

Série Arquimedes

Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações
DINCON 2003

II DLR/CTA Workshop on Data Analysis and Flight Control

18. a 22 de agosto de 2003 - ITA, São José dos Campos - SP

Organização



INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Coordenação Editorial: José Manoel Balthazar, Luiz Carlos Sandoval Góes e José Demílio Simões da Silva

Editora: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada - SBMAC

Co-Editora: FAPESP / ITA

Formato: CDROM

Patrocínio: ITA / CAPES

Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações e

DLR/CTA Workshop on Data Analysis and Flight Control(2.2003: São José dos Campos - SP - Brasil)

Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações e

II DLR/CTA Workshop on Data Analysis and Flight Control - São José dos Campos : SBMAC, 2003

3148 p.; (SÉRIE ARQUIMEDES 2)

ISBN:

ISBN: 85-86883-15-8

CDU - 531.124

1. Dinâmica. 2. Teoria do controle. 3. Teoria do controle não-linear.

4. Sistemas de parâmetros distribuídos

I. Balthazar, José Manoel. II Boaventura, Maurílio. III. Silva, Geraldo Nunes

IV. Tsuchida, Masayoshi. V. Góes, Luiz Carlos Sandoval. VI. Silva, José Demílio Simões



Série Arquimedes, Volume 2, Anais do DINCON 2003
2º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC).
São José dos Campos, SP, Brasil, 18-22 Agosto de 2003, ISBN:
Editores: J. M. Balthazar, G. N. da Silva, M. Tsuchida,
M. Boaventura, L. S. Goes e J. D. S. Silva.

ANÁLISE DA DINÂMICA CAÓTICA DE UM PÊNDULO COM EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA DO SUPORTE

V. S. Andrade / vandrade@sel.eesc.sc.usp.br
Depto. de Engenharia Elétrica, USP, São Carlos, SP

N. J. Peruzzi / piru@saoluis.br
Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga,
FATEC-Tq, SP

V. A. Oliveira / vilmao@sel.eesc.sc.usp.br
Depto. de Engenharia Elétrica, USP São Carlos, SP

J. M. Balthazar/ jmbaltha@rc.unesp.br
Instituto de Geociências e Ciências Exatas,
UNESP, Rio Claro, SP

A 553.a

RESUMO

Neste trabalho obtém-se a equação de um sistema pendular com excitação paramétrica vertical do suporte e analisa-se a sua estabilidade a partir da variação da amplitude de excitação. Apresentam-se resultados de simulação para diferentes faixas de valores da amplitude de excitação externa. As técnicas utilizadas para a análise de estabilidade são o histórico no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré, expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e mapa de estabilidade via multiplicadores de Floquet.

PALAVRAS CHAVES

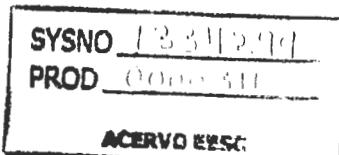
Pêndulo, equação de Lagrange, bifurcações, multiplicadores de Floquet, mapa e seção de Poincaré, expoentes de Lyapunov, caos.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, sabe-se que as duas características principais dos sistemas caóticos são a dependência sensitiva às condições iniciais e o confinamento das soluções do sistema a uma região do espaço de fase. Anteriormente, as instabilidades que apareciam em sistemas dinâmicos eram consideradas como sendo obra do acaso ou fruto de ruídos externos que não podiam ser evitados, e seu estudo só era realizado após várias hipóteses simplificadoras, de forma a eliminar a instabilidade [1]-[4]. Com o atual desenvolvimento da informática, pode-se trabalhar com sistemas sem tantas simplificações, tornando os modelos descritos por equações diferenciais mais próximos dos sistemas reais. A utilização de equações diferenciais para modelar

1334299
021003

1



sistemas físicos foi descrita por Sir Isaac Newton para estudar o movimento de sistemas. Ressalta-se que a determinação do movimento resultante do sistema está ligada à solução da equação diferencial associada ao modelo do sistema. A obtenção das equações do movimento e a análise de estabilidade em sistemas dinâmicos são questões fundamentais em problemas atuais de engenharia para verificar a ocorrência de possíveis comportamentos não-lineares e/ou caóticos.

Neste trabalho analisa-se a estabilidade de um pêndulo com excitação paramétrica vertical do suporte. Para a obtenção das equações do movimento utiliza-se a equação de Lagrange [5], [6] e as energias cinéticas e potenciais do sistema. Resultados de simulação são apresentados para a análise de estabilidade.

