

A construção de uma função contínua não derivável em nenhum ponto

Fábio Skilnik

Prof^ª Carmen Sílvia Cardassi

1 Introdução

Tomando a função $f(x) = |x|$ nos reais, é fácil provar que f é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}$, mas tem derivada em um ponto a se, e só se, $a \neq 0$.

Com algumas combinações algébricas, é fácil construir funções contínuas que não têm derivada em um número finito ou enumerável de pontos; porém, em 1872, **K. Weierstrass** assombrou o mundo matemático da época fornecendo um exemplo de uma função contínua em todo ponto, mas que não possuía derivada em *nenhum*. De fato, a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$$

tem tal propriedade.

Note que *Weierstrass* estabeleceu a existência de tais funções, porém não é fácil visualizar ou imaginar qual é o “aspecto” do gráfico da f , nem ter uma “noção intuitiva” do porquê ela tem tal comportamento. O nosso objetivo é, então, construir uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não derivável em nenhum ponto, de maneira que o leitor possa obter uma idéia intuitiva de seu gráfico.

2 Construção

Sejam $X = [0, 1]^2$ o quadrado unitário fechado em $\mathbb{R}^2$ munido da métrica euclidiana usual $\left(d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)$ e $w_i : X \rightarrow X$ ($i = 1, 2, 3$) aplicações dadas por:

$$w_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{2y}{3} \right) \quad ; \quad w_2(x, y) = \left(\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3} \right) \quad ; \quad w_3(x, y) = \left(\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3} \right)$$

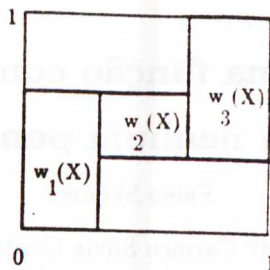


Figura 1

Podemos mostrar que, para $i = 1, 2, 3$, existe uma constante real k , $0 < k < 1$, tal que $\forall x, y \in X$ tem-se $d(w_i(x), w_i(y)) \leq k.d(x, y)$.

Assim sendo, w_1, w_2, w_3 são *contrações* no espaço métrico (X, d) . Lembrando o clássico *teorema de Banach sobre pontos fixos de contrações*:

“Sendo (X, d) um espaço métrico **completo**, toda contração $f : X \rightarrow X$ possui um único ponto fixo em X ”

temos que w_i ($i = 1, 2, 3$) tem ponto fixo no quadrado fechado $[0, 1]^2$ (pois X é fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, portanto *compacto* e, sendo espaço métrico compacto, é *completo*).

Por simples inspeção note que

- w_1 contrai X para $w_1(X)$ com ponto fixo $(0, 0)$;
- w_2 contrai X para $w_2(X)$ com ponto fixo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
- w_3 contrai X para $w_3(X)$ com ponto fixo $(1, 1)$.

Definiremos $\mathcal{D}_0 = \{(x, x) \in X\}$ a diagonal de X e $w^1(X) = w_1(X) \cup w_2(X) \cup w_3(X)$.

Aplicando as contrações em cada uma das três regiões (retângulos) de $w^1(X)$ obtem-se $w^2(X)$ (com 3^2 retângulos) e, indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ teremos $w^n(X)$ composto por 3^n retângulos.

Também obtemos indutivamente

$$\mathcal{D}_n = w(\mathcal{D}_{n-1}) = w_1(\mathcal{D}_{n-1}) \cup w_2(\mathcal{D}_{n-1}) \cup w_3(\mathcal{D}_{n-1}) .$$

Como $\mathcal{D}_n$ é o gráfico de uma função contínua no intervalo $[0, 1]$ em si mesmo, vamos chamá-la de f_n . Pode-se mostrar que f_n tem exatamente $3^n - 1$ pontos de não-derivabilidade (“bicos”). Além disso, para quaisquer m, n naturais, $m \geq n$, todos os pontos da f_n que não têm derivada também estarão presentes na f_m , *permanecendo* pontos de não-derivabilidade nas próximas iterações (veja figura a seguir).

Construímos, assim, uma sequência $\{f_n\}$ de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínuas e com um número de pontos de não-derivabilidade que vai progressivamente aumentando ($\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 1) = \infty$).

