteriormente: Pela semelhança dos triângulos *EFD* e *EBA*, temos

$$\frac{FD}{1}=\frac{x}{x+1}.$$

Em *EBA*, pelo teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+x^2=1 \text{ ou } \left(\frac{1}{1/x+1}\right)^2+\left(\frac{1}{1/x}\right)^2=1.$$

Fazendo $1/x = y$ obtemos

$$\left(\frac{1}{y+1}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2=1.$$

Completando o quadrado:

$$\left(\frac{1}{y+1}\right)^2+\frac{2}{y(y+1)}+\left(\frac{1}{y}\right)^2=1+\frac{2}{y(y+1)},$$

o que leva a $(2y + 1)^2 = (y^2 + y + 2)(y^2 + y)$ ou $4(y^2 + y) + 1 = (y^2 + y + 2)(y^2 + y)$. Fazendo $y^2 + y = w$, temos $w^2 - 2w - 1 = 0$. Como $y > 0$, temos $w > 0$; logo, $w=\sqrt{2}+1.$ Então

$$y^2+y-(\sqrt{2}+1)=0 \text{ ou } y=\frac{\sqrt{5+4\sqrt{2}}-1}{2}.$$

Portanto, $$x=\frac{1}{y}=\frac{2}{\sqrt{5+4\sqrt{2}}-1}=\frac{(\sqrt{5+4\sqrt{2}}+1)(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

E, agora,

$$\frac{(\sqrt{5+4\sqrt{2}}+1)(\sqrt{2}-1)}{2}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2}?$$

IV. CENTAVOS NO BOLSO, IDADES E ANIVERSÁRIOS

Peça ao seu amigo para contar a quantia menor do que 1 real que ele tem no bolso. Diga-lhe que você pode adivinhar quanto ele tem em centavos, determinando, além disso, a idade dele, contanto que ele lhe mostre a resposta final depois de fazer algumas contas às suas ordens:

1. Multiplicar a própria idade por 4.
2. Adicionar 10.
3. Multiplicar o resultado obtido por 25.
4. Subtrair 365 do resultado.
5. Adicionar o trocado menor que um real que ele tem no bolso.
6. Adicionar 115.

Quando seu amigo disser a resposta, imediatamente você lhe dirá a sua idade juntamente com a quantidade de centavos que ele possui. Os dois primeiros algarismos na resposta formam a idade, e os dois últimos correspondem ao trocado, em centavos.

Explique com linguagem algébrica o que faz a “mágica” dar certo.

Depois de adivinhar a idade do seu amigo, você pode aproveitar para comer um bolo na casa dele descobrindo o dia e o mês do seu aniversário.

Peça ao seu amigo para efetuar os seguintes cálculos:

Multiplicar o numero do mês do aniversário por 5

Adicionar 7

Multiplicar por 4

Adicionar 13

Multiplicar por 5

Adicionar o dia de seu aniversário

Quando seu amigo lhe der a resposta, você deve subtrair 205 e obterá um número de 4 algarismos (podendo o primeiro ser igual a zero). Os dois primeiros algarismos representam o mês e os dois últimos o dia do aniversário.

Explique com linguagem algébrica o que faz a “mágica” dar certo