2. EQUAÇÕES DO SISTEMA DINÂMICO ANALISADO

O sistema analisado é um pêndulo com excitação paramétrica vertical do suporte, sendo θ o deslocamento angular parametricamente excitado na direção vertical e u a excitação do suporte [7], [8], conforme ilustrado na Fig.1.

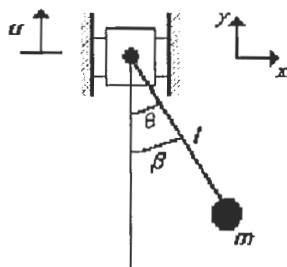


Figura 1 - Representação esquemática de um sistema pendular com excitação paramétrica vertical do suporte com um amortecimento β .

2.1 Lagrangeano do Sistema

O Lagrangeano do sistema é normalmente empregado para descrever as equações de movimento através da energia cinética e potencial do sistema utilizando as leis de Newton.

A energia cinética e potencial total do sistema representado pela Fig.1 é dada por

$$T = T_x + T_y, \quad V = V_x + V_y \quad (1)$$

onde T_x é a energia cinética em relação a coordenada x , T_y é a energia cinética em relação a coordenada y , V_x é a energia potencial em relação a coordenada x e V_y é a energia potencial em relação a coordenada y .

Para a posição do pêndulo em relação as coordenada x e y tem-se as seguintes expressões

$$x = l \sin(\theta), y = u - l \cos(\theta). \quad (2)$$

As energias cinéticas em relação a ambas as coordenadas são dadas por

$$T_x = \frac{1}{2} m(l\dot{\theta} \cos(\theta))^2, T_y = \frac{1}{2} m(\dot{u} + l\dot{\theta} \sin(\theta))^2. \quad (3)$$

A energia potencial do sistema representado pela Fig.1 é dada por

$$V_x = mg[l(1-\cos(\theta))], V_y = mgu. \quad (4)$$

A função Lagrangeana dada por $L = T - V$ é obtida utilizando (3) e (4) com

$$L = \frac{1}{2} m(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{u}l\dot{\theta} \sin(\theta) + \dot{u}^2) - (mg[l(1-\cos(\theta)) + u]). \quad (6)$$

Considerando o suporte parametricamente excitado com $u = A \cos(\omega t)$, sendo A a amplitude de excitação e ω a freqüência, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -A\omega \sin(\omega t) \\ \ddot{u} &= -A\omega^2 \cos(\omega t).\end{aligned}$$

A equação de Lagrange em relação ao deslocamento angular θ é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\beta\dot{\theta}. \quad (7)$$

Assim, substituindo (6) em (7) tem-se

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (1 + p \cos(\omega t)) \sin(\theta) = 0 \quad (8)$$

onde a amplitude de excitação é dada por $p = \frac{-A\omega^2}{l}$.

Considerando (8) na forma espaço de estado e definindo as variáveis de estado como $\theta = x_1$, $\dot{\theta} = x_2$ e $t = x_3$ tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_2 - (1 + p \cos(\omega x_3)) \sin(x_1) \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned} \quad (9)$$

3. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

A análise da estabilidade do sistema pendular (9) é feita a partir da variação da amplitude de excitação externa. Verifica-se a faixa de valores da amplitude de excitação externa que o sistema perde estabilidade e alcança um regime caótico. Os gráficos a serem analisados são o histórico no tempo, plano de fase, mapa de Poincaré, expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação e a construção do diagrama de estabilidade através dos multiplicadores de Floquet.

O histórico no tempo, plano de fase e mapa de Poincaré para $p = 0.1$ são apresentados abaixo na Fig.2.