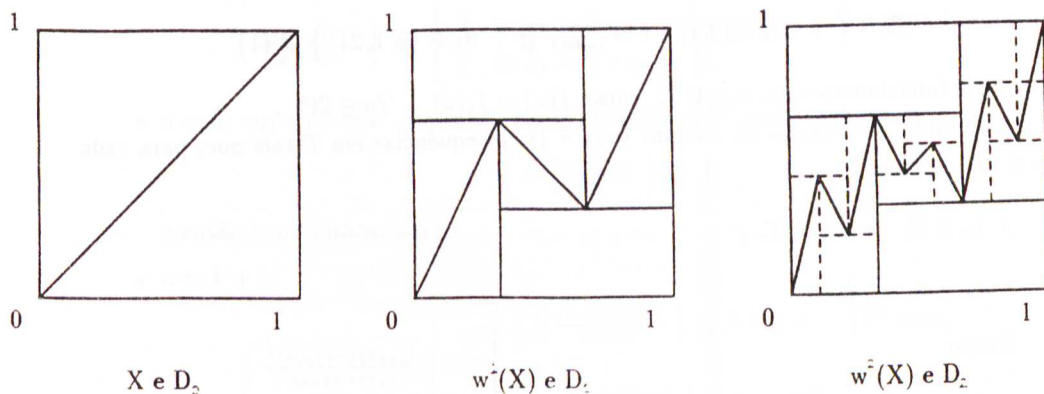


Figura 2

Note que, $\forall m \geq n$ vem:

1. $\mathcal{D}_m \subseteq w^n(X)$ (a diagonal de índice m sempre está contida em uma região de índice menor) pois $\mathcal{D}_m \subseteq w^m(X) \subseteq w^n(X)$;
2. $w^n(X)$ é a reunião de 3^n retângulos de alturas de, no máximo, $(\frac{2}{3})^n$. Então:

$$\sup\{|f_m(t) - f_n(t)| : t \in [0, 1]\} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Portanto dado $\epsilon > 0$, $\exists n^* \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n \geq n^*$ teremos

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon; \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$(\text{bastando tomar } n^* \text{ tal que } (\frac{2}{3})^{n^*} < \epsilon; \text{ i.e. } n^* > \frac{\log \epsilon}{\log 2 - \log 3})$$

Este último resultado nos permite afirmar que $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy na métrica uniforme ($d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$) e portanto $\{f_n\}$ é uniformemente convergente. Como o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é contínua, então

$$f \stackrel{u}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{é contínua no } [0, 1]$$

e é, portanto, a função que procuramos. Para isto basta agora provar que tal f não tem derivada em nenhum ponto.

3 A função f não é derivável em nenhum ponto

Seja T_n o conjunto de todos os racionais de $[0, 1]$ escritos na forma ternária com, no máximo, n dígitos. Isto é, para cada n natural não-nulo.

$$T_n = \left\{ r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : r = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} ; a_k \in \{0, 1, 2\} \right\} \cup \{1\} .$$

Note inicialmente que, se $x \in T_n$ então $f(x) = f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Definindo $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n$, sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ seqüências em T tais que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

- $x_n \in T_n$ e $y_n \in T_n$;
- $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$.

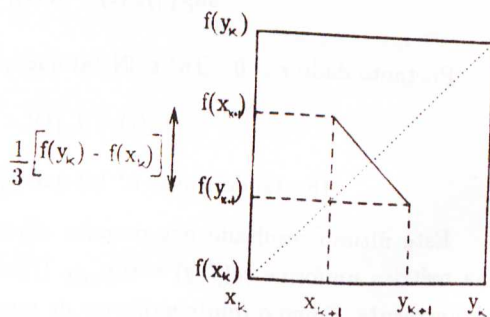
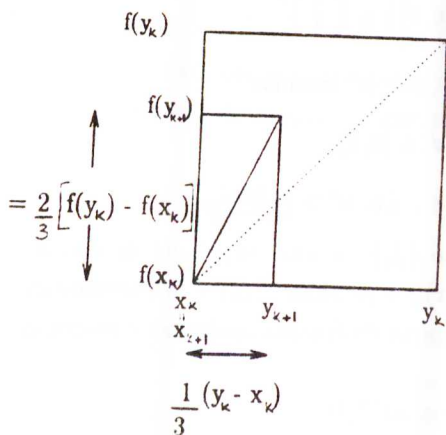
Então:

1. Caso $x_n = x_{n+1}$ ou $y_n = y_{n+1}$ teremos (vide figura 3):

$$\frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}} = \frac{\frac{2}{3}[f(y_n) - f(x_n)]}{\frac{1}{3}(y_n - x_n)} = 2 \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