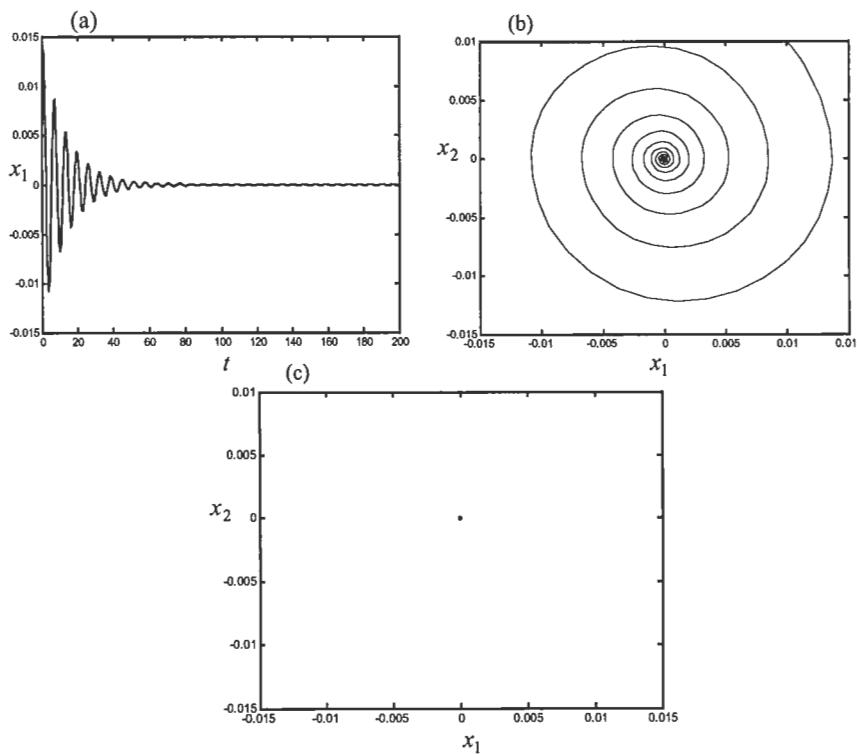


Figura 2 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.

Observa-se que o sistema converge para zero, o que pode caracterizar uma estabilidade. O valor dos expoentes de Lyapunov são $\lambda_1 = -0.0712$, $\lambda_2 = -0.0723$ e $\lambda_3 = 0$. Concui-se então que o sistema está com um comportamento estável, pois os expoentes de Lyapunov são todos negativos.

Verifica-se a seguir o comportamento da solução do sistema (9) quando o valor da amplitude de excitação é $p = 0.3$ como mostrado na Fig.3.

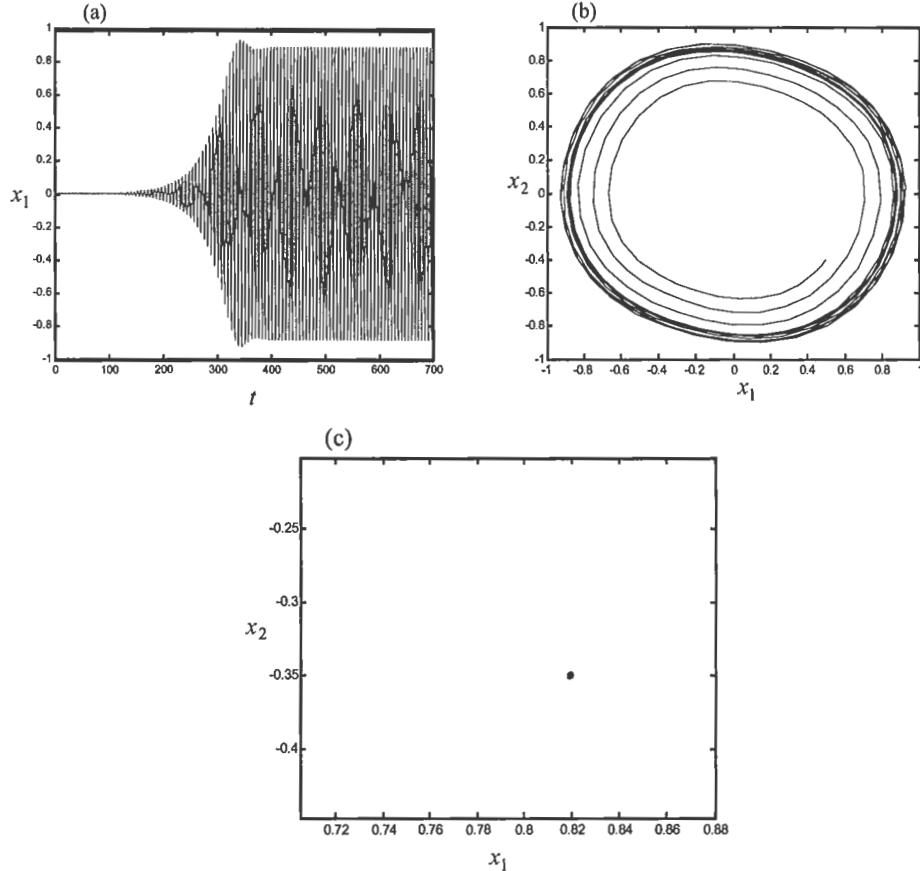


Figura 3 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.

Para o parâmetro $p = 0.3$, observa-se na Fig.3 que o sistema não oscila em torno do zero. Ocorreu um ciclo limite no plano de fase o que corresponde a um atrator de ponto fixo no mapa de Poincaré. O valor dos expoentes de Lyapunov são $\lambda_1 = -0.0721$, $\lambda_2 = -0.0715$ e $\lambda_3 = 0$. Conclui-se então que o sistema ainda está com um comportamento estável, pois os expoentes de Lyapunov são todos negativos.

Finalmente, observa-se a solução do sistema quando o valor da amplitude de excitação é $p = 1$, como mostrado na Fig.4 abaixo.

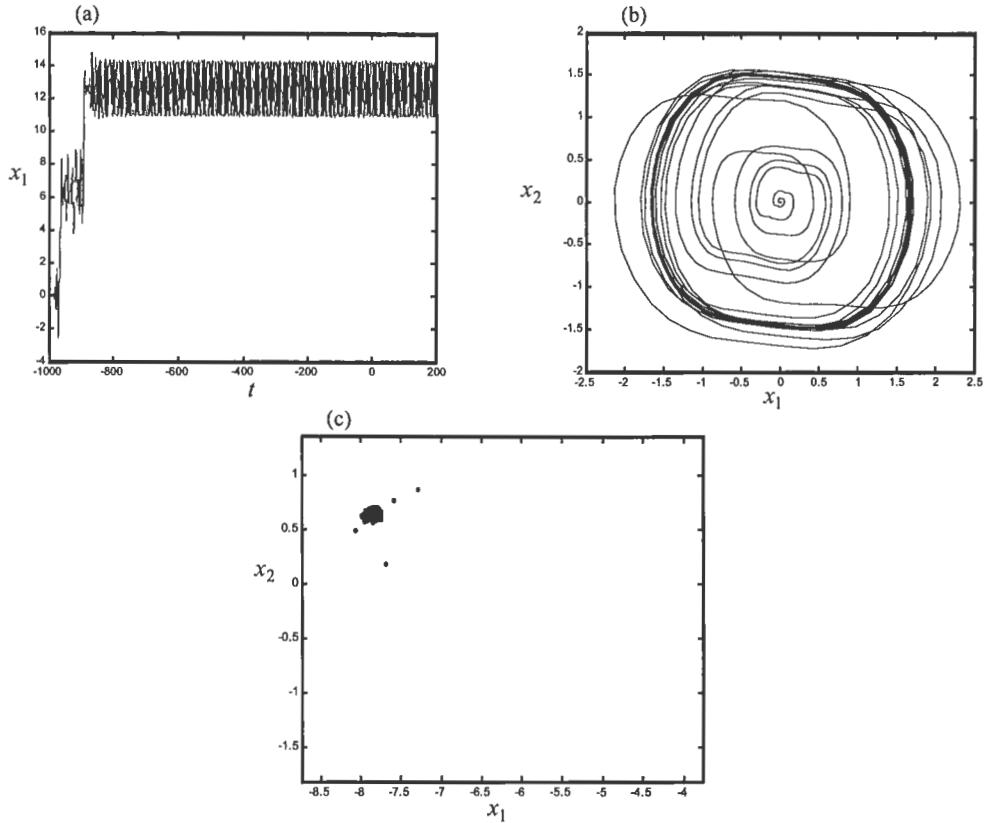


Figura 4 - (a) Histórico no tempo. (b) Plano de fase. (c) Mapa de Poincaré.

Observa-se que o atrator obtido no mapa de Poincaré teve um aumento no número de pontos, não podendo afirmar que o sistema está em um regime caótico. Para verificar a presença de caos, calculou-se os expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov obtidos foram $\lambda_1 = +0.8641$, $\lambda_2 = -1.0085$ e $\lambda_3 = 0$, pode-se então concluir que o sistema apresenta com um comportamento caótico, pois foi encontrado um expoente de Lyapunov positivo.

Com o objetivo de observar a perda de estabilidade estrutural de (9), constrói-se o diagrama de bifurcação como mostrado na Fig.5 abaixo.