2. Caso $x_{n+1} > x_n$ e $y_{n+1} < y_n$ teremos (vide figura 4):

$$\frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}} = \frac{-\frac{1}{3}[f(y_n) - f(x_n)]}{\frac{1}{3}(y_n - x_n)} = - \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$



Figuras 3 e 4

3. Tanto no 1º quanto no 2º caso temos que:

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \right| \geq 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

que pode ser provado por indução, como se segue:

• $n = 1$:

$$\left| \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} \right| = \begin{cases} 2 & \text{se } x_1 = 0 \text{ e } y_1 = \frac{1}{3} \text{ ou se } x_1 = \frac{2}{3} \text{ e } y_1 = 1 . \\ 1 & \text{se } x_1 = \frac{1}{3} \text{ e } y_1 = \frac{2}{3} . \end{cases}$$

• $n = k$: supunhamos que tanto no 1º quanto no 2º caso tenhamos

$$\left| \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} \right| \geq 1$$

e então concluímos, para

• $n = k + 1$:

$$\left| \frac{f(y_{k+1}) - f(x_{k+1})}{y_{k+1} - x_{k+1}} \right| = \begin{cases} \left| 2 \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} \right| \geq 2 \cdot 1 \geq 1 & (1^\circ \text{ caso}). \\ \left| - \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} \right| \geq 1 & (2^\circ \text{ caso}). \end{cases}$$

Teorema 3.1 A função f não é derivável em nenhum ponto.

Dem.: Seja $t \in [0, 1]$.

• 1º Caso: $t \in T_j$ para algum $j \in \mathbb{N}^*$ (i.e, $t = \frac{p}{3^j}$ para algum $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 3^j$) e portanto $t \in T_k$ para $k \geq j$.

Neste caso definimos a sequência $\{x_n\}$ eventualmente constante, com $x_n = t$ para todo $n \geq j$ e a sequência $\{y_n\}$ com $y_{n+1} = t + \frac{1}{3^n}$ ($n \geq j$) . Supondo por absurdo que f seja derivável em t sabemos que:

$$f'(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_{j+k}) - f(x_{j+k})}{y_{j+k} - x_{j+k}} \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Pelas observações precedentes teremos:

$$\frac{f(y_{j+k}) - f(x_{j+k})}{y_{j+k} - x_{j+k}} = 2 \frac{f(y_{j+k-1}) - f(x_{j+k-1})}{y_{j+k-1} - x_{j+k-1}} = \dots = 2^k \frac{f(y_j) - f(x_j)}{y_j - x_j}$$

e como $\frac{f(y_j) - f(x_j)}{y_j - x_j} \neq 0$, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} = \infty \quad ;$$

o que contradiz (1) e, portanto, f não é derivável em t .

□

- 2º Caso: $t \notin T_j$, para qualquer $j \in \mathbb{N}^*$.

Neste caso, construímos uma sequência $\{x_n\}$ crescente convergindo para t e $\{y_n\}$ decrescente também convergindo para t tal que $x_{n+1} > x_n$ e $y_{n+1} < y_n$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}^*$; $x_n \in T_n$, $y_n \in T_n$ e tais que $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$.

Assim, supondo por absurdo que f seja derivável em t ,

$$f'(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})}{y_{n_k} - x_{n_k}} \in \mathbb{R},$$

onde n_k indica os índices $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $x_{n+1} > x_n$ e $y_{n+1} < y_n$.

Pelas observações anteriores temos que:

$$\frac{f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})}{y_{n_k} - x_{n_k}} = - \frac{f(y_{n_{k-1}}) - f(x_{n_{k-1}})}{y_{n_{k-1}} - x_{n_{k-1}}}$$

e portanto teremos

$$f'(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})}{y_{n_k} - x_{n_k}} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_{n_{k-1}}) - f(x_{n_{k-1}})}{y_{n_{k-1}} - x_{n_{k-1}}} = 0 = -f'(t)$$

o que permite concluir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})}{y_{n_k} - x_{n_k}} = 0.$$

Assim sendo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})}{y_{n_k} - x_{n_k}} \right| = 0,$$

o que vem a contradizer o fato de que

$$\left| \frac{f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})}{y_{n_k} - x_{n_k}} \right| \geq 1; \quad \forall k.$$

Logo f não é derivável em t .

□

Referência

- [1]. Katsuura, H., Continuous nowhere-differentiable functions - an application of contraction mappings, *Amer. Math. Monthly*, Maio 1991.