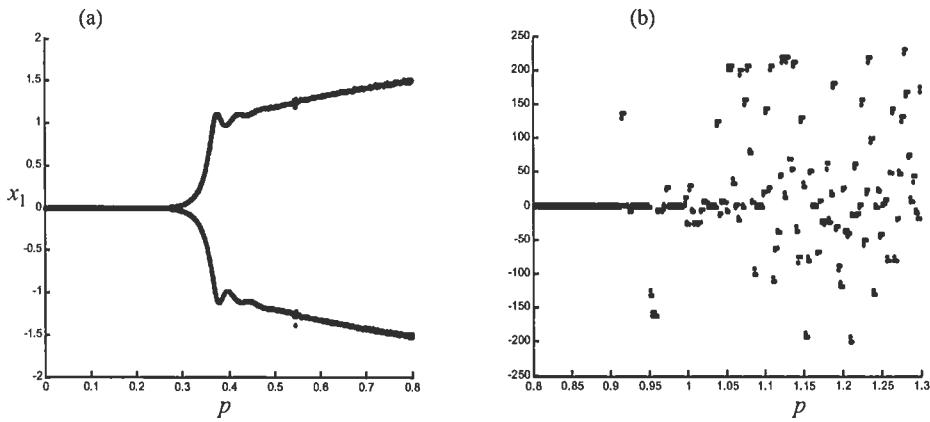


Figura 5 - Diagrama de bifurcação para diferentes intervalos de p . (a) $p = 0$ até $p = 0.8$. (b) $p = 0.8$ até $p = 1.3$.

No diagrama da Fig.5(a) observa-se que entre os valores $p = [0.2;0.3]$ ocorre uma bifurcação, originando dois novos braços de soluções estáveis. Já no diagrama da Fig.5(b), observa-se uma nuvem de pontos, caracterizando um comportamento caótico.

Para saber o tipo de bifurcação que ocorre no sistema deve-se analisar como os multiplicadores de Floquet deixam o círculo raio unitário, dessa forma, constrói-se o diagrama de estabilidade da Fig.6 como segue.

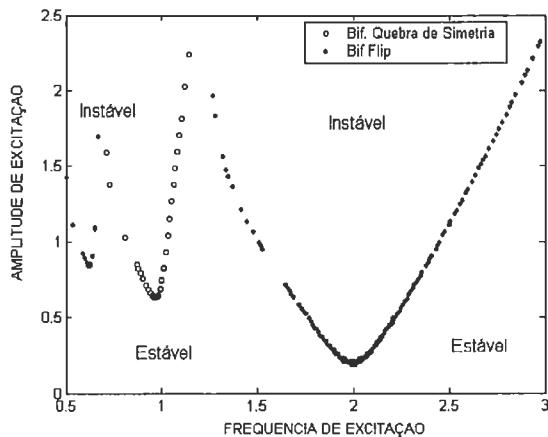


Figura 6 - Diagrama de estabilidade para $0 < p < 2.5$ e $0.5 < \omega < 3$.

Neste diagrama existem regiões que determinam para que parâmetros o sistema deixa de ser estável e passa a ser instável, pode-se observar também os pontos de bifurcações e os tipos de bifurcações presentes no sistema, sendo bifurcações do tipo duplicação de período (*flip*) e quebra de simetria.

Analizando o intervalo $0 < p < 2.5$ observa-se que, para o parâmetro $\omega = 2$, o ponto de bifurcação inicia em $p = 0.2012$ e o tipo de bifurcação presente no sistema é do tipo duplicação de período (*flip*), pois os valores dos multiplicadores de Floquet obtidos são $\alpha_3 = -0.72978$ e $\alpha_4 = -1.00084$.

4. CONCLUSÕES

Os resultados de análise de estabilidade obtidos na literatura foram reproduzidos via simulação computacional e este mostraram que aumentando o valor da amplitude de excitação externa o sistema perde estabilidade até entrar em um regime caótico. Neste trabalho acrescentou-se aos resultados existentes, a análise do pêndulo via expoentes de Lyapunov e diagrama de estabilidade construído a partir dos multiplicadores de Floquet.

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Nayefh, A.H., Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*, Wiley, 1995.
- [2] Argyris, J., Faust, G., Haase, M., *An Exploration of Chaos*, North-Holland, 1994.
- [3] Guckenheimer, J., Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [4] Ferrara, N.F., Prado, C.P.C., *Caos uma Introdução*, Edgard Blucher, 1995.
- [5] Symon, K.R., *Mecânica*, Editora Campus Ltda., 1982.
- [6] Leech, J.W., *Mecânica Analítica*, Livro Técnico S.A. e Editora da Universidade de São Paulo, 1971.
- [7] Bishop, S.R., Xu, D., Stabilizing the Parametric Excited Pendulum Onto High Order Periodic Orbits, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, pg. 287-293.
- [8] Bishop, S.R., Clifford, M.J., Zones of Chaotic Behavior in the Parametrically excited pendulum, *Journal of Sound and Vibration*, vol.189, pg. 142-147, 1